УДК [519.876.5:530.182]:553.98

# ЧИСЛОВИЙ МЕТОД КВАЗІКОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ДОСЛІДЖЕННЯ ДВОФАЗНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ В ЕЛЕМЕНТАХ ПЛОЩОВОГО ЗАВОДНЕННЯ

***А.Я.Бомба, С.В.Ярощак***

*Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне, вул. Остафова 31,*
*тел. (096)5714253, e-mail: abomba@ukr.net, yaroschak@mail.ru*

*На основі ідей методів квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик процесу і середовища побудовано алгоритм числового розв'язання модельних задач двофазної фільтрації типу Баклея-Леверетта в елементах площового заводнення, що дає змогу передбачити характеристик пластової системи за різних умовах впливу на неї та вивчити особливості фільтрації в привибійних зонах свердловин.*

Ключові слова: двофазна фільтрація, площове заводнення, квазіконформні відображення

*По идеям методов квазиконформных отображений и поэтапной фиксации характеристик процесса и среды построен алгоритм числового решения модельных задач двухфазной фильтрации типа Баклея-Леверетта в элементах площадного заводнения, что позволяет предусмотреть характеристик пластовой системы в различных условиях влияния на нее и изучить особенности фильтрации в призабойных зонах скважин.*

Ключевые слова: двухфазная фильтрация, площадное заводнение, квазиконформные отображения

*Based on the ideas of the methods of quasiconformal mappings and a phased commit process characteristics and environment of an algorithm of numerical solutions of problems of two-phase filtration type Buckley-Leverett in the elements of areal flooding, which allows to provide the characteristics of reservoir system under conditions of impact on her and filtering features in bottom-hole zones of wells*

Keywords: two-phase filtering, pattern flooding, quasiconformal mappings

На сьогоднішній день накопичено великий досвід застосування інтенсивних систем розробки нафтових родовищ. Серед них однією із ефективних є площове заводнення, при якому експлуатаційні та нагнітальні свердловини розташовуються певним регулярним чином в межах розроблюваних площ [1].

У даній роботі на основі ідей методів квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристики процесу і середовища [3–5] побудовано алгоритм числового розв'язання модельних задач двофазної фільтрації типу Баклея-Леверетта, що дає змогу передбачити характеристик пластової системи для різних умов впливу на неї та вивчити особливості фільтрації в привибійних зонах свердловин.

Розглянемо процес двофазної ізотермічної фільтрації рідин (води, нафти) в'язкості $\mu_1$, $\mu_2$ в елементі симетрії лінійної системи з шаховим розміщенням свердловин (рис. 1).

Відповідні закон руху та рівняння нерозривності течії, записані відносно квазіпотенціалу швидкості $\varphi = \varphi(x,y,t) = -p(x,y,t) + \tilde{p}$ ($p(x,y,t)$ – тиск, $\tilde{p}$ – деяке характерне його значення) та насиченості водою $s = s(x,y,t)$, згідно з [6 – 8] представимо у вигляді:

$$\vec{\upsilon}_1 = \frac{k\tilde{k}_1}{\mu_1} grad\varphi,\ \vec{\upsilon}_2 = \frac{k\tilde{k}_2}{\mu_2} grad\varphi,$$

$$\sigma\frac{\partial(1-s)}{\partial t} + div\vec{\upsilon}_1 = 0,\ \sigma\frac{\partial s}{\partial t} + div\vec{\upsilon}_2 = 0,$$

де: $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$ – вектори швидкості,
$\sigma$ – пористість, $t$ – час,
$\tilde{k}_1 = (1-s)^2$, $\tilde{k}_2 = s^2$ – відносні фазові провідності, $k$ – абсолютна провідність ґрунту.

