

ОСЬОВІ КОЛИВАННЯ РОТОРА НА ШАРИКОПІДШИПНИКОВИХ ОПОРАХ

¹І.В. Цідило, ²К.Г. Левчук

¹ІФНТУНГ, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (0342) 44277,
e-mail: public@nimg.edu.ua

²Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»;
03056, м. Київ, пр. Перемоги, 37; e-mail: k.levchuk@kpi.ua

Розглянуто обертання ротора на підшипниках кочення. Створено математичну модель роторної системи та аналітично отримано амплітудно-частотну характеристику гармонічних коливань. За допомогою чисельних методів інтегрування нелінійного диференціального рівняння руху отримано закони осьових коливань ротора та побудовані фазові траєкторії у комп'ютерному середовищі Maple. Показано, що у випадку обертання вала на підшипниках кочення виникають коливання параметричного, комбінаційного типів, які залежать від багатьох чинників: швидкості, навантажень, геометрії доріжок кочення, шорсткості контактних поверхонь, радіального зазору в підшипнику, жорсткості підшипника.

Ключові слова: ультрагармоніка, субгармоніка, коливання, резонанс, частота, демпфування, підшипники.

Рассмотрено вращение ротора на подшипниках качения. Составлена математическая модель роторной системы и аналитически получена амплитудно-частотная характеристика гармонических колебаний. При помощи числовых методов интегрирования нелинейного дифференциального уравнения движения получены законы осевых колебаний ротора и построены фазовые траектории в компьютерной среде Maple. Показано, что при вращении вала на подшипниках качения возникают колебания параметрического, комбинационного типов, которые зависят от многих факторов: скорости, нагрузок, геометрии дорожек качения, шершкостности контактных поверхностей, радиального зазора в подшипнике, жесткости подшипника.

Ключевые слова: ультрагармоника, субгармоника, колебания, резонанс, частота, демпфирование, подшипники.

The article deals with the rotation of roller-bearing rotors. The mathematical model of the rotor system is created and amplitude frequency characteristic of harmonic fluctuations is found analytically. The laws of axial fluctuations of rotor are found by the numerical integrative methods of non-linear differential moving equation. As a result phase trajectories have been built in computering Maple. It is shown that in case of shaft rotating on roller-bearings parametric and combined types of fluctuation appeared depending on many factors: speed, loadings, geometry of rolling track, roughness of contacting surfaces, radial gap in bearing, its stiffness.

Keywords: ultraharmonic, subharmonic, fluctuation, resonance, frequency, damping, bearings.

Вступ

Вимушені нелінійні коливання систем з одним ступенем вільності активно досліджуються тривалий час [1–2]. Попри значну кількість публікацій, присвячених розв'язанню задачі, що описується рівнянням Дуффінга, розглянута в статті роторна система на шарикопідшипникових (ШП) опорах, демонструє низку цікавих тонких незвичних ефектів, пов'язаних, зокрема, з наявністю резонансних режимів (головний, субгармонічний і ультрагармонічний резонанси).

У більшості публікацій основна увага приділяється можливостям розв'язання асимптотичними методами нелінійних диференціальних рівнянь, що є можливим у випадку відносно досить малих коефіцієнтів при нелінійностях і дослідженні розбіжностей між наближеними аналітичними законами коливального руху і експериментальними випробуваннями.

В нафтогазовій галузі все частіше маємо справу з установками, де коефіцієнти нелінійності у пружних силах можуть досягати значних величин. У сучасних потужних комп'ютерних математичних середовищах з'явилась мож-

ливість досліджувати поведінку механічної системи в залежності від різноманітних параметрів: збурювальної сили й властивостей системи, початкових умов. Тобто, дослідити систему стає можливим у випадку стаціонарних і перехідних режимів, навіть у тих випадках, коли описати рух за допомогою елементарних функцій неможливо.

Постановка задачі

Для дослідження коливальних рухів ротора на ШП опорах необхідно скласти її математичну модель й записати динамічне рівняння руху. Аналітично дослідити гармонічні коливання цієї роторної системи, що зводяться до розв'язання лінійного рівняння, побудувати амплітудно-частотні характеристики для різних значень збурювальної сили. За допомогою чисельних методів у комп'ютерному середовищі Maple побудувати закони осьових коливань ротора, фазові траєкторії та фазовий портрет.

