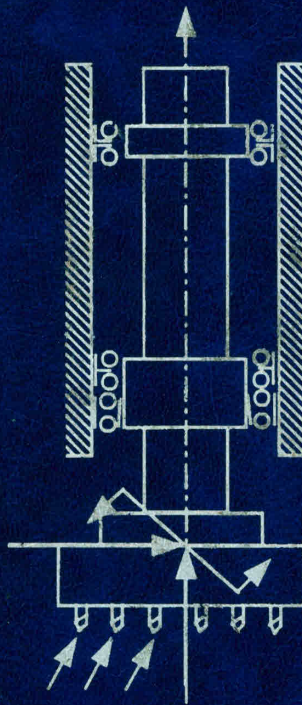


В.Б. Струтинський, П.П. Мельничук

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МЕТАЛОРІЗАЛЬНИХ ВЕРСТАТІВ



Міністерство освіти і науки України  
Житомирський інженерно-технологічний інститут

В.Б. Струтинський, П.П. Мельничук

# **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МЕТАЛОРИЗАЛЬНИХ ВЕРСТАТІВ**

Монографія



2002

УДК 510:621.9  
С 87

С 87     **Струтинський В.Б., Мельничук П.П.** Математичне моделювання металорізальних верстатів: Монографія. – Житомир: ЖІТІ, 2002. – 570 с.  
ISBN 966-683-047-7

Монографія узагальнює багаторічний доробок авторів у галузі математичного моделювання металорізальних верстатів. Вона включає розгляд математичного апарату та сучасних програмних продуктів, що використовувалися при моделюванні металорізальних верстатів, методологію розробки математичних моделей статичних і квазістатичних процесів, що мають місце при роботі верстатів, а також конкретні методи моделювання різноманітних динамічних випадкових процесів у технологічних системах верстатів.

Математичний апарат моделювання включає методи гармонічного і спектрального аналізу та їх реалізацію за допомогою сучасних математичних пакетів, зокрема пакетів MathCAD і MATLAB останніх версій.

Методологія моделювання статичних і квазістатичних процесів розглянута на прикладі створення комплексної структурної моделі фрезерного верстата ГФ2171С6, оснащеного прогресивним інструментом у вигляді фрези косокутного різання.

Моделювання динамічних випадкових процесів, що мають місце при роботі верстатів, показано на прикладах аналізу динамічних верстатів токарної групи.

Розроблені математичні моделі доведені до практичного використання. Результати моделювання наведені в порівнянні з експериментальними даними.

Монографія розрахована на широке коло фахівців, які працюють в галузі машинобудування. Вона буде корисною для науковців, спеціалістів-практиків, аспірантів та студентів, зокрема студентів-магістрантів напрямку “Інженерна механіка”.

Іл.: 456. Табл.: 20. Бібліогр. 76 назв.

Рецензенти:

*Бобир М.І.*, д.т.н., професор, завідувач кафедри ДММ та ОМ,  
директор Механіко-машинобудівного інституту  
Національного технічного університету  
“Київський політехнічний інститут”;

*Грабченко А.І.*, д.т.н., професор, завідувач кафедри “Різання  
матеріалів і ріжучі інструменти” Національного  
технічного університету “Київський політехнічний  
інститут”; академік АН вищої школи України;

*Кафедра металорізальних верстатів, метрології та сертифікації  
Одеський технічний університет*

УДК 510:621.9

© Струтинський В.Б., 2002  
© Мельничук П.П., 2002

ISBN 966-683-047-7

## Передмова

*Розвиток сучасного машинобудування нерозривно пов'язаний з необхідністю забезпечення високої надійності та довговічності металорізального обладнання. Особливо це актуально, коли лезова чи абразивна технологічна операція є фінішною. В цьому випадку, як при проектуванні нових металорізальних верстатів, так і процесів, що супроводжують їх роботу, необхідно застосовувати сучасні методи досліджень, зокрема методи математичного моделювання металорізальних верстатів.*

*На даний час відомо досить багато наукових праць по моделюванню окремих вузлів машинобудівного обладнання та робочих процесів, що дало авторам можливість частково оптимізувати конструкції вузлів обладнання та режими обробки тощо. Така практика не завжди призводить до бажаних кінцевих результатів, адже не створюється комплексна структурна модель обладнання (металорізального верстата), оснащеного різальним (формоутворюючим) інструментом.*

*Використання інструментів з полікристалічних надтвердих матеріалів (різців, торцевих фрез та ін.) робить процес чистої обробки протяжних плоских або циліндричних поверхонь на фрезерних верстатах близьким до оптимального по параметрах*

*якості. Для аналізу процесу чистової обробки протяжних плоских або циліндричних поверхонь найдоцільніше використовувати методи структурного математичного моделювання.*

*У запропонованій монографії узагальнені результати досліджень практичного використання металорізального обладнання (токарних та фрезерних верстатів), оснащеного сучасним стандартним і спеціальним інструментом (торцеві фрези) та їх математичного моделювання. В ній наведені реальні дані моделювання статичних, квазістатичних та динамічних випадкових процесів, що мають місце при роботі металорізальних верстатів.*

*Запропоновані математичні моделі доведені до практичного використання.*

*Автори виражають глибоку подяку рецензентам: доктору технічних наук, професору Бобирю М.І., доктору технічних наук, професору Грабченко А.І., спеціалістам Одеського державного технічного університету за рецензування монографії, директору ВАТ "Реверс" (м. Бердичів) Лоеву В.Є. за допомогу у проведенні випробовувань у виробничих умовах, обговорення та впровадження у виробництво результатів досліджень, кандидату технічних наук, доценту Виговському Г.М., аспірантам Громовому О.А. та Бушлі В.М. за великий обсяг виконаних робі по підготовці та проведенню досліджень, інженеру-програмісту Кушнірук Л.О. за редагування та підготовку рукопису до друку.*

## ЧАСТИНА I

### МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ МОДЕЛЮВАННЯ

#### РОЗДІЛ 1

##### Математичні моделі процесів на основі символьних функціональних залежностей

###### 1.1. Обчислення та перетворення символьних функціональних залежностей

При аналізі технічних систем і процесів широко використовуються функціональні залежності. Вони можуть бути задані рівняннями, графіками, сукупністю точок тощо. Рівняння представляє собою символьну (аналітичну) функціональну залежність. Графік або таблицю, що визначає сукупність дискретних значень процесу можна привести до символьної залежності шляхом застосування методів інтерполяції та апроксимації функцій.

При розробці математичних моделей процесів використовують функції однієї змінної, задані аналітичною (символьною) залежністю. Ця залежність звичайно задана в явному вигляді:

$$y = f(x).$$

Функції однієї змінної класифікуються за видом аналітичних залежностей, з яких утворена функція [35]. Якщо аналітичні залежності складені з алгебраїчних виразів (поліномів, дробів тощо), маємо алгебраїчні функції однієї змінної. Поширеною в практиці математичного моделювання є поліноміальна функція:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (n - \text{ціле додатне число}).$$

Широко вживана дробово-раціональна алгебраїчна функція має вигляд:

$$f(x) = \frac{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}.$$

Ірраціональні функції містять корені різного порядку. Прикладом ірраціональної алгебраїчної функції є функція:

$$f(x) = \sqrt[3]{(1+x)^2}.$$

Трансцендентні функції включають  $e^x$ ,  $\ln x$  тощо.

Тригонометричні функції включають  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$ , а також обернені їм функції:  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\operatorname{arctg} x$ ,  $\operatorname{arcctg} x$ .

Показникові функції мають аргумент в показнику степеня. Наприклад,

$e^x$ ,  $a^x$ .

Логарифмічні функції включають аргумент під знаком логарифма, наприклад,  $\ln x$ .

Існує також численний клас спеціальних функцій, які визначаються як розв'язки диференціальних рівнянь певного виду (функції Бесселя та інші).

Крім явного способу визначення функції у вигляді  $y = f(x)$ , також має місце неявний спосіб задання функції  $\varphi(x, y) = 0$  або параметричний спосіб задання функції:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

де  $t$  – деякий параметр, від якого залежать аргумент  $x$  і функція  $y$ .

Наприклад, параметрично задане рівняння кола має вигляд:

$$y = R \cdot \sin(t), \quad x = R \cdot \cos(t), \quad R = \text{Const.}$$

Параметр  $t$  змінюється в межах від 0 до  $2\pi$ . Якщо виключити параметр  $t$ , то одержимо неявне визначення цієї функції у вигляді:

$$\varphi(x, y) = y^2 + x^2 - R^2 = 0$$

або явний вигляд даної функції:

$$y = f(x) = \pm \sqrt{R^2 - x^2}.$$

При математичному моделюванні широко використовуються векторні та матричні функції. Наприклад, векторна функція  $y(x)$ , компоненти вектора якої є тригонометричними функціями, визначається наступним чином:

$$y(x) = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \\ \text{tg} x \end{bmatrix}.$$

Матрична функція однієї змінної  $x$  чи багатьох змінних визначається матрицею певного виду, компоненти якої залежать від вказаних змінних. Наприклад, матрична функція однієї змінної може бути:

$$f(x) = \begin{bmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ \sqrt{x} & \sqrt[3]{x} & \sqrt[5]{x} \\ \sin x & \cos x & \text{tg} x \end{bmatrix}.$$

Разом з елементарними функціями широко застосовуються різноманітні спеціальні функції, зокрема функції Бесселя, гамма-функція, функція похибок, інтегральні функції та інші, які розглянуті нижче.

При математичному моделюванні використовуються не тільки дійсні, а й комплексні (комплекснозначні) функції. При цьому комплекснозначна функція  $y = f(x)$  є комплексною величиною, а  $x$  може бути як дійсною, так і комплексною величиною. Прикладом комплекснозначної функції є амплітудно-фазова частотна характеристика динамічної системи:

$$W(j\omega) = W(\omega) \cdot e^{j \cdot \psi(\omega)},$$

де  $\omega$  – дійсний аргумент (частота);

$W(\omega)$ ,  $\psi(\omega)$  – дійсні функції, що відповідають амплітудно-частотній та фазочастотній характеристикам динамічної системи;

$j = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця.

Функція  $W(j\omega)$  є комплексною величиною. Вона має також алгебраїчну форму запису:


$$W(j\omega) = U(\omega) + j \cdot V(\omega).$$

Дійсна частина  $U(\omega)$  відповідає дійсній амплітудно-частотній характеристиці, а уявна частина  $V(\omega)$  – уявній амплітудно-частотній характеристиці [4].

Для обчислення функцій та побудови їх графіків у математичному пакеті MathCAD 2000 (MathCAD 2001, 2002) наявний цілий ряд засобів. Вони зосереджені в основному в панелі інструментів Math Pallette:



Дана панель включає вісім кнопок-піктограм, кожна з яких відкриває додаткову панель.

Кнопка  активізує панель Arithmetic Pallette (калькулятор) (рис. 1.1), яка включає в себе цифри від 0 до 9, знаки алгебраїчних операцій, деякі елементарні функції та загальнозживані константи.

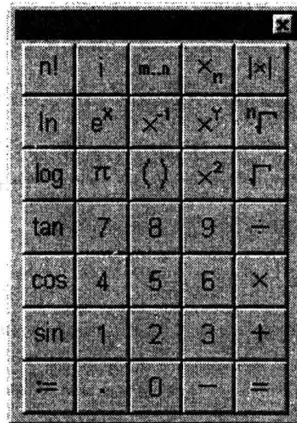


Рис. 1.1. Панель Arithmetic Pallette (калькулятор)

Активізація кнопок панелі виводить на екран символи з позиціями для введення інформації. Позиції для введення позначені затушованими прямокутниками. При введенні в позицію необхідного виразу затушований прямокут-



ник зникає. Наприклад, активізувавши кнопку




одержимо на екрані заготовку



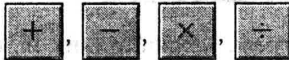
Якщо в позицію введення, відзначену затушованим прямокутником, ввести, наприклад,  $x$ , то одержимо




В панелі Arithmetic Pallette наявні заготовки деяких практично важливих загальноживаних функціональних залежностей.

Кнопка  призначена для обчислення абсолютної величини змінної, константи чи виразу, що записується між вертикальними лініями замість затушованого прямокутника.

На панелі наявні кнопки, яким відповідають знаки арифметичних операцій:




та два знаки рівності.

Кнопка  відповідає оператору присвоєння і виконує функції присвоєння значення величини, що знаходиться справа від цього знака, змінній або функції, що знаходиться зліва від знака. Наприклад, запис

$$y := \sqrt{2}$$


означає, що змінній  $y$  буде присвоєно значення 1.41...


Кнопка  на панелі калькулятора використовується для виведення на екран значення змінної, вектора, матриці або функції. Приклади застосування цього знака наведені нижче. Зокрема, обчислення тригонометричної функції  $\sin x$  при  $x = 0$  з використанням цієї кнопки:

$$\sin(0) = 0.$$


Якщо  $v$  є вектор, заданий своїми трьома компонентами 1, 2, 1, то застосування знака “=” призведе до виведення значення вектора  $v$  у вигляді:

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Кнопка  панелі калькулятора означає присвоєння змінній зліва від знака ряду послідовних значень. Наприклад,  $i := 0..3$  означає, що змінна  $i$  є чотиривимірним масивом цілих чисел, елементи якого мають значення 0, 1, 2, 3.

Кнопка  відповідає виразу, взятому в дужки.

На панелі є кнопки визначення загальноживаних констант  $e$ ,  $\pi$  та кнопка для визначення уявної одиниці  $i(\sqrt{-1})$ .

Кнопка  забезпечує визначення елемента індексованої змінної: компоненти вектора, матриці або елемента масиву. За її допомогою вводиться індексація масивів необхідної розмірності.

Показникові функції та вирази набираються за допомогою кнопок



Наприклад, для введення виразу  $x^5$  необхідно використати останню кнопку, або змінити в першій чи другій заготовці числа відповідно  $-1$  чи  $2$  на  $5$ . Для введення квадратного кореня використовується розглянута раніше кнопка



а для введення кореня довільного порядку – кнопка



На панелі калькулятора розташовані кнопки, що дозволяють набрати деякі практично важливі елементарні функції, зокрема логарифмічні, тригонометричні, експоненціальні та факторіал. Для цього служать наступні кнопки заготовки:



Обчислення функцій у символьному вигляді здійснюється за допомогою панелі символьних операцій Symbolic Keyboard (ключові слова символьних операцій) (рис. 1.2). Ця панель відкривається за допомогою кнопки

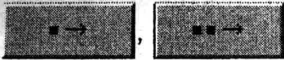


що наявна на панелі інструментів.

$\rightarrow$	$\rightarrow$	float	complex
expand	solve	simplify	substitute
collect	series	assume	parfrac
coeffs	factor	fourier	laplace
ztrans	invfourier	invlaplace	invztrans
$n^r \rightarrow$	$n^{-1} \rightarrow$	$ n  \rightarrow$	Modifiers

Рис. 1.2. Панель символьних операцій Symbolic Keyboard

Панель символічних операцій включає в себе кнопки символічних перетворень

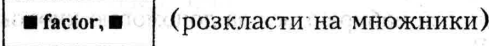


та ряд кнопок з ключовими словами, зокрема



(розв'язати, ряд, спростити) та інші.

Використання кнопки і відповідної заготовки



(розкласти на множники)

виконує розклад на множники виразу, наприклад:

$$x^2 - 2x + 3x - 2 \text{ factor, } x - 1 \rightarrow (x + 2)(x - 1).$$

Результат одержано в символічному вигляді і його наведено справа від стрілки.

Спрощення виразу виконується аналогічно, наприклад:

$$\frac{x^2 - y^2}{x + y} \text{ simplify} \rightarrow x - y.$$

Обчислення похідних довільного порядку, визначених та невизначених інтегралів, сум, добутоків, границь здійснюється за допомогою панелі математичних операцій Calculus Palette. Панель відкривається кнопкою



панелі математичних інструментів (Math Palette).

Панель математичних операцій Calculus Palette (рис. 1.3) включає різний інструментарій здійснення різноманітних розрахунків.

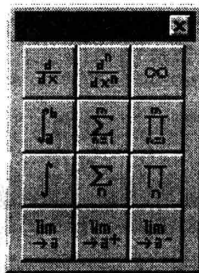
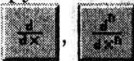


Рис. 1.3. Панель математичних операцій

Похідні функцій обчислюються з використанням кнопок



для обчислення відповідно першої похідної та похідної довільного порядку.

На панелі є кнопки



та

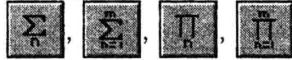
для організації обчислення визначених та невизначених інтегралів відповідно.

Приклади обчислення визначених та невизначених інтегралів у чисельному та символічному вигляді наведено нижче:

$$\int_0^{\infty} e^{\frac{x}{2}} \sin(\sqrt{2x}) dx \rightarrow 1.304098$$

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)(1 + \cos(x))} dx \rightarrow \ln(\cos(x)) + \ln(1 + \cos(x))$$

Обчислення сум та добутків здійснюють кнопки:



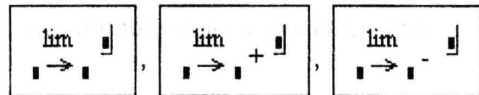
Приклад обчислення суми числової послідовності у символічному вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{1}{6} \pi^2$$

На панелі математичних операцій є кнопки для обчислення границь функцій:



Активізація даних кнопок призводить до появи на екрані заготовок



Приклад знаходження границі функції  $f(x) = |x^2 - 4|$  в точці  $x = 2$  з використанням даних засобів має вигляд:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|(x + \Delta x)^2 - 4| - |x^2 - 4|}{\Delta x} \rightarrow 4$$

Панель математичних операцій включає кнопку



яка служить для введення числа, що відповідає нескінченності.

Формування знаків відношень еквівалентності та функцій здійснюється за допомогою панелі рівностей та відношень (Evaluation and Boolean Palette). Вона відкривається за допомогою кнопки



панелі математичних інструментів (Math Palette).

Панель рівностей та відношень (рис. 1.4) включає спеціальні знаки рівності, нерівності та тотожності:



На панелі є кнопки для формування строгих і нестрогих нерівностей



та операцій з функціями.

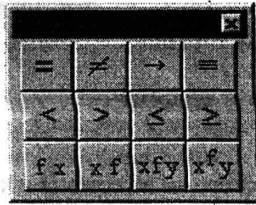


Рис. 1.4. Панель рівностей та відношень

## 1.2. Побудова та аналіз плоских графіків

Аналіз функцій однієї змінної доцільно проводити при графічному супроводі у вигляді побудованих графіків функції або допоміжних функцій (наприклад, похідних необхідного порядку).

В математичному пакеті MathCAD є ряд засобів для побудови графіків функцій.

Побудова графіків різного виду здійснюється за допомогою панелі графіків (рис. 1.5).

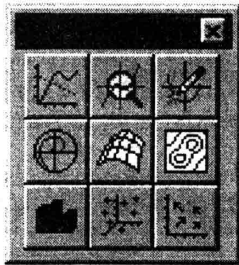


Рис. 1.5. Панель графіків

Панель включає ряд кнопок, за допомогою яких формуються заготовки двовимірних і просторових графіків.

Для побудови плоского графіка функції однієї змінної, заданої символьним (аналітичним) виразом у декартовій прямокутній системі координат, служить кнопка-піктограма на панелі графіків:



При ініціалізації цієї піктограми на екрані з'являється заготовка графіка у вигляді прямокутника з полем графіка (рис. 1.6).

У виділеному нижньому затушованому квадратику заготовки графіка необхідно помістити значення аргументу (наприклад,  $x$ ), а у лівому затушованому квадратику – функцію, яка повинна бути зображена.

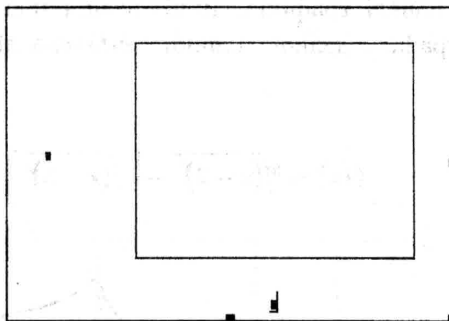


Рис. 1.6. Заготовка графіка

Функція може бути задана аналітичним виразом, наприклад,

$$\sin(x) + 2 \cdot \cos(x),$$

або у загальному вигляді, як

$$f(x) \text{ чи } \frac{df(x)}{dx}.$$

При цьому загальний вигляд функції конкретизується перед графіком, наприклад:

$$f(x) := \sin(x) + 2 \cdot \cos(x).$$

Приклади побудови графіків функцій та їх похідних наведено на рис. 1.7.

Засоби математичного пакету дозволяють задавати область зміни аргументу  $x$ . Також визначаються верхня та нижня межа значень графіка. Побудова графіків здійснюється автоматично. При наявності розривів функції побудова графіка здійснюється як звичайно, а точки розриву з'єднуються умовними лініями. Для рис. 1.7,  $a$  точки розриву похідної при  $x = 2$  та  $x = 3$  показані вертикальними асимптотами функції в точках розриву.

Для побудови графіка в полярній системі координат служить кнопка



на панелі графіків. При ініціалізації цієї кнопки піктограми на екран виводиться заготовка графіка у вигляді прямокутника з колом, на якому знаходиться два затушованих прямокутника: один – внизу; другий – зліва від кола.

Також, як вказано раніше, в заготовку графіка заносяться аргумент (нижній затушований квадрат) та функція (лівий затушований квадрат).