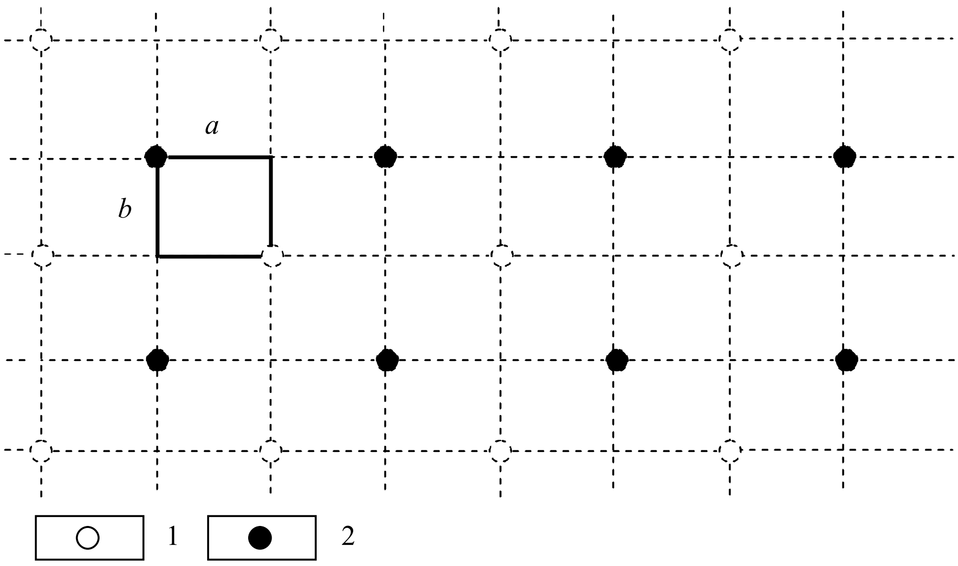
Звідси, з урахуванням сумарної швидкості $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2$ фільтраційної течії та початкових і граничних умов, маємо:

$$div\vec{\upsilon} = 0,\ \vec{\upsilon} = \bar{k}\cdot grad\varphi,\ \sigma\frac{\partial s}{\partial t} + \upsilon_x\frac{\partial f}{\partial x} + \upsilon_y\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\varphi\big|_{L*} = \varphi_*,\ \varphi\big|_{L^*} = \varphi^*, \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{L_0} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{L^0} = 0,\ s\big|_{L*} = s_*, \quad (1)$$

$$s(x,y,t)\big|_{t=0} = \tilde{s}(x,y),\ \varphi(x,y,t)\big|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x,y),$$

де:
$$L_* = \{z:\ x = r\cos(\tau),\ y = r\sin(\tau),$$
$$3\pi/4 \le \tau \le 2\pi\} = \{z: f_*(x,y) = 0\},$$
$$L^* = \{z:\ x = r\cos(\tau) + a,\ y = r\sin(\tau) + b,$$
$$\pi/2 \le \tau \le \pi\} = \{z: f^*(x,y) = 0\},$$
$$L_0 = AN \cup ND = \{z: f_0(x,y) = 0\},$$
$$L^0 = BM \cup MC = \{z: f^0(x,y) = 0\},$$
$$AN = \{z: x = 0, -r \le y \le -b\},$$
$$ND = \{z: y = -b, 0 \le x \le a - r\},$$
$$BM = \{z: y = 0, r \le x \le a\},$$
$$MC = \{z: x = a, 0 \le y \le -b + r\},$$
$$\bar{k}(s) = \frac{k\tilde{k}_1(s)}{\mu_1} + \frac{k\tilde{k}_2(s)}{\mu_2},$$
$$f(s) = \frac{\mu_1\tilde{k}_2(s)}{\mu_2\tilde{k}_1(s) + \mu_1\tilde{k}_2(s)},$$




1 – експлуатаційна свердловина, 2 – нагнітальна свердловина, $a$ , $b$ – розміри елемента симетрії

**Рисунок 1 – Лінійна система з шаховим розміщенням свердловин**

$\tilde{s}(x,y)$ , $\tilde{\varphi}(x,y)$ – задані, достатньо гладкі функції такі, що: $\tilde{s}\big|_{L*} = s_*$ , $\tilde{\varphi}\big|_{L*} = \varphi_*$ , $\tilde{\varphi}\big|_{L^*} = \varphi^*$ , $\left.\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial n}\right|_{L_0} = \left.\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial n}\right|_{L^0} = 0$ .

