

С. 525-528. 3. Вернидуб Р. М. Радіаційні дефекти у фосфіді галію та фосфіді індію і вплив ультразвуку на їхні властивості: Дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.04.10. – Луцьк, 1996. – 223 с. 4. Акульник В.Г., Дякин В.В., Лысенко В.Н., Родионов В.Е. Влияние ультразвука на фотоэлектрические характеристики тонкопленочных электролюмине-сцентных структур // ЖТФ. – Т. 59, вып. 10, 1989. – С. 156-158. 5. Здебский А.П., Остапенко С.С., Савчук А. И., Шейнкман М.К. Стимулированное ультразвуковыми колебаниями преобразование люминесцентных и акустических характеристик монокристаллов CdS // Письма в ЖТФ. – Т. 10 вып. 20, 1984. – С. 1243-1247. 6. Островский И.В. Собственно-дефектный механизм акустолюминесценции кристаллов // Письма в ЖЭТФ. – Т. 34, вып. 8, 1981. – С. 462-466. 7.

Островский И.В., Коротченков О.А. Механизмы акустолюминесценции твердых тел // ФТТ. – Т. 25, вып.10, 1983. – С. 2936-2940. 8. Островский И.В., Коротченков О.А. Акустофотопроводимость кристаллов ZnS // ФТТ. – Т. 25, вып.1, 1983. – С. 259-261. 9. Громашевский В.Л., Дякин В.В., Сальков Е.А. и др. Акустохимические реакции в сульфиде кадмия // УФЖ. – Т. 29, № 4, 1984. – С. 550-554. 10. Островский И.В. Акустолюминесценция и дефекты кристаллов. – К.: Вища школа, 1993. – 224 с. 11. Watson G.N. Theory of Bessel Functions.- Cambridg: Univ. Press. – 1966. – P. 120. 12. Гончарук О.М., Кудін А.П., Куц В.І., та ін. Особливості деградації електролюмінесцентного випромінювання фосфіді галію, спричиненої ультразвуком // УФЖ. – Т. 42, № 10, 1997. – С. 1267-1270

УДК 622.691.4.002.5

РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ВЗАЄМОДІЇ АКУСТИЧНОГО ПОЛЯ ІЗ ТРІЩИНОЮ В ПРУЖНОМУ МЕТАЛІЧНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

© Лютак І. З., 2006

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

Запропонована математична модель обчислення структури акустичного поля відбитого від країв тріщини в металі. Проведено моделювання отриманих теоретичних досліджень

Постійний розвиток транспортної та машинобудівної галузей, які інтенсивно використовують для своєї мети металічні конструкції, ставлять нові вимоги до якості обладнання. Існуючі методи неруйнівного контролю (НК) з метою виявлення дефектів не забезпечують високу надійність та продуктивність роботи у експлуатаційних умовах. Швидкість проведення НК, надійність та повнота отриманих результатів щодо виявлення таких дефектів, як тріщини, каверни, розшарування мають важливе значення. Тому актуальною залишається задача розробки нового методу НК.

Для цього потрібно розробити математичну модель, щоб описувала взаємодію акустичного поля з тріщиною, за допомогою якої можна оцінити форму та розміри дефектів.

При взаємодії акустичної хвилі в пружному середовищі із тріщиною хвильове поле розділюється на поле падаючої хвилі u_i , та відбитої хвилі u_r , де $i = 1, 2, 3$ – індекс напрямків координатних осей. Як

результат взаємодії акустичних коливань з тріщиною остання стає джерелом випромінювання.

Для оцінки такої взаємодії акустичного поля скористаємось таким рівнянням руху елементарного об'єму пружного середовища [1]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (1)$$

де σ_{ij} – компоненти напружень; x_j – координатні осі декартової системи координат; ρ – густина пружного середовища; F_i – вектор сил; t – час, $u_i = u_i + u_r$; $j = 1, 2, 3$ – індекс напрямків координатних осей.

