

Таким чином, за допомогою отриманого рівняння (9) для ГТК 10-І, що досліджувались, можна при реальних значеннях витрати паливного газу визначати величину викидів в атмосферу NO_x без проведення трудомістких замірів.

І.Ковалко М., Грудз В., Михалків В., Тимків Д., Шлапак Л., Ковалко О. Трубопровідний транспорт

газу.- К.: Агентство з раціонального використання енергії та екології, 2002. – 600 с. 2.Шпаков П., Попов В. Статистическая обработка экспериментальных данных.- М.: Издательство Московского Государственного Горного Университета, 2003. – 268 с. 3.Гмурман В. Теория вероятностей и математическая статистика.- М.: Высш. школа, 2002. – 479 с

УДК 519.21

ДОСЛІДЖЕННЯ ЙМОВІРНІСНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ БІЛІНІЙНОГО БАЗИСУ

© Хомченко¹ А.Н., Камаєва² С.О., 2006

¹Херсонський національний технічний університет

²Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

Приведені результати теоретичних і експериментальних досліджень властивостей лінійного та білінійного базисів на симплекс- і мультиплекс-елементах. В результаті виявлено нові властивості білінійного базису, які пов'язані з парадоксальним явищем «третьої голки». Надано тлумачення отриманого парадоксу

Науково-технічний прогрес був би неможливим без процесу математизації науки, техніки, економіки, управління тощо. Складні математичні завдання, які раніше могли вирішуватися лише «в принципі» із-за неможливості виконання великого об'єму обчислень, зараз стали вирішуватися швидко і з високим ступенем точності, що наблизило математику до реальних потреб діяльності людини. Математичне моделювання, завдяки обчислювальній техніці, дозволило створити автоматизовані системи управління, які можуть функціонувати як в масштабах окремого підприємства, так і цілої галузі, з'явилися системи автоматизованого проектування, що вражають феноменальними можливостями машинної графіки.

Математичне моделювання дозволяє розрахувати за допомогою методів обчислювального експеримента такі процеси, які по своїй суті є недоступними для постановки дослідів. На основі математичної моделі з використанням ЕОМ проводиться вивчення пристроїв і фізичних процесів, «програється» їхня поведінка в різних умовах, знаходяться оптимальні параметри та режими діючих конструкцій або таких, що проєктуються. Сучасні дослідження різних задач все більше і більше базуються на дискретних моделях, які відкривають широкі можливості для застосування таких чисельних методів, як метод скінченних різниць

(МСР), метод скінченних елементів (МСЕ), метод граничних елементів (МГЕ) і т.д. Проте такі дослідження іноді призводять до виявлення парадоксальних явищ, яким і присвячується дана стаття.

Оскільки МСЕ – ефективний та найбільш розповсюджений обчислювальний метод для розв'язування багатьох інженерних та фізичних задач, розглянемо його детальніше. Основна ідея МСЕ полягає в тому, що будь-яку неперервну величину можна апроксимувати дискретною моделлю, яка будується на множині кусково-неперервних функцій, визначених на скінченному числі підобластей (елементів), на які розбивається область визначення досліджуваної величини. Неперервна величина апроксимується на кожному елементі поліномом (функцією форми елемента), який визначається за допомогою вузлових значень цієї величини.

В загальному випадку апроксимуючий поліном має вигляд:

$$\varphi = \sum_{\beta=1}^r N_{\beta} f_{\beta}, \quad (1)$$

причому

$$\sum_{\beta} N_{\beta} = 1, \quad (2)$$

де N_{β} – базисна функція (функція форми чи інтерполяційна функція), що відповідає вузлу β на скінченному елементі ($\beta = \overline{1, r}$); f_{β} – вузлове значення шуканої функції в вузлі β , r – кількість вузлів на скінченному елементі (СЕ).

Фактично N_{β} – це вагові коефіцієнти, що показують який саме вплив на довільно вибрану точку області здійснюють вузлові значення функції.