Аналогічно до [3], ввівши функцію течії $\psi$ (квазікомплексно спряжену до $\varphi$) приходимо до задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x,y) + \mathrm{i}\psi(x,y)$ [5] однозв'язної області $G_z = L_* \cup L_0 \cup L^* \cup L^0$ на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi :\ \varphi_* < \varphi < \varphi^*,\ 0 < \psi < Q\}$ з невідомою витратою $Q$ :

$$\bar{k}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y},\ \bar{k}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x},\ (x,y)\in G_z^0,$$

$$\varphi\big|_{L*} = \varphi_*,\ \varphi\big|_{L^*} = \varphi^*,\ \psi\big|_{AD} = 0,\ \psi\big|_{BC} = Q, \quad (2)$$

$$\varphi(x,y,t)\big|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x,y),$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\bar{k}}{\sigma}\frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial y}\right),$$

$$s\big|_{L*} = s_*,\ s(x,y,t)\big|_{t=0} = \tilde{s}(x,y), \quad (3)$$

де:

$$Q = \int\limits_{L*} -\upsilon_y dx + \upsilon_x dy\,,$$

$$\upsilon(x,y) = \sqrt{\upsilon_x^2(x,y) + \upsilon_y^2(x,y)}\,.$$

Обернена до (2) крайова задача на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi,\psi) + iy(\varphi,\psi)$ області $G_\omega$ на $G_z$ та рівняння для дійсної $x = x(\varphi,\psi)$ і уявної $y = y(\varphi,\psi)$ частини характеристичної функції течії запишеться у вигляді:

$$\bar{k}\frac{\partial y}{\partial\psi} = \frac{\partial x}{\partial\varphi},\quad \bar{k}\frac{\partial x}{\partial\psi} = -\frac{\partial y}{\partial\varphi},\quad (\varphi,\psi)\in G_\omega, \quad (4)$$

$$f_*(x(\varphi_*,\psi), y(\varphi_*,\psi)) = 0,\ 0 \le \psi \le Q,$$

$$f^*(x(\varphi^*,\psi), y(\varphi^*,\psi)) = 0,\ \varphi_* \le \varphi \le \varphi^*, \quad (5)$$

$$f(x(\varphi,0), y(\varphi,0)) = 0,\ f(x(\varphi,Q), y(\varphi,Q)) = 0,$$

$$\varphi(x(\varphi,\psi), y(\varphi,\psi), t)\big|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x(\varphi,\psi), y(\varphi,\psi))\,,$$

$$0 \le \psi \le Q,\ \varphi_* < \varphi \le \varphi^*,$$

$$\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\bar{k}\frac{\partial x}{\partial\psi}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\bar{k}}\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right) = 0\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\bar{k}\frac{\partial y}{\partial\psi}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\bar{k}}\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right) = 0\,. \quad (6)$$

Використавши відповідні формули переходу

$$J = \frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\psi} - \frac{\partial x}{\partial\psi}\frac{\partial y}{\partial\varphi},\ \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial\psi}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial\psi}\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial\psi}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial\psi},\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial\psi},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial\psi}\,,\ \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial\varphi}\,,\ \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial\varphi},$$

умови (4) та формули для обчислення компонент сумарної швидкості $\upsilon_x = \frac{\bar{k}}{J(\varphi,\psi)}\frac{\partial y}{\partial\psi}$ , $\upsilon_y = -\frac{\bar{k}}{J(\varphi,\psi)}\frac{\partial x}{\partial\psi}$ , задачу для насиченості (3) перепишемо так:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\upsilon^2}{\sigma\bar{k}}\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial\varphi}, \quad (7)$$

$$s(x(\varphi_*,\psi), y(\varphi_*,\psi), t) = s_*\,,$$

$$s(x(\varphi,\psi), y(\varphi,\psi), 0) = \tilde{s}(x(\varphi,\psi), y(\varphi,\psi))\,, \quad (8)$$


ISSN 1993—9973. Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. 2010. № 2(35)