1 Математична модель роторної системи

Згідно з контактною теорією Г. Герца потенціальна енергія роторної системи, до якої

входять два однакових шарикопідшипники (ШП), описується рівнянням

$$\Pi = \sum_{n=1}^2 \Pi_n = \frac{2}{5} \sum_{n=1}^2 \sum_{i=1}^N k_{in} w_{in}^{5/2} = \frac{2}{5} k \sum_{n=1}^2 \sum_{i=1}^N w_{in}^{5/2}, \quad (1)$$

де: $n=1$ для лівого і $n=2$ для правого ШП, N – кількість кульок, k_{in} – коефіцієнт Герца, що залежить від матеріалу, з якого виготовлені кільця і кульки i -ої контактної пари n -го ШП, w_{in} – пружна контактна деформація i -ої контактної пари n -го ШП, що визначається зміною відстані між центрами радіусів кривизни зовнішнього і внутрішнього кілець ШП.

Розглянемо два однакових ШП з нерухомими зовнішніми кільцями (рис. 1), поверхні кочення зовнішнього і внутрішнього кілець яких опишемо у системах координат, зв'язаних з відповідними кільцями, а кульок – у сферичних координатах, віднесених до центра кульок.

Для запису рівнянь руху роторної системи введемо дві системи координат: $Ox_0y_0z_0$, пов'язану з нерухомою основою, і $Cxyz$, пов'язану з центральними осями інерції ротора. Якщо нерухомими є зовнішні кільця ШП, то вісь Sy спрямуємо вздовж геометричної осі їхньої поверхні посадки, а якщо внутрішні – вздовж осі центрів вала ротора. Вважатимемо, що ротор динамічно зрівноважений, тоді систему координат $Cxyz$ виберемо так, щоб вона не приймала участі у власному обертанні ротора. Положення ротора задамо трьома лінійними x, y, z і двома кутовими α, β координатами (рис. 2).

Положення i -ої контактної пари n -го ШП визначається кутом φ_i , який відраховується від осі Oy в напрямку обертання ротора. Деформацію цієї контактної пари подамо у вигляді

$$\begin{aligned} w_{in} &= \sqrt{y_{in}^2 + z_{in}^2} - R_1 - R_2 + d; \quad (2) \\ y_{in} &= (-1)^n (R_1 + R_2 - h_1 + h_2) + \\ &+ [y - (-1)^n \ell_1 \alpha] \cos \varphi_i + [z + (-1)^n \ell_1 \beta] \sin \varphi_i; \\ z_{in} &= (-1)^n (\ell_2 - \ell_1 - x_0) + \\ &+ [x + (R_2 + h_2)(\beta \sin \varphi_i - \alpha \cos \varphi_i)], \end{aligned}$$

де: R_1, R_2 – радіуси доріжок зовнішнього і внутрішнього кілець ШП; h_1, h_2 – відстані від осі обертання до зовнішнього і внутрішнього кілець ШП; ℓ_1, ℓ_2 – відстань до місць посадки лівого і правого ШП; d – діаметри кульок ШП; x, y, z – переміщення ротора; α, β – кути повороту ротора навколо осей, перпендикулярних до осі обертання; x_0 – осьова деформація ротора, що виникає як наслідок посадки ШП з натягом.

З урахуванням виразу для потенціальної енергії (1) реакція підвісу ротора по координаті x запишеться у вигляді

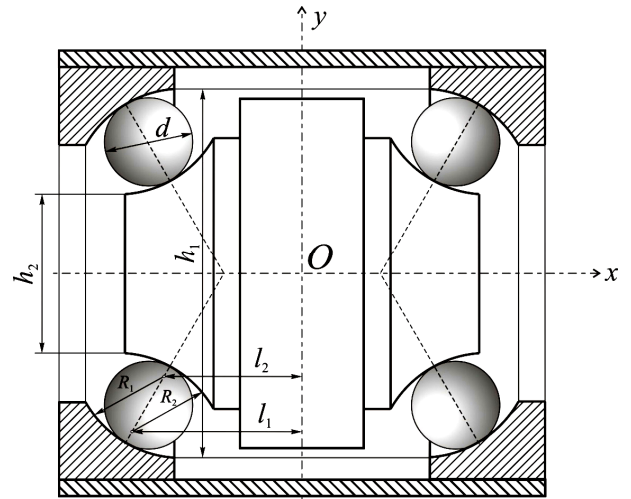


Рисунок 1 – Роторна система з двома симетрично розміщеними шарикопідшипниками

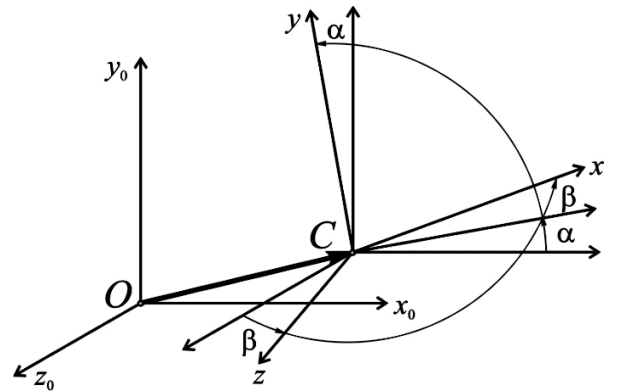


Рисунок 2 – Системи координат, пов'язані з нерухомою основою і центральними осями інерції ротора

$$\begin{aligned} F_x^{np} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -k \sum_{n=1}^2 \sum_{i=1}^N w_{in}^{3/2} \frac{\partial w_{in}}{\partial x} = \\ &= -k \sum_{n=1}^2 \sum_{i=1}^N w_{in}^{3/2} \frac{z_{in}}{\sqrt{y_{in}^2 + z_{in}^2}}. \quad (3) \end{aligned}$$