Традиційний прийом побудови базисних функцій [1] пов'язаний з певними труднощами, які значно зростають із збільшенням порядку скінченного елемента. Завдяки високопродуктивним сучасним ЕОМ розв'язування систем алгебраїчних рівнянь великої розмірності відносно параметрів, що визначають інтерполяційний поліном, не є проблемою і не потребує великих витрат часу. Але складання такої системи вимагає від розробника і часу, і навичків, і знань. До того ж застосовувати традиційний прийом можна лише за умови, що визначник системи відмінний від нуля. А якщо він виявиться рівним нулю (як, наприклад, в шестикутному СЕ), то класичний поліном отримати не вдасться. Це стимулює до пошуку нових нетрадиційних способів побудови базисних функцій. Ми пропонуємо застосувати для цього геометрично-ймовірнісні аналогії.

З точки зору теорії ймовірностей формула (1) означає, що інтерполант для елемента в кожній фіксованій точці моделює постійне значення φ , що рівне математичному сподіванню величини φ на елементі. Отже, інтерполяційний поліном в МСЕ показує функціональну залежність математичного сподівання величини φ від положення точки на елементі. Це означає, що апроксимація (1) – це скінченно-елементна форма звичайної процедури усереднення шуканої функції. Відомий критерій збіжності МСЕ (2) відображає теорему про суму ймовірностей повної групи подій.

Заслуга поєднання геометричних та ймовірнісних методів належить французькому вченому Ж. Бюфону, який, розв'язуючи класичну «задачу про голку», започаткував новий напрямок в теорії ймовірностей. В задачах такого типу вважається, що випадкові точки рівномірно розподілені в деякій області. Ймовірність попадання в довільну частину даної області пропорційна її площі (довжині чи об'єму).

На рис. 1 показано, на які підобласті розбиває навмання вибрана точка $M(\xi, \eta)$ лінійний (симплекс) та білінійний (мультишпекс) елементи. Кожному вузлу β ставиться у відповідність протилежний піделемент. Базисна функція шукається у вигляді ймовірності попадання навмання вкинutoї точки у відповідний піделемент. На рис. 1 заштриховані піделементи, що відповідають вузлу 1. Використовуючи визначення геометричної ймовірності, базисні функції, наприклад, для мультишпекса набувають вигляду:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta); & N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta); & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta), \\ |\xi| &\leq 1, & |\eta| &\leq 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Як бачимо, ці функції задовольняють всім основним властивостям: кожна з них перетворюється в одиницю в одноіменному з нею вузлі і в нуль в будь-якому іншому вузлі. Так, у вузлі β величина $N_{\beta} = 1$, а по мірі віддалення від нього величина N_{β} зменшується до нуля ($0 \leq N_{\beta} \leq 1$). В інших вузлах елемента $N_{\beta} = 0$. Очевидно, що формула (2) також виконується. З ймовірнісної точки зору базисні функції – це перехідні ймовірності з поточної точки $M(\xi, \eta)$ у вузли елемента.

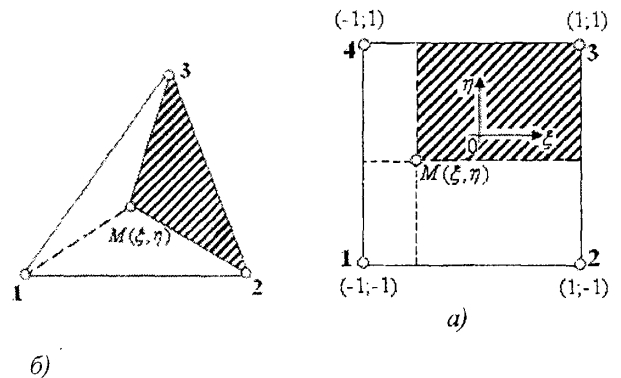


Рис. 1. Піделементи, що відповідають вузлу з номером 1 в лінійному (а) та білінійному (б) СЕ

Деякі властивості лінійного та білінійного базисів вже відомі давно [1]. Ми ж ставимо задачу виявити і дослідити нові властивості з урахуванням ймовірнісних аналогій [2,3]. З цією метою ми провели серію комп'ютерних експериментів. Наведемо деякі з них.

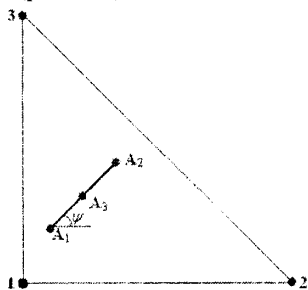
Дослід № 1. Розглянемо симплекс-елемент, для якого інтерполяційний поліном має вигляд:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot \xi + \alpha_3 \cdot \eta. \quad (4)$$

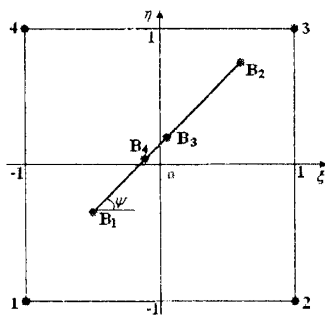
Як видно з (4) симплекс-елементам відповідають поліноми, що містять константу та лінійні члени, тобто число коефіцієнтів в такому поліномі на одиницю більше розмірності координатного простору.