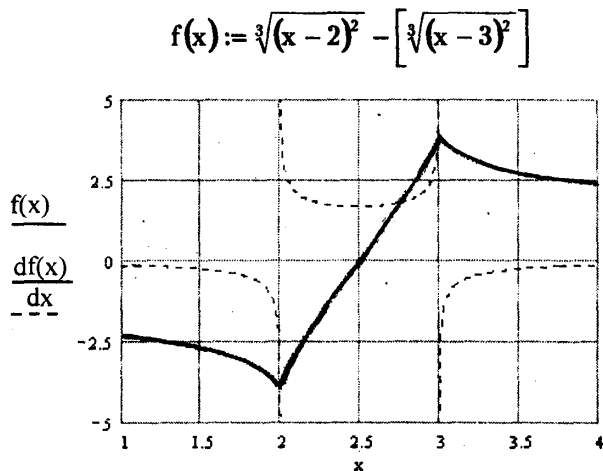
Приклад побудови графіка в полярній системі координат наведено нижче (рис. 1.8).

Ділянки плоских графіків можуть бути збільшені до потрібного розміру. Для цього служить кнопка (див. рис. 1.5)

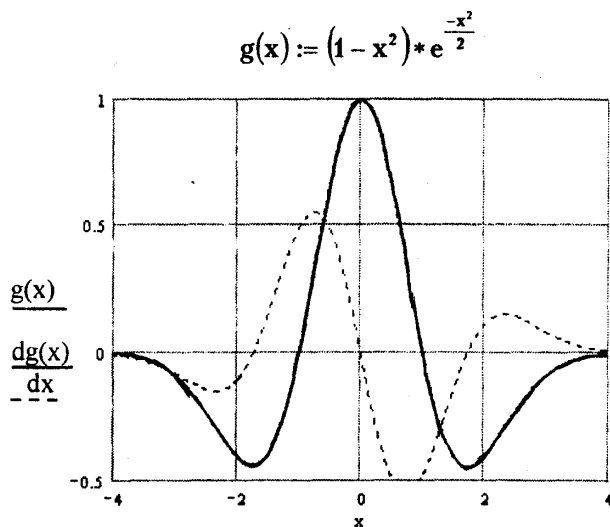


(Zoom),

яка знаходиться на панелі графіків. Ініціалізація цієї кнопки здійснюється після виділення на графіку деякої ділянки (виділена ділянка показана пунктиром) (рис. 1.9, а).



а)



б)

Рис. 1.7. Приклад побудови графів функції та її похідних: а – графік функції  $f(x)$  та її похідної; б – графік функції  $g(x)$  та її похідної. Похідні показані пунктирними лініями

$$f(x) := 1 + \sum_{k=1}^{75} (0,6k^{-2}) \sin(k \cdot 0,4) \sin(kx)$$

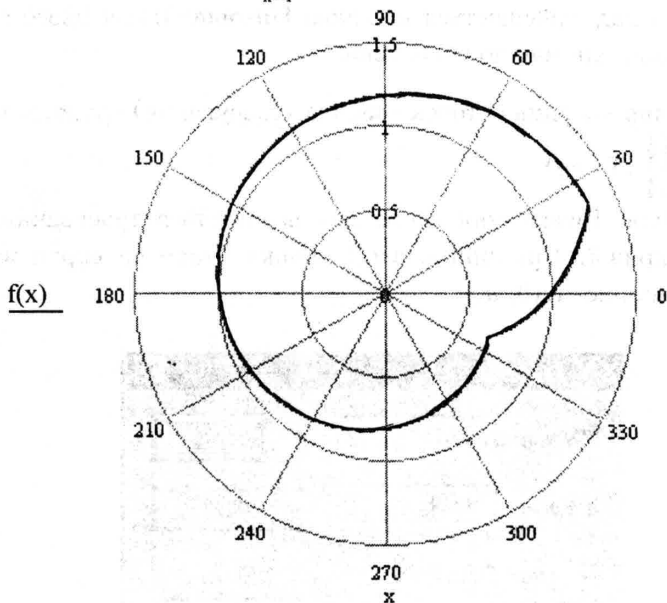


Рис. 1.8. Приклад побудови графіка в полярній системі координат

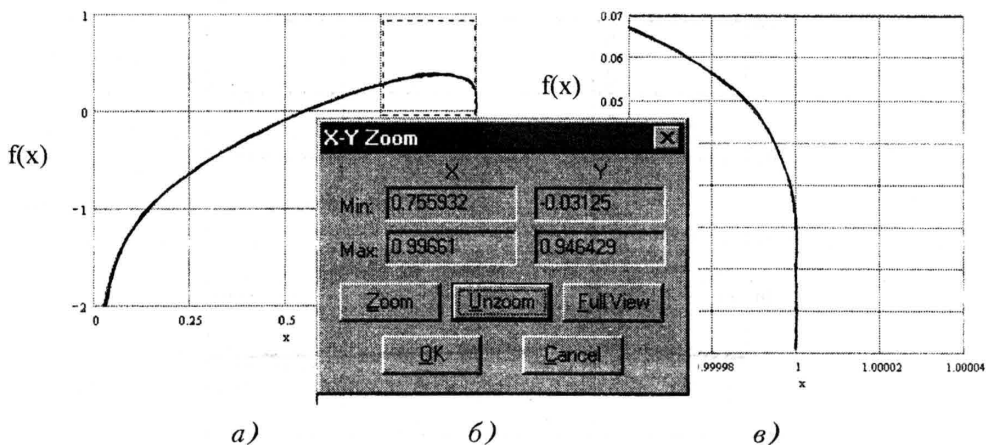


Рис. 1.9. Збільшення виділеної прямокутної ділянки графіка: а – графік з виділеною прямокутною ділянкою; б – меню, яке визначає параметри збільшеної ділянки; в – збільшена прямокутна ділянка графіка

В результаті на екран виводиться меню (рис. 1.9, б). В його діалоговому вікні вказуються координати x та y у виділеної ділянки. Після ініціалізації



кнопки **Zoom** з меню ця ділянка буде збільшена до розмірів початкового графіка. Збільшена у декілька разів частина графіка наведена на рис. 1.9, в.

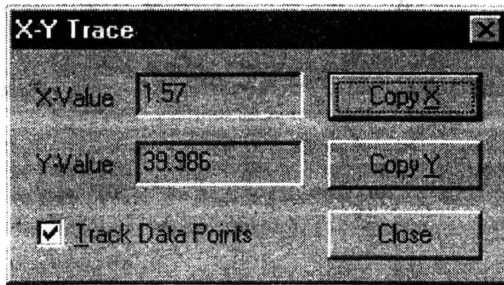
Повернення назад здійснюється кнопкою **Unzoom**. Після цього графік набуває вигляду, який він мав до збільшення.

Для визначення координат точок графіка (трасування) служить кнопка

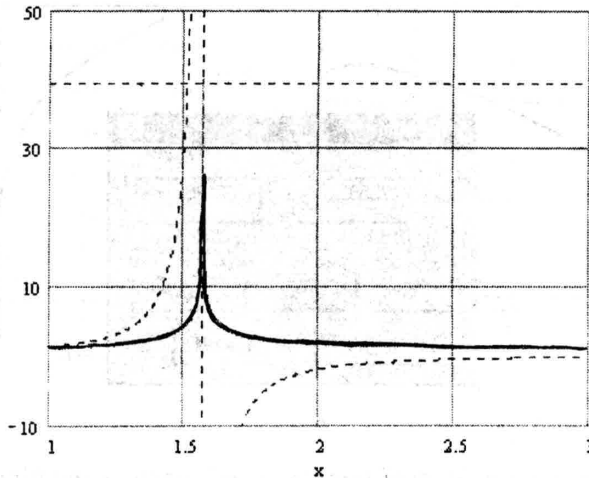


(Trace)

на панелі графіків. Визначення координат називається трасуванням (визначенням точок) кривої. При ініціалізації кнопки **Trace** на екран виводиться меню, показане на рис. 1:10, а.



а)



б)

Рис. 1.10. Визначення координат характерних точок графіка шляхом трасування кривої графіка

Трасування графіка здійснюється двома лініями, координати перетину яких показуються у вікні **X-Y Trace** (див. рис. 1.10, а). Ці координати можна скопіювати **Copy X**, **Copy Y** в буфер обміну, а потім перенести в потрібне місце MathCAD-документу.

Приклад трасування графіка наведено на рис. 1.10, б. Шляхом трасування визначено координати максимуму кривої, показаної суцільною лінією.

Для побудови поверхні в панелі графіків (див. рис. 1.5) є кнопка



**(Surface Plot)**.

При ініціалізації цієї кнопки на екран виводиться заготовка об'ємного графіка поверхні, що має вигляд прямокутника, в лівому нижньому куті якого знаходиться чорний квадратик. На його місце треба помістити ім'я матриці чи вектора, які потім будуть зображені у вигляді об'ємного графіка.

Для побудови графіка функції двох змінних перед його заготовкою дається додаткова інформація:

– визначається функція, наприклад:

$$F(x, y) := 1 + (\cos(x) - 10 * \sin(y)^2) * e^{\frac{-1}{2} * [(x-1)^2 + 5 * y^2]} \quad (1.1)$$

– вводиться індексація вузлів сітки

$$i: = 0..10 \quad j: = 0..7$$

– формуються вектори значень аргументів, що відповідають вузлам сітки

$$x_i: = i * 0.2 - 1 \quad y_j: = j * 0.1$$

– обчислюється матриця значень функції (1.1), аргументи якої відповідають вузлам сітки:

$$U_{i,j} := F(x_i, y_j). \quad (1.2)$$

Ця інформація, як вказано раніше, розміщується перед полем графіка.

Побудований відповідно до заданої матриці (1.2) графік функції двох змінних має вигляд просторової сітки (рис. 1.11).

Графічне зображення матриці можна подати у вигляді точкової діаграми. Координати точок відповідають значенням матриці (1.2) у вузлах сітки (рис. 1.12).

Засоби математичного пакету дозволяють в широкому діапазоні змінювати вигляд і формат графіка – здійснювати нахил графіка, поворот його на необхідний кут, нумерувати осі, задавати вигляд сітки тощо.

На полі графіка вказуються необхідні параметри координат, зображуються координатні осі, координатні площини та граничні лінії, змінюються координати вузлів сітки та відповідна їм кількість ліній на графіку поверхні.

Елементи вектора чи матриці також можна зобразити у вигляді стовпчастої діаграми. Для цього на панелі графіків (див. рис. 1.5) є кнопка:



**(3D Bar Chart)**.

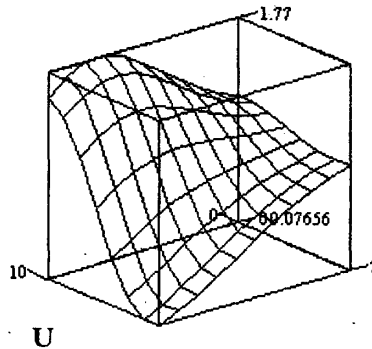


Рис. 1.11. Тривимірний графік поверхні, що відповідає функції (1.1), побудований на сітці 11x8

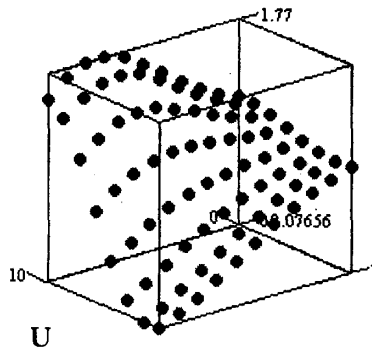


Рис. 1.12. Зображення матриці  $U_{i,j}$  (1.2) у вигляді точкової діаграми

Висота стовпчиків діаграми відповідає значенню вектора чи матриці у вузлі сітки. Зображення матриці чи вектора у вигляді стовпчастої діаграми подається в аксонометрії (рис. 1.13).

Для побудови графіка у вигляді стовпчастої діаграми задається раніше вказана додаткова інформація про сітку, на якій визначена функція двох змінних або значення матриці.

Стовпчаста діаграма дає зручну візуальну інтерпретацію функції двох змінних або елементів вектора чи матриці.

Засоби математичного пакету MathCAD дають можливість дослідження багатьох властивостей функції кількох змінних, заданих аналітичним виразом. Можуть бути виконані перерізи поверхонь паралельними площинами. Для цього служить різновид об'ємного графіка у вигляді ізоліній (ліній рівного значення функції). Побудова цього графіка здійснюється за допомогою команди меню тривимірного графіка або за допомогою кнопки



(Contour Plot)

з панелі графіків. Графік ізоліній дозволяє виконати аналіз функції двох змінних, зокрема аналіз на екстремум, наявність нулів, полюсів тощо. Приклад побудови ізоліній функції  $F(x, y)$ , заданої формулою (1.1), наведено на рис. 1.14.

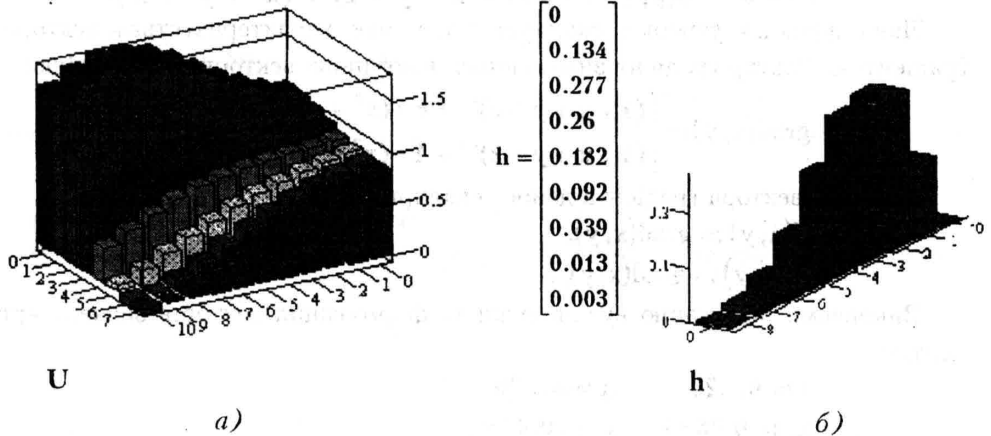


Рис. 1.13. Зображення матриці  $U_{i,j}$  (а) та вектора  $h_i$  (б) у вигляді стовпчастих діаграм

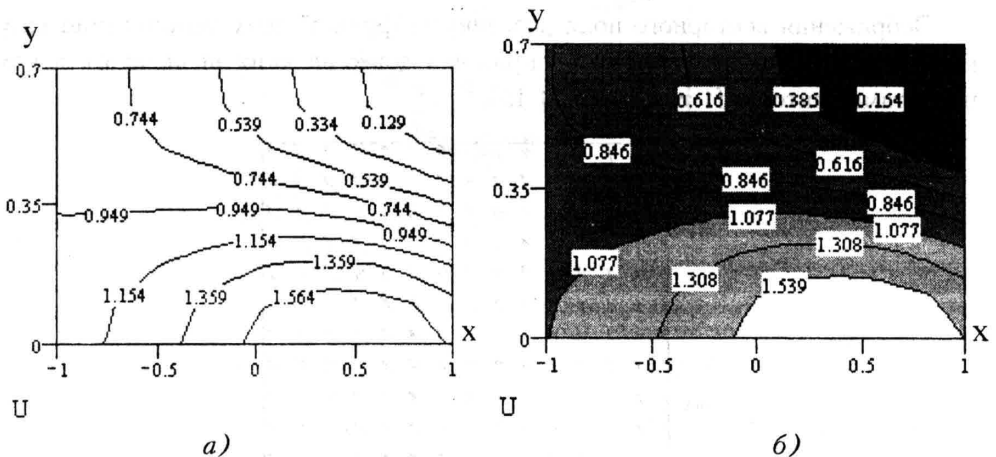


Рис.1.14. Приклад побудови ліній постійного значення (ізоліній) функції  $F(x, y)$ , заданої формулою (1.1): а – графіки ізоліній; б – ділянки постійного діапазону зміни функції

Засобами математичних пакетів можна побудувати векторне поле функції двох змінних. Для цього на панелі графіків (див. рис. 1.5) є кнопка



(Vector Field Plot).

Векторне поле визначається спеціальною векторною функцією, яка повинна бути задана перед графіком.

Наприклад, розглянемо функцію двох змінних (потенціал):

$$z := 0 \quad \varphi(x, y) := \ln(1 + x + y + z) + (x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

Дана функція утворює скалярне поле, яке характеризується вектором-градієнтом. Вектор-градієнт визначається наступною векторною функцією:

$$\text{grad}(x, y) := \begin{bmatrix} (1 + x + y + z)^{-1} + 4 * (x^2 + y^2 + z^2)x \\ (1 + x + y + z)^{-1} + 4 * (x^2 + y^2 + z^2)y \end{bmatrix}.$$

Проекції вектора градієнта даного скалярного поля:

$$f1(x, y) := \text{grad}(x, y)_0$$

$$f2(x, y) := \text{grad}(x, y)_1.$$

Виконаємо індексацію вузлів сітки та формування векторів значень аргументів:

$$i := 0 \dots 20 \quad j := 0 \dots 20$$

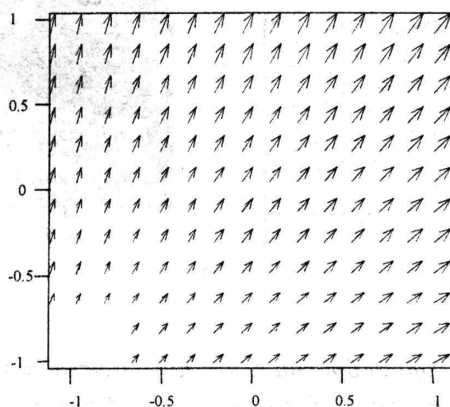
$$x_i := 0.05 * i \quad y_j := 0.05 * j$$

обчислення матриць-компонент вектора-градієнта:

$$M_{i,j} := f1(x_i, y_j);$$

$$N_{i,j} := f2(x_i, y_j).$$

Зображення векторного поля розглянутої функції двох змінних  $\text{grad}(x, y)$  має вигляд сукупності стрілок, напрямком і довжина яких визначаються компонентами векторів  $f1$  та  $f2$  (рис. 1.15).



M, N

Рис. 1.15. Приклад зображення векторного поля

В математичному пакеті MathCAD є засоби для побудови тривимірного

точкового графіка. Для цього служить кнопка



(3D Scatter Plot).

Для побудови цього графіка також задається додаткова інформація, яка визначає кількість точок і координати кожної точки в просторі трьох вимірів.

Наступний приклад ілюструє побудову точкового графіка. При побудові графіка задано масив з 81 точки.

$$i: = 0..80 \quad a_i: = 0.3 * i.$$

Для визначення координат точок введено параметр, який характеризує точку  $i$  та має вигляд масиву  $a$ . Визначено параметри масивів значень координат кожної точки:

$$x_i: = a_i \sin(a_i) \quad y_i: = a_i \cos(a_i) \quad z_i: = 0.2 e^{\sqrt{a_i}}.$$

Побудований графік визначає криву в параметричній формі та зображується у вигляді точок (рис. 1.16).

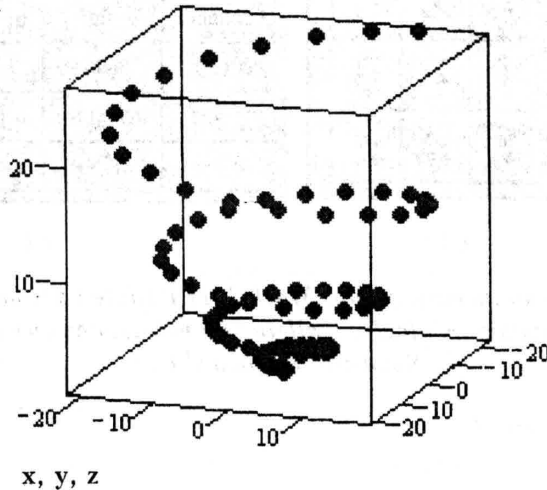


Рис. 1.16. Тривимірний точковий графік

Точки тривимірного точкового графіка можуть мати різні форму та розміри. Ланцюжок точок є зручним і наочним засобом аналізу функції трьох змінних, заданої в параметричному вигляді.

Повертаючи графік, визначають проекції одержаної просторової кривої на площини координатних осей.

### 1.3. Символьні залежності із диференціальними операціями

Символьні методи диференціювання та інтегрування широко реалізовані в сучасних математичних пакетах. Зокрема, програмне середовище MathCAD має різноманітні засоби для знаходження похідних та інтегралів функцій, заданих в символьному вигляді. Якщо функція задана таблично, то вона приводиться до символьного вигляду шляхом застосування процедури інтерполяції чи апроксимації. Знаходження похідних функцій та інтегралів у математичному пакеті MathCAD 2000 (MathCAD 2001) здійснюється за допомогою кнопок панелей операцій математичного аналізу (рис. 1.17).