Будемо вважати, що зближення кілець ШП під зусиллям осьового натягу більше деформацій в контактних парах, викликаних навантаженнями і переміщеннями ротора. У цьому випадку для аналітичних досліджень доцільно силу пружності (3) розкласти в ряд Тейлора

$$F_x^{np} = F_0^{np} - k \sum_{n=1}^2 \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} A_m^n x^m \right], \quad (4)$$

де: $F_0^{np} = -k \sum_{n=1}^2 (-1)^n w_0^{3/2} \frac{z_0}{\sqrt{y_0^2 + z_0^2}} = 0$ – нульовий член ряду Тейлора;

$$A_m^{in} = \frac{\partial^m f}{\partial x^m} \Big|_{x=y=z=0, \alpha=\beta=0} = \frac{\partial^m f}{\partial x^m} \Big|_0$$

– m -ий коефіцієнт у розкладі в ряд Тейлора;

$f = w_{in}^{3/2} \frac{z_{in}}{\sqrt{y_{in}^2 + z_{in}^2}}$ – функція лінійних та кутових переміщень ротора.

Отримаємо перші три коефіцієнти у розкладі сили пружності (4)

$$A_1^n = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_0 = \frac{\sqrt{w_{in}}}{y_{in}^2 + z_{in}^2} \left(\frac{3}{2} z_{in}^2 + \frac{w_{in} y_{in}^2}{\sqrt{y_{in}^2 + z_{in}^2}} \right) \Bigg|_0 = \frac{\sqrt{w_0}}{y_0^2 + z_0^2} \left(\frac{3}{2} z_0^2 + \frac{w_0 y_0^2}{\sqrt{y_0^2 + z_0^2}} \right) = A_1;$$

$$A_2^n = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_0 = z_{in} \sqrt{\frac{w_{in}}{y_{in}^2 + z_{in}^2}} \times \left[\frac{1}{2w_{in}} \left(1 - \frac{4w_{in}}{\sqrt{y_{in}^2 + z_{in}^2}} \right) \left(\frac{3}{2} z_{in}^2 + \frac{w_{in} y_{in}^2}{\sqrt{y_{in}^2 + z_{in}^2}} \right) \Bigg|_0 + \frac{1}{\sqrt{y_{in}^2 + z_{in}^2}} \left(3 + \frac{y_{in}^2}{y_{in}^2 + z_{in}^2} - \frac{w_{in} y_{in}^2}{\sqrt{(y_{in}^2 + z_{in}^2)^3}} \right) \Bigg|_0 \right] = (-1)^n z_0 \sqrt{\frac{w_0}{y_0^2 + z_0^2}} \times \left[\frac{1}{2w_0} \left(1 - \frac{4w_0}{\sqrt{y_0^2 + z_0^2}} \right) \left(\frac{3}{2} z_0^2 + \frac{w_0 y_0^2}{\sqrt{y_0^2 + z_0^2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{y_0^2 + z_0^2}} \left(3 + \frac{y_0^2}{y_0^2 + z_0^2} - \frac{w_0 y_0^2}{\sqrt{(y_0^2 + z_0^2)^3}} \right) \right] = (-1)^n A_2,$$

$$A_3^n = \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_0 = A_3; \quad A_4^n = \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_0 = (-1)^n A_3,$$

де: $y_0 = (-1)^n (R_1 + R_2 - h_1 + h_2);$

$z_0 = (-1)^n (\ell_2 - \ell_1 - x_0);$

$w_0 = \sqrt{y_0^2 + z_0^2} - R_1 - R_2 + d.$

З урахуванням коефіцієнтів A_m^n вираз для сили пружності (4) з двома однаковими ШП набуває вигляду

$$F_x^{np} = -k \sum_{n=1}^2 \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2m-1)!} A_{2m-1} x^{2m-1} + (-1)^n \frac{1}{(2m)!} A_{2m} x^{2m} \right\} \right] = (-1)^n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)!} A_{2m-1} x^{2m-1} \quad (5)$$