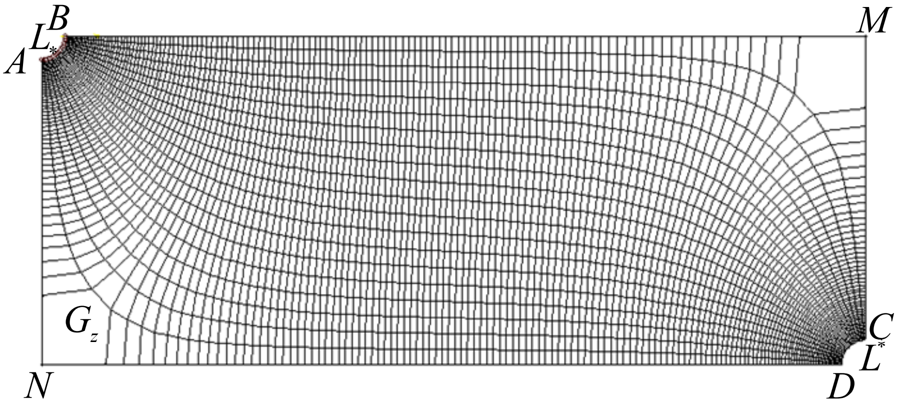



**Рисунок 2 – Елемент симетрії з побудованою гідродинамічною сіткою**

де рівняння (7) є фактично просторово одновимірним (адже змінні $t$ та $\psi$ тут фігурують як параметри). Останнє дозволяє суттєво спростити загальну стратегію (розщепити алгоритм) розв'язання вихідної задачі, а саме: а) за відомим з попереднього часового кроку ітерації розподілом насиченості $s$ розв'язуємо на наступному кроці задачу на квазіконформне відображення (4) – (6) (зокрема, будуємо динамічну сітку, знаходимо квазіпотенціал $\varphi$, витрату та інші невідомі фільтраційні параметри); б) за знайденим розподілом квазіпотенціалу і крайовим умовам для насиченості та розподілу $s$ з попереднього кроку ітерації знаходимо розподіл насиченості на наступному кроці розв'язуючи (7) – (8); в) перевіряємо умову зупинки алгоритму (однією із таких умов може бути умова перевищення допустимої частки витісняючої рідини в продукції експлуатаційної свердловини), у разі невиконання якої переходимо до пункту а) алгоритму.

Для розв'язання задачі (4) – (6) використовуємо розроблений нами (наприклад, [3]) алгоритм побудови гідродинамічних сіток.

Підкреслимо, що запропонований нами підхід введення спеціального типу фіктивного комплексного квазіпотенціалу (для далеко не квазіпотенціальних фізичних полів) з наступним використанням ідей методу квазіконформних відображень та процедури поетапного «заморожения» (фіксації) різних характеристик середовища та процесу дає змогу вихідну нелінійну задачу розщепити на послідовність простіших: крайових задач на квазіконформні відображення та нелінійних задач для просторово одновимірних диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку з параметрами тощо.

Рівняння (7) апроксимуємо різницевою схемою «проти течії» [6]. Таким чином,

$$\tilde{s}_{i,j} = s_{i,j} - \frac{\tau \upsilon_{i,j}^2}{\sigma \bar{k}_{i,j} \Delta\varphi_l} f'(s_{i-1/2,j})(s_{i,j} - s_{i-1,j}),$$

$$s_{i-1/2,j} = \frac{s_{i,j} + s_{i-1,j}}{2}, \; j = \overline{1,m}, \; i = \overline{1,n_1}, \; l = 1, \qquad (9)$$

$$i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \; l = 2, \;\; i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n - 1}, \; l = 3,$$

де: $\tau$ – крок за часом, $s_{i,j}$, $\tilde{s}_{i,j}$ – насиченості у відповідних вузлах $(i,j)$ на попередньому та наступному кроці ітерації за часом. Формули для розрахунку швидкості записуються аналогічно, як і в роботі [3], а граничну умову для насиченості – $s_{0,j} = s_*$, $j = \overline{1,m}$.

На рис. 2 в елементі симетрії зображено гідродинамічну сітку при $t = 0$, $a = 5$, $b = 2$, $r = 0.3$, $n \times m = 180 \times 20$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $k = 1$, $\sigma = 0.5$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$, $s_* = 1$, $\tilde{s}(x,y) = 0$, $\tau = 0.0001$.