Недоліком (1) є відсутність розділення змінних, які б окремо описували акустичне поле в часі та просторі. Розділення змінних дає можливість більш детального фізичного пояснення процесів, що мають місце в пружному середовищі в околі країв тріщини при взаємодії із акустичними хвилями.

Для того, щоб математично описати взаємодію країв тріщини (переміщення їх окремо в часі та просторовому положенні) по відношенню до збурюючих зусиль акустичними хвилями, можна

скористатись інтегралом збереження лінійної еластодинаміки J_k^D [2]:

$$J_k^D = \int_S \left[\frac{1}{2} \left(\sigma_{ij} * \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} * u_i \right) \delta_{jk} - \sigma_{ij} * \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k} \right] nor_j dS - \int_V \rho F_i * \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k} dV = 0, \quad (2)$$

де S, V – відповідно площа і об'єм тріщини, що розглядається; $\delta_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}$ – символ Кронекера;

nor_j – одиничний вектор, що направлений нормально до ділянки площини dS ; знак "*" вказує на операцію тензорного множення; $k = 1, 2, 3$ – індекс напрямків координатних осей. Інтеграл J_k^D використаємо для

$$E_{pqkl} nor_q \left(\zeta_{rgh} \zeta_{rlj} \int_S \sigma_{ijk}^A * \frac{\partial (\Delta u_{ih}(y_h, t))}{\partial y_h} nor_g(y_h) dS + \rho \int_S u_{ik}^A * \frac{\partial^2 (\Delta u_i(y_i, t))}{\partial t^2} nor_i(y_i) dS \right) = ter_p(x_p), \quad (3)$$

де $E_{pqkl} = \lambda \delta_{pq} \delta_{kl} + \mu (\delta_{pk} \delta_{ql} + \delta_{pl} \delta_{qk})$ – тензор модуля пружності першого порядку; λ, μ – константи Ляме;

$$\zeta_{rst} = \begin{cases} 0, & \rightarrow r = s, s = t, r = t \\ 1, & \rightarrow (r, s, t) \in (1, 2, 3) \vee (2, 3, 1) \vee (3, 1, 2) \\ -1, & \rightarrow (r, s, t) \in (1, 3, 2) \vee (3, 2, 1) \vee (2, 1, 3) \end{cases}$$

символ Леві-Чівіті, де індекси біля двох компонентів энзора переміщень вказують на їх різні значення, $\sigma_{ijk}^A, u_{ikl}^A$ – гармонійні функції Гріна;

$\Delta u_i(y_i, t) = u_i(y_{i+}, t) - u_i(y_{i-}, t)$ – відстань між протилежними краями тріщини у час t ; x_p – точка спостереження; y_h – точка джерела акустичної хвилі; ter_p – тензор тертя країв тріщини; $p, q, l, r, g, h = 1, 2, 3$ – індекс напрямків координатних осей.

В (3) на відміну від (2) немає доданку із інтегралом по об'єму V , а вирази, що описують зміщення країв тріщини в часі та просторі, розділені повністю і складаються із окремих доданків (перший описує зміщення країв тріщини в просторі, а другий – в часі).

Для подальшого аналізу виразу (3) потрібно визначити початкові умови. Очевидно, що на початку розгляду задачі зміщення, викликані

$$u_{ik}^A = u_{ik}^{St} + u_{ik}^{Dym};$$

$$u_{ik}^{St} = \frac{1}{8\pi\mu \cdot Vidp} \left(\delta_{ik} \left(1 + \left(\frac{k_{\lambda L}}{k_{\lambda T}} \right)^2 \right) + \left(1 - \left(\frac{k_{\lambda L}}{k_{\lambda T}} \right)^2 \right) \frac{\partial Dистm_i}{\partial Vidp} \cdot \frac{\partial Dистm_k}{\partial Vidp} \right);$$

$$u_{ik}^{Dym} = \frac{1}{\pi\mu} \left(\delta_{ik} \Phi - \frac{\partial Dистm_i}{\partial Vidp} \cdot \frac{\partial Dистm_k}{\partial Vidp} \Psi \right); \Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik_{\lambda T})^n}{n!} Vidp^{n-1} + \frac{1}{k_{\lambda T}^2} \sum_{n=3}^{\infty} a_n (n-1) Vidp^{n-3};$$

$$\Psi = -\frac{1}{k_{\lambda T}^2} \sum_{n=4}^{\infty} a_n (n-1)(n-3) Vidp^{n-3}; \quad Vidp = |X - Y|; \quad Dистm_i = x_i - y_i,$$