2 Динамічне рівняння руху роторної системи

З урахуванням двох перших членів у розкладі сили пружності (5) і сили в'язкого тертя рівняння руху роторної системи на двох симетричних ШП опорах вздовж осі обертання запирається у вигляді

$$m\ddot{x} + \beta \dot{x} + 2k A_1 x + \frac{k}{3} A_3 x^3 = H_0 \sin \omega t,$$

або

$$\ddot{x} + h\dot{x} + \omega_0^2 x + bx^3 = H \sin \omega t, \quad (6)$$

де: $h = \frac{\beta}{m}$ – коефіцієнт згасань; $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k A_1}{m}}$ –

власна частота ротора; $b = \frac{k A_3}{3m}$ – коефіцієнт нелінійної складової пружності роторної системи, $H = \frac{H_0}{m}$ – амплітуда збурювальної сили на одиницю маси роторної системи.

Рівняння (6) відносять до типу рівнянь Дуффінга¹. Динамічне рівняння руху ШП роторної опори (6) нелінійне, а піддатливість самих ШП призводить до значного зниження резонансних швидкостей, тому субгармонійні та ультрагармонійні коливання ротора, поміщеного в ШП опору з пружними опорами, можуть виникати в робочому діапазоні швидкостей [4]. Оскільки в (6) коефіцієнт при нелінійному члені (b) того ж порядку, що і при лінійному (ω_0^2), то для розв'язання цього рівняння асимптотичні методи, за допомогою яких, зазвичай, досліджують квазілінійні системи, у цьому випадку непридатні.

При обертанні ротора на підшипникових опорах виникають субгармонійні коливання параметричного і комбінаційного типу, викликані різноманітними чинниками, такими, як кутова швидкість ротора, динамічні навантаження на опори, геометрія доріжок і кульок, якість обробки поверхонь, що контактують, радіальним зазором, жорсткістю підшипників. Перелічені чинники викликають значні труднощі у складанні точної математичної моделі руху ротора, що призводить до необхідності прийняття спрощень.

¹ Звичайне диференціальне рівняння другого порядку $x''' + kx' + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = F \cos \omega t$, де $k > 0, \omega_0, \alpha, F, \omega$ – сталі. Це динамічне рівняння руху системи з нелінійною відновлювальною силою $F_{np} = -\omega_0^2 x - \alpha x^3$ і згасанням, що здійснює вимушені коливання під дією гармонічної збурювальної сили $Q = F \cos \omega t$. При $\alpha > 0$ силу пружності називають жорсткою, а при $\alpha < 0$ – м'якою. Вперше дослідження розв'язків цього рівняння провів Г. Дуффінг.

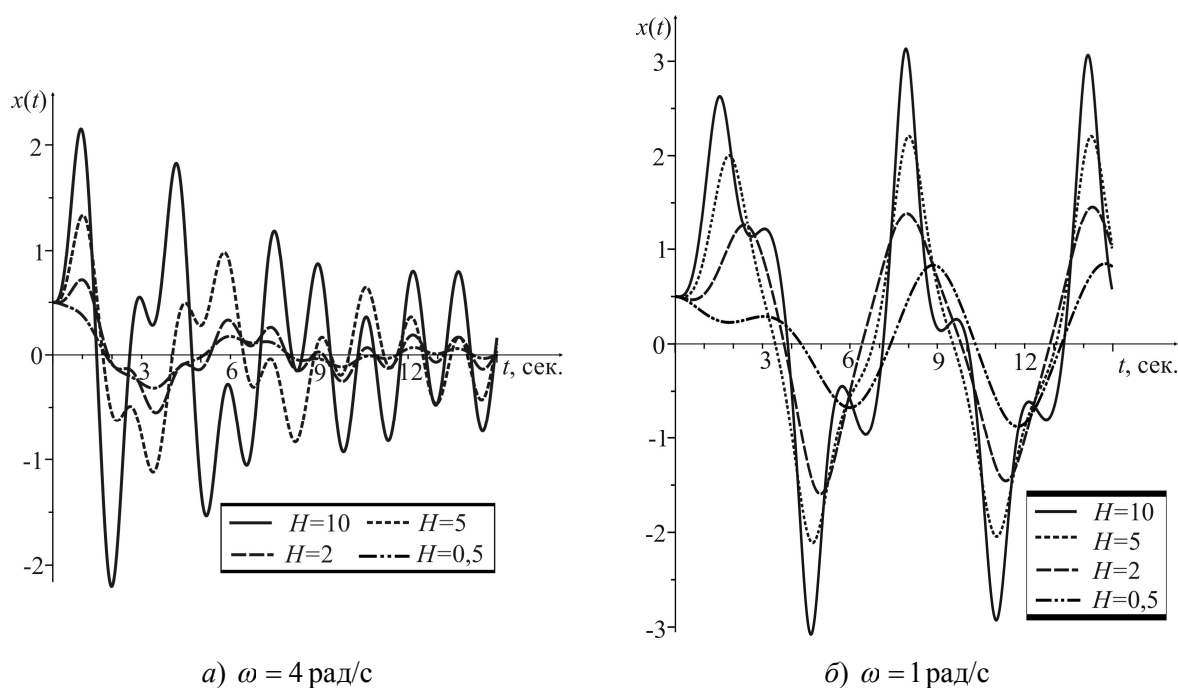


Рисунок 3 – Осьові коливання ШП роторної системи для $\omega_0 = 1$ рад/с, $h = 0,4$ рад/с, $b = 1$ (мс)⁻²