Рисунки 3-4 відображають розподіл насиченості та сумарної швидкості у момент часу $t = 0.102 \cdot 10^{-2}$.

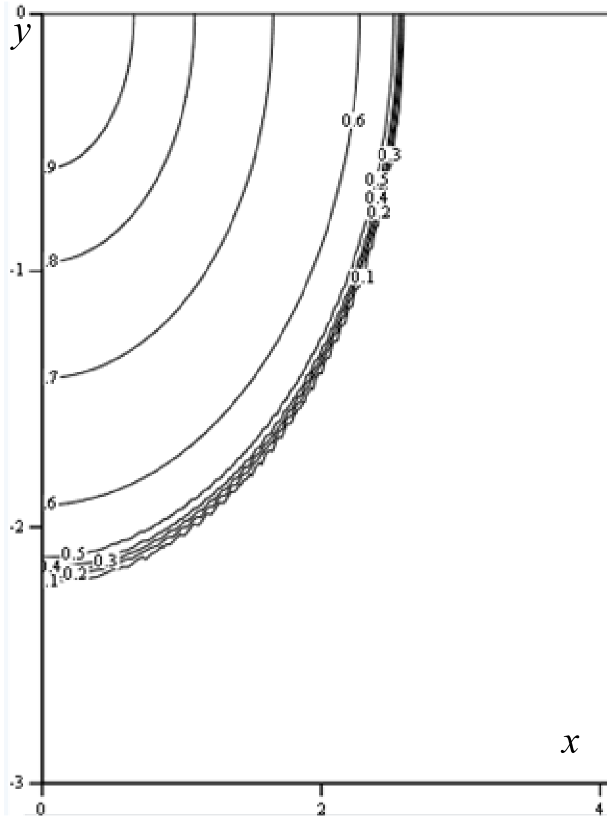



**Рисунок 3 – Поле насиченості**

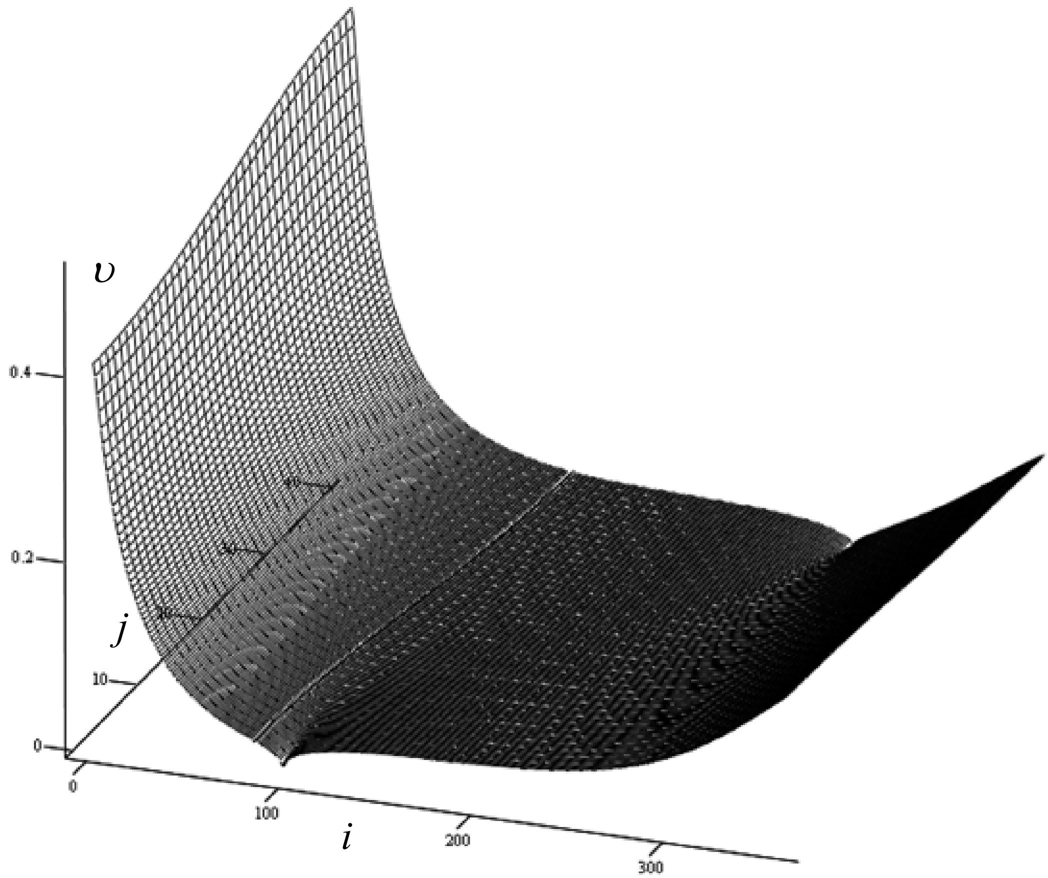



**Рисунок 4 – Поле сумарної швидкості**

Залежність сумарної фільтраційної витрати $Q = Q(t)$ від часу представлено на рис. 5. Як і слід було очікувати, на початку періоду нагнітання води в пласт (див. рис. 5*а,* часовий інтервал $(0, t_*)$) витрата зростає (це природно, оскільки «загальний опір» пласта зменшується). При подальшому нагнітанні води в пласт (див. інтервал часу $(t_*, t^*)$) витрата $Q$ спадає до деякого свого мінімального значення $Q^* = Q(t^*)$, що пояснюється утворенням зони $G_z^* = \{z : 0 < s < 0.7 = \overline{k}^{-1}(0.5)\} \in G_z$, де $\overline{k}^{-1}$ – функція обернена до $\overline{k}(s)$, в якій $\overline{k}(s) < \overline{k}(0) = 0.5$. Зі збільшенням часу ($t^* < t < t_0$) площа ділянки, де коефіцієнт $\overline{k}(s) > 0.5$, збільшується, що призводить до зменшення загального опору пласта і, отже, до зростання витрати. На інтервалі часу $(t_0, t^0)$ (рис. 5*б*) проявляється вплив застійної зони (окіл точки $M$), що призводить до спаду витрати. Після проривання води в експлуатаційну свердловину витрата починає стрімко з зростати. Розраховані характерні моменти часу, а саме: $t_* = 0.06 \cdot 10^{-2}$, $t^* = 0.45 \cdot 10^{-2}$, $t_0 = 1.52$, $t^0 = 1.65$.

### *Література*


1 Фазлыев Р. Т. Площадное заводнение нефтяных месторождений / Р. Т. Фазлыев. – М.: Ижевск, ИКИ, НИЦ РХД, 2008. – 256 с.

2 Крылов А. П. Основные принципы разработки нефтяных залежей с применением нагнетания рабочего агента в пласт / А. П. Крылов // Труды МНИ. – 1953. – Вып. 12. – С. 109 – 116.

3 Бомба А. Я. Метод конформних відображень математичного моделювання процесів витіснення у нафтогазових пластах: прогнозування динаміки руху лінії розділу різнокольорових рідин / А. Я. Бомба, С. В. Ярощак // Волинський математичний вісник. – 2009. – Вип. 6 (15). – С. 20–35. – Серія прикладна математика.

4 Бомба А. Я. Крайові задачі на конформні відображення для тризв'язних областей з потенціалом керування / А. Я. Бомба, Д. О. Пригорницький // Доповіді НАН України. – 2004. – №4 – С. 57–63.

5 Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький. – К.: Наукова думка, 2007. – 308 с.