Відмітимо основні властивості симплекс-елемента. По-перше, функція φ змінюється лінійно між будь-якими двома вузлами елемента, тобто φ змінюється лінійно вздовж кожної із трьох його сторін. По-друге, будь-яка лінія, вздовж якої φ приймає однакові значення, є пряма, що перетинає дві сторони симплекс-елемента (за винятком однакових значень в усіх вузлах елемента). Приведені властивості дають можливість легко визначати лінії рівня скалярної величини.

Наш дослід був пов'язаний з узагальненням задачі Бюффона: на симплекс-елементі (1-2-3) довільним чином виберемо дві точки A_1 і A_2 , які є кінцями голки (рис. 2,а).



а)



б)

Рис. 2. Вкидання голки в симплекс (а) та мультиплекс (б) елементи

Отримані результати свідчать про те, що перехідна ймовірність з середини голки (т. A_3) у вузли симплекс-елемента є середньою перехідною ймовірністю з її кінців (т. A_1 та т. A_2). Доведемо це аналітично.

Використовуючи визначення геометричної ймовірності, базисна функція, наприклад, для вузла 1 (рис. 2а) набуває вигляду:

$$N_1 = \frac{S_{A_1}}{S},$$

де S – площа симплекс-елемента, S_{A_i} – площа піделемента, утвореного т. A_i відповідно до вузла 1 ($i=1,2,3$).

Покажемо, що

$$\frac{S_{A_3}}{S} = \frac{1}{2} \left(\frac{S_{A_1}}{S} + \frac{S_{A_2}}{S} \right),$$

або

$$S_{A_3} = \frac{1}{2} (S_{A_1} + S_{A_2}); \quad (5)$$

$$S_{A_i} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & \xi_{A_i} & \eta_{A_i} \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times \quad (6)$$

$$\times [\xi_{A_i}(\eta_2 - \eta_3) + \eta_{A_i}(\xi_3 - \xi_2) + \xi_2 \cdot \eta_3 - \xi_3 \cdot \eta_2];$$

($i=1,2,3$).

Нехай довжина голки l і кут падіння голки ψ .

Тоді

$$\begin{aligned} \xi_{A_1} &= \xi_{A_3} - \frac{l}{2} \cos \psi, & \eta_{A_1} &= \eta_{A_3} - \frac{l}{2} \sin \psi, \\ \xi_{A_2} &= \xi_{A_3} + \frac{l}{2} \cos \psi, & \eta_{A_2} &= \eta_{A_3} + \frac{l}{2} \sin \psi. \end{aligned}$$

Підставивши по черзі координати точок A_1, A_2, A_3 у формулу (6), отримаємо $S_{A_1}, S_{A_2}, S_{A_3}$, які задовольняють формулу (5). Для решти вузлів доведення проводиться аналогічно.

Дослід № 2. Розглянемо білінійний СЕ – мультиплекс, який є квадратом зі стороною, рівною 2 і чотирма вузлами у вершинах. Інтерполяційний поліном має вигляд:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot \xi + \alpha_3 \cdot \eta + \alpha_4 \cdot \xi \eta. \quad (7)$$

Як видно з (7) мультиплекс-елементам відповідають поліноми, що містять константу, лінійні члени та член другого порядку.

В даному елементі довільним чином виберемо дві точки B_1 та B_2 , які вважатимемо кінцями голки (рис. 2,б).