опису взаємодії тріщини із акустичною хвилею прийнявши, що зміщення країв тріщини викликане коливаннями об'єму пружного середовища u_i згідно (1).

Особливості інтегралу (2) є сходиність його результатів при довільних геометричних розмірах тріщини та механічних характеристик пружного середовища. Недоліком (2) є складність обчислення інтегралу по об'єму V , оскільки невідомими є величина і напрям дії сил F_i (вектор сил). Тому алгоритми обчислення інтегралів по площі та об'єму суттєво відрізняються. Подальшого спрощення (2) досягнуто у праці [3], в якій зміщення тріщини в об'ємі розкладається на суму зміщень від прикладеного зусилля та реакції пружного середовища із тріщиною на це зусилля:

акустичними коливаннями, дорівнюватимуть нулю, тобто

$$u_i|_{t=0} = \frac{\partial u_i}{\partial t}|_{t=0} = 0. \quad (4)$$

Аналізуючи компонент тертя країв тріщини згідно (3), прийдемо до висновку, що в початковий момент часу величина тертя, яка описує його в часі, дорівнює нулю, тобто

$$ter_p|_{t=0} = 0. \quad (5)$$

Невідомими компонентами в (3) є значення зміщення країв тріщини та похідних зміщення. Фізичним змістом похідних зміщень країв тріщини є дислокація густини пружного середовища в околі тріщини.

Для розв'язку (3) потрібно знайти залежності для функцій Гріна. Аналітична класична форма функцій Гріна представляє собою складні інтегральні вирази, які неможливо використати для числового обчислення без додаткової їх адаптації до поставленої задачі та спрощення. Найбільш точний та стабільний алгоритм обчислення функцій Гріна представлено в [4] і він є таким:

де $k_{\lambda}, k_{\lambda T}$ – відповідно хвильове число поздовжньої та поперечної хвиль; $X\{x_1, x_2, x_3\}$, $Y\{y_1, y_2, y_3\}$ – відповідно координати точок спостереження та джерела акустичної хвилі; a_n – коефіцієнти

$$\sigma_{ijk}^r = \sigma_{ijk}^{St} + \sigma_{ijk}^{Dyn};$$

$$\sigma_{ijk}^{St} = \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)Vidp^2} \left(\mu \left(\delta_{ik} \frac{\partial Dист_j}{\partial Vidp} + \delta_{jk} \frac{\partial Dист_i}{\partial Vidp} - \delta_{ij} \frac{\partial Dист_k}{\partial Vidp} \right) + \right. \\ \left. + 3(\lambda + \mu) \frac{\partial Dист_i}{\partial Vidp} \frac{\partial Dист_j}{\partial Vidp} \frac{\partial Dист_k}{\partial Vidp} \right); \tag{7}$$

$$\sigma_{ijk}^{Dyn} = \frac{1}{4\pi} \left(\left(\frac{\Psi}{rBVid} - \frac{\partial \Phi}{\partial Vidp} \right) \left(\delta_{ik} \frac{\partial Dист_j}{\partial Vidp} + \delta_{jk} \frac{\partial Dист_i}{\partial Vidp} \right) + \left(\frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Vidp} - \frac{\partial \Phi}{\partial Vidp} \right) + 2 \frac{\Psi}{Vidp} \left(\frac{\lambda}{\mu} + 1 \right) \right) \times \right. \\ \left. \times \delta_{ij} \frac{\partial Dист_k}{\partial Vidp} + 2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Vidp} - \frac{2\Psi}{Vidp} \right) \frac{\partial Dист_i}{\partial Vidp} \frac{\partial Dист_j}{\partial Vidp} \frac{\partial Dист_k}{\partial Vidp} \right).$$

Розв'язок (3) можна отримати ітераційним методом. Для цього досліджувану площу із тріщиною розбиваємо на елементарні ділянки dS для подальшого ітераційного перебору.