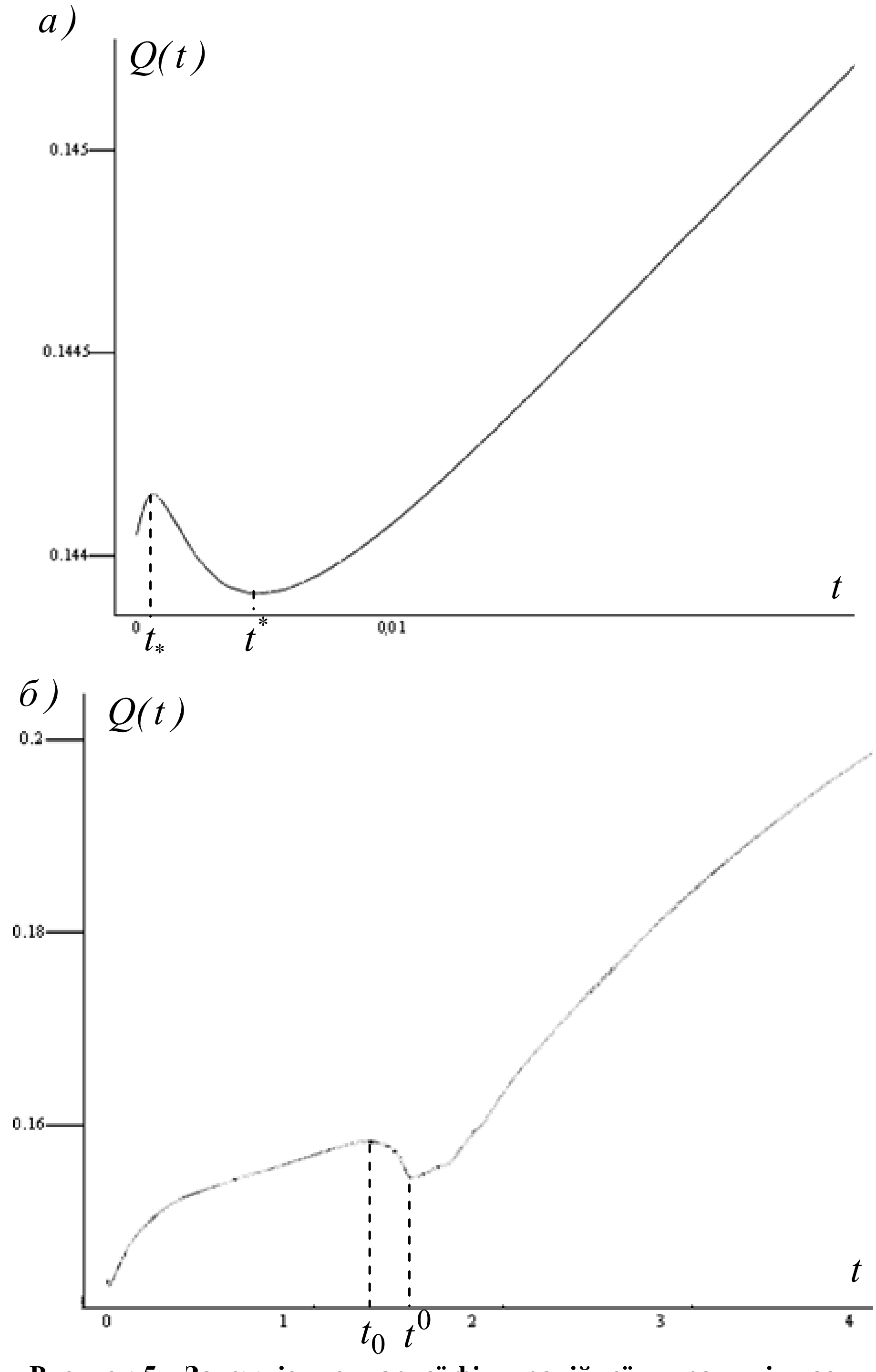



**Рисунок 5 – Залежність сумарної фільтраційної витрати від часу**

6 Каневская Р. Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов / Р. Д. Каневская. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. – 140 с.

7 Zhangxin C. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media (Computational Science and Engineering) / C. Zhangxin, H. Guanren, M. Yuanle. Paperback. Society for Industrial and Applied Mathematic, 2006. - 531 pp.

8 Versteeg H. K. An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method / H. K. Versteeg, W. Malalasekera. – Longman Scientific & Technical. New York,1995. – 267 c.

*Стаття надійшла до редакційної колегії*
*23.01.10*
*Рекомендована до друку професором*
***Мойсишиним В.М.***