Перехідні ймовірності з кінців голки (B_1 і B_2) та з її центра (B_3) у вузли мультиплека (1-2-3-4) знайдемо за формулами (3). Експеримент показав, що точка старта, перехідна ймовірність з якої у вузли мультиплека дорівнює середній перехідній ймовірності з кінців голки, не є серединою голки

(т. B_3), як у випадку симплекс-елемента. Більше того, ця точка (т. B_4) в залежності від кута падіння голки (ψ) переміщується вздовж неї, тобто не має постійного положення. Точка B_4 збігається з точкою B_3 лише у випадку вкидання голки строго вертикально або строго горизонтально (ймовірність такого положення вкинутої голки є рівною нулю [4]). Чому ж та умова, що виконується на симплекс-елементі, не виконується на мультиплексі? Очевидно, причиною цього є вплив нелінійного члена на базис елемента. Відмінність формул (4) і (7) полягає в наявності лише одного члену χ , який не може приймати великих значень, оскільки розглядуваний задрат лежить в межах від -1 до 1 , але вносить суттєві зміни в його базис. І хоча білінійний базис лише «трохи» старший за лінійний [5], він набуває зовсім нових якостей. Дане спостереження можна пояснити і аналітичним шляхом.

Згідно з (3) базисна функція, наприклад, для вузла 1 (рис. 2,б) має вигляд:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi_{B_1}) \cdot (1 - \eta_{B_1}) = \frac{S_{B_1}}{S}; \quad (i=1,2,3),$$

де $S = 4$ – площа мультиплекса, S_{B_i} – площа піделементу, утвореного т. B_i відповідно до вузла 1 ($i=1,2,3$). Таким чином:

$$S_{B_i} = (1 - \xi_{B_i}) \cdot (1 - \eta_{B_i}). \quad (8)$$

Покажемо, що

$$\frac{S_{B_3}}{S} \neq \frac{1}{2} \left(\frac{S_{B_1}}{S} + \frac{S_{B_2}}{S} \right),$$

або

$$S_{B_3} \neq \frac{1}{2}(S_{B_1} + S_{B_2}). \quad (9)$$

Нехай довжина голки l і кут падіння голки ψ .

Тоді

$$\xi_{B_1} = \xi_{B_3} - \frac{l}{2} \cos \psi; \quad \eta_{B_1} = \eta_{B_3} - \frac{l}{2} \sin \psi;$$

$$\xi_{B_2} = \xi_{B_3} + \frac{l}{2} \cos \psi; \quad \eta_{B_2} = \eta_{B_3} + \frac{l}{2} \sin \psi.$$

Підставивши по черзі координати точок B_1, B_2, B_3 у формулу (8) отримаємо $S_{B_1}, S_{B_2}, S_{B_3}$. Середнє арифметичне буде таким:

$$\frac{1}{2}(S_{B_1} + S_{B_2}) = S_{B_3} + \frac{l^2}{4} \sin \psi \cdot \cos \psi.$$

Отже, має місце (9). Для решти вузлів доведення проводиться аналогічно.

Дослід № 3. На мультиплексі довільним чином виберемо чотири точки B_1, B_2, B_3, B_4 , які є вершинами квадрата, що вкидується в даний елемент (рис. 3).

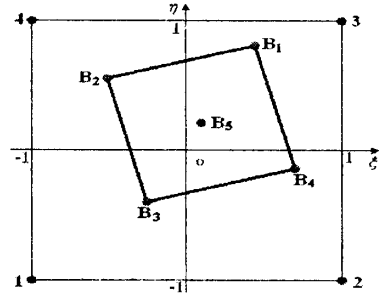


Рис. 3. Вкидання квадрата в мультиплекс

Дослід показав, що в цьому випадку барицентр вкинутого квадрата (т. B_5) асоціюється з середньою перехідною ймовірністю з його вершин у вузли мультиплекса.

Аналітичне доведення даного твердження проводиться аналогічно попереднім.

Довільно вкинутий квадрат $B_1B_2B_3B_4$ розглянемо тепер у вигляді двох взаємно перпендикулярних голок B_1B_3 і B_2B_4 (рис. 4). Дослідимо окремо кожен з голок. Нехай т. C_1 і т. C_2 є точками старту, для яких перехідні ймовірності є середніми перехідними ймовірностями з вершин першої та другої голок відповідно (т. C_1 і т. C_2 в загальному випадку не співпадають з барицентром квадрата B_5).