Для спрощення обчислення (3) ітераційним методом використаємо підхід тензорного числення [5]. Особливістю такого підходу є те, що створюється локальна система координат на досліджуваній поверхні, яку можна повернути

ступеневого ряду; індекс St – вказує на статичну складову, а індекс Dyn – на динамічну складову.

Аналогічно для напружень [4]:

співвідносно до геометрії досліджуваної тріщини (рис. 1). Інтеграл по площі у тривимірному просторі виражається через подвійний інтеграл як для звичайних класичних функцій для двохмірного простору досліджуваної поверхні dS . Складові (3) є поверхневими інтегралами другого роду, оскільки елементарна ділянка визначається нормаллю nor , тому

$$\int_S Fun_{ij}(\Delta u_i(x_i)) nor_s ds = e_j \sum_{\gamma=1}^3 \int_{\partial x^\beta} \int_{\partial x^\alpha} Fun^{ij}(\Delta u^i(x^i)) \delta_\gamma^i \partial x^\alpha \partial x^\beta, \tag{8}$$

де Fun_{ij} – підінтегральний вираз, що залежить від розкриття тріщини Δu_i ; δ_γ^i – символ Кронекера; x^α, x^β – координати на поверхні елементарної ділянки dS , $\alpha, \beta = 1, 2$; верхні індекси означають, що змінні обчислюються у локальній системі координат на елементарній ділянці поверхні, а нижні індекси відносяться до системи координат досліджуваного пружного середовища; e_j – одиничні вектори - орти.

В результаті переходу із загальної системи координат в локальну за допомогою (8) спрощується підінтегральний вираз, оскільки значення координат починаються із нуля і природи аргументів будуть змінюватись за лінійним законом, так як форма контуру є простою геометричною фігурою, квадратом. Іншим наслідком такого підходу є те, що підінтегральний вираз не буде змінюватись в залежності від геометричної форми тріщини, оскільки її поверхню розбивається на квадрати достатньо малої площі і інтеграл обчислює тільки по одному контуру у формі квадрату. Це дозволяє один раз розробити процедуру чисельного інтегрування і використовувати її необхідну кількість разів.

Оскільки взаємодія акустичної хвилі із тріщиною проходить в часі, то для проведення обчислення потрібно дискретизувати інтервал часу $t = \sum_{n=1}^N n \cdot dt$. В результаті, розкриття тріщини Δu_i в просторі і часі можна представити так:

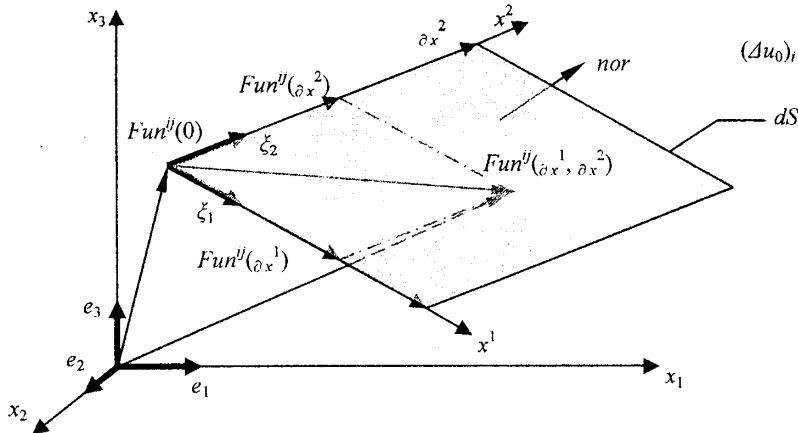
$$\Delta u_i = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N dS_m \cdot n \cdot dt, \tag{9}$$

де M – кількість елементарних ділянок, на які розбито досліджувану поверхню; N – тривалість досліджуваної взаємодії тріщини із акустичною хвилею.