3 Чисельне дослідження гармонічних коливань ротора у математичному середовищі Maple

В даній статті акцентується увага на деяких характерних ефектах, пов'язаних з проблемою, що розглядається, та на розробці методів комп'ютерного моделювання стосовно до задач динаміки машин.

Експеримент свідчить, що, на відміну від лінійних коливальних систем у нелінійних системах, рух яких описується рівнянням Дуффінга, існують коливання, частота яких:

– менше частоти збудовальної сили ω в кратно число разів – такі коливання називають субгармонічними порядку $\omega/2, \omega/3, \omega/4$ тощо;

– вище частоти збудення ω в кратно число разів – такі коливання називають ультрагармонічними або супергармонічними порядку $3\omega, 5\omega, 7\omega$ тощо [3].

На рис. 3, а наведено отримані шляхом комп'ютерного моделювання графіки осьових коливань ШП роторної системи для різних частот і амплітуди збудовальної сили: далеко від зони резонансу $\frac{\omega}{\omega_0} = 4$ (рис. 3, а) і в зоні гар-

монійного резонансу. Дослідження показали, що збільшення частоти збудовальної сили призводить до збільшення появи субгармонік та зменшення амплітуди коливального руху ротора, і навпаки, зменшення частоти збудовальної сили – до збільшення ультрагармонік та збільшення амплітуди коливань ротора аж до резонансних значень.

У результаті комп'ютерного моделювання також вдалося переконатись у тому, що, починаючи з певного моменту часу, коливання все швидше входять у стаціонарний режим, у якому спостерігається наявність лише гармонічних коливань у випадку віддалення від зони резонансу. Тобто з деякого моменту часу згасання коливань припиняється.

Одним із якісних методів дослідження нелінійних коливальних систем є метод фазової площини [4]. Фазовий портрет для зведеної амплітуди збуденої сили $H = 10$ м/с² і фазові траєкторії для $H = 5$ м/с² та $H = 2$ м/с² показано на рис. 4-6 з урахуванням демпфування ($h = 0,4$ рад/с) і без нього. З наведених графіків видно, що фазові траєкторії утворюють сім'ю спіралей, що, навиваючись, зміщуються в бік початку системи координат $Ox\dot{x}$ і у випадку наявності демпфування ($h = 0,4$ рад/с на рис. 4, а-6, а) зміщення відбувається швидше, ніж за його відсутності ($h = 0$ на рис. 4, б-6, б).

4. Аналітичне дослідження гармонічних коливань ротора

4. Аналітичне дослідження гармонічних коливань ротора

Аналітичне дослідження проблеми врахування нелінійних сил при неодночастотному збуденні базується на ідеї поділу руху. При цьому розроблено декілька підходів, в яких рух системи розглядають як сукупність двох рухів, а саме: відокремлення тих рухів, що істотно залежать від дисипації (резонансних) від тих, що практично не залежать від дисипації (нерезонансних), які умовно можна поділити на два. Перший підхід базується на методах гармонійної або статистичної лінеаризації. Другий підхід, заснований на ідеях вібраційної реології, за яким рух поділяють на швидкий і повільний, і визначення так званих вібраційних сил, які відтворюють вплив високочастотних складових збудення [5].