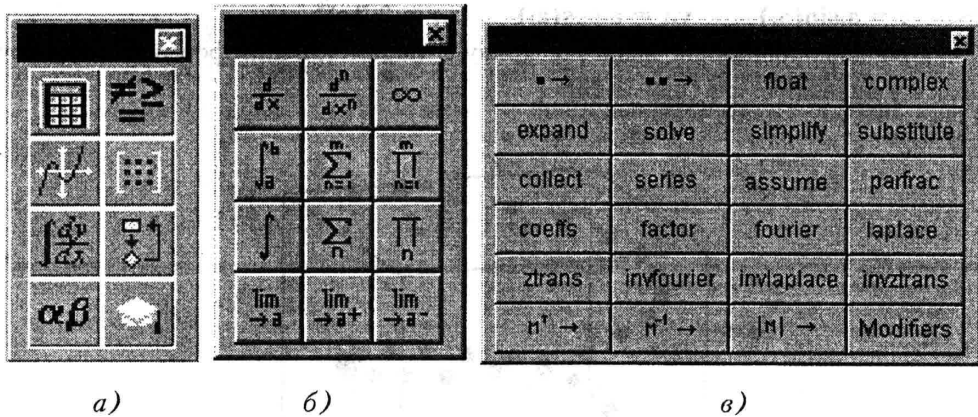


Рис. 1.17. Панель інструментів MathCAD Palette (а), панель операцій математичного аналізу Calculus Palette (б) та панель символьних операцій Symbolic Keyboard (в)

Активізуючи кнопку



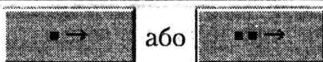
панелі інструментів **MathCAD Palette** (рис. 1.17, а), виведемо на екран панель операції математичного аналізу (рис. 1.17, б). Для обчислення першої похідної функції ініціалізується кнопка



цієї панелі. В результаті на екрані з'явиться заготовка



У правий чорний прямокутник цієї заготовки треба помістити символьний вираз або ім'я функції, а у нижній – ім'я змінної, за якою знаходиться похідна. Для знаходження похідної необхідно використати кнопку



із панелі символьних операцій **Symbolic Keyboard** (рис. 1.17, *в*). Натиснувши клавішу Enter, справа від стрілки одержимо результат символьного диференціювання. Наприклад:

$$\frac{d}{dx} x^n \operatorname{atan}(x) \rightarrow x^n \frac{n}{x} \operatorname{atan}(x) + \frac{x^n}{(1+x^2)}$$

Процедура обчислення похідної в символьному вигляді відзначається надійністю роботи, але одержаний результат часто має досить громіздкий вигляд, наприклад:

$$\frac{d}{dx} \left( -\sqrt[4]{x^3 + \frac{1}{x}} \right) \cdot \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) \rightarrow \frac{1}{\left[ 4 \cdot \left[ \frac{x^4 + 1}{x} \right]^{\frac{3}{4}} \right]} \cdot \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) \cdot \left[ 4x^2 - \frac{(x^4 + 1)}{x^2} \right] + 2 \frac{\left[ \frac{(x^4 + 1)}{x} \right]^{\frac{1}{4}}}{x^3}$$

Символьне диференціювання може здійснюватись для функцій різного виду, зокрема трансцендентних функцій, наприклад:

$$\frac{d}{dx} \ln(x) \sin(x)^x \rightarrow \frac{1}{x} \sin(x)^x + \ln(x) \sin(x)^x \left( \ln(\sin(x)) + x \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right)$$

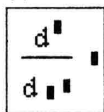
Вираз під знаком похідної може включати довільні величини і функції. Диференціювання здійснюється за змінною, вказаною у заготовці похідної. Фактично здійснюється знаходження частинної похідної функції. Інші змінні у виразі функції не враховуються. Таким чином, диференціювання за змінною у деякої функції від  $x$  буде відповідати похідній константи, наприклад:

$$\frac{d}{dy} \operatorname{acosh}(x) \rightarrow 0$$

Обчислення похідної довільного порядку здійснюється кнопкою



панелі операцій математичного аналізу **Calculus Palette** (рис. 1.17, *б*). Після ініціалізації даної кнопки на екрані з'явиться заготовка



У правий чорний прямокутник цієї заготовки, як і раніше, треба помістити символьний вираз або ім'я функції, а у нижній лівий – ім'я змінної, за якою знаходиться похідна. Порядок похідної у вигляді цілого числа, більшого за 1, заноситься у верхній чорний прямокутник.



Нижче наведені приклади обчислення похідних дев'ятого та сьомого порядків:

$$\frac{d^9}{dx^9} e^x \cdot \sin(x) \rightarrow 16 \exp(x) \sin(x) + 16 \exp(x) \cos(x)$$

$$\frac{d^7}{dx^7} \sqrt{1+x^2} \rightarrow \frac{10395}{(1+x^2)^{(13/2)}} x^7 - \frac{19845}{(1+x^2)^{(11/2)}} x^5 + \frac{11025}{(1+x^2)^{(9/2)}} x^3 - \frac{1575}{(1+x^2)^{(7/2)}} x.$$

Обчислення похідної порядку вище першого здійснюється за змінною, вказаною в заготовці. Нижче наведено приклади знаходження похідних другого порядку функції двох змінних по кожному із двох аргументів:

$$\frac{d^2}{dx^2} \tan(x + \sqrt{y}) \rightarrow 2 \tan(x + \sqrt{y}) \cdot (1 + \tan(x + \sqrt{y}))$$

$$\frac{d^2}{dy^2} \tan(x * y^2) \rightarrow 8 \tan(x * y^2) * (1 + \tan(x * y^2))^2 * x^2 y^2 + 2(1 + \tan(x * y^2))^2 * x.$$

За допомогою засобів математичного пакета MathCAD здійснюється обчислення частинних похідних та диференціалів функцій кількох змінних. Частинна похідна може бути знайдена за означенням похідної як границя:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \lim_{\delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\delta x_i}.$$

Знаходження частинної похідної в математичному пакеті MathCAD здійснюється так само, як і знаходження звичайної похідної. Нижче наведено фрагмент документа MathCAD, в якому знаходяться частинні похідні функції по аргументах  $y$  та  $x$ :

$$f(x, y) := x e^{-(\cos(y)x^2 + \sin(x)y^2)}$$

$$\frac{d}{dy} f(x, y) \rightarrow x(\sin(y)x^2 - 2 \sin(x)y) \exp(-\cos(y)x^2 - \sin(x)y^2)$$

$$\frac{d}{dx} f(x, y) \rightarrow \exp(\cos(y)x^2 - 2 \sin(x)y^2) + x(-2 \cos(y)x - \cos(x)y^2) \exp(-\cos(y)x^2 - \sin(x)y^2)$$

Можливе обчислення частинних похідних порядку вище першого, а також змішаних частинних похідних другого і вищого порядків. Наприклад, знаходження змішаної частинної похідної другого порядку здійснюється у наступному фрагменті документа MathCAD:

$$f(x, y) := (1 - y^2) * \cos(x * y)$$

$$\frac{d}{dx} f(x, y) \rightarrow -(1 + y^2) * \sin(x * y) * y$$

$$\delta f_x(x, y) := -(1 + y^2) * \sin(x * y) * y$$

$$\frac{d}{dy} \delta f_x(x, y) \rightarrow -2 * y^2 \sin(x * y) - (1 + y^2) * \cos(x * y) * x - (1 + y^2) * \sin(x * y)$$

Використовуючи частинні похідні, обчислюється приріст (диференціал) функції багатьох змінних. Якщо задана функція кількох змінних

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

то приріст цієї функції:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \delta x_n.$$

Приклад обчислення приросту функції за допомогою засобів пакета MathCAD:

$$f(x, y) = (1 - x * y^2) * e^{-x^2/2}$$

$$\frac{d}{dx} f(x, y) * \delta x + \frac{d}{dy} f(x, y) * \delta y \rightarrow - \left( y^2 * \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) + (1 - xy^2) * x * \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \right) \delta x - 2 * x * y * \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \delta y.$$

Наведені вище способи знаходження похідних не завжди доцільно використовувати. Зокрема, для розривних функцій, а також нескінченно малих чи нескінченно великих функцій використовуються інші методи. Один із методів використовує знаходження границь. Похідна в точці  $x_0$  може бути обчислена за формулою визначення похідної з використанням операцій знаходження границі функції, тобто

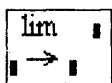
$$f'(x_0) = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \delta x) - f(x_0)}{\delta x},$$

де  $\delta x$  – нескінченно малий приріст функції в точці  $x = x_0$ .

В математичному пакеті границя обчислюється з використанням кнопки



панелі операцій математичного аналізу Calculus Palette (рис. 1.17, б) та відповідної заготовки



Як приклад визначимо похідну функції  $f(x) = \frac{\cos x - \cos 3x}{x}$  в точці  $x = 0$ .

Ця функція при  $x = 0$  має невизначеність типу  $\frac{0}{0}$ . Для знаходження значення функції в точці  $x = 0$  використаємо правило Лопіталя:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 3 \sin 3x}{1} = 0.$$

Враховуючи, що  $x_0 = 0$ ,  $f(x_0) = 0$ , одержимо  $f(x_0 + \delta x) - f(x_0) = f(\delta x)$ . Обчислення значень похідної здійснюється наступним фрагментом документа MathCAD:

$$f(x) := \frac{\cos(x) - \cos(3 * x)}{x} \quad \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(\delta x)}{\delta x} \rightarrow 4.$$

В результаті даних обчислень встановлено, що похідна функції в точці  $x = 0$  існує і її значення дорівнює 4.

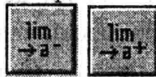
Знаходження похідних в точках розриву функції здійснюється з використанням односторонніх границь. В загальному вигляді одностороння похідна зліва визначається за формулою:

$$f'_-(x_0) = \lim_{\delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + \delta x) - f(x_0)}{\delta x}, \quad x \leq x_0, \quad \delta x < 0,$$

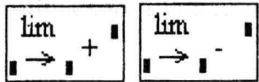
а одностороння похідна справа:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \delta x) - f(x_0)}{\delta x}, \quad x \geq x_0, \quad \delta x > 0.$$

Обчислення односторонніх похідних в пакеті MathCAD здійснюється за допомогою односторонніх границь. Знаходження односторонніх границь здійснюється з використанням кнопок



панелі операцій математичного аналізу Calculus Pallette (рис. 1.17, б) і відповідних заготовок



Нижче наведено фрагмент документа MathCAD, в якому обчислені односторонні похідні функції  $f(x) = |x^2 - 4|$  в точці  $x = 2$ .

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{|(2 + \delta x)^2 - 4| - |2^2 - 4|}{\delta x} \rightarrow \text{undefined}$$

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0^+} \frac{|(2 + \delta x)^2 - 4| - |2^2 - 4|}{\delta x} \rightarrow 4$$

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0^-} \frac{|(2 + \delta x)^2 - 4| - |2^2 - 4|}{\delta x} \rightarrow -4.$$

В результаті обчислень встановлено, що в точці  $x = 2$  похідна функції  $f(x)$  не існує. Похідна справа існує та дорівнює 4. Похідна зліва теж існує, але її значення (-4) не дорівнює значенню похідної справа.

Обчислення невизначеного інтеграла здійснюється за допомогою кнопки



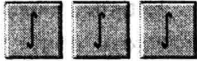
панелі операцій математичного аналізу Calculus Pallette (рис. 1.17, б). Після ініціалізації кнопки на екрані з'явиться заготовка



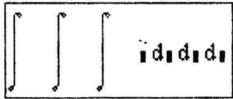
У правий чорний прямокутник цієї заготовки треба помістити змінну інтегрування, а у лівий прямокутник – символічний вираз або ім'я функції, невизначений інтеграл якої треба знайти, наприклад:

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x) * (1 + \cos(x))} dx \rightarrow -\ln(\cos(x)) + \ln(1 + \cos(x)).$$

Кратні невизначені інтеграли обчислюються повторним застосуванням вищевказаної кнопки в потрібній кількості. Для знаходження потрібного інтегралу кнопка ініціалізується 3 рази:



Відповідна заготовка для обчислення потрібного інтеграла має вигляд:



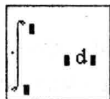
Нижче наведено приклад обчислення в символічному вигляді потрібного інтегралу:

$$\iiint e^{-\sqrt{x}} \sqrt{x} dx dx dx \rightarrow 8 \exp(-\sqrt{x}) x^2 - 72 \exp(-\sqrt{x}) x^{(3/2)} - 312 \exp(-\sqrt{x}) x - \dots - 720 \exp(-\sqrt{x}) \sqrt{x} - 720 \exp(-\sqrt{x}).$$

Для обчислення визначеного інтеграла використовується кнопка



панелі операцій математичного аналізу Calculus Palette (рис. 1.17, б) і відповідна заготовка



В нижній та верхній ліві затушовані прямокутники заготовки вставляються межі інтегрування у вигляді констант, змінних чи функціональних виразів. Результатом обчислення визначеного інтеграла буде число, символічна константа чи функція. Приклади обчислення визначених інтегралів у числовому та в символічному вигляді наведені нижче.

$$\int_0^1 \sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} dx \rightarrow \frac{1}{2} * \sqrt{\pi} \quad \int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \cos(\varphi) * \sin(x)} dx \rightarrow \frac{\pi * \varphi}{\sin(\varphi)}$$

Процедура символічного інтегрування в пакеті MathCAD здійснюється набагато складніше, ніж диференціювання. Часто інтеграл не обчислюється або обчислення дають невірний результат.

Обчислення інтегралів може бути здійснене і тоді, коли відрізок інтегрування необмежений, тобто інтеграл є невласним. Нижче наведено фрагмент документу MathCAD, в якому обчислено невласні інтеграли.

$$m := 2 \quad a := 0.5$$

$$\int_0^{\infty} e^{-a \cdot x} * \sin(\sqrt{m} * \sqrt{x}) dx \rightarrow 1.30409866434658436.$$

Даний інтеграл є табличним і його точне значення дорівнює [6]:

$$\frac{\sqrt{\pi m/a}}{2a} e^{-m/a} = 1.304.$$

Обчислення невластних інтегралів у символьному вигляді часто використовується у задачах математичного моделювання. Нижче наведено приклад знаходження перетворення Лапласа функції  $f(t)$  шляхом обчислення невластного інтеграла у символьному вигляді:

$$f(t) := \frac{\sin(2 * \sqrt{kt})}{\sqrt{\pi * k}}$$

$$F(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1}{-s} * \exp(-s * t) * \frac{\sin(2 * \sqrt{kt})}{\sqrt{\pi * k}} + \frac{1}{s} * \frac{\sin(2 * \sqrt{kt})}{\sqrt{\pi * k}}$$

Результатом обчислення інтеграла може бути символьна функціональна залежність, реалізована в пакеті MathCAD.

Наведені нижче функції призначені для безпосереднього обчислення часових характеристик системи автоматичного керування з використанням процедури знаходження визначеного інтеграла у символьному вигляді.

$$H(t) := \frac{2 * \int_{0.01}^{10} U(\omega) \frac{\sin(\omega * t)}{\omega} d\omega}{\pi} \quad w(t) := \frac{2 * \int_{0.01}^{10} U(\omega) * \cos(\omega * t) d\omega}{\pi}$$

Математичні моделі процесів, визначені символьними функціональними залежностями, досліджують з використанням апарату математичного аналізу. Встановлюється область визначення та область зміни функції, яка описує процес. Для складних процесів бажано проводити аналіз графіка процесу. Труднощі із знаходженням області визначення пов'язані зі встановленням особливостей процесу в областях  $\pm\infty$ , в точках розриву другого роду та неоднозначностях. Область визначення та область зміни функції уточнюються масштабуванням графіків процесу.

При математичному моделюванні визначають характерні особливості процесів, пов'язаних з їх внутрішньою структурою [1]. Головні з них це – тенденції зміни функцій та кількісні показники цих тенденцій. Процес описується зростаючою функціональною залежністю, коли його значення збільшується при зростанні аргументу. Спадаюча функція зменшує свої значення при збільшенні аргументу. Інформацію про вид залежності одержують аналізуючи похідну функції. Якщо похідна є додатною, то функція зростаюча. Спадаюча функція має від'ємну похідну.

Похідна функції визначає швидкість її зміни. Геометрично похідна характеризує дотичну до кривої (рис. 1.18).

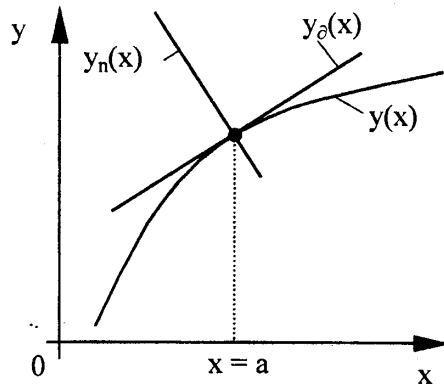


Рис. 1.18. Дотична та нормаль плоскої кривої

Для знаходження рівняння дотичної використовують обчислене значення похідної. Рівняння дотичної до кривої, заданої виразом  $y = y(x)$ , має наступний вигляд:

$$y_t - y(a) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} \cdot (x - a),$$

де  $x = a$  – точка, в якій знаходиться дотична;

$y(a)$  – значення функції в даній точці.

Аналогічно визначається рівняння нормалі до кривої в точці  $x = a$  (рис. 1.18). Воно має вигляд:

$$y_n - y(a) = -\frac{1}{\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}} (x - a).$$

Друга похідна визначає кривизну кривої. Кривизна кривої  $k$  є величиною, оберненою до радіуса кривизни  $\rho_k$ , і визначається виразом:

$$k = \frac{1}{\rho_k} = \frac{d^2y}{dx^2} / \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} \right]^3.$$

Радіус кривизни  $k$  визначає дотичне до даної кривої коло (рис. 1.19), центр якого (точка  $O_k$ ) лежить на нормалі до кривої в точці  $A$ .

Центр кола називають центром кривизни.

Координати центра кривизни визначаються за формулами:

$$x_k = a - \frac{dy}{dx} \Big|_{x=a} \cdot \frac{1 + \left[ \frac{dy}{dx} \Big|_{x=a} \right]^2}{\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=a}}, \quad y_k = y(a) + \frac{1 + \left[ \frac{dy}{dx} \Big|_{x=a} \right]^2}{\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=a}}$$

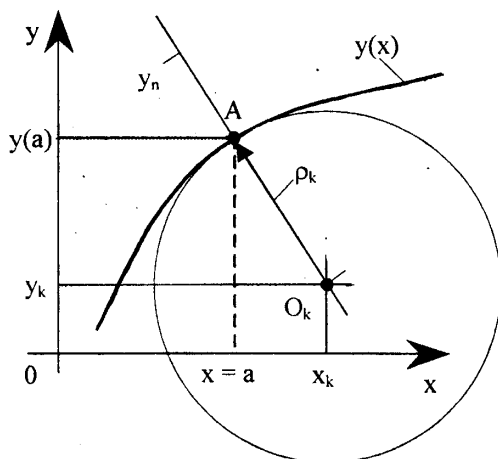


Рис. 1.19. Кривизна кривої та центр кривизни

Похідні необхідного порядку дозволяють знайти геометричні характеристики гладких кривих, зокрема точки перегину кривої, екстремуми, цикли.

Локальні екстремуми функції знаходяться з використанням першої та другої похідних. Якщо в деякому інтервалі  $[a; b]$  є мінімум функції  $y = y(x)$  (рис. 1.20, а), то в середині цього інтервалу знаходиться стаціонарна точка функції, в якій

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

і в цій точці виконується умова

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0.$$

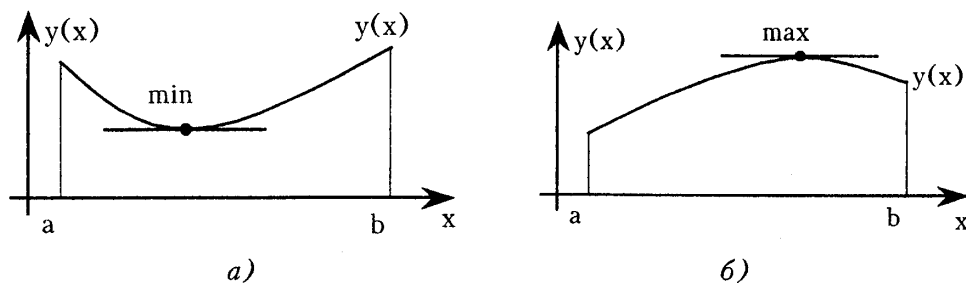


Рис. 1.20. Екстремуми функції: а – мінімум; б – максимум

У випадку наявності максимуму функції в інтервалі  $[a; b]$  (рис. 1.20, б) в даному інтервалі є стаціонарна точка, в якій

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

а друга похідна функції у стаціонарній точці від'ємна:

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0.$$

Для практичного знаходження локального екстремуму визначають координати стаціонарних точок шляхом розв'язку рівняння:

$$\frac{dy(x)}{dx} = 0.$$

У знайдених стаціонарних точках знаходять другу похідну функції, визначають її знак і роблять висновок про характер екстремуму (максимум чи мінімум).

Вищесказане відноситься до гладких неперервних функцій. Знаходження екстремумів в більш складних випадках розривних функцій буде розглянуто нижче.

Похідні функції різних порядків дають ефективний інструмент їх аналізу, зокрема, визначаються особливі точки функції, неоднозначності, цикли тощо.

Функція з неоднозначністю відповідає складному процесу, поточне значення якого залежить від передісторії процесу. Гладкі неоднозначні процеси не мають розривів і зламів (рис. 1.21).

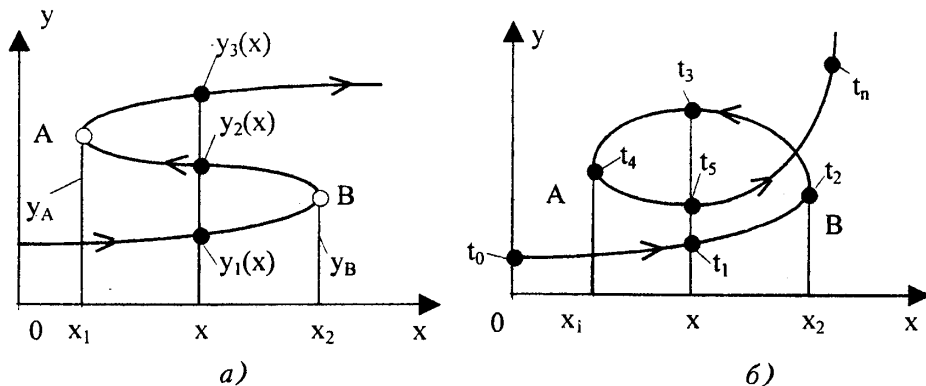


Рис. 1.21. Процеси з неоднозначностями, які описуються гладкими неперервними функціями: а – монотонно зростаюча функція; б – петлеподібний процес із неоднозначністю

Неоднозначні процеси характеризуються множиною значень та деякою додатковою інформацією. Наприклад, для процесу, зображеного на рис. 1.21, а, символічна функція, що описує процес, записується у вигляді ло-



гічної конструкції:

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{при } x \leq x_2, y \leq y_B \\ y_2(x) & \text{при } x_1 \leq x \leq x_2, y_B \leq y \leq y_A \\ y_3(x) & \text{при } x \geq x_1, y \geq y_A \end{cases}$$

Дана схема опису неоднозначного процесу є досить складною.