В (9) описуємо зміну форми тріщини, проте не враховуємо параметри акустичного поля падаючої та відбитої хвиль. Для цього представимо Δu_i через складові падаючої і відбитої хвилі:

$$\Delta u_i = (\Delta u_0)_i + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N ((u_{m_i} + u_{s_i}) \cdot dS_m \cdot ndt), \tag{10}$$

де $(\Delta u_0)_i$ – розкриття тріщини в початковий момент часу.



e_1, e_2, e_3 – одиничні вектори - орти; x_1, x_2, x_3 – Декартова система координат побудована по відношенню до геометричних розмірів досліджуваного пружного середовища; x^1, x^2 – двовимірна Декартова система координат елементарної ділянки поверхні тріщини dS ; ξ_1, ξ_2 – вектори - орти ділянки локальної системи координат x^1, x^2 ; $\partial x^1, \partial x^2$ – геометричні розміри ділянки dS ; nor – нормаль до поверхні елементарної ділянки; Fun_j – значення підінтегрального виразу (8)

Рис. 1. Поверхня в тривимірному просторі

Форма розподілу акустичного поля в пружному середовищі залежить від амплітудно-частотних характеристик конкретного первинного перетворювача. Тому форма акустичного поля падаючої хвилі не задавалась, а була обчислена враховуючи параметри давача із круглим чутливим елементом та акустичні характеристики пружного середовища (швидкості поширення поздовжньої та поперечної хвиль, величини загасання їх амплітуди, рис. 2). Як можна побачити із рис. 2, акустичне поле

ближньої зони (рис. 2, а) є більш неоднорідним, ніж дальньої зони (рис. 2, б). Додатково, враховуючи, що акустичне поле дальньої зони більш легко створити у пружному тілі ніж ближньої, для моделювання було вибрано поле дальньої зони. На основі змодельованих результатів (рис. 2, б), побудовано профіль розподілу поля нормалізованого акустичного тиску по одній координаті $Pan(x_\alpha)$ шляхом апроксимації експонентними функціями:

$$Pan(x_\alpha) = 1.109 e^{-\left(\frac{x_\alpha - 22.27}{5.214}\right)^2} + 1.021 e^{-\left(\frac{x_\alpha + 2.016}{3.807}\right)^2} + 0.7993 e^{-\left(\frac{x_\alpha - 4.15}{3.705}\right)^2} + 0.7449 e^{-\left(\frac{x_\alpha - 10.79}{2.975}\right)^2} + 0.2794 e^{-\left(\frac{x_\alpha - 8.523}{2.412}\right)^2} + 0.6083 e^{-\left(\frac{x_\alpha - 15.63}{3.094}\right)^2}, \quad (11)$$

де $\alpha = 1, 2$.

Падаючу акустичну хвилю, враховуючи (11), представимо так:

$$u_i(dS, dt) = A_L \cdot \delta_{\alpha\beta} Pan(\partial x_\alpha) \cdot Pan(\partial x_\beta) \times \cos \varphi_i \cdot c_L \cdot dS dt \quad (12)$$

де A_L – амплітуда поздовжньої падаючої акустичної хвилі, c_L – швидкість поздовжньої хвилі в пружному

середовищі, φ_i – кут нахилу вектора напрямку поширення падаючої хвилі до координатних осей.

Розкриття тріщини, враховуючи (10) і (12), можна представити як суму розкриття в початковий момент часу $(\Delta u_0)_i$, зміщення країв від падаючої $u_i(dS, dt)$ та відбитої $u_{\beta i}$ хвиль:

$$\Delta u_i = (\Delta u_0)_i + A_L c_L \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (u_i(dS_m, ndt) + u_{\beta i}) \cdot dS_m \cdot ndt \quad (13)$$

Як результат, нами використано реальні величини просторового розподілу тиску акустичної хвилі, що взаємодіє із тріщиною.

