

© **В.І. Гоголь**  
**П.І. Огородніков**  
 д-р техн. наук  
 МНТУ  
**В.М. Світлицький**  
 д-р техн. наук  
 ПАТ «Укргазвидобування»

## Дослідження поздовжніх, крутильних і згинальних коливань бурильної колони

УДК 622.24.053

*Розглянуто поздовжні, крутильні і згинальні коливання бурильної колони, що виникають під час поглиблення вибою. Наведено рівняння, які показують можливість застосування віброшвидкості для оцінки міцності та надійності труб колони у разі вібрацій.*

**Ключові слова:** бурильна колонна, коливання, віброшвидкість, напруження.

*Рассмотрены продольные, крутильные и изгибные колебания бурильной колонны, возникающие во время углубления забоя. Приведены уравнения, которые показывают возможность применения виброскорости для оценки прочности и надежности труб колонны в случае вибраций.*

**Ключевые слова:** бурильная колонна, колебания, виброскорость, напряжение.

*The paper considers longitudinal, torsional and bending vibrations of the drill string that occur during the bottom-hole deepening. The equations are presented that show the possibility of applying vibration velocity to evaluate the strength and reliability of the string pipes in case of vibrations.*

**Key words:** drill string, oscillations, vibration velocity, tension.

Поздовжні коливання бурильної колони виникають під час спуско-підймальних операцій (СПО), роботи шарошкових доліт у процесі буріння, в разі нагнітання промивальної рідини й обертання колони. Крутильні коливання виникають за взаємодії елементів компонування низу бурильної колони (КНБК) і долота зі стінками свердловини, а також роботи шарошкового долота на хвилеподібному вибої [1].

Розглянемо дію на бурильну колону поздовжніх коливань шарошкового долота в процесі поглиблення вибою.

Зумовлена взаємодією долота з вибоєм, збурювальна сила в осьовому напрямку передається на бурильну колону та труби. Осьове переміщення долота супроводжується збільшенням потенціальної енергії в колоні труб, із переміщенням долота вниз потенціальна енергія переходить у кінетичну, яка витрачається на руйнування породи. У колоні виникають пружні хвилі, пов'язані з перекочуванням шарошок із зуба на зуб і по хвилеподібному вибою. Чергування півхвиль стиску-розтягу зумовлює зміну потенціальної енергії важкого низу, що призводить до збільшення осьового навантаження на долото та руйнування вибою [2].

Зусилля в поперечних перерізах труб відрізнятимуться від зусиль, отриманих у ході статичних розрахунків. Пружні коливання, які виникають у бурильній колоні під час взаємодії долота з вибоєм, як безпосередньо, так і побічно впливають на значення внутрішніх силових факторів. Для математичного опису механічної системи – бурильної колони в процесі поглиблення вибою, для визначення її внутрішніх силових факторів та надійності потрібно записати не лише рівняння моделі коливних процесів, а й з'ясувати зв'язок із моделлю заглиблення свердловини.

Змодельовавши бурильну колону у вигляді стрижня з розподіленими параметрами і відповідними граничними умовами, ми побудували схему, зображену на рисунку. При цьому обваженні бурильні труби (ОБТ) прийнято як зосереджену масу, амортизаторною масою знехтували.

Ураховуючи, що бурильна колонна – лінійно деформована система, загальні силові фактори можна визначити в її поперечних перерізах через деформації за відомими формулами елементарної теорії опору матеріалів:

$$N(x,t) = -E(x)F_k(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}; \quad (1)$$

$$M_{кр}(x, t) = -G(x)I_p(x) \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x},$$

де  $E$  – модуль поздовжньої пружності,  $F_k$  – площа поперечного перерізу колони,  $G$  – модуль зсуву,  $I_p$  – полярний момент інерції площі поперечного перерізу колони,  $u(x, t)$  – поздовжнє пружне переміщення поперечного перерізу,  $\varphi$  – кут закручування у розглянутому перерізі.