Радикальним способом спрощення символного опису процесу з неоднозначностями є перехід до параметричного визначення функції у вигляді  $y = y(t)$ ,  $x = x(t)$ . Значення параметра  $t$  вказують на графіку процесу (див. рис. 1.21, б). Прикладом використання параметричного опису складної неоднозначної функції є амплітудно-фазова частотна характеристика динамічної системи [58]:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

яка має петлеподібні неоднозначності (рис. 1.22).

Параметром, прийнятим для опису цієї функції, є частота. Відповідно аргумент  $U(\omega)$  і функція  $V(\omega)$  задаються в параметричному вигляді. Параметр  $\omega$  (частота) вказується на полі графіка.

Процеси в технічних системах і відповідні їх символні залежності часто мають злами і точки розриву (рис. 1.23).

Дослідження процесів із зламами і точками розриву здійснюється за допомогою односторонніх границь функції або її похідної. Наприклад умовою зламу функції в точці  $x_{31}$  (рис. 1.23) є нерівність значень похідних зліва та справа від точки зламу:

$$\lim_{x \rightarrow x_{31}^-} \frac{dy_1(x)}{dx} \neq \lim_{x \rightarrow x_{31}^+} \frac{dy_1(x)}{dx}$$

Наявність розриву першого роду визначається співвідношенням

$$\lim_{x \rightarrow x_{p1}^-} y_2(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_{p1}^+} y_2(x)$$

за умови існування границь функції зліва і справа від точки розриву. Це співвідношення виконується для точок  $x = x_{p1}$  та  $x = x_{p2}$  (рис. 1.23).

Наявність розриву другого роду визначається в залежності від поведінки функції в точці розриву. Наприклад, для точки  $x_{n1}$  (див. рис. 1.23)

$$\lim_{x \rightarrow x_{n1}^-} y_3(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_{n1}^+} y_3(x) = \infty.$$

Для точки  $x_{n2}$  відповідно маємо:

$$\lim_{x \rightarrow x_{n2}^-} y_3(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_{n2}^+} y_3(x) = +\infty.$$

Аналогічним чином досліджуються неоднозначні процеси із точками зламу. На рис. 1.24 наведено ряд характерних випадків процесів, які відповідають залежностям з гістерезисом, що є неоднозначними процесами із зламами.

Рис. 1.24, а відповідає функціональній залежності, яка змінюється відповідно до знака аргументу. При зміні  $x$  від 0 до точки А залежність відповідає

кривій 1. При зменшенні аргументу, починаючи з точки А, залежність набуває вигляду кривої 2. При черговому збільшенні аргументу  $x$  (в точці В) знову має місце крива 1. В залежності від розташування точки А змінюється крива 2. Так, для точки А' відповідна крива 3 не співпадає з кривою 2.

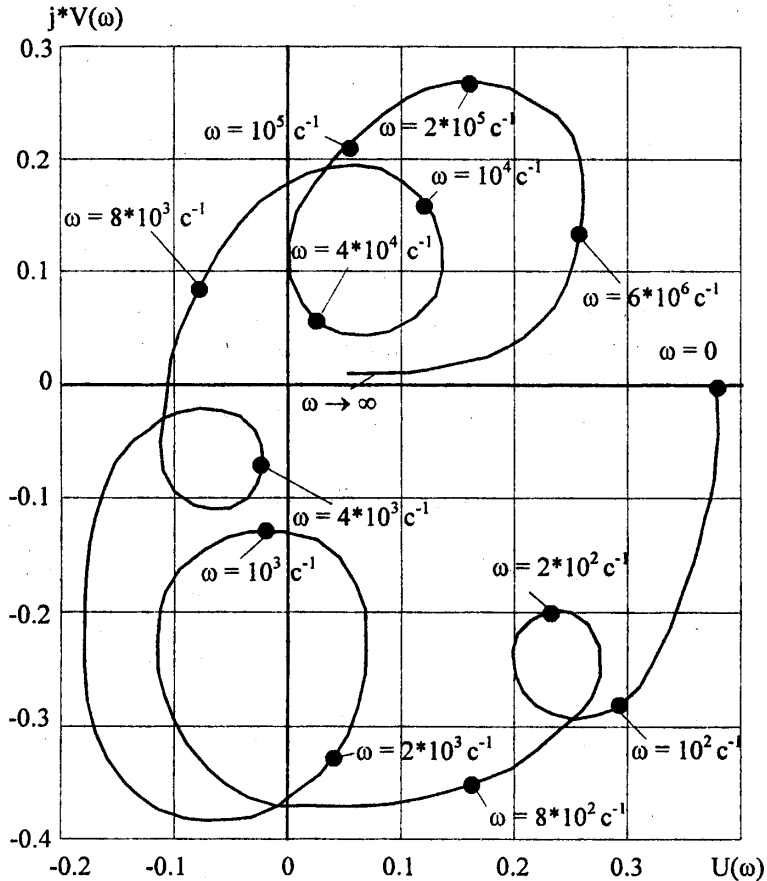


Рис. 1.22. Амплітудно-фазова частотна характеристика динамічної системи як приклад неоднозначної функції, заданої параметрично

Рис. 1.24, б відповідає більш складній залежності, коли крива 1 не є фіксованою, а змінюється відповідно до передісторії процесу. При зміні аргументу  $x$  від 0 до точки А маємо залежність, яка відповідає кривій 1. При зменшенні аргументу  $x$ , починаючи з точки А, маємо залежність 2, при збільшенні аргументу, починаючи з точки В, процес відповідає кривій 3. Подальше зменшення аргументу  $x$ , починаючи з точки А', визначає процес у вигляді кривої 4. Аналіз процесів із розривами і зламами, включаючи неоднозначні процеси, виконується із застосуванням граничних співвідношень (границь функцій).

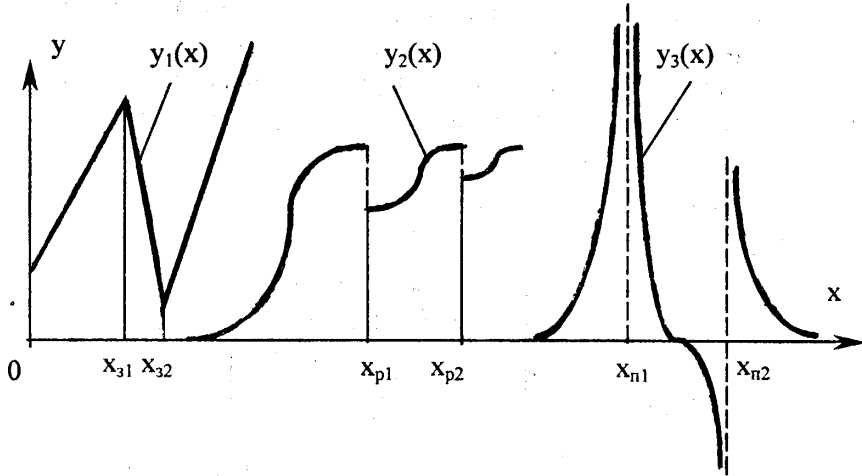


Рис. 1.23. Процеси, які описуються функціональними залежностями, зі зламами та розривами різного виду:  $y_1(x)$  – процес із зламами (розривами похідної);  $y_2(x)$  – процес із розривами 1-го роду;  $y_3(x)$  – процес із розривами 2-го роду

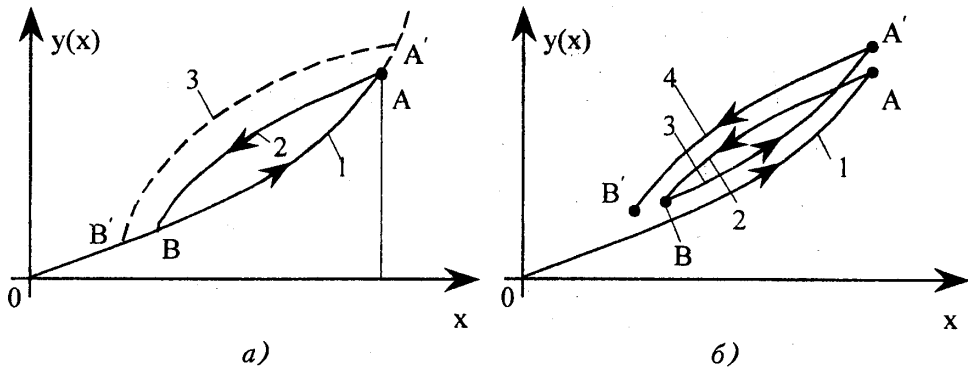


Рис. 1.24. Приклади неоднозначних гістерезисних процесів із зламами, які змінюються в залежності від передісторії процесу

Обчислення границь засобами математичного пакету MathCAD є ефективним інструментом аналізу процесів. Воно може бути здійснене як в чисельному, так і в символьному вигляді. Для знаходження конкретного значення границі функції достатньо використати відповідні заготовки з панелі математичних операцій та з панелі калькулятора.

Наприклад, обчислення границі функції  $\frac{\sin x}{x}$  здійснюється наступним оператором пакету MathCAD:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Обчислення границь в символьному вигляді ілюструється наступним документом MathCAD:

$$X(n) := 2 * \operatorname{atan}(n^4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X(n) \rightarrow \pi \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \rightarrow \text{undefined}$$

Останній приклад означає, що границя функції

$$f(x) = (x-1)^{-1} \text{ при } x \rightarrow 1 \text{ не існує.}$$

При обчисленні границь складних функцій використовують **правила операцій з границями**. Вони полягають в основному у наступному:

- границя алгебраїчної суми функцій дорівнює сумі границь:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

- постійну величину  $C$  можна виносити за знак границі:

$$\lim_{x \rightarrow a} [C \cdot f(x)] = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad C = \text{Const};$$

- границя добутку функцій дорівнює добутку границь:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

- границя відношення функцій дорівнює відношенню границь:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \text{ при } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$$

Ці правила діють як при обчисленні односторонніх, так і при обчисленні двосторонніх границь.

В практиці розробки і використання математичних моделей часто виникає необхідність в обчисленні границь, які включають невизначеності. Наприклад, коли обчислюються границі виду:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{U(x)}{V(x)},$$

де  $\lim_{x \rightarrow a} U(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} V(x) = 0$ ,

то наявна невизначеність типу  $\frac{0}{0}$ .

При обчисленні границь функцій, які включають відношення функцій, добутки, різниці, степені виду:

$$\frac{U(x)}{V(x)}, U(x) \cdot V(x), U(x) - V(x), [U(x)]^{V(x)}$$

можливі невизначеності наступних типів:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, 0^0, 0^x, \infty^0, 1^x, \infty - \infty.$$

Для обчислення вищенаведених невизначених границь здійснюють «розкриття» невизначеностей.

Невизначеності типу

$$\frac{0}{0} \text{ і } \frac{\infty}{\infty}$$

«розкриваються» згідно з правилом Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{U(x)}{V(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{U'(x)}{V'(x)} \quad (V(x) \neq 0 \text{ при } x = a, V'(x) \neq 0).$$

Правило Лопіталя можна застосувати послідовно до границь похідних коли ці границі похідних також мають невизначеність типу  $\frac{0}{0}$  чи  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Невизначеності типу

$$0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty, \infty - \infty$$

звичайно можна привести до невизначеності типу

$$\frac{0}{0} \text{ чи } \frac{\infty}{\infty}$$

за допомогою співвідношень:

$$U(x)V(x) = \frac{U(x)}{1/V(x)} \equiv \frac{V(x)}{1/U(x)}$$

чи

$$[U(x)]^{V(x)} \equiv e^{g(x)}, \quad \left[ g(x) \equiv \frac{\ln U(x)}{1/V(x)} \equiv \frac{V(x)}{1/\ln U(x)} \right],$$

або

$$U(x) - V(x) \equiv \frac{1}{\frac{1}{U(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{V(x)}} \equiv \ln [g(x)], \quad \left[ g(x) \equiv \frac{e^{U(x)}}{e^{V(x)}} \right].$$

Нижче наведені деякі практично важливі границі, які часто зустрічаються при аналізі та обчисленні функцій і широко використовуються при розробці математичних моделей:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.718281828;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{c^x - 1}{x} = \ln c, \quad c > 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-a} \ln x = \lim_{x \rightarrow \infty} x^a e^{-x} = 0, \quad a > 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1.$$

**«Розкриття невизначеностей»** представляє собою порівняння нескінченно великих і нескінченно малих функцій.

Функція  $U(x)$  вважається нескінченно малою при

$$x = a, \text{ якщо } \lim_{x \rightarrow a} U(x) = 0.$$

Нескінченно великою в точці  $x = a$  функція вважається у випадку, коли

$$\lim_{x \rightarrow a} U(x) = \infty.$$

Нескінченно великі та нескінченно малі функції порівнюються шляхом граничних співвідношень.

Порівняння нескінченно малих функцій здійснюється шляхом визначення порядку їх малості. Визначимо особливості порівняння функцій.

Розглянемо дві нескінченно малі в точці  $x = a$  функції

$$U(x) \text{ та } V(x).$$

Якщо  $U(x)$  та  $V(x)$  – нескінченно малі функції в деякій області точки  $x = a$ , то, як визначено раніше,

$$\lim_{x \rightarrow a} U(x) = 0 \text{ і } \lim_{x \rightarrow a} V(x) = 0.$$

Але ці функції можуть зовсім по-різному поводитись поблизу точки  $x = a$ .

Якщо в цій точці

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{U(x)}{V(x)} = 0,$$

то вважається, що  $U(x)$  є **більш високого порядку малості**, ніж  $V(x)$ , тобто

$$U(x) = o[V(x)] \text{ в точці } x = a.$$

Якщо границя відношення двох нескінченно малих функцій існує і є кінечною (не дорівнює нулю або нескінченності), то функції вважаються **асимптотично еквівалентними**. Прикладом асимптотичних еквівалентних функцій в околі точки  $x = 0$  є функції  $U(x) = \sin x$  та  $V(x) = x$ .

Якщо границя відношення двох нескінченно малих функцій не існує, то ці функції вважаються **непорівняними**.

При аналізі процесів часто використовують **асимптотичні лінійні залежності (асимптоти)**. Знаходження асимптот функції представляє собою самостійну важливу задачу аналізу процесу. Асимптоти звичайно знаходяться як граничні прямі лінії, до яких прямує досліджувана функція в певній області.

Розглянемо практичне знаходження асимптоти функції для границі області визначення ( $x \rightarrow \infty$ ) (рис. 1.25).

Під знаходженням асимптоти розуміють визначення коефіцієнтів лінійної залежності  $f_a(x)$ .

Рівняння асимптоти має вигляд:

$$f_a(x) = a_0 + a_1 x. \tag{1.5}$$

Асимптота є лінією, до якої прямує функція  $f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ . При  $x \rightarrow \infty$  функція та її асимптота приблизно співпадають.

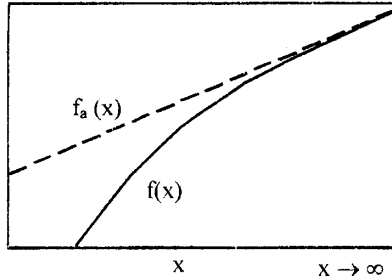


Рис. 1.25. Графічна інтерпретація визначення асимптоти функціональної залежності

Коефіцієнти асимптот визначаються із двох умов:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} [f_a(x) - f(x)] &= 0; \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_a(x)}{f(x)} &= 1. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Підставивши в другу умову (1.6) рівняння асимптоти (1.5), визначимо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 + a_1 x}{f(x)} = 1.$$

Оскільки  $a_0 \ll a_1 x$  при  $x \rightarrow \infty$ , то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_1 x}{f(x)} = 1.$$

Звідси знаходимо коефіцієнт:

$$a_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (1.7)$$

Підставивши рівняння асимптоти (1.5) в першу умову (1.6), одержимо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [a_0 + a_1 x - f(x)] = 0,$$

звідки знаходимо:

$$a_0 = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - a_1 x]. \quad (1.8)$$

Знаходження асимптотичних залежностей часто використовується з метою аналізу процесів.

Розглянемо практично важливий приклад знаходження асимптот логарифмічної амплітудно-частотної характеристики лінійної динамічної системи, яка має вигляд аперіодичної ланки I-го порядку [4]. Характеристика відповідає нелінійній функції частоти:

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}. \quad (1.9)$$

Характеристика (1.9) має дві асимптоти: першу – при  $\omega \rightarrow \infty$ , а другу – при  $\omega \rightarrow 0$ .

Знайдемо коефіцієнти першої асимптоти, прийнявши аргумент у формулі (1.9)  $x = \lg \omega$ . Враховуючи, що при  $\omega \rightarrow \infty$   $T^2 \omega^2 \gg 1$ , одержимо, використо-

вуючи формулу (1.7):

$$a_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\lg \omega \rightarrow \infty} \frac{20 \lg \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}}{\lg \omega}; \quad a_1 = \left. \frac{20 \left( \lg \frac{K}{T} - 2 \lg \omega \right)}{\lg \omega} \right|_{\lg \omega \rightarrow \infty} = -20,$$

де враховано, що  $\frac{\lg \frac{K}{T}}{\lg \omega} \approx 0$  при  $\lg \omega \rightarrow \infty$ .

Для знаходження коефіцієнта  $a_0$  використаємо залежність (1.8):

$$a_0 = \lim_{\lg \omega \rightarrow \infty} \left[ 20 \lg \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} + 20 \lg \omega \right].$$

Враховуючи, що  $T^2\omega^2 \gg 1$ , одержимо значення коефіцієнта:

$$a_0 = \lim_{\lg \omega \rightarrow \infty} \left[ 20 \lg \frac{K}{T} - 20 \lg \omega + 20 \lg \omega \right] = 20 \lg \frac{K}{T}.$$

Таким чином, рівняння першої асимптоти, яка відповідає функції (1.9), при  $\omega \rightarrow \infty$  ( $\lg \omega \rightarrow \infty$ ) буде мати вигляд:

$$f_a(x) = 20 \lg \frac{K}{T} - 20 \lg \omega = 20 \left( \lg \frac{K}{T} - x \right) = 20 \lg \frac{K}{T\omega}. \quad (1.10)$$

Аналогічно знаходиться рівняння другої асимптоти (описує характеристику (1.9) при  $\omega \rightarrow 0$ ). Воно відповідає прямій, паралельній осі  $\omega$ :

$$L_a(\omega) = 20 \lg K. \quad (1.11)$$

Графіки асимптот (1.10) і (1.11) та значення характеристики (1.9) є близькими скрізь, за виключенням околу точки  $\omega = \frac{1}{T}$  (рис. 1.26).

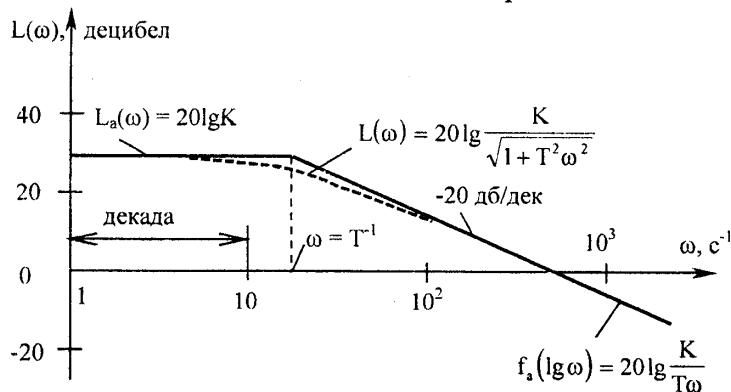


Рис. 1.26. Приклад використання асимптот для опису нелінійної функції  $L(\omega)$ , яка визначає логарифмічну амплітудно-частотну характеристику динамічної системи, що відповідає аперіодичній ланці першого порядку



## РОЗДІЛ 2

## Функціональні ряди у математичному моделюванні

## 2.1. Ряди Фур'є. Загальні положення

Ряди Фур'є надзвичайно широко використовуються при математичному моделюванні технічних систем [1, 35, 37]. Це, зокрема, гармонічний аналіз детермінованих та стохастичних процесів, спектральний аналіз процесів різного виду. Ряди Фур'є використовуються при аналізі технічних систем, що описуються звичайними диференціальними рівняннями та рівняннями в частинних похідних. Теорія випадкових процесів, багато задач теорії ймовірності також базуються на використанні рядів Фур'є.

Ряди Фур'є є функціональними рядами, складеними із гармонічних функцій. Синусоїдальні (гармонічні) функції є найпростішими періодичними функціями, що задовольняють умовам неперервності. Більш складні періодичні функції можна виразити через синусоїдальні. Засновником теорії періодичних функцій вважається Фур'є. Працюючи над математичною теорією теплопередачі у 1807 році, він довів теорему, згідно з якою всяка періодична функція, за деяких умов, може бути виражена через суму синусоїд, періоди яких відносяться як ряди цілих чисел. Дана сума синусоїд носить назву ряду Фур'є.