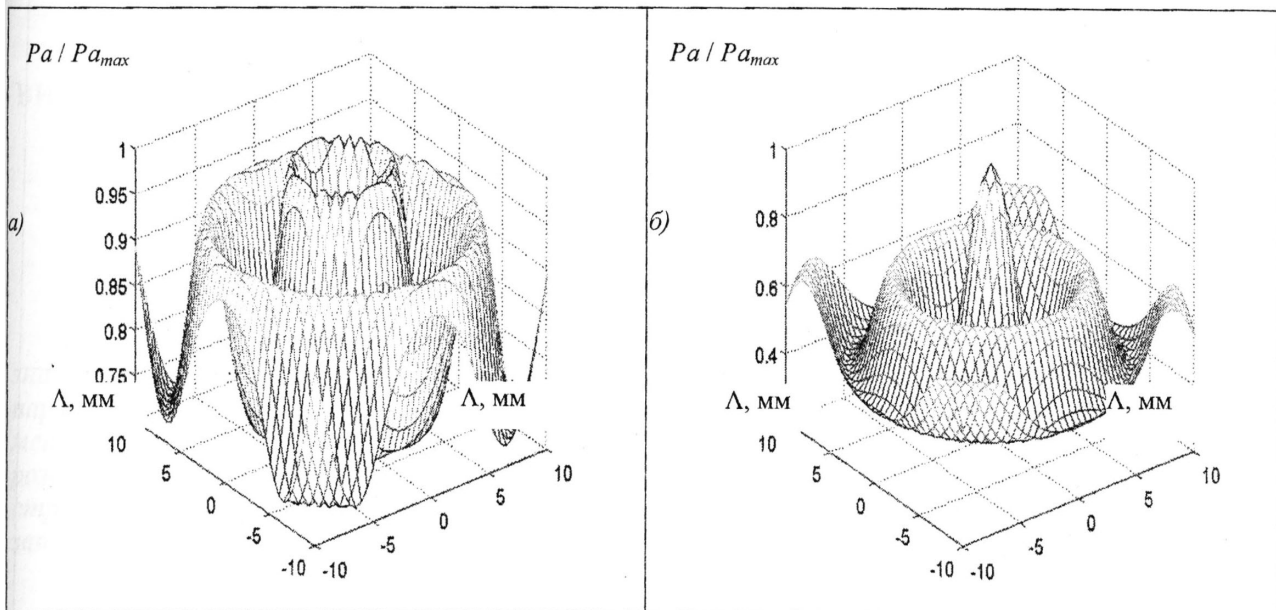
Для проведення числового моделювання нами вибрано акустичну поздовжню хвилю із частотою 10 кГц. Така частота хвилі вибрана через те, що із збільшенням частоти величина відхилення країв тріщини буде меншою.

В моделі акустичну хвилю збуджуємо чотирма перетворювачами для збільшення потужності акустичного поля в пружному середовищі. Для побудови системи чотирьох перетворювачів потрібно

забезпечити відстань між ними рівною кратній кількості довжин хвиль.