З огляду на статичні параметри режимів буріння, які зумовлюють статичні внутрішні навантаження, загальні зусилля дорівнюватимуть статичним і динамічним складовим:

$$\begin{aligned} N(x, t) &= N_c(x, t) + N_d(x, t); \\ M_{кр}(x, t) &= M_{кр,c}(x, t) + M_{кр,d}(x, t). \end{aligned} \quad (2)$$

При цьому динамічні складові цих сил визначаємо через сили інерції за формулами:

$$\begin{aligned} N_d(x, t) &= -\int_0^x m(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx; \\ M_{кр,d}(x, t) &= -\int_0^x I_m(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dx, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $m(x)$  – маса одиниці довжини труби,  $I_m(x)$  – полярний масовий момент інерції поперечного перерізу бурильної колони.

Рівняння пружних коливань бурильної колони можна отримати з рівняння (1) і, продиференціювавши їх по  $x$ , знайти вирази, які пов'язують компоненти деформації балки із зовнішніми розподіленими навантаженнями, а потім увести відповідні розподілені сили інерції

$$\begin{aligned} q(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ E(x)F_k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]; \\ q_{кр}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ G(x)I_p(x) \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Опишемо зовнішнє навантаження у вигляді:

$$\begin{aligned} q(x, t) &= q_a(x, t) - m(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}; \\ q_{кр}(x, t) &= q_a(x, t) - I_m(x) \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $q_a(x, t)$  – зовнішнє погонне навантаження (взаємодія колони і стінок свердловини з промивальною рідиною).

Отже, можемо отримати рівняння поздовжніх і крутильних коливань бурильної колони:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ E(x)F_k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] - m(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= q_x(x, t); \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ G(x)I_p(x) \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \right] - I_m(x) \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} &= q_{кр}(x, t), \end{aligned} \quad (6)$$

де  $q_x(x, t)$  і  $q_{кр}(x, t)$  – функції зовнішнього погонного навантаження (вага, рідина, тертя).

Приймаючи в першому наближенні, що функції зовнішнього погонного навантаження прямують до нуля, після перетворень і наведених позначень

$$\chi^2 = \frac{m(x)}{E(x)F_k(x)}, \quad \lambda^2 = \frac{I_m(x)}{G(x)I_p(x)}$$

отримаємо диференціальні рівняння поздовжніх і крутильних вільних пружних коливань бурильної колони як стрижневої системи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= \chi^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} &= \lambda^2 \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Оскільки бурильна колона в процесі буріння набуває форми просторової спіралі, а вісь свердловини є криволінійною, вісь жорсткості колони не збігається із віссю центрів тяжіння поперечних перерізів. Згинальні коливання супроводжуватимуться крутильними коливаннями відносно осі жорсткості і навпаки. Сукупність указаних коливань пояснюється наявністю інерційних зв'язків між ними, пропорційних відстані між осями жорсткості і центрами тяжіння. Рівняння згинальних коливань бурильної колони розглянуто нижче.

Колівання бурильної колони, зумовлені роботою долота на вибої, належать до вимушених [3]. Форма цих коливань залежить від конструкції КНБК, а також від геолого-технічних умов і режимів буріння.

Проаналізуємо малі поздовжні і крутильні коливання бурильної колони, які описуються рівняннями (7).

Перше рівняння системи (7) стосується поздовжніх коливань бурильної колони, і граничні умови мають такий вигляд:

при  $X = 0$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = hu(x, t), \quad (8)$$

де  $h = \frac{C_0}{EF_k}$ ,  $C_0$  – жорсткість талевої системи;

при  $X = H + L$  ( $H$  – довжина сталевих бурильних труб (СБТ),  $L$  – довжина ОБТ)

$$EF_k \frac{\partial u}{\partial x} = R_b \sin(\omega, t), \quad (9)$$

де  $R_b$  – реакція вибою.

Вважаючи процес поглиблення вибою квазістатичним і ґрунтуючись на вищенаведених висновках, у першому наближенні приймемо

$$u = \int_0^t \left( v_m, R_b, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) dt, \quad (10)$$

де  $v_m$  – миттєва механічна швидкість поглиблення вибою під час буріння.