Ряди Фур'є представляють собою суму достатньо великого числа доданків складених із лінійної комбінації пар тригонометричних функцій

$$\sin(kx) \text{ та } \cos(kx),$$

де  $k$  – ціле число ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

Ряди Фур'є застосовуються звичайно для опису періодичних функцій дійсного аргументу, які задовольняють так званим умовам Діріхле. Ці умови полягають в наступному:

1. Функція повинна бути **однозначна, обмежена і кусково-неперервна**.
2. Функція має певне **обмежене число максимумів і мінімумів**.

Приклади періодичних процесів з періодом  $2\pi$ , які задовольняють умовам Діріхле, наведено на рис. 2.1.

Для періодичних функцій  $f(x)$  з періодом  $2\pi$  нескінченний ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx)]. \quad (2.1)$$

Ряд Фур'є в кожній точці інтервалу  $0 \leq x \leq 2\pi$  збігається до значень функції  $f(x)$  в усіх точках неперервності. В точках розриву функції ( $x = a$ ) ряд збігається до значень:

$$f(a) = \frac{1}{2}(f(a+0) + f(a-0)).$$

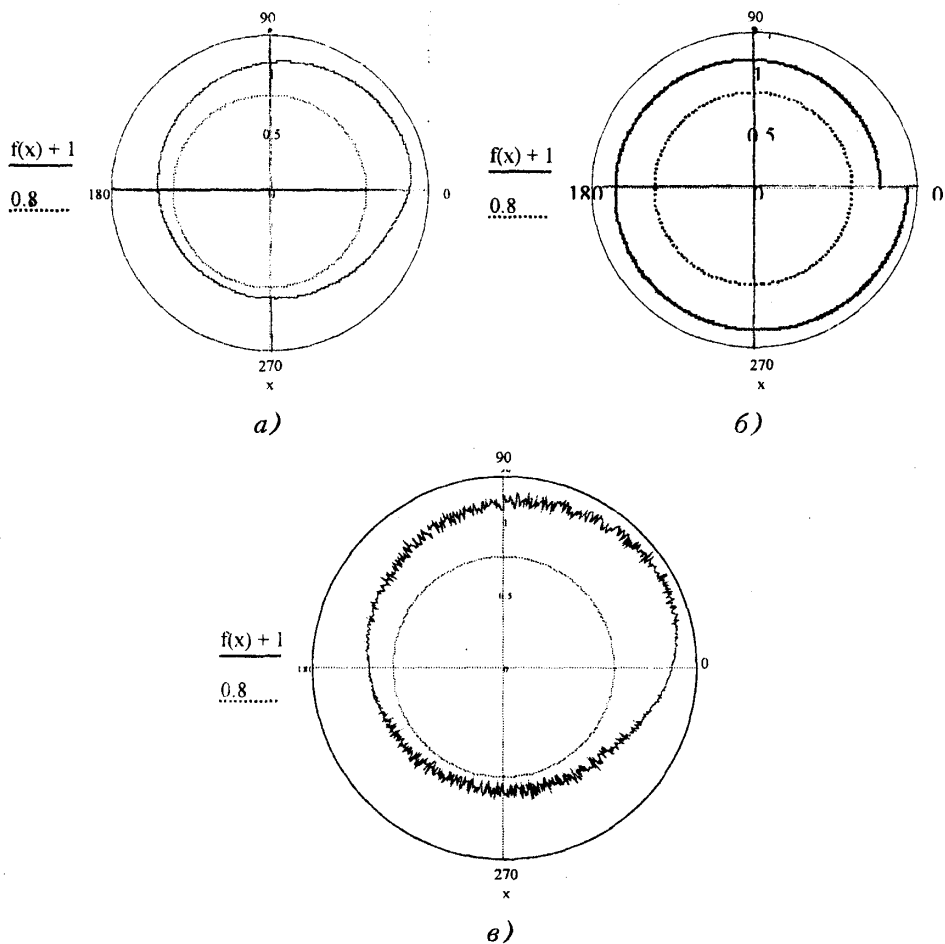


Рис. 2.1. Приклади періодичних процесів з періодом  $2\pi$ : а – процес у вигляді гладкої неперервної залежності; б – процес з розривом першого роду; в – процес, який містить високочастотні осциляції

Постійні коефіцієнти ряду  $a_k, b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, \infty$ ) не залежать від  $x$  і зв'язані із функціональною залежністю  $f(x)$  наступними інтегральними співвідношеннями (інтеграли Коші):

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx; \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ряд Фур'є виду (2.1) точно описує функцію  $f(x)$  при нескінченній кількості складових ряду. Практичне застосування ряду вимагає обмеження числа його членів. Звичайно, для практичних потреб, розглядаються складові ряду (прості гармоніки) з номером до  $k_{\max} = 10, \dots, 200$ . При кінечному числі членів ряду ряд Фур'є **найкращим чином** (найбільш точно) описує функцію в порівнянні з будь-яким іншим тригонометричним рядом з такою ж кількістю членів.

Ряди Фур'є є результатом розкладу періодичної функції  $f(x)$  на суму системи функцій, яка є ортогональною. Вид даної ортогональної системи функцій:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 1; & \varphi_2(x) &= \cos x; & \varphi_3(x) &= \sin x; \\ \varphi_4(x) &= \cos(2x); & \varphi_5(x) &= \sin(2x); & \varphi_6(x) &= \cos(3x). \end{aligned}$$

Ця система функцій ортогональна в інтервалі  $[0, 2\pi]$ . Відповідно для неї виконуються умови ортогональності виду:

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx \begin{cases} = 0 & \text{при } n \neq m \\ \neq 0 & \text{при } n = m \end{cases} \quad (2.3)$$

В залежності від вигляду функції  $f(x)$  ряд Фур'є може набувати різних форм. Практично важливими випадками є ряди для симетричних і кососиметричних функцій (рис. 2.2).

Для функцій, **симетричних** відносно точки  $x = \pi$ , ряд Фур'є має вигляд ( $b_k = 0$ ):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(kx). \quad (2.4)$$

Для функцій, **кососиметричних** відносно точки  $x = \pi$ , розклад в ряд Фур'є ( $a_k = 0$ ) буде:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(kx). \quad (2.5)$$

Коефіцієнти ряду Фур'є для заданої функції  $f(x)$  знаходяться звичайно шляхом обчислення інтегралів. В математичному пакеті MathCAD запис процедури обчислення визначеного інтеграла співпадає із загальноновживаним записом (2.2). Засоби пакету дозволяють знайти коефіцієнти ряду як у числовому, так і в символьному вигляді. Наступний приклад ілюструє обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є у символьному вигляді для функції, заданою залежністю:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{x^2(x-\pi)^2}{4} & \text{при } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Фрагмент документа MathCAD, який здійснює обчислення коефіцієнтів  $a_k$  та  $b_k$  у символьному вигляді, наведено нижче. Знаходження  $a_k$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} * \int_0^{\pi} x^2 * \frac{(x-\pi)^2}{4} * \cos(kx) dx \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{1}{\pi} * \left[ \frac{-1}{2} * \frac{(-12 \sin(k\pi) + 6k \cos(k\pi)\pi + k^2 \sin(k\pi)\pi^2)}{k^5} - \frac{3}{k^4} \pi \right]. \end{aligned}$$

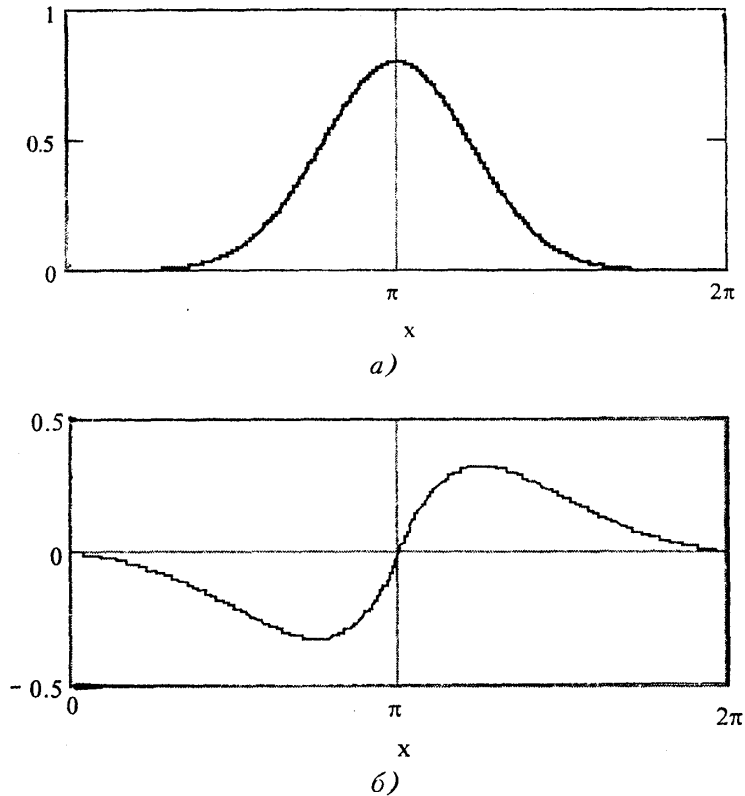


Рис. 2.2. Приклади процесів, що мають вигляд симетричних (а) та косиметричних (б) функцій

Обчислення коефіцієнтів  $b_k$  у символічному вигляді:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} * \int_0^{\pi} x^2 * \frac{(x - \pi)^2}{4} * \sin(kx) dx \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{1}{\pi} * \left[ \frac{1}{2} * \frac{(-12 \cos(k\pi) + 6k \sin(k\pi)\pi + k^2 \cos(k\pi)\pi^2)}{k^5} - \frac{1}{2} * \frac{(-12 + k^2\pi^2)}{k^5} \right]. \end{aligned}$$

Ряд Фур'є виду (2.1) часто записується в більш компактному вигляді:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \sin(kx + \psi_{k0}), \quad (2.6)$$

де  $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$  – амплітуда  $k$ -ї гармоніки;

$\psi_{k0} = \arctg \frac{a_k}{b_k}$  – початкова фаза  $k$ -ї гармоніки.

Запис ряду Фур'є у вигляді (2.6) набагато зручніший для аналізу ніж формула (2.1).

Ряди Фур'є широко використовуються при аналізі періодичних функцій, період яких відрізняється від  $2\pi$  (рис. 2.3).

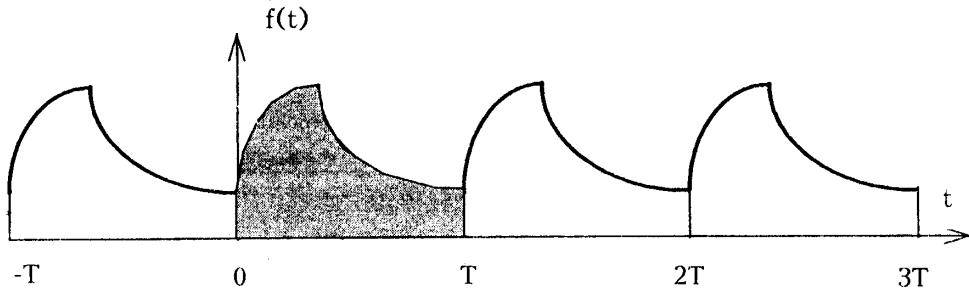


Рис. 2.3. Приклад періодичної функції з періодом  $T \neq 2\pi$

Затушована частина графіка відповідає періоду  $T \neq 2\pi$ .

Для періодичної функції

$$f(t) = f(t + T) \quad (2.7)$$

відповідно завжди повинна виконуватись умова:

$$f(0) = f(T). \quad (2.8)$$

Якщо функція  $f(t)$  має період  $T$ , то виконавши заміну аргументу функції на  $x = \frac{2\pi t}{T}$ , одержимо функцію з періодом  $2\pi$ . При цьому ряд Фур'є для функції  $f(t)$  має вигляд:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t), \quad (2.9)$$

де  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  – параметр (базове значення кругової частоти), який враховує відмінність періоду функції  $f(t)$  від  $2\pi$ . Цей параметр характеризує періодичність функції.

Якщо розглядають процес – функцію часу  $f(t)$ , то параметр  $\omega_0$  називається базовою частотою процесу і вимірюється в  $1/\text{с}$  (радіанах на секунду).

Коефіцієнти ряду Фур'є для функції з періодом  $T$ , відмінним від  $2\pi$ , обчислюються за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(\tau) d\tau; \quad (2.10)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(\tau) \cdot \cos(k\omega_0 \tau) d\tau = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(\tau) \cdot \cos(k\omega_0 \tau) d\tau;$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(\tau) \cdot \sin(k\omega_0\tau) d\tau = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(\tau) \cdot \sin(k\omega_0\tau) d\tau,$$

$$k = 1, 2, \dots$$

При математичному моделюванні також використовують ряди Фур'є, складені для неперіодичних функцій. В неперіодичній функції не виконуються умови (2.7) та (2.8). Приклад неперіодичної функції наведено на рис. 2.4.

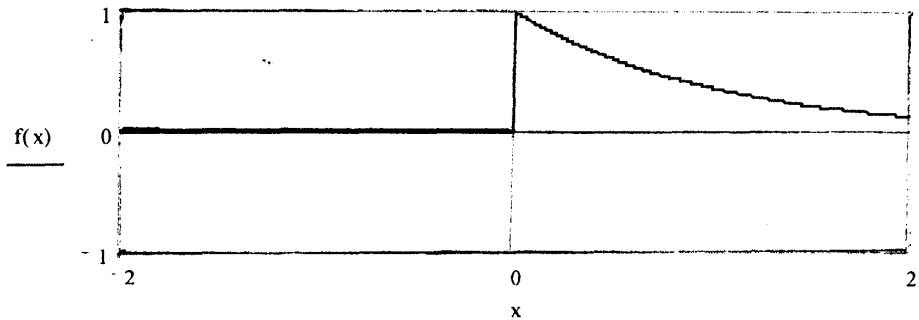


Рис. 2.4. Приклад неперіодичного процесу, який відповідає неперіодичній функції з розривом першого роду

Розглянемо розклад в ряд Фур'є неперіодичної функції. Як вказано раніше, ряди Фур'є використовуються для періодичних функцій довільного періоду. Неперіодичну функцію можна вважати функцією з періодом  $T \rightarrow \infty$ . При цьому базове значення частоти  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$ . Розклад в ряд Фур'є (2.9) функції нескінченного періоду набуде вигляду:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\omega_0} \sum_{\omega=\omega_0}^{\infty} \omega_0 [a_k \cos(\omega t) + b_k \sin(\omega t)], \quad (2.11)$$

де  $\omega = k\omega_0$  – величина, яка змінюється неперервно, і різниця між нескінченно близькими значеннями  $\omega$  складає  $\omega_0$ . Тому можна розглядати  $\omega_0 = \Delta\omega$  як нескінченно малий приріст величини  $\omega$ .

Підставивши значення коефіцієнтів із (2.10) у формулу (2.11), одержимо:

$$f(t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) d\tau + \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{2}{T} \sum_{\omega=\omega_0}^{\infty} \Delta\omega \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \cdot [\cos(\omega\tau) \cdot \cos(\omega t) + \sin(\omega\tau) \cdot \sin(\omega t)] d\tau.$$

Будемо вважати, що границя інтегралу існує і є кінечною, тобто

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) d\tau \neq \infty.$$

Виконавши перетворення тригонометричних функцій, одержимо:

$$f(t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{\omega=\omega_0}^{\infty} \Delta\omega \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \cdot [\cos[\omega(t - \tau)]] d\tau. \quad (2.12)$$

В цій формулі виконаємо граничний перехід при  $T \rightarrow \infty$ .

При цьому  $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ , а сума трансформується в інтеграл:

$$\sum_{\omega=\omega_0}^{\infty} \rightarrow \int_0^{\infty}$$

Тоді формула (2.12) набуде вигляду:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot \cos[\omega(t - \tau)] d\tau. \quad (2.13)$$

Ця залежність представляє собою запис деякої неперіодичної функції  $f(t)$  у вигляді **інтегралу Фур'є**.

Перетворимо запис функції у вигляді інтегралу Фур'є (2.13) до наступної форми:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [U(\omega) \cdot \cos(\omega t) + V(\omega) \cdot \sin(\omega t)] d\omega, \quad (2.14)$$

де значення функцій  $U(\omega)$  та  $V(\omega)$  задані інтегралами:

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot \cos(\omega\tau) d\tau; \quad V(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot \sin(\omega\tau) d\tau. \quad (2.15)$$

Запишемо формулу інтегралу Фур'є (2.14) у більш компактному вигляді, що відповідає:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W(\omega) \cdot \cos[\omega t - \psi(\omega)] d\omega. \quad (2.16)$$

У формулі (2.16) введені позначення величин, що відповідають амплітуді гармонічної функції  $W(\omega)$  та початковій фазі  $\psi(\omega)$ . Вони виражаються через функції  $U(\omega)$  та  $V(\omega)$  згідно співвідношень:

$$W(\omega) = \sqrt{[U(\omega)]^2 + [V(\omega)]^2}; \quad \psi(\omega) = \text{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}. \quad (2.17)$$

Із формули (2.16) випливає, що довільну дійсну неперіодичну функцію  $f(x)$ , визначену в інтервалі  $(-\infty, +\infty)$ , можна розглядати як нескінченну суму синусоїдальних (косинусоїдальних) функцій з амплітудами  $W(\omega)$  і початковими фазами  $\psi(\omega)$ .

Для аналізу технічних систем застосовуються ряди Фур'є в так званій **комплексній формі**. Для одержання комплексної форми у формулі (2.1), яка визначає ряд Фур'є, виконаємо заміну тригонометричних функцій на

експоненціальні відповідно до залежностей:

$$\cos(kx) = \frac{e^{jkx} + e^{-jkx}}{2}; \quad \sin(kx) = \frac{e^{jkx} - e^{-jkx}}{2j}, \quad j = \sqrt{-1}.$$

При цьому одержимо ряд Фур'є в комплексній формі для функції з періодом  $2\pi$ :

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jkx}, \quad (2.18)$$

де коефіцієнти ряду є комплексними величинами, зв'язаними з дійсними коефіцієнтами ряду Фур'є  $a_k$  і  $b_k$ , знайденими за формулами (2.2).

Відповідно значення коефіцієнтів для додатних, від'ємних і нульового індексів будуть:

$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k); \quad c_0 = \frac{a_0}{2}; \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k). \quad (2.19)$$

Формула (2.18) здійснює розклад дійсної періодичної функції  $f(x)$  з періодом  $2\pi$  в ряд по системі комплекснозначних експоненціальних функцій

$$\varphi_k(x) = e^{jkx},$$

де  $k$  – ціле число,  $-\infty < k < +\infty$ .

Враховуючи, що коефіцієнти ряду Фур'є визначаються інтегральними залежностями, із (2.19), враховуючи (2.2), одержимо формулу для знаходження комплексних коефіцієнтів ряду:

$$c_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-jkx} dx. \quad (2.20)$$

Формули (2.18)–(2.20) можуть бути використані для функцій  $f(t)$  довільного періоду  $T$ , якщо покласти

$$x = \frac{2\pi}{T} t \quad \text{або} \quad x = \omega_0 t.$$

В результаті одержимо ряд Фур'є в комплексній формі для функції з довільним періодом  $T$ :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad (2.21)$$

де значення коефіцієнтів ряду визначаються інтегралами:

$$c_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(\tau) \cdot e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(\tau) \cdot e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau. \quad (2.22)$$

Позначимо, як і раніше,  $k\omega_0 = \omega$ ,  $\Delta\omega = \omega_0$  і введемо позначення  $c_k = \omega \cdot G(j\omega)$ . Комплекснозначна функція  $G(j\omega)$  визначається інтегралом:

$$G(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.23)$$



Тоді розклад функції  $f(t)$  в ряд Фур'є у комплексній формі:

$$f(t) = \sum_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} G(j\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot \Delta\omega.$$

Перейдемо до значення  $T \rightarrow \infty$  або  $\Delta\omega = \omega_0 \rightarrow 0$ . В цьому граничному випадку сума буде трансформована в інтеграл і одержимо розклад в ряд функції нескінченного періоду. Цей розклад є інтегралом Фур'є:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.24)$$

Відповідно значення функції:

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.25)$$

Ця функція має назву спектральної функції або комплексного спектра процесу, який відповідає функції  $f(t)$ .

Підставивши значення спектральної функції  $G(j\omega)$  в (2.24), одержимо:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot e^{j\omega(t-\tau)} d\tau. \quad (2.26)$$

Цей вираз являє собою комплексну форму інтеграла Фур'є.

Запишемо комплексну величину під знаком інтеграла (2.26) в тригонометричній формі:

$$e^{j\omega(t-\tau)} = \cos[\omega(t-\tau)] + j \cdot \sin[\omega(t-\tau)].$$

Тоді одержимо значення функції  $f(t)$  у вигляді:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot \cos[\omega(t-\tau)] + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot \sin[\omega(t-\tau)] d\tau. \quad (2.27)$$

Функція  $\sin[\omega(t-\tau)]$  – непарна функція аргументу  $\omega$ , тому другий інтеграл в правій частині дорівнює нулю. З іншого боку,  $\cos[\omega(t-\tau)]$  – парна функція. Обмежуючись розглядом половини інтервалу інтегрування по  $\omega$ , знайдемо:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot \cos[\omega(t-\tau)] d\tau. \quad (2.28)$$

Це співпадає із знайденою раніше формулою (2.13) запису інтеграла Фур'є.