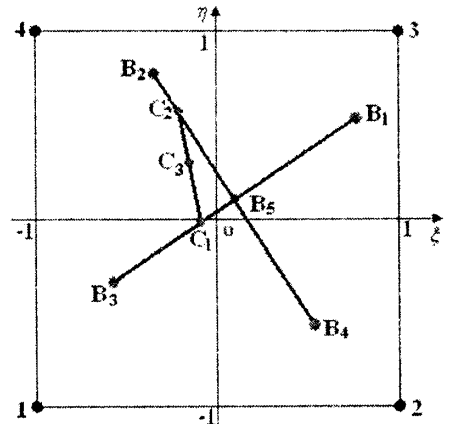


Рис. 4. Геометрична інтерпретація парадоксу «третьої голки»

Таким чином, з'являється третя голка C_1C_2 , яка незалежно від кута, під яким вкидується квадрат, не проходить через барицентр квадрата B_5 . Але барицентр квадрата асоціюється з середньою перехідною ймовірністю з кінців третьої голки. Тоді виникає парадокс: як так може бути, якщо центр квадрата навіть не лежить на третій голці?

Спробуємо це пояснити. З формул (3) базисна функція, наприклад, для вузла 1 має вигляд:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta).$$

Права частина описує поверхню, яка є гіперболічним параболоїдом, а лінії рівня представляють собою гіперболи (рис. 5).

Проведемо лінію барицентричного рівня (рис. 6). Як бачимо, на третій голці є точка старту C_3 , яка лежить на цій гіперболі і тому перехідні ймовірності з т. C_3 і т. B_5 є однакові. Тобто гіпербола одночасно проходить через центр квадрата B_5 і точку старту на третій голці C_3 при їх довільній орієнтації, що спростовує виявлений парадокс.

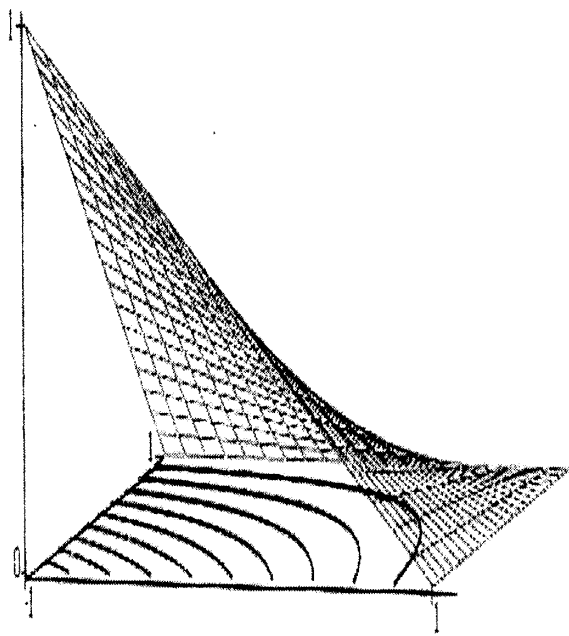


Рис. 5. Поверхня та лінії рівня білінійної базисної функції

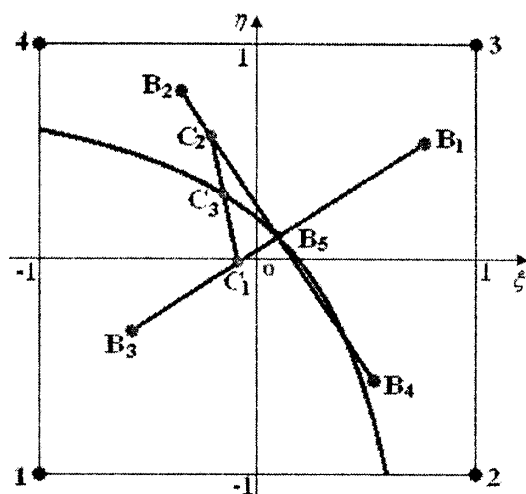


Рис. 6. Гіпербола барицентричного рівня

Треба зазначити, що дослідження в даному напрямку продовжуються і є перспектива отримання нових цікавих результатів.

1. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с. 2. Хомченко А.Н. О вероятностном построении базисных функций МКЭ. Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. – Ивано-Франковск, 1982. – 7 с. – Деп. в ВИНТИ 21,10,82, № 5264. 3. Камаева Л.И., Хомченко А.Н. Вычислительные эксперименты с альтернативными базисами сирендиновых аппроксимаций // Прикл. пробл. прочности и пластичности. Анализ и оптимизация деформируемых систем. Всесоюз. межвуз. сб. / Горьк. ун-т. – 1988. Вып. 39. – С.103-105. 4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1971. – 340 с. 5. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с.