Продиференціювавши за часом перше рівняння системи (7) і позначивши  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = V$ , запишемо його

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \chi^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}. \quad (11)$$

Відповідно, вирази (8) і (9) матимуть вигляд:

при  $X = 0$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = hV, \quad (12)$$

при  $X = H + L$

$$EF_k \frac{\partial V}{\partial t} = R_b \sin(\omega, t). \quad (13)$$

Розв'язок рівняння (11) можна представити у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить від часу, а інша – від розташування перерізів:

$$V = T(x)V(t) \quad (14)$$

або

$$V = (A \sin \omega t + B \cos \omega t) \left( C \sin \frac{\omega x}{\chi} + D \cos \frac{\omega x}{\chi} \right). \quad (15)$$

Якщо розглядати поздовжні коливання бурильної колони як тонкого стрижня у визначений момент часу  $t = t_1$ , то перший множник  $T$  буде сталим:

$$V = T \left( C \sin \frac{\omega x}{\chi} + D \cos \frac{\omega x}{\chi} \right). \quad (16)$$

Оскільки число власних коливань частот  $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \dots$  для такої конструкції нескінченне, то кожному значенню  $\omega$  відповідатиме частковий розв'язок, аналогічно до рівняння (15). У першому наближенні вважатимемо, що під час поглиблення вибою відбуваються гармонічні коливання бурильної колони внаслідок взаємодії долота з породою під час перекошування шарошок по хвилеподібному вибою:

$$V(x, t) = V(x) \sin \omega t. \quad (17)$$

Підставивши цей розв'язок у рівняння (11), отримаємо:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} - \frac{\omega^2}{\chi^2} V = 0. \quad (18)$$

Загальний розв'язок рівняння (18) запишемо так:

$$V(x) = C \sin x \sqrt{\frac{\omega^2}{\chi^2}} + D \cos x \sqrt{\frac{\omega^2}{\chi^2}}. \quad (19)$$

Одержаний вираз визначає форму пружної лінії бурильної колони під час її коливань.

Сталі  $C$  і  $D$  визначимо, виходячи з умов (12) і (13):

$$C = \frac{hV\chi}{\omega}, \quad D = \frac{hVEF_k \cos \frac{\omega}{\chi} l - R(t)}{EF_k \frac{\omega}{\chi} \sin \frac{\omega}{\chi} l}. \quad (20)$$

Після підстановки сталих  $C$  і  $D$  у рівняння (19) отримаємо:

$$V(x) = \frac{hV\chi}{\omega} \sin \frac{\omega}{\chi} l + \frac{hVEF_k \cos \frac{\omega}{\chi} l - R(t)}{EF_k \frac{\omega}{\chi}} \operatorname{ctg} \frac{\omega}{\chi} l. \quad (21)$$

Для практичного застосування цього результату важливо, що з'являється можливість визначення напруженого стану бурильної колони за формою пружної лінії. Ці розв'язки реалізуються за поздовжніх коливань під дією зовнішніх збурень. Частоти резонансних коливань визначаються частотами власних коливань, які відповідають певним власним формам.

Розв'язки (19) та (21) справедливі для колон значної довжини з малою згинальною жорсткістю, особливо для розтягнутої частини колони. Для розрахунків коливань бурильної колони в разі буріння похило-скерованих свердловин із просторовою траєкторією виникає необхідність використати аналог у вигляді криволінійного стрижня з нерозтягнутою віссю, яка є системою зі змінними за довжиною параметрами. Результати використання такої моделі дають більш якісні вихідні параметри щодо розрахунків надійності елементів бурильної колони.

Вібрації бурильної колони та її елементів можна вважати випадковими, і розрахунок їх параметрів проводити із застосуванням апарату теорії ймовірних коливань. На цьому етапі досліджень вважатимемо, що реакція бурильної колони як механічної системи на вузькосмугову випадкову вібрацію буде еквівалентною реакції на дію гармонічної вібрації, а реакція системи на широкосмугову вібрацію – реакції на дію полігармонічного збурення. Отже, у першому наближенні приймаємо, що в бурильній колоні виникають гармонічні коливання.

Вихід із ладу елементів бурильної колони пов'язаний із дією багатьох геологічних і технічних чинників, зокрема якщо напруження або деформації в її елементах перевищать допустиму величину і елемент або зруйнується, або в ньому виникнуть часткова деформація, а отже, станеться відмова елемента (наприклад, долота) від подальшої роботи. У цьому випадку критерієм є надмірні напруження.