Враховуючи (2.16), знайдемо:

$$G(j\omega) = \frac{1}{2\pi} W(\omega) \cdot e^{-j\psi(\omega)}.$$

Звідси одержимо комплексну форму інтеграла Фур'є (2.24) у вигляді:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(\omega) \cdot e^{j[\omega t - \psi(\omega)]} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(\omega) \cdot \cos[\omega t - \psi(\omega)] d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.29)$$

Формула (2.29) відповідає залежності (2.16) і є іншою формою запису інтеграла Фур'є. У формулу (2.29) входить нескінченна сума експоненціальних функцій, помножених на деяку комплексно-значну функцію частоти  $G(j\omega)$ .

## 2.2. Ряди Фур'є розривних функцій. Явище Гібса

Ряди Фур'є є ефективним засобом для опису нелінійних функцій. Зокрема для опису залежностей, які мають розриви функції або її похідних, використовуються ряди з кінечним або нескінченно великим числом складових.

Використання рядів Фур'є дозволяє замінити суттєво нелінійні залежності сумою неперервних гладких функцій. Знаходження коефіцієнтів ряду Фур'є нелінійних функцій здійснюється звичайними методами, шляхом обчислення інтегралів Коші (2.2). В літературі наведено багато прикладів обчислення коефіцієнтів ряду [1, 35, 37].

В табл. 2.1 наведені графіки деяких практично важливих нелінійних періодичних функцій та коефіцієнти їх розкладу в ряд Фур'є.

В таблиці використана спеціальна функція

$$\text{sinc}(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}.$$

Прямокутні імпульси, наведені в поз. 1 таблиці як парна функція, мають лише косинусні складові ( $b_k = 0$ ).

Знакозмінні імпульси (поз. 2) є непарною функцією. Тому їх розклад в ряд включає лише синусні складові ( $a_k = 0$ ).

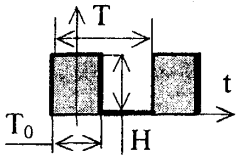
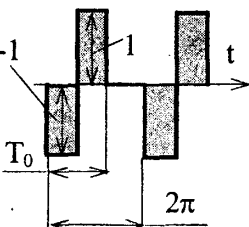
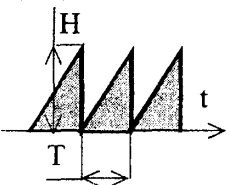
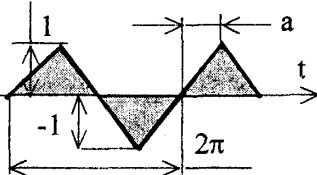
Застосування ряду Фур'є потребує врахування деяких його особливостей, зокрема наявність характерних похибок ряду при описі розривних функцій (явище Гібса) та виникнення похибок при розкладі в ряд Фур'є функцій, що визначені неточно. Задача опису нескінченним рядом Фур'є функцій, заданих неточно, відноситься до класу некоректно поставлених задач і буде розглянута нижче.

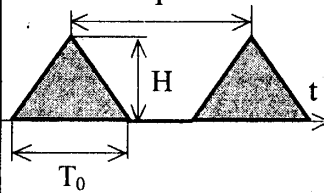
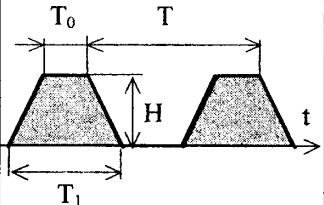
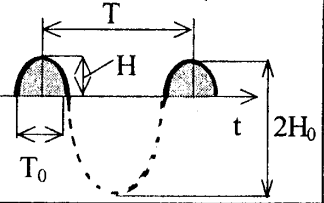
Розглянемо особливості ряду Фур'є, що мають місце при описі розривних функцій. Математичний опис розривних функцій рядами Фур'є вимагає врахування характерної властивості часткових сум ряду в точці розриву. Ця властивість має назву явища Гібса (по імені американського фізика, який у 1899 році виявив цю характерну особливість ряду Фур'є).

**Явище Гібса** полягає в тому, що ряд Фур'є розривної функції  $f(x)$  в точці розриву  $x = a$ , хоча і співпадає зі значенням  $f(a)$ , але в безпосередній близькості від точки розриву не зовсім точно описує вид функції. При цьому відхилення значень часткових сум ряду від значення функції є суттєвими, а їх врахування є досить складною задачею.

Наведені в таблиці розривні функції та функції з розривами похідних (ламані лінії) широко використовуються при математичному моделюванні процесів у механічних системах. За їх допомогою описуються закони зміни положення робочих органів механізмів періодичної дії, зміни навантаження в люфтових контактах, нелінійно періодично діючі зусилля тощо.

Практично важливі нелінійні функції  
та коефіцієнти їх розкладу в ряд Фур'є

№ з/п	Назва та графік функції	Коефіцієнти ряду Фур'є ( $k = 1, 2, \dots$ )		
		$\frac{a_0}{2}$	$a_k$	$b_k$
1	2	3	4	5
1	<p>Прямокутні імпульси</p> 	$H \frac{T_0}{T}$	$2H \frac{T_0}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{kT_0}{T}\right)$	0
2	<p>Знакозмінні прямокутні імпульси</p> 	0	0	$\frac{2}{k\pi} \left(1 - \cos \frac{kT_0}{2}\right)$
3	<p>Трикутні імпульси</p> 	$\frac{H}{2}$	0	$-\frac{H}{k\pi}$
4	<p>Ламана зубчаста лінія</p> 	0	0	$\frac{2\sin(ka)}{k^2 a(\pi - a)}$

1	2	3	4	5
5	<p>Ізольовані трикутні імпульси</p> 	$\frac{HT_0}{2T}$	$\frac{HT_0}{T} \left[ \text{sinc}\left(\frac{kT_0}{2T}\right) \right]^2$	0
6	<p>Ізольовані трапецієподібні імпульси</p> 	$\frac{H(T_0 + T_1)}{2T}$	$\frac{H(T_0 + T_1)}{T} * \text{sinc}\left[\frac{k(T_0 - T_1)}{2T}\right] * \text{sinc}\left[\frac{k(T_0 + T_1)}{2T}\right]$	0
7	<p>Синусоїдальні зрізані імпульси</p> $H = H_0 \left( 1 - \cos \frac{\pi T_0}{T} \right)$ 	$\frac{1}{\pi} H_0^2 \left( \sin\left(\frac{\pi T_0}{T}\right) - \frac{\pi T_0}{T} * \cos\left(\frac{\pi T_0}{T}\right) \right)$	$\frac{H_0 T_0}{T} \left\{ \text{sinc}\left[\frac{(k-1)T_0}{T}\right] + \text{sinc}\left[\frac{(k+1)T_0}{T}\right] - 2 \cos\left(\frac{\pi T_0}{T}\right) * \text{sinc}\left(\frac{kT_0}{T}\right) \right\}$	0

Для виявлення особливостей ряду в околі точки розриву розглянемо типову розривну функцію у вигляді знакозмінних прямокутних імпульсів [1]:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{при } x = 0, -\pi, +\pi. \\ +1 & \text{при } 0 < x < \pi \end{cases} \quad (2.30)$$

Ряд Фур'є для цієї функції в силу її косиметричності включає тільки синусні складові і має вигляд:

$$f(x) \cong \frac{4}{\pi} \left[ \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \dots + \frac{\sin[(2n-1)x]}{2n-1} + \dots \right]. \quad (2.31)$$

Для точного опису функції (2.30) необхідно, щоб  $n$  було достатньо великим цілим числом ( $n \rightarrow \infty$ ).

Розглянемо часткову суму ряду (2.31), яка залежить від числа складових  $n$ :

$$q_n(x) = \frac{4}{\pi} \left[ \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \dots + \frac{\sin[(2n-1)x]}{2n-1} \right]. \quad (2.32)$$

Дослідимо поведінку цієї функції в точці  $x = 0$ , яка є точкою розриву функції  $f(x)$ . Функція  $q_n(x)$  є неперервною та однозначною. Її значення в точці  $x = 0$  дорівнює 0, тобто вона співпадає з  $f(x)$  в точці розриву, а саме:

$$q_n(x) = f(x) \quad \text{при } x = 0.$$

Визначимо похідну функції  $q_n(x)$  шляхом диференціювання залежності (2.32):

$$\frac{dq_n(x)}{dx} = \frac{4}{\pi} [\cos x + \cos(3x) + \dots + \cos[(2n-1)x]].$$

Якщо число складових  $n$  достатньо велике ( $n \rightarrow \infty$ ), то значення похідної в точці  $x = 0$  дорівнює

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{dq_n(x)}{dx} \Big|_{x=0} \right] = \infty.$$

Похідна  $\frac{dq_n(x)}{dx}$  є сумою тригонометричних функцій, аргументи яких складають арифметичну прогресію. Відомо, що [1]:

$$\frac{dq_n(x)}{dx} = \frac{4}{\pi} [\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin 2nx}{\sin x}. \quad (2.33)$$

Враховуючи співвідношення між похідною та функцією, одержимо:

$$q_n(x) = \int_0^x \frac{dq_n(x)}{dx} dx + q_n(x) \Big|_{x=0}.$$

Враховуючи, що  $q_n(x) \Big|_{x=0} = 0$  і рівність (2.33), знайдемо:

$$q_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx. \quad (2.34)$$

Застосуємо інтегральні функції для аналізу поведінки функції  $q_n(x)$ .

Залежність (2.34) виражається через спеціальну функцію – інтегральний синус (див. розділ 2.2). Функція інтегрального синуса визначається залежністю:

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin z}{z} dz.$$

Поклавши в формулі (2.34)  $2nx = z$ , одержимо часткову суму ряду у вигляді:

$$q_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin z}{\sin \frac{z}{2n}} \cdot \frac{dz}{2n}.$$

Враховуючи, що при великій кількості членів ряду ( $n \rightarrow \infty$ )

$$\sin \frac{z}{2n} \approx \frac{z}{2n},$$

одержимо:

$$q_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(z) dz}{z}.$$

Запишемо даний інтеграл у вигляді:

$$q_n(x) = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^z \frac{\sin(z) dz}{z} - \int_{z-x}^z \frac{\sin(z) dz}{z} \right].$$

Для великих  $n$  маємо  $z - x = 2nx - x \approx 2nx \approx z$  і відповідно інтервал інтегрування для другого інтеграла дорівнює нулю. Тому

$$q_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^z \frac{\sin(z) dz}{z} = \frac{2}{\pi} \text{Si}(z). \quad (2.35)$$

Підставивши  $z = 2nx$ , одержимо:

$$q_n(x) = \frac{2}{\pi} \text{Si}(2nx). \quad (2.36)$$

Дана залежність визначає часткову суму ряду Фур'є, записаного для розривної функції  $f(x)$  визначену формулою (2.30). На рис. 2.5, а наведені графіки функцій  $q_n(x)$  та  $f(x)$  в околі точки  $x = 0$ .

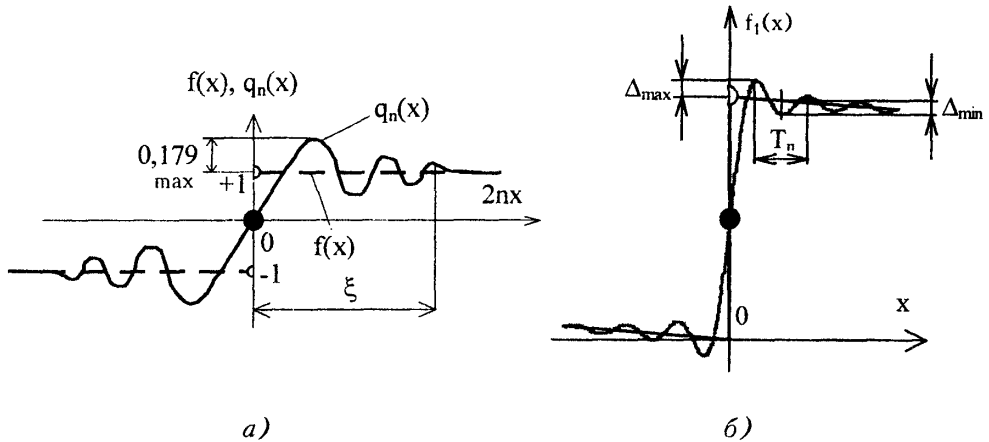


Рис. 2.5. Часткова сума ряду Фур'є  $q_n(x)$ , складеного для розривної функції  $f(x)$ , (а) та опис рядом Фур'є спіралі Архімеда в точці розриву (б)

Із аналізу поведінки функції інтегрального синуса при великих значеннях аргументу випливає, що коливання згасають при значеннях аргументу:

$$\xi = 2nx \approx 100.$$

Відповідно, значення аргументу  $x$ , при якому затухають коливання:

$$x_{\xi} \cong \frac{100}{2n} \text{ при } n \rightarrow \infty, x_{\xi} \rightarrow 0.$$

Безпосередньо біля точки розриву функції  $f(x)$  функція  $q_n(x)$  досягає максимального значення  $\max [q(x)] = 1,179\dots$  ( $\Delta_{\max} = 0,179$ ). Там же має місце і локальний мінімум функції  $\Delta_{\max} = 1 - \left( \frac{1,4247}{\pi/2} \right)$ .

Таким чином, похибки опису розривної функції  $f(x)$ , обумовлені явищем Гібса, полягають в наявності високочастотної осциляції часткової суми ряду Фур'є в області, що безпосередньо межує з точкою розриву. Період осциляції відповідає періоду коливань функції інтегрального синуса. При збільшенні числа складових ряду ( $n \rightarrow \infty$ ) період осциляції асимптотично зменшується до нуля.

Виявимо, як впливають зміни самої функції на ряд Фур'є в околі точки розриву. Для цього розглянемо періодичну розривну функцію, яка монотонно змінюється за межами точки розриву:

$$f_1(x) = \begin{cases} a \left( 1 - \frac{x}{2\pi} \right) & \text{при } 0 \leq x \leq 2\pi \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

Ця функція відповідає спіралі Архімеда скрізь, за винятком точки розриву при  $x = 0$ .

Графік цієї функції в околі точки розриву наведено на рис. 2.5, б. На ньому ж показано графік часткової суми ряду Фур'є, що описує функцію  $f_1(x)$  в околі точки розриву.

В околі точки розриву функція у вигляді спіралі Архімеда з уступом веде себе аналогічно розглянутій раніше кусково-постійній розривній функції (2.30). Нахил спіралі Архімеда в околі точки розриву є несуттєвим (див. рис. 2.5, б). Із порівняння рис. 2.5, а та рис. 2.5, б випливає, що зміни розривної функції поза межами точки розриву не є суттєвими і не впливають на високочастотну осциляцію часткових сум ряду Фур'є.

Значення максимального ( $\Delta_{\max}$ ) і мінімального відхилень та періоду осциляцій  $T_n$  часткової суми ряду Фур'є залежать від числа складових ряду. Ці параметри змінюються складним чином і при збільшенні числа складових ряду наближаються до залежності інтегрального синуса (2.36).

Характер зміни часткових сум ілюструється розрахунками, наведеними на рис. 2.6. Спочатку графік часткової суми ряду є плавним із низькочастотними коливаннями.

При збільшенні числа складових ряду (гармонік) період осциляції зменшується, а частота зростає. Має місце збільшення максимальної амплітуди осциляцій та скорочення протяжності ділянки графіка, на якій мають місце коливання.

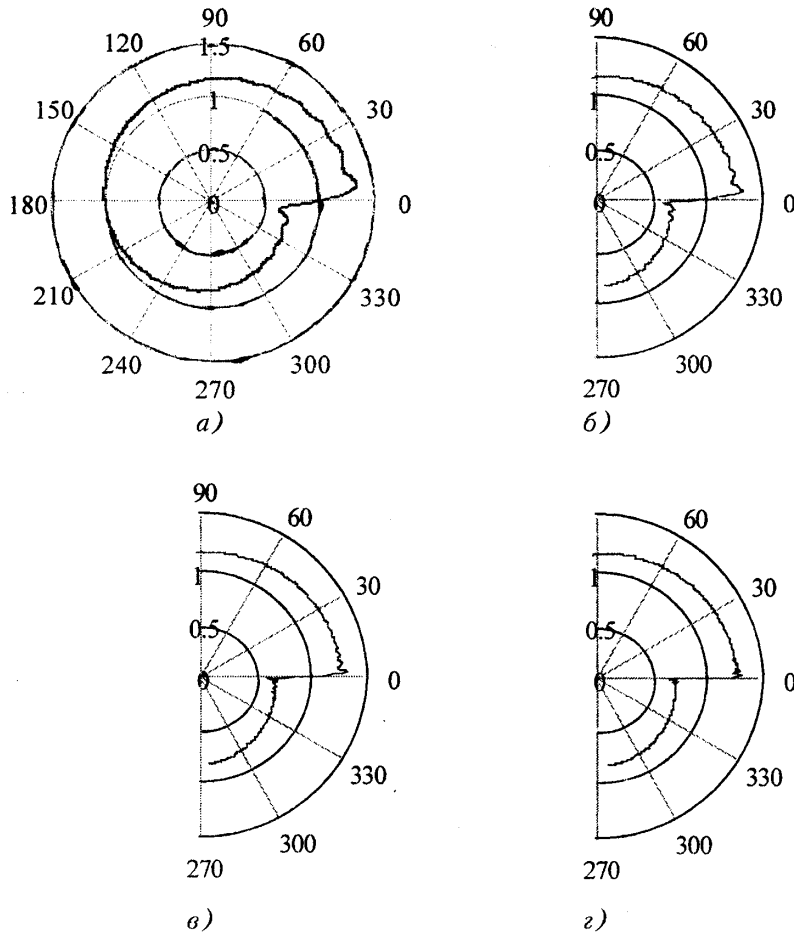


Рис. 2.6. Зміна часткових сум ряду Фур'є в силу явища Гібса для плоского контуру у вигляді спіралі Архімеда з уступом: а – число гармонік в частковій сумі 25; б – 50; в – 100; г – 200

**Врахування явища Гібса** при математичному моделюванні потребує аналізу застосування ряду Фур'є для опису конкретної функції з розривами.

В деяких випадках явище Гібса не є суттєвим фактором. Наприклад, якщо на вхід динамічної системи подається функція часу у вигляді відрізка ряду Фур'є і при цьому частота осциляції часткової суми є високою і перевищує смугу пропускання частот динамічної системи, то явище Гібса не внесе суттєвих похибок в розрахунок вихідного динамічного процесу системи. В інших практично важливих випадках необхідно компенсувати негативні наслідки явища Гібса. Для цього рекомендується кілька методів.



Один з них полягає у використанні асимптотичного значення часткової суми ряду Фур'є для повної чи часткової компенсації явища Гібса. Наприклад, для розглянутої раніше функції  $f(x)$ , визначеної формулою (2.30), її розклад в ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx), \quad (2.38)$$

де коефіцієнти ряду

$$b_k = \begin{cases} \frac{4}{\pi k} & \text{— для непарних } k \\ 0 & \text{— для парних значень } k \end{cases} \quad (2.39)$$

Даний ряд, як і раніше (формула (2.32)), запишемо у формі:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N \rightarrow \infty} \frac{4 \sin[(2n-1)x]}{\pi(2n-1)}. \quad (2.40)$$

Для великих значень  $N$  ( $N \rightarrow \infty$ ) часткова сума ряду

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{4 \sin(2n-1)x}{\pi(2n-1)},$$

асимптотично відповідає функції інтегрального синуса:

$$q_N(x) = \frac{2}{\pi} \text{Si}(2Nx).$$

Враховуючи, що при  $N \rightarrow \infty$   $q_N(x) = 1$ , одержимо:

$$f(x) = \frac{f_N(x)}{q_N(x)} = \frac{2}{\text{Si}(2Nx)} \sum_{n=1}^N \frac{\sin[(2n-1)x]}{(2n-1)}. \quad (2.41)$$

Це відношення можна застосовувати при всіх  $x > 0$  або  $x < 0$  для достатньо великих  $N$ . При цьому похибки, пов'язані з явищем Гібса, будуть скомпенсовані. Звичайно треба врахувати, що формула (2.41) складена для асимптотичних залежностей. Тому необхідно перевірити якість компенсації явища Гібса для конкретних значень  $N$ . При незадовільній компенсації формула (2.41) підлягає уточненню.

З метою покращення асимптотичного опису функції (2.41) доцільно виконувати в цій формулі граничний перехід:

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{\text{Si}(2Nx)} \sum_{n=1}^N \frac{\sin[(2n-1)x]}{(2n-1)}.$$

Іншим методом усунення негативних наслідків явища Гібса є обмеження значень часткової суми ряду Фур'є в безпосередній близькості від точки розриву. Одержана наближена залежність немає високочастотних осциляцій.

Враховуючи складність явища Гібса при розробці математичних моделей рекомендується виконувати детальний аналіз поведінки процесу в околі точки розриву.

### 2.3. Некоректно поставлені задачі щодо нескінченного ряду Фур'є та їх регуляризація

Некоректність постановки задачі про розклад у нескінченний ряд Фур'є функції, що задана неточно, є характерною особливістю ряду [1, 30].

Якщо коефіцієнти ряду  $a_k$  і  $b_k$  знайдені абсолютно точно (наприклад, задані аналітичним виразом), то нескінченна сума ряду буде відповідати даній функції. Але коли коефіцієнти визначені з деякими, навіть невеликими, похибками, то похибки нескінченної суми зростають до значних величин і результат стає невірним.

Розглянемо ряд Фур'є виду:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx). \quad (2.42)$$

Змінимо коефіцієнти ряду (2.42) на деякі малі величини:

$$\delta_{ak} = \varepsilon \cos k\xi, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.43)$$

де  $\xi$  – довільне число з інтервалу  $0 \leq \xi \leq 2\pi$ .

Згідно з [30], зміна суми ряду Фур'є визначається як:

$$\delta_f = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon \cos(k\xi) \cos(kx) = \varepsilon \delta[k(x - \xi)], \quad (2.44)$$

де  $\delta(\eta)$  – дельта-функція Дірака.