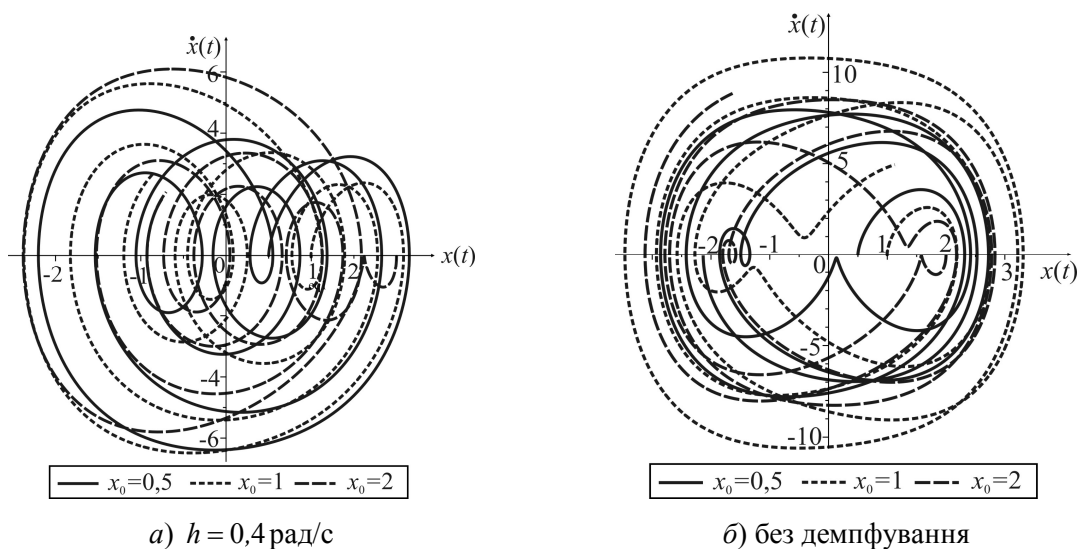


Рисунок 4 – Фазовий портрет ШП роторної системи для $\dot{x}_0 = 0$, $\omega_0 = 1$ рад/с, $\omega = 4$ рад/с, $b = 1$ (мс)⁻², $H = 10$ м/с²

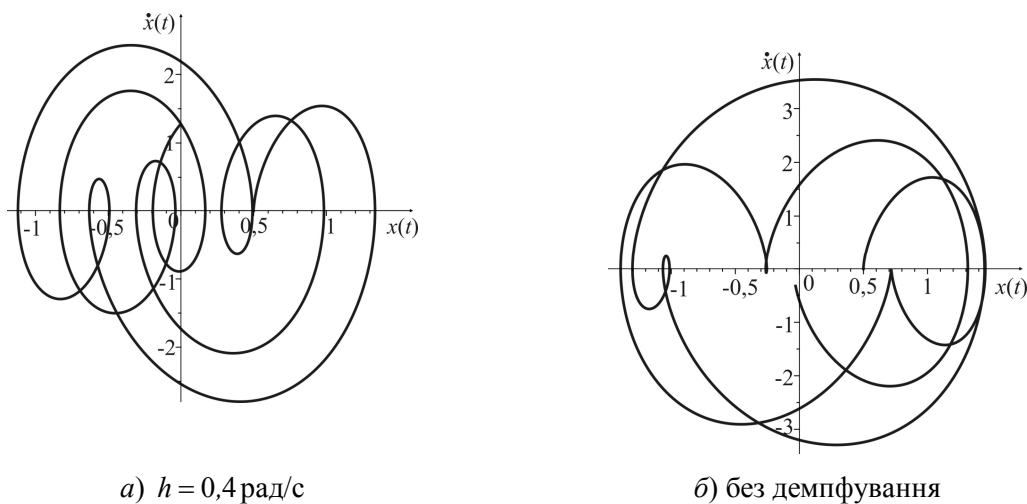


Рисунок 5 – Фазова траєкторія ШП роторної системи для $x_0 = 0,5$ м, $\dot{x}_0 = 0$, $\omega_0 = 1$ рад/с, $\omega = 4$ рад/с, $b = 1$ (мс)⁻², $H = 5$ м/с²

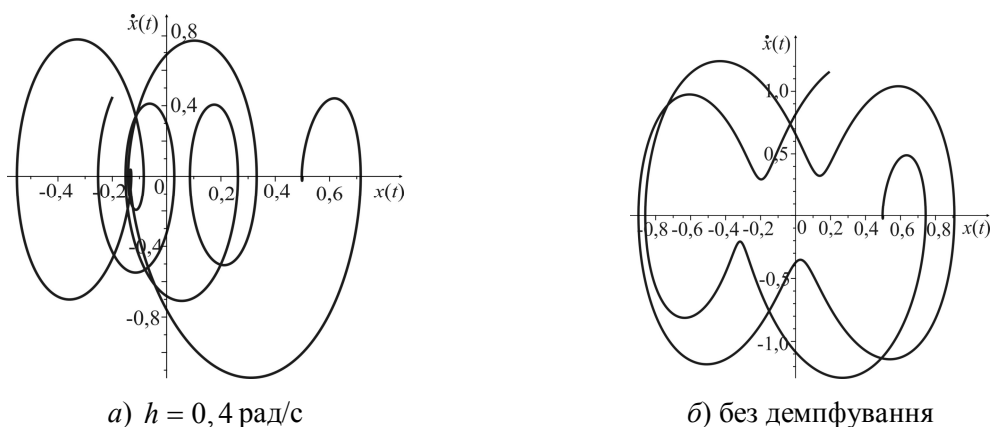


Рисунок 6 – Фазова траєкторія ШП роторної системи для $x_0 = 0,5$ м, $\dot{x}_0 = 0$, $\omega_0 = 1$ рад/с, $\omega = 4$ рад/с, $b = 1$ (мс)⁻², $H = 2$ м/с²