Більшість втомних руйнувань у бурильних колонах відбувається тоді, коли напруження під час вібрацій не дуже великі, а руйнування є наслідком великої кількості циклів напруження. Критерієм несправності в цьому випадку буде досягнення межі витривалості матеріалу.

Наявність концентраторів напружень значно знижує довговічність бурильного інструменту. У зв'язку з цим застосовують різні принципи зниження вібраційних напружень. Останнім часом у багатьох країнах все частіше використовують віброшвидкість

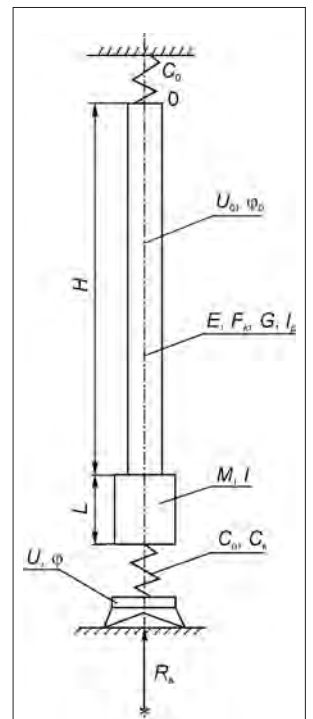


Рис. 1. Моделювальна схема бурильної колони:  $C_0$  – жорсткість талевої системи, яка змінюється в процесі поглиблення вибою;  $H$  – довжина бурильних труб;  $L$  – довжина ОБТ;  $E$  – модуль Юнга;  $F_k$  – площа поперечного перерізу труб колони;  $G$  – модуль зсуву;  $I_p$  – полярний момент інерції колони;  $M$  – маса ОБТ;  $I$  – момент інерції ОБТ;  $C_n, C_k$  – відповідно поздовжня і крутна жорсткість амортизаторів;  $U_0(x, t), \phi_0(x, t)$  – поздовжні й крутильні переміщення перерізів бурильної колони;  $U(t), \phi(t)$  – поздовжні та крутильні переміщення долота;  $R_b$  – реакція вибою

як показник надійності конструкцій у разі вібрацій [4]. Середньоквадратичне значення віброшвидкості лінійно пов'язано із середньоквадратичним напруженням і не залежить від конструктивних особливостей бурильної колони. Надалі для оцінки міцності використовуватимемо максимальне напруження

$$\sigma_{\max} = v_{\max} A^* \sqrt{E\rho}, \quad (22)$$

де  $v_{\max}$  – максимальна амплітуда відносної віброшвидкості елемента,  $A^*$  – коефіцієнт, який враховує розподіл амплітуд напружень і відносних віброшвидкостей за об'ємом бурильної колони.

Нижче, згідно з [5], наведено значення коефіцієнта  $A^*$  для стрижнів:

поздовжні коливання стрижнів – 1,00;

крутильні коливання круглих стрижнів – 0,75;

згинальні коливання вільно обпертих консольних балок – 2,00;

згинальні коливання тонкостінних стрижнів, защемлених із обох боків, за таких тонів: основного – 1,73, вищих – 2,00.

Про можливість практичного використання одержаного критерію свідчить його застосування у турбобудуванні і для розрахунку вібронпруженості двигунів внутрішнього згорання [6].

Розглянемо спрощене рівняння пружних коливань бурильної колони як стрижня зі змінним перерізом за довжиною, для чого використаємо рівняння (2) та (3). Для цього продиференціюємо по  $x$  поздовжню силу, крутний момент, що дасть можливість знайти вирази, які пов'язують деформацію системи із зовнішніми параметрами і навантаженнями. Потрібно повторити виведення для поздовжніх і крутильних коливань. У результаті отримаємо диференціальне рівняння згинальних коливань бурильної колони в площині  $x, y$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ E(x) I_p(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = q_a(x,t). \quad (23)$$