Із аналізу цієї залежності випливає, що при  $x = \xi$  зміна суми ряду Фур'є є нескінченно великою.

Таким чином, підсумовування нескінченного ряду Фур'є є задачею некоректно поставленою і для її вирішення необхідно виконати операцію регуляризації підсумовування ряду.

Розглянемо деяку неперервну функцію  $f(x)$ , яка задана неточно. Неточності зокрема пов'язані із обчисленням функції, а також з іншими причинами, в тому числі причинами випадкового характеру. Це означає, що між точними значеннями функції  $f_T(x)$  і реальним значенням  $f(x)$  наявна похибка  $\Delta_f(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$ , яка залежить від значного числа факторів, в тому числі і випадкових  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$

Визначимо похибки функції при двох сусідніх значеннях аргументу  $x$  та  $x'$ :

$$\Delta_f(x_1, \alpha_1, \alpha_2, \dots) \text{ та } \Delta_f(x', \alpha'_1, \alpha'_2, \dots).$$

Значення цих похибок будуть суттєво різні, оскільки значення факторів  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  будуть суттєво різними при цих двох обчисленнях. Спрямуємо  $x - x' \rightarrow 0$  і обчислимо похідну залежності  $\Delta_f$  по аргументу  $x$ :

$$\frac{d\Delta_f(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_f(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots) - \Delta_f(x + \Delta x, \alpha'_1, \alpha'_2, \dots)}{\Delta x}.$$

Похідна цієї функції в загальному випадку не існує, оскільки величини в

чисельнику і знаменнику мають різні порядки малості. Знаходження похідної виконаємо використовуючи символічні функції – одиничну ступінчасту функцію та одиничну імпульсну функцію. Запишемо похибку у вигляді суми:

$$\Delta_f(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots) = \sum_{l=1}^L \varphi_l(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots) \cdot 1(x - x_l), \quad (2.45)$$

де  $1(x - x_l)$  – одинична ступінчаста функція;  $\varphi_l(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$  неперервна функція аргументу  $x$ .

Відповідно похибка визначається символічною залежністю:

$$\frac{d[\Delta_f(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots)]}{dx} = \sum_{l=1}^L \frac{\partial \varphi_l}{\partial x} 1(x - x_l) + \varphi_l \cdot \delta(x - x_l). \quad (2.46)$$

Знайдемо коефіцієнти ряду Фур'є враховуючи, що функція  $f(x)$  задана з похибкою, тобто функція задана сумою:

$$f(x) = f_T(x) + \Delta_f(x);$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f_T(x) + \Delta_f(x, \alpha_i)] \cdot \cos kx dx.$$

Враховуючи лінійність операції інтегрування, одержимо:

$$a_k = a_{kT} + \Delta_{ak},$$

де  $a_{kT}$  – точне значення коефіцієнта;  $\Delta_{ak}$  – похибка обчислення коефіцієнта, обумовлена похибками визначення функції  $f(x)$ .

Ці величини знаходяться як інтеграли:

$$a_{kT} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_T(x) \cdot \cos(kx) dx; \quad \Delta_{ak} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta_f(x, \alpha_i) \cdot \cos kx dx. \quad (2.47)$$

Для знаходження  $\Delta_{ak}$  застосуємо формулу інтегрування по частинах, а саме формулу:

$$\int_0^{2\pi} u dv = uv \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} v du.$$

При цьому покладемо

$$u = \Delta_f, \quad dv = \cos(kx) dx, \quad v = \frac{1}{k} \sin(kx).$$

Відповідно

$$\Delta_{ak} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta_f(x, \alpha_i) \cos(kx) dx = \frac{\Delta_f(x, \alpha_i) \sin(kx)}{\pi k} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{k} \sin(kx) \frac{d[\Delta_f(x, \alpha_i)]}{dx} dx.$$

Після перетворень, скорочень та підстановки значення похідної із залежності (2.46) одержимо:

$$\Delta_{ak} = \frac{-1}{\pi k} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{l=1}^L \frac{d\varphi_l}{dx} \cdot 1(x - x_l) \right] \sin kx dx - \frac{1}{\pi k} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{l=1}^L \varphi_l \cdot \delta(x - x_l) \right] \cdot \sin(kx) dx. \quad (2.48)$$

Перший із інтегралів в правій частині (2.48) визначимо наступним чином. Розглянемо величину

$$\varepsilon_L(x) = \sum_{i=1}^L \frac{d\varphi_i}{dx} \cdot 1(x - x_i).$$

Ця величина є кусково-неперервною функцією, тому її інтеграл існує при всіх значеннях  $k$ , включаючи ( $k \rightarrow \infty$ ). Апроксимуємо цю величину поліномом:

$$\varepsilon_L(x) \approx \varepsilon_0(1 + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 x^2 + \dots).$$

Обчислимо інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \varepsilon_L(x) \sin(kx) d(kx) &= \varepsilon_0 \int_0^{2\pi} \sin(kx) d(kx) + \frac{\varepsilon_1}{k} \int_0^{2\pi} kx \sin(kx) d(kx) + \\ &+ \frac{\varepsilon_2}{k^2} \int_0^{2\pi} (kx)^2 \sin(kx) d(kx) + \dots = \varepsilon_0 \cos(kx) \Big|_0^{2\pi} + \frac{\varepsilon_1}{k} [\sin(kx) - (kx) \cos(kx)] \Big|_0^{2\pi} + \\ &+ \frac{\varepsilon_2}{k^2} [2(kx) \sin x - [(kx)^2 - 2] \cos(kx)] \Big|_0^{2\pi} + \dots \end{aligned}$$

Звідси випливає, що значення інтеграла при  $k \rightarrow \infty$  дорівнює нулю. Знайдемо значення другого інтеграла формули (2.48). Враховуючи властивість дельта-функції, одержимо значення другого інтеграла у вигляді:

$$\int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^L \varphi_i(x) \cdot \delta(x - x_i) \cdot \sin(kx) dx = \sum_{i=1}^L \varphi_i(x_i) \cdot \sin(kx_i), \quad (2.49)$$

тобто значення другого інтеграла не дорівнює нулю при довільних значеннях  $k$  (також і при  $k \rightarrow \infty$ ). Враховуючи вищенаведене, похибку обчислення коефіцієнта знайдемо у вигляді:

$$\Delta_{\Delta k} = -\frac{1}{\pi k} \sum_{i=1}^L \varphi_i(x_i) \cdot \sin(kx_i). \quad (2.50)$$

Ця похибка певним чином прямує до нуля при збільшенні  $k \rightarrow \infty$ . Знайдемо точне значення коефіцієнтів  $a_k$  для випадку, коли  $k \rightarrow \infty$ . Точне значення функції  $f_T(x)$  відповідає неперервній, гладкій функції однієї змінної.

Визначимо характер зміни інтеграла при  $k \rightarrow \infty$ . Розіб'ємо проміжок  $x = [0, 2\pi]$  на елементарні ділянки  $\Delta x = \frac{2\pi}{k}$  ( $k \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0$ ). Тоді значення коефіцієнта

$$a_{kT} = \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{k-1} \int_{2\pi \frac{i}{k}}^{2\pi \frac{(i+1)}{k}} f_T(x) \cos(kx) dx.$$

Для елементарної ділянки точне значення функції запишеться у вигляді розкладу в ряд Тейлора. Обмежуючись лінійною складовою розкладу, знайдемо:

$$f_T(x) = f_{T0i} + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i (x - x_i),$$

де  $x_i = 2\pi \frac{i}{k}$ ,  $f_{T0i}$  – значення функції  $f_{T0i} = f_T(x_i)$ .

Запишемо це значення у вигляді:

$$f_T(x) = c_0 + c_1 x,$$

$$\text{де } c_0 = f_{T0i} - \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i, \quad c_1 = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i.$$

Визначимо інтеграл:

$$\int_{2\pi \frac{i}{k}}^{2\pi \frac{i+1}{k}} (c_0 + c_1 x) \cos(kx) dx = \frac{c_0}{k} \int_{2\pi \frac{i}{k}}^{2\pi \frac{i+1}{k}} \cos x d(kx) + \frac{c_1}{k^2} \int_{2\pi \frac{i}{k}}^{2\pi \frac{i+1}{k}} x k \cos kx d(kx).$$

Інтеграли в правій частині є табличними. Після їх обчислення [6] знайдемо значення коефіцієнта:

$$a_{kT} = \frac{1}{\pi k} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{c_0}{k} \sin kx + \frac{c_1}{k^2} (\cos kx + kx \sin kx) \Bigg|_{2\pi \frac{i}{k}}^{2\pi \frac{i+1}{k}} =$$

$$= \frac{1}{\pi k} \sum_{i=0}^{k-1} \left( \frac{c_0}{k} + \frac{c_1 x}{k} \right) \sin(kx) + \frac{c_1}{k^2} \cos(kx) \Bigg|_{2\pi \frac{i}{k}}^{2\pi \frac{i+1}{k}}. \quad (2.51)$$

Тригонометричні функції під знаком суми при підстановці границь у формулі (2.51) дадуть нульові значення. Тому можна вважати, що при  $k \rightarrow \infty$

$a_{kT} = \frac{1}{\pi k^2} \cdot 0$ . Визначимо відношення  $\frac{\Delta_{aK}}{a_{kT}}$  при великих значеннях  $k$ :

$$\frac{\Delta_{aK}}{a_{kT}} = \frac{-\frac{1}{\pi k} \sum_{l=0}^L \varphi_l \sin(kx_l)}{\frac{1}{\pi k^2} \cdot 0} \rightarrow \infty, \quad (2.52)$$

тобто при великих  $k$  ( $k \rightarrow \infty$ )  $\Delta_{aK} = \infty(a_{kT})$  або  $a_{kT} = 0(\Delta_{aK})$ .

Таким чином, хоча похибка  $\Delta_{aK}$  і прямує до нуля, але в порівнянні із величиною обчисленого коефіцієнта ряду Фур'є вона є нескінченно великою, тобто величина коефіцієнта набагато менша за похибку його обчислення.

Враховуючи наявність великих відносних похибок обчислення коефіцієнтів гармонік високих порядків, ряд Фур'є при наявності похибок може бути записаний у вигляді:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{k_T} (a_{kT} + \Delta_{aK}) \cos(kx) + \sum_{k=k_T}^{\infty} \Delta_{aK} \cos(kx). \quad (2.53)$$

Перша сума у формулі (2.53), яка включає гармоніки від 1 до  $k_T$ , відповідає коефіцієнтам  $a_{kT}$ , які більші чи порівнянні із похибкою  $\Delta_{aK}$  обчислення коефіцієнта. Друга сума включає високочастотні гармоніки. В них похибка обчислення коефіцієнтів  $\Delta_{aK}$  більша від значень коефіцієнтів  $a_{kT}$ .

Друга сума дає невизначену відносну похибку ряду Фур'є, яка може мати довільне (в тому числі нескінченно велике) значення.

З метою запобігання виникнення суттєвих похибок обчислення здійснюється **регуляризація** некоректно поставленої задачі обчислення нескінченного ряду Фур'є. Найпростішим способом регуляції є використання обмеженого числа гармонік ряду Фур'є. При цьому у формулі (2.53) залишається лише перша сума, а друга сума, яка дає невизначену похибку ряду, ігнорується. В цьому випадку задача підсумовування ряду стає коректною. Для регуляції задачі необхідно відкинути гармоніки, в яких похибки обчислення коефіцієнтів  $\Delta_{ak}$  більші за значення самих коефіцієнтів  $a_k$ .

Другим поширеним способом регуляризації є введення так званого **формфактора**. Суть даного способу регуляризації полягає у діленні коефіцієнтів ряду Фур'є на відповідно підбрану величину, яка дорівнює одиниці для гармонік з невисоким номером і прямує до нескінченності для високочастотних гармонік. При цьому ряд Фур'є стає скоригованим і набуває вигляду:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(1 + \beta_k)} \cos(kx), \quad (2.54)$$

де  $\beta_k$  – формфактор,  $\beta_k \approx 0$  при малих значеннях  $k$  і  $\beta_k \rightarrow \infty$  при великих значеннях  $k$ .

Якщо вибрати значення формфактора у вигляді:

$$\beta_k = \begin{cases} 0 & \text{при } k < k_T \\ \infty & \text{при } k > k_T \end{cases}, \quad (2.55)$$

то маємо розглянуту раніше регуляризацію шляхом обмеження числа складових ряду.

За формфактор  $\beta_k$  можна вибрати довільні функції числового параметра  $k$ .

Автором використаний формфактор  $\beta_k = e^{\alpha k^v} - 1$ , де  $\alpha$ ,  $v$  – додатні константи. Зокрема, як формфактор вибрано функцію:

$$\beta_k = e^{0,001k^2} - 1. \quad (2.56)$$

Залежність (2.56) використана при регуляризації задачі опису просторових поверхонь типу тіл обертання за допомогою рядів Фур'є.

Чисельні дослідження та практична апробація підтвердили ефективність використання формфактора даного виду.

Ступінь росту залежності формфактора (2.56) від параметра  $k$  перевищує ступінь росту експоненціальної функції. В деяких випадках ця обставина є суттєвою.

## 2.4. Спектральний аналіз процесів

Спектральний аналіз процесів є ефективним засобом аналізу процесів при математичному моделюванні. Спектральний аналіз дає графічну інтерпретацію розкладу функції довільного періоду в ряд Фур'є. Спектральний аналіз здійснюється для періодичних і неперіодичних функцій. Для періодичних функцій спектр процесу є лінійчатим, а для неперіодичних (функцій нескінченного періоду) – неперервним.

Розглянемо спектри періодичних функцій. Для періодичної функції з періодом  $2\pi$  її розклад в ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \sin(kx + \psi_k), \quad (2.57)$$

де амплітуди  $A_k$  і початкові фази  $\psi_k$  зв'язані з відповідними коефіцієнтами ряду Фур'є  $a_k$  і  $b_k$ :

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad \psi_k = \arctg \frac{a_k}{b_k}. \quad (2.58)$$

Ряд Фур'є графічно зображується у вигляді нескінченної сукупності ліній, довжина яких в певному масштабі відповідає коефіцієнтам ряду. Одержані графіки дають сукупність (спектр) коефіцієнтів ряду (рис. 2.7).

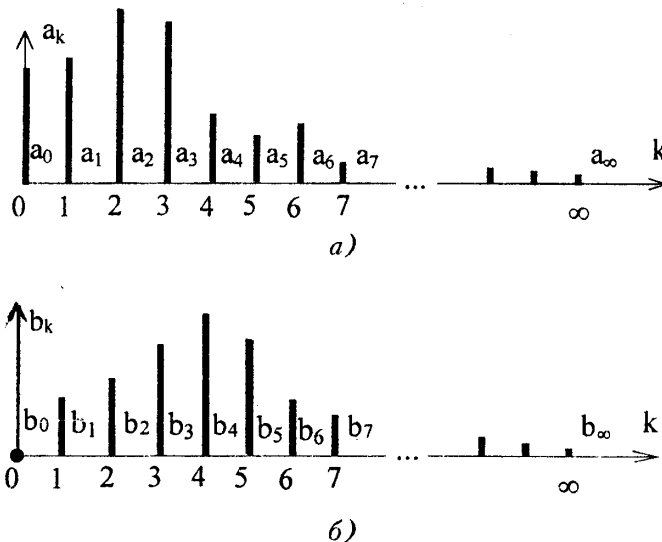


Рис. 2.7. Графічне зображення коефіцієнтів (спектр) ряду Фур'є для функції з періодом  $2\pi$ : а – спектр коефіцієнтів ряду  $a_k$ ; б – спектр коефіцієнтів ряду  $b_k$

Цей спектр називається лінійчастим або дискретним, тому що він складається із нескінченної кількості ліній, кожна з яких відповідає коефіцієнту ряду з номером  $k$ .

Графічна інтерпретація ряду Фур'є є ефективним засобом аналізу процесів. За значеннями коефіцієнтів (спектра) можна зробити висновок про те, із яких гармонічних функцій складається процес. Спектр дозволяє виявити головні (превалюючі) гармоніки, які присутні в розкладі. Наприклад, розглянемо спектр процесу, який має ізольований викид при  $k = 5$ . Значення амплітуди при  $k = 5$  набагато перевищує сусідні значення коефіцієнтів (рис. 2.8). Аналіз спектра показує, що процес має головну (превалюючу) косинусну гармоніку з номером  $k = 5$ . Відповідно можна зробити висновок, що процес включає основну гармонічну складову виду  $f(x) = a_5 \cdot \cos 5x$ .

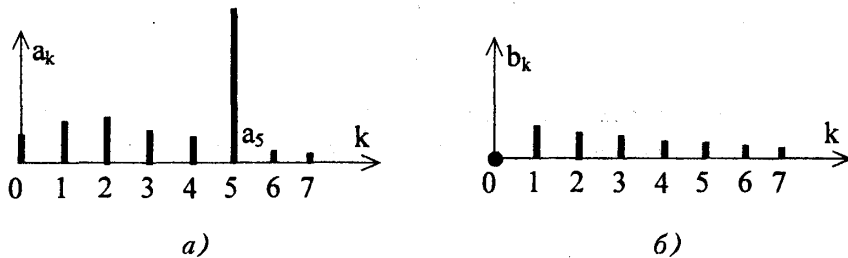


Рис. 2.8. Лінійчастий спектр коефіцієнтів ряду Фур'є, який виявляє головну (превалюючу) косинусну гармоніку процесу  $a_5 \cos 5x$  з номером  $k = 5$ :  
 а – спектр коефіцієнтів  $a_k$ ; б – спектр коефіцієнтів  $b_k$

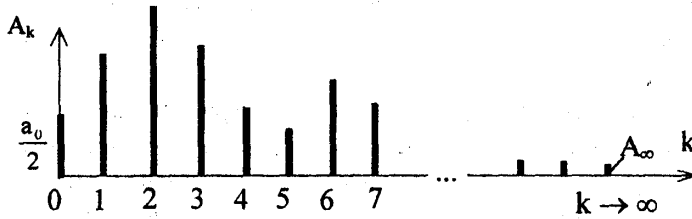
Лінійчасті спектри, наведені на рис. 2.7 і 2.8, часто бувають незручні в користуванні. Більш ефективними для аналізу є зображення амплітуд і початкових фаз окремих гармонік, визначених формулами (2.58). Спектр такого вигляду для періодичної функції з періодом  $2\pi$  наведено на рис. 2.9.

Лінійчасті спектри також використовуються для рядів Фур'є, складених для функцій довільного періоду. Для функції з періодом  $T$  з базовим значенням частоти  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  розклад в ряд Фур'є подано у формі:

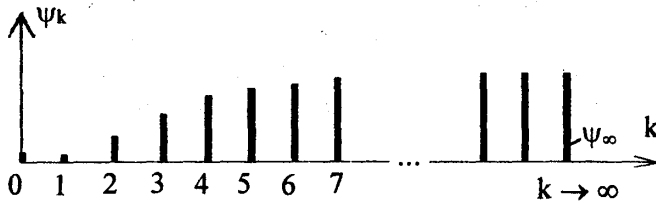
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega_0 x) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \sin(k\omega_0 x + \psi_k). \quad (2.59)$$

Графічна інтерпретація даного ряду здійснюється зображенням коефіцієнтів  $a_k$ ,  $b_k$  в функції частоти  $\omega = k\omega_0$ . Зображення коефіцієнтів представляє собою лінійчастий спектр. На рис. 2.10 наведено приклад зображення коефіцієнтів ряду (спектр) в залежності від частоти  $\omega = k\omega_0$ .



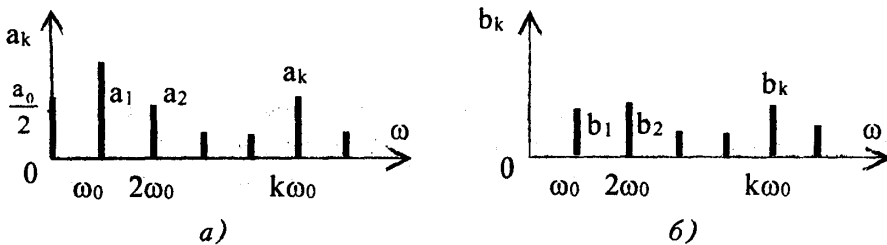


а)



б)

Рис. 2.9. Спектр амплітуд (а) і початкових фаз (б) розкладу в ряд Фур'є періодичної функції з періодом  $2\pi$



а)

б)

Рис. 2.10. Графічне зображення коефіцієнтів (спектр) ряду Фур'є для функції довільного періоду  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ : а – спектр коефіцієнтів  $a_k$ ;

б – спектр коефіцієнтів  $b_k$

Лінійчасті графіки визначають значення коефіцієнтів в залежності від номера гармоніки (для функції періоду  $2\pi$ ) або в залежності від частоти (для функції довільного періоду).

Наявність двох графіків для опису спектра функції довільного періоду має певну незручність. Тому найчастіше використовується графічне зображення (спектр) амплітуд і початкових фаз гармонік. Для функції довільного періоду так, як і для функції з періодом  $2\pi$ , одержимо лінійчасті спектри амплітуд і початкових фаз гармонік (рис. 2.11).

Значення початкових фаз (рис. 2.11, б) визначене з точністю до постійного доданка  $2\pi$ . Часто значення початкових фаз не є суттєвими. Більш

важливим є значення амплітуд. Тому на практиці більше використовується графік (рис. 2.11, а), який зображує сукупність амплітуд (спектр амплітуд) гармонік ряду Фур'є.