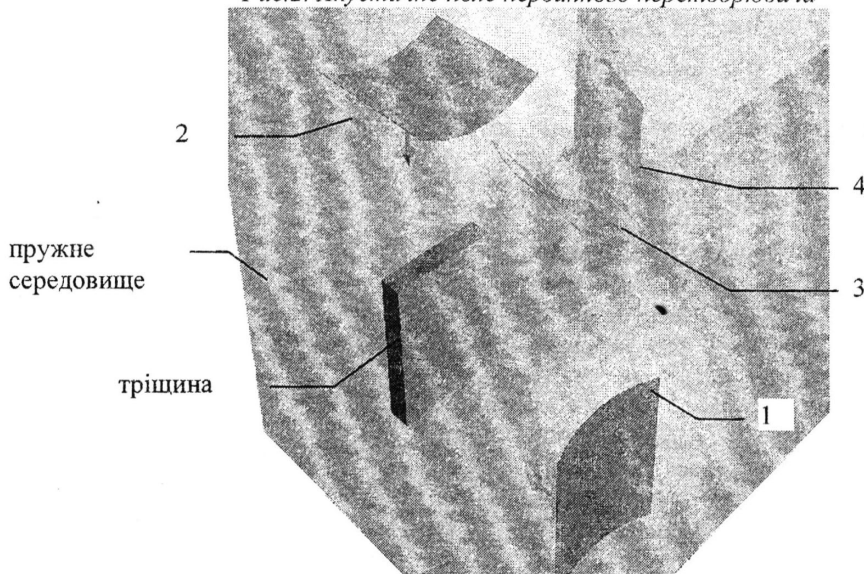
Форму тріщини вибрано паралелепіпедом, виходячи із міркувань простоти побудови числової моделі і для точного розбиття її поверхні на окремі прямокутні ділянки (рис. 3). Локальна система координат поверхні елементарних ділянок є співосною із загальною Декартовою системою.

Для побудованої геометрії тріщини в пружному середовищі моделювалось чотири випадки напрямку падіння акустичної хвилі на неї (рис. 3).



а)- акустичне поле обчислене на відстані 1 мм від чутливого елемента; б)- на відстані 20 мм, P_a – акустичний тиск; Δ – радіус чутливого елемента

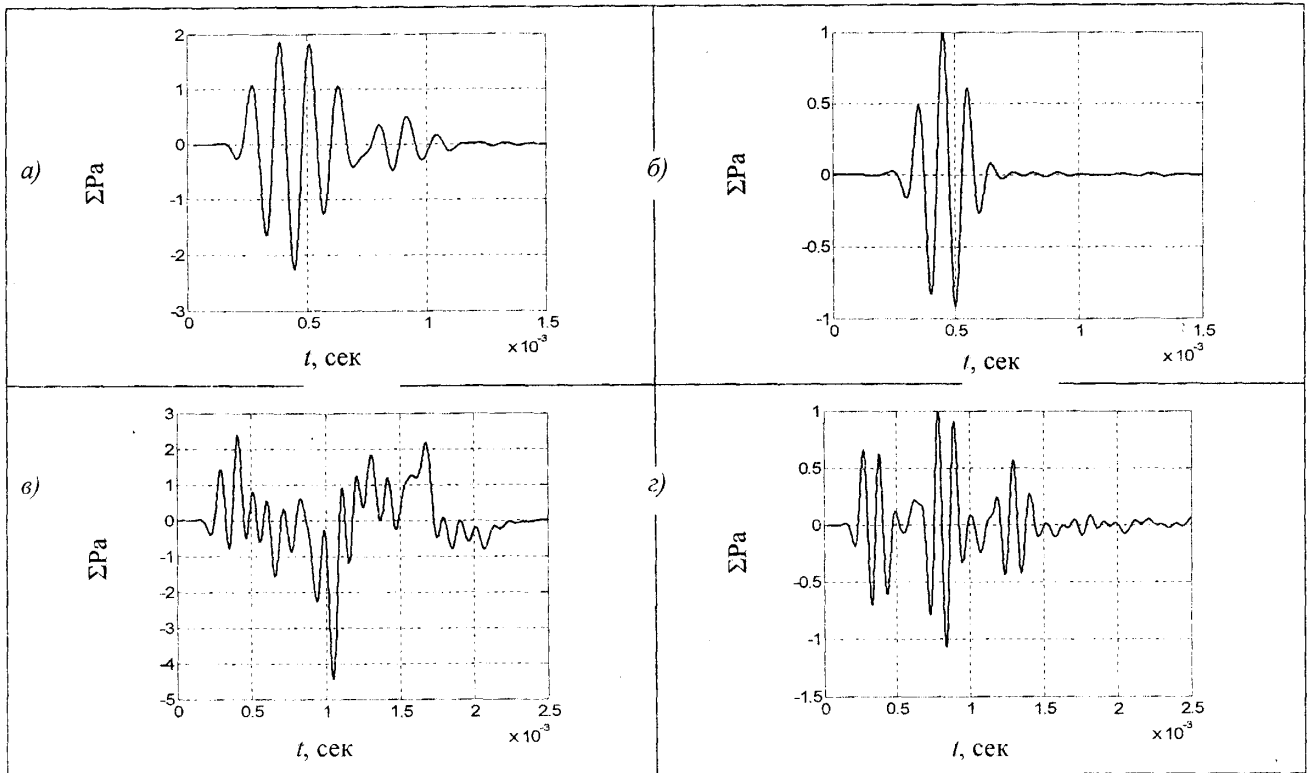
Рис.2. Акустичне поле первинного перетворювача