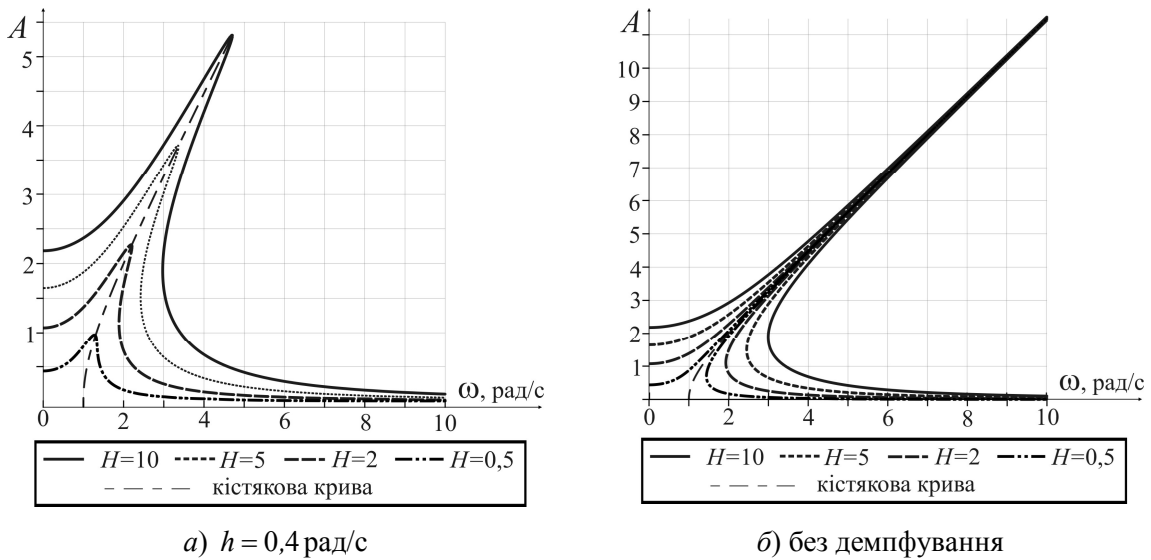


Рисунок 7 – Амплітудно-частотні характеристики гармонічних коливань ротора для $\omega_0 = 1$ рад/с, $b = 1$ (мс)⁻²

Щоб дослідити ШП роторну систему на гармонічні коливання частинний розв’язок рівняння (6) шукатимемо у вигляді

$$x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t, \quad (7)$$

де C_1, C_2 – сталі коефіцієнти.

Невідомі сталі коефіцієнти C_1, C_2 знайдемо шляхом підстановки частинного розв’язку (7) в рівняння (6)

$$\begin{aligned} & \left[C_1(\omega_0^2 - \omega^2) - h\omega C_2 + \frac{3b}{4} C_1(C_1^2 + C_2^2) \right] \sin \omega t + \\ & + \left[C_2(\omega_0^2 - \omega^2) + h\omega C_1 + \frac{3b}{4} C_2(C_1^2 + C_2^2) \right] \cos \omega t - \\ & - \frac{b}{4} C_1(C_1^2 - 3C_2^2) \sin 3\omega t + \frac{b}{4} C_2(C_2^2 - 3C_1^2) \cos 3\omega t = \\ & = H \sin \omega t. \end{aligned} \quad (8)$$

З (8) для гармонічних коливань маємо

$$\begin{cases} C_1 \left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{3b}{4} A^2 \right) - h\omega C_2 = H; \\ C_2 \left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{3b}{4} A^2 \right) + h\omega C_1 = 0, \end{cases} \quad (9)$$

де $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ – амплітуда гармонічних коливань. Позбувшись у системі рівнянь (9) коефіцієнтів C_1 і C_2 , отримуємо амплітудно-частотну характеристику цих коливань

$$A \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{3b}{4} A^2 \right)^2 + (h\omega)^2} = H. \quad (10)$$

Амплітудно-частотну криву для різних значень амплітуди збудовувальної сили зображено на рис. 7. Очевидно, що у роторній системі з демпфуванням (рис. 7, а) максимальна амплітуда коливань менша, ніж у випадку коливань без демпфування (рис. 7, б). Нахил кістякової кривої пов’язаний з наявністю нелінійності.

Оскільки у роторній системі на ШП опорах пружність жорстка, то вона нахилена вправо, а кут нахилу збільшується із збільшенням коефіцієнта нелінійності. У такій системі одній частоті збудовувальної сили може відповідати три значення амплітуди.