Функцію можна представити у вигляді суми  $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$ , де перший член описує вільні поперечні коливання конструкції, а другий – вимушені коливання. Відповідно однорідне диференціальне рівняння матиме такий вигляд:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ E(x) I_p(x) \frac{\partial^2 y_1(x,t)}{\partial x^2} \right] = m(x) \frac{\partial^2 y_1(x,t)}{\partial x^2} = 0. \quad (24)$$

Розглянемо коливання прямолінійної бурильної колони в разі шарнірного закріплення кінців. Якщо не враховувати деформації зсуву, форма пружної лінії колони, яку моделюємо пружним стрижнем, є синусоїдою:

$$y(x) = Y_0 \sin \frac{i\pi x}{L}, \quad (25)$$

де  $Y_0$  – амплітуда коливань у довільній точці прямолінійної ланки колони,  $i$  – номер форми коливань,  $L$  – довжина прямолінійної ланки бурильної колони.

У подальшому використано результати робіт [5, 6]. Згинальний момент:

$$M(x) = EI_y''(x) = -EI_p \frac{i^2 \pi^2}{L^2} Y_0 \sin \frac{i\pi x}{L}. \quad (26)$$

Максимальне напруження у ланці бурильної колони:

$$\sigma_{\max} = EI_p \frac{i^2 \pi^2}{W I_p^2} Y_0, \quad (27)$$

де  $W$  – момент опору.

Визначимо частоту вільних коливань цієї ланки колони

$$\omega_i = \frac{i^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI_p}{\rho F_k}}. \quad (28)$$

Запишемо вираз для довжини півхвилі

$$\left( \frac{L}{i} \right)^2 = \frac{\pi^2}{\omega_i^2} \sqrt{\frac{EI_p}{\rho F_k}}. \quad (29)$$

Тоді вираз (27) перепишемо так:

$$\sigma_{\max} = v_{\max} \sqrt{3E\rho}. \quad (30)$$

Отже, максимальне напруження згину пропорційне максимальній віброшвидкості елементів бурильної колони і для прийнятих умов закріплення не залежить від їх конструкції та розмірів.

Визначення віброшвидкості за допомогою отриманих вище рівнянь (23) та (24) дає можливість теоретично визначити максимальне напруження у точках колони, уникаючи дуже складних експериментальних їх записів.

Увівши поняття коефіцієнтів динамічності  $\eta$  і утягування форми  $k$ , визначимо безпечну віброшвидкість для бурильної колони, яку генерує долото (кінетичне збурення) [5]:

$$v_{\max} = v_{\text{доп}} k \eta, \quad (31)$$

де  $k = \frac{\int_0^{\bar{x}} y d\bar{x} / \int_0^{\bar{x}} y^2 d\bar{x}}$ ,  $\bar{y}$  і  $\bar{x}$  – безрозмірна форма коливань і рухома координата.

З отриманого рівняння можна визначити вертикальну віброшвидкість шарошкового долота, за якої можливе втомне руйнування наддолотних елементів КНБК.

#### Список літератури

1. **Юнин Е.К.** Динамика глубокого бурения / Е.К. Юнин, В.К. Хегай. – М.: Недра, 2004. – 285 с.
2. **Огородников П.І.** Захист бурильної колони від вібраційних навантажень / П.І. Огородников, В.М. Світлицький, Ю.З. Щербатюк. – К.: Інтерпрес ЛТД, 2012. – 279 с.
3. **Світлицький В.М.** Аналіз вібраційної міцності бурильної колони / В.М. Світлицький, В.І. Гоголь // Мат. IX Міжнар. наук.-практ. конф. «Нафта і газ України-2013», Яремче, 4–6 вересня 2013 р. – Львів: Центр Європи, 2013. – С. 65–66.
4. **Ананьев И.В.** Динамика конструкций летательных аппаратов / И.В. Ананьев, Н.М. Колбин, Н.П. Серебрянский. – М.: Машиностроение, 1972. – 416 с.
5. **Балюк Б.К.** Вибрационная прочность двигателей внутреннего сгорания / Б.К. Балюк. – К.: Наукова думка, 1983. – 103 с.
6. **Сидоренко М.К.** Виброметрия газотурбинных двигателей / М.К. Сидоренко. – М.: Машиностроение, 1973. – 223 с.