1, 2, 3, 4 – фронти акустичних хвиль, які поширюються у напрямку тріщини
Рис. 3. Зображення тріщини в пружному середовищі та напрямку руху акустичних хвиль

В результаті моделювання отримано залежності відбитих акустичних хвиль від країв тріщини (рис.4). Отримані форми хвиль дають поняття про величини амплітуд та структуру хвиль в залежності від відносного розташування тріщини та напрямку руху хвилі. В результаті проведеного моделювання

можна отримати інформацію про величину концентрованого теплового поля на краях тріщини, яке корелюється із амплітудою відбитих акустичних хвиль, для подальшого його вимірювання тепловізорами з метою дефектоскопії досліджуваного пружного середовища.



$\Sigma Pa = \sum_{i=1}^4 Pa_i / Pa_{max_i}$ - сумарне нормалізоване значення акустичного поля отримане за допомогою чотирьох датчиків; а)- акустичний сигнал отриманий у випадку 1 (рис. 3), б)- випадок 2 (рис. 3), в)- випадок 3 (рис. 3), з)- випадок 4 (рис. 3)

Рис. 4. Сумарний сигнал, що отриманий у результаті відбиття від тріщини

Як можна побачити із отриманих кривих (рис. 4), відбите від країв тріщини акустичне поле існує в усіх змодельованих випадках, але має різну форму. Вона залежить від взаєморозміщення напрямку поширення падаючої хвилі та геометричних розмірів тріщини. За допомогою запропонованої моделі можна підвищити точність контролю і оцінити форму тріщини, аналізуючи відгук відбитої хвилі від неї, а також зробити висновок про подальшу експлуатацію досліджуваного об'єкту.

Розроблена модель дає можливість оцінити концентрацію акустичної енергії, джерелом якої є тріщина.

1. Achenbach, J. D.: *Dynamic Effects in Brittle Fracture*. In: *Mechanics Today* (Edited by Nemat-

Nasser, S.), 1, pp. 1-57, Pergamon, New York, 1972. 2. Zhang, Ch. and Gross, D.: *A Non-Hypersingular Time-Domain BIEM for Transient Elastodynamic Crack Analysis*. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 36, pp. 2997-3017 (1993). 3. Zhang, Ch.: *Macrocrack-Microcrack Configurations Under Impact Loading*. In: *Adv. in Fract. Res. ICF 7* (Edited by Salama, K. et al.), 1, pp. 845-852, Pergamon Press, Oxford, 1989. 4. Kobayashi, S. and Nishimura, N.: *Transient Stress Analysis of Tun-Tunnels and Cavities of Arbitrary Shape due to Travelling Waves*. In: *Developments in Boundary Element Methods II* (Edited by Banerjee, P. K. and Shaw, R. P.), pp. 177-210. Applied Science Publishers, London, 1982. 5. Ю. И. Димитриенко. *Тензорное исчисление: Учеб. пособие для вузов.* - М.: Высшая школа, 2001. - 575 с.