Зазначимо, що у лінійному випадку ($b = 0$) амплітуда гармонічних коливань

$$A = \frac{H}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (h\omega)^2}} \quad \text{з максимальним значенням}$$

$$A_{max} = \frac{H}{h \sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{2}}} \quad \text{при } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{2}}.$$

Однак на відміну від лінійних коливань навіть за відсутності демпфування максимальна амплітуда коливань обмежена, що зумовлено наявністю нелінійності у силі пружності ШП опори (рис. 8).

Висновки

З отриманих досліджень чисельного інтегрування динамічних рівнянь руху роторної системи видно, що характер осьових коливальних рухів ротора на симетричних ШП опорах залежить від співвідношень між коефіцієнтами пружності A_1 і A_3 , котрі, в свою чергу, є функціями початкових умов і геометричних параметрів самих ШП.

Водночас у роторних системах з нелінійною жорсткістю окрім гармонічних коливань порядку 1, (особливо у перехідних (нестационарних) і резонансних зонах), можливе виникнення ультрагармонічних і субгармонічних коливань.

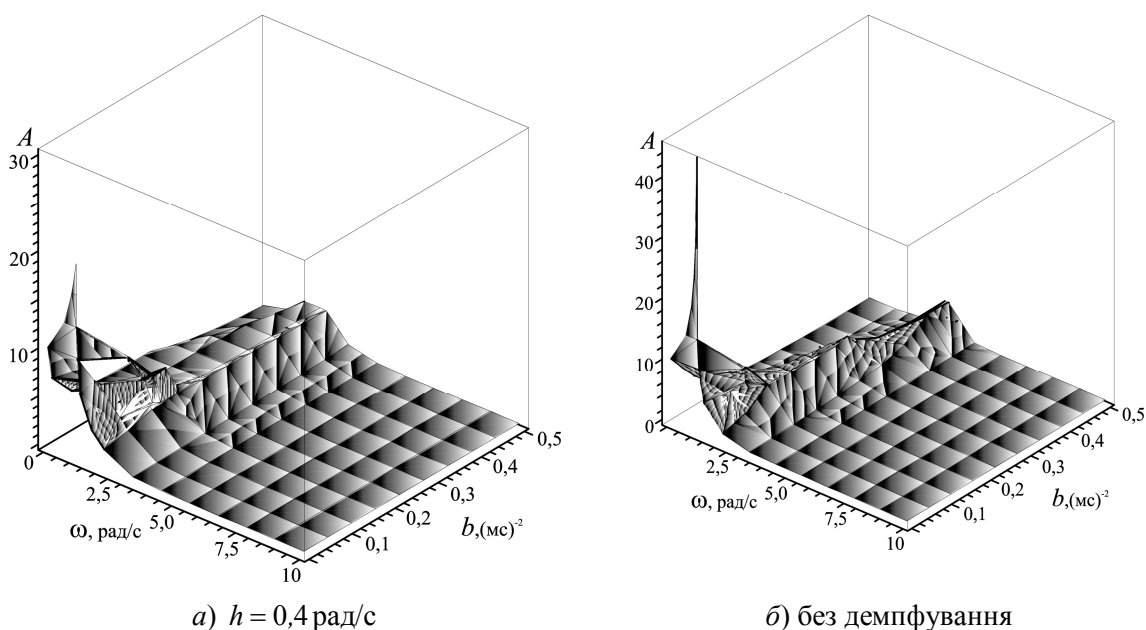


Рисунок 8 – Амплітудно-частотна характеристика гармонічних коливань ротора для $\omega_0 = 1$ рад/с, $b = 1$ (мс)⁻², $H = 10$ м/с²

Література

1 Блэкьер О. Анализ нелинейных систем / Блэкьер О. – М.: Мир, 1969. – 400 с.

2 Скотт Э. Нелинейная наука: рождение и развитие когерентных структур / Скотт Э. – М.: Физматлит, 2007. – 560 с.

3 Журавлёв В.Ф. Прикладные методы в теории колебаний / Журавлёв В.Ф., Климов Д.М. – М.: Наука, 1988. – 328 с.

4 Вульфсон И.И. Компьютерное моделирование динамических эффектов, обусловленных нелинейными диссипативными силами при полигармоническом возбуждении / Вульфсон И.И. // Теория механизмов и машин. – 2005. – № 2. – Том 3. – С. 42-53.

5 Kolsch H. Simulation und Identifikation von Bauteilen mit statischer Hysterese / Kolsch H. – Dämpfung und Nichtlinearität. Düsseldorf: VDI. – Verlag, 1993. – S. 179-194.

*Стаття надійшла до редакційної колегії
09.06.11
Рекомендована до друку професором
Векериком В.І.*