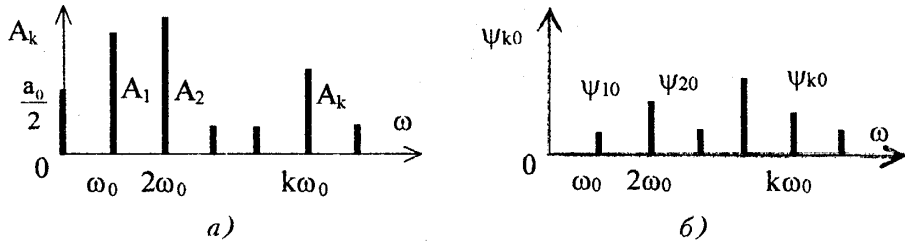


Рис. 2.11. Лінійчасті спектри амплітуд (а) і початкових фаз (б) періодичної функції довільного періоду  $T = 2\pi/\omega_0$

Спектр амплітуд або просто спектр функції  $f(t)$  дає зручний засіб аналізу функції по розкладу цієї функції в ряд Фур'є. Він застосовується в різних видах. Разом зі спектром амплітуд використовують спектр квадратів амплітуд. Даний спектр більш зручний в користуванні, тому що графіки ліній завжди знаходяться в додатній напівплощині системи координат. Вибір виду спектра здійснюється із умов зручності аналізу процесу.

Використовують також зображення амплітуд (**спектр**) для ряду Фур'є в **комплексній формі**.

Розглянемо ряд Фур'є в комплексній формі для функції довільного періоду  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 x} \quad (2.60)$$

Для цього ряду графічне зображення амплітуд  $c_k$  особливо зручне.

Враховуючи, що коефіцієнти ряду з додатними та від'ємними номерами є комплексно спряженими величинами, а саме:

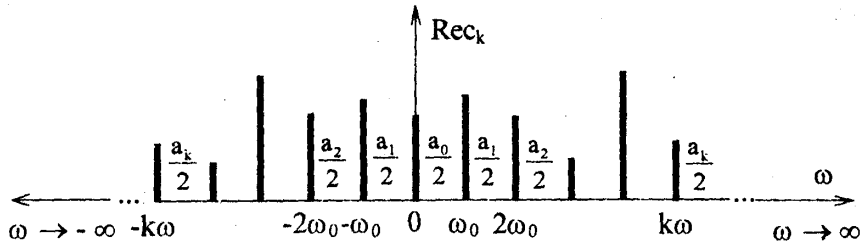
$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k); \quad c_0 = \frac{a_0}{2}; \quad c_{+k} = \frac{1}{2}(a_k - jb_k); \quad c_{-k} = \bar{c}_{+k},$$

одержимо співвідношення:

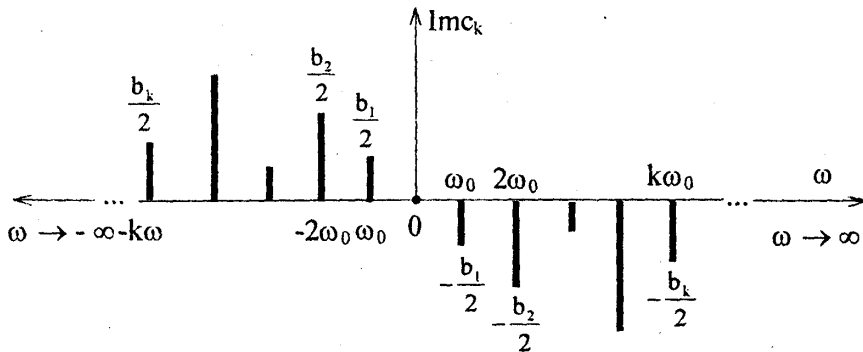
$$\operatorname{Re} c_k = \operatorname{Re} c_{-k}, \quad \operatorname{Im} c_k = -\operatorname{Im} c_{-k},$$

тобто дійсні частини коефіцієнтів  $c_k$  не змінюються при зміні знаку частоти, а уявні частини при цьому змінюють знак. Відповідно, при графічному зображенні складових коефіцієнтів  $c_k$  одержимо симетричне зображення дійсних частин коефіцієнтів і косиметричне зображення уявних частин коефіцієнтів (рис. 2.12).

Враховуючи симетрію графіків, звичайно розглядають лише їх праві частини, що охоплюють додатну смугу частот  $0 \leq \omega < \infty$ .



a)



б)

Рис. 2.12. Спектри дійсних (а) та уявних (б) частин коефіцієнтів  $c_k$  ряду Фур'є в комплексній формі

Користування двома графіками часто буває незручним, тому їх об'єднують, зображаючи модулі коефіцієнтів

$$|c_k| = \frac{1}{2} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{A_k}{2}.$$

З метою спрощення обчислень звичайно застосовують зображення значень квадратів модулів комплексних коефіцієнтів ряду

$$|c_k|^2 = \frac{1}{4} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{A_k^2}{4}.$$

Зображення значень модулів коефіцієнтів ряду Фур'є в комплексній формі утворює лінійчасту діаграму, яка інтерпретує спектр модулів (квадратів модулів) комплексних чисел  $c_k$ . Спектр (рис. 2.13) охоплює всю область частот  $\omega = k\omega_0$  від  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Спектр є симетричним відносно нульового значення частоти. Даний лінійчастий спектр відповідає періодичній функції з періодом  $T$ .

Зазначимо, що середній квадрат функції  $f(x)$  дорівнює сумі квадратів модулів коефіцієнтів:

$$\overline{[f(x)]^2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(\tau)]^2 d\tau = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2). \quad (2.61)$$

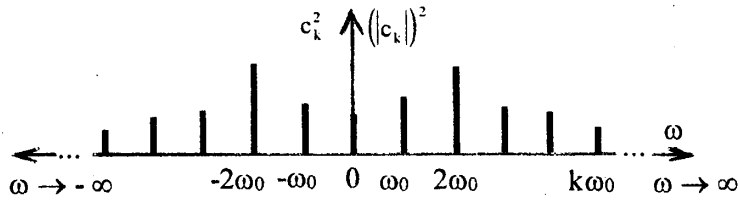


Рис. 2.13. Графічне зображення квадратів модулів коефіцієнтів  $c_k$  ряду Фур'є в комплексній формі, яке є спектром періодичної функції з періодом  $T$

Графічне зображення розкладу функції в ряд Фур'є (спектр) використовується для функцій довільного періоду, в тому числі нескінченно великого періоду. Розглянемо функцію з нескінченим періодом  $T \rightarrow \infty$ . При цьому базове значення частоти  $\omega_0 \rightarrow 0$ . Це означає, що лінії спектра розташовані нескінченно близько одна від одної та зливаються в одну фігуру, яка утворює **неперервний спектр**. Непевний спектр процесу є узагальненням дискретного спектру.

Введення неперервного спектра здійснюється шляхом граничного переходу для розкладу Фур'є в комплексній формі. При цьому довільна неперіодична функція  $f(t)$  записується у вигляді:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.62)$$

Під знак інтеграла входить комплекснозначна функція:

$$G(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.63)$$

Ця функція є комплексним спектром функції  $f(t)$ . Функцію  $G(j\omega)$  називають ще спектральною функцією розкладу функціональної залежності  $f(t)$  в ряд Фур'є. **Спектральна функція** зображується в функції частоти і утворюється неперервний спектр функціональної залежності  $f(t)$ .

Спектральна функція  $G(j\omega)$  з точністю до множника відповідає **перетворенню Фур'є**  $C(j\omega)$  (прямому) функції  $f(t)$  [1]:

$$C(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{j\omega t} dt. \quad (2.64)$$

Відповідно **зворотне перетворення Фур'є** визначає функцію  $f(t)$  через її перетворення Фур'є:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} C(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.65)$$

Знаходження прямого і зворотного перетворення Фур'є здійснюється різними методами [1, 3, 20]. Зокрема, перетворення знаходяться

безпосереднім обчисленням інтегралів за формулами (2.64), (2.65) або з використанням таблиць [35].

В табл. 2.2 наведено ряд функцій, що відповідають практично важливим процесам, та перетворення Фур'є даних функцій.

Таблиця 2.2

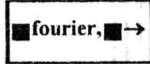
Перетворення Фур'є деяких практично важливих функцій

№ з/п	$f(t)$	$C(j\omega)$
1	$\frac{\sin at}{t} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ при $ \omega  < a$ 0 при $ \omega  > a$
2	$e^{-at+j\beta t} \quad (a > 0, t > 0)$ 0 $(t < 0)$	$\frac{j}{\sqrt{2\pi}(\beta - \omega + ja)}$
3	$e^{-pt^2} \quad (\text{Re } p > 0)$	$(2p)^{-1/2} e^{-\omega^2/4p}$
4	$e^{-t^2/2}$	$e^{-\omega^2/2}$
5	$\cos at^2 \quad (a > 0)$	$(2a)^{-1/2} \cos\left(\frac{\omega^2}{4a} - \frac{\pi}{4}\right)$
6	$ t ^{-1/2}$	$ \omega ^{-1/2}$
7	$\frac{e^{-a t }}{\sqrt{ t }} \quad (a > 0)$	$\frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + \omega^2} + a}}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$
8	$(a^2 - t^2)^{-1/2}$ при $ t  < a$ 0 при $ t  > a$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} J_0(a\omega)$
9	$\frac{\sin\left(b\sqrt{a^2 + t^2}\right)}{\sqrt{a^2 + t^2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} J_0\left(a\sqrt{b^2 - \omega^2}\right),  \omega  < b$
10	$\frac{\cos\left(b\sqrt{a^2 - t^2}\right)}{\sqrt{a^2 - t^2}}$ при $ t  < a$ 0 при $ t  > a$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} J_0\left(\sqrt{\omega^2 + b^2}\right)$
11	$\frac{\text{ch}\left(b\sqrt{a^2 - t^2}\right)}{\sqrt{a^2 - t^2}}$ при $ t  < a$ 0 при $ t  > a$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} J_0\left(\sqrt{\omega^2 - b^2}\right)$

Пряме і зворотне перетворення Фур'є можна здійснити засобами математичних пакетів. В пакеті MathCAD дані процедури здійснюються за допомогою кнопок

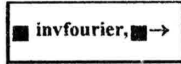


панелі символічних операцій. Активізувавши дані кнопки, одержимо на екрані відповідні заготовки. Для прямого перетворення Фур'є:



В лівий затушований прямокутник записується функція  $f(t)$ , а в правий – змінна (в даному випадку  $t$ ), за якою здійснюється перетворення. Натиснувши кнопку Enter, справа від стрілки одержимо символічний вираз, який відповідає перетворенню Фур'є  $S(j\omega)$  функції  $f(t)$ .

Зворотне перетворення Фур'є здійснюється аналогічним чином. Для цього використовується заготовка:



В лівий прямокутник записується функція  $S(\omega)$ , а в правий –  $\omega$ . Результатом дії даної процедури буде функція  $f(t)$ .

Знайдене таким чином перетворення Фур'є є спектром неперіодичної функції. Одержаний неперервний спектр функцій нескінченного періоду використовується для їх аналізу. Ця операція має назву **спектрального аналізу неперіодичної функції** (процесу). Спектральний аналіз виконується як для неперервних, так і для розривних процесів.

Спектральний аналіз періодичних та неперіодичних процесів здійснюється, як правило, в порівнянні зі спектрами відомих функцій. Нижче наведені спектри деяких практично важливих періодичних і неперіодичних процесів.

Розглянемо знаходження спектра процесу  $f(t)$ , який має вигляд серії прямокутних імпульсів висотою  $h$  і шириною  $2\varepsilon$ , що повторюються з частотою  $\nu$  імпульсів за секунду. Даний процес є періодичним з періодом  $T$  (рис. 2.14, *a*).

Період  $T$  цієї функції зв'язаний зі значеннями циклічної  $\nu$  та кругової  $\omega_0$  частот згідно зі співвідношеннями:

$$T = \frac{1}{\nu}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Розклад в ряд Фур'є даної періодичної функції має вигляд [1]:

$$f(t) = \frac{h}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \omega_0 \frac{\sin k\omega_0\varepsilon}{k\omega_0} e^{jk\omega_0 t}. \quad (2.66)$$

Спектр цього процесу складається із окремих ліній, які знаходяться на відстані  $\omega_0 = 2\pi\nu$  одна від однієї (див. рис. 2.14, *б*). Пунктиром показано обвідну лінію спектра. Вона є неперервною функцією частоти  $\omega = k\omega_0$  і визначається залежністю:

$$g_0(\omega) = \frac{h\omega_0}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega\varepsilon)}{\omega}.$$

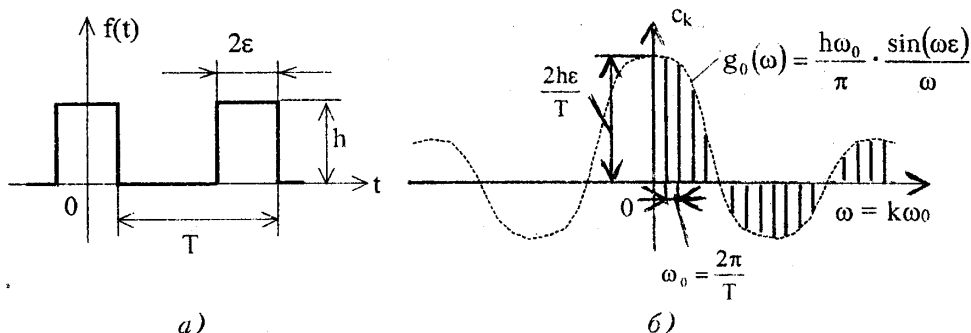


Рис. 2.14. Періодична функція у вигляді серії прямокутних імпульсів (а) та її лінійчатий спектр (б)

Розглянемо функцію нескінченного періоду у вигляді одного ізольованого одиничного прямокутного імпульсу (рис. 2.15, а).

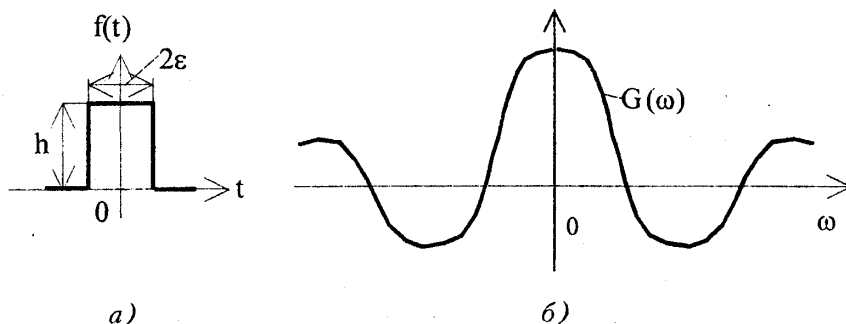


Рис. 2.15. Одиничний прямокутний імпульс (а) та його спектр (б) у вигляді неперервної кривої

Функцію у вигляді одиничного імпульсу можна вважати окремим випадком серії імпульсів, коли  $T \rightarrow \infty$ . Тому маємо функцію нескінченного періоду. Значення базової частоти  $\omega_0 \rightarrow 0$  і розклад у ряд Фур'є даної функції має вигляд:

$$f(t) = \frac{h\epsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega \epsilon}{\omega} e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.67)$$

Спектральна функція  $G(\omega)$ , що входить в (2.67), відповідає процесу нескінченного періоду у вигляді одиничного прямокутного імпульсу. Вона є дійсною функцією частоти (рис. 4.15, б):

$$G(\omega) = \frac{h}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega \epsilon}{\omega}. \quad (2.68)$$

Таким чином, серія прямокутних імпульсів (див. рис. 2.14, *a*) як періодична функція має лінійчастий спектр, а один ізольований імпульс (див. рис. 2.15, *a*) як функція нескінченного періоду має неперервний спектр.

Збільшимо амплітуду одиничного імпульсу  $h \rightarrow \infty$ , одночасно зменшивши його ширину  $2\epsilon \rightarrow 0$  за умови, що площа імпульсу  $h2\epsilon = 1$ . Імпульс при цьому буде відповідати одиничній імпульсній функції  $\delta(t)$ . Спектр цього імпульсу знайдемо шляхом граничного переходу в формулі (2.68):

$$G(\omega) = \lim_{\substack{h \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \frac{h \sin \omega \epsilon}{\pi \omega} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1 \sin \omega \epsilon}{2\pi \omega \epsilon} = \frac{1}{2\pi} = \text{const}. \quad (2.69)$$

Одиничний імпульс у вигляді  $\delta$ -функції та його спектральна функція наведені на рис. 2.16.

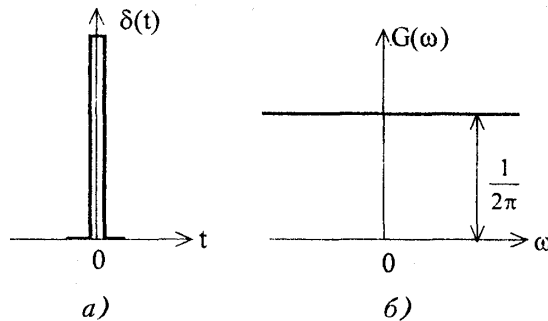


Рис. 2.16. Одинична імпульсна функція (*a*) та її спектральна функція (спектр) (*b*)

Таким чином, спектральна функція процесу у вигляді одиничної імпульсної функції є дійсною постійною величиною  $G(\omega) = \frac{1}{2\pi}$ , що не залежить від частоти.

Спектр розповсюджується на всю область частот від  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Розглянемо пакет нескінченно близьких імпульсів нескінченно малої ширини, але нескінченно великої амплітуди, тобто пакет одиничних імпульсних функцій (рис. 2.17, *a*).

Для даного пакету імпульсів період між імпульсами  $T \rightarrow 0$ , тому відповідно  $\omega_0 \rightarrow \infty$ . Із формули (2.66) з врахуванням того, що  $2h\epsilon = 1$ , впливає, що максимальне значення амплітуди гармоніки

$$\frac{2h\epsilon}{\pi} \omega_0 = \frac{\omega_0}{\pi} = \infty,$$

тобто спектр представляє собою одну лінію нескінченної висоти. Вона відповідає  $\delta$ -функції, тобто  $G(\omega) = \delta(\omega)$  (рис. 2.17, *b*).

Розглянемо функцію нескінченного періоду, яка визначається залежністю:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ e^{-\beta t} & \text{при } t > 0 \end{cases}. \quad (2.70)$$



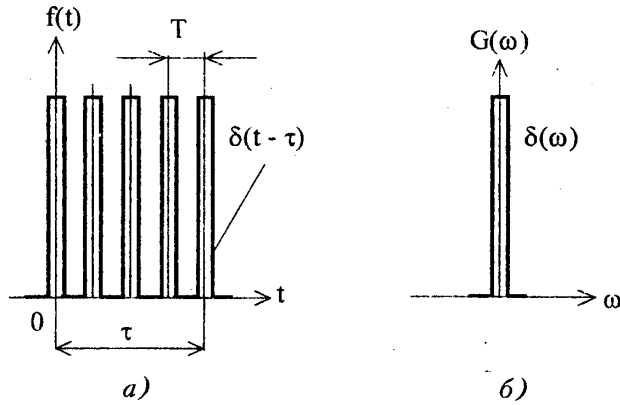


Рис. 2.17. Процес у вигляді пакету нескінченно близьких одиничних імпульсних функцій (а) та його спектр у вигляді одиничної імпульсної функції(б)

Графік даної функції наведено на рис. 2.18, а.

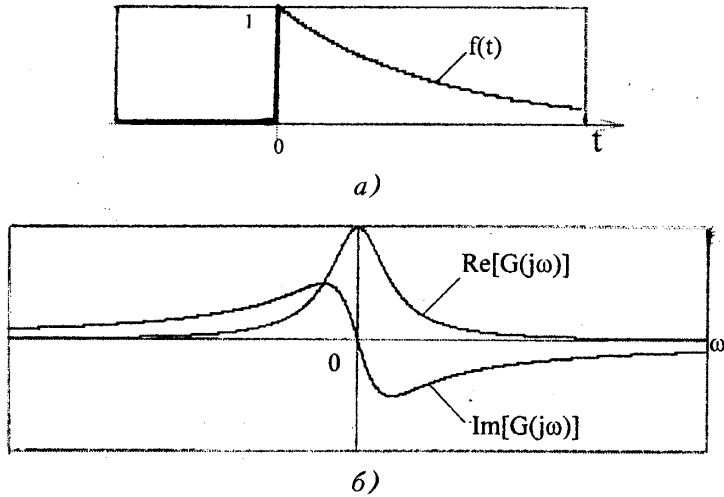


Рис. 2.18. Неперіодична функція (а) та її комплексний спектр (б)

Дана функція має нескінченний період і тому її спектр є неперервним. Спектр даної функції є комплексною величиною і має вигляд комплекснозначної функції дійсного аргументу частоти  $\omega$ :

$$G(j\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(\beta - j\omega)}{(\beta^2 + \omega^2)}. \quad (2.71)$$

Спектральна функція (2.71) включає дійсну та уявну складові, які відповідають залежностям:

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\beta}{\beta^2 + \omega^2}; \quad \operatorname{Im}[G(j\omega)] = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\omega}{\beta^2 + \omega^2}. \quad (2.72)$$

Дійсна та уявна складові спектра (2.72) наведені на рис. 2.18, б.

Для спектрального аналізу даної функції можна використати також спектр у вигляді квадрату модуля спектральної функції  $G(j\omega)$ , а саме: залежності  $|G(j\omega)|^2$  від частоти. Ця залежність має вигляд:

$$|G(\omega)|^2 = [\operatorname{Re}(G)]^2 + [\operatorname{Im}(G)]^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\omega^2 + \beta^2}. \quad (2.73)$$

Цей спектр відрізняється від спектра дійсної частини  $\operatorname{Re}[G(j\omega)]$  лише масштабом по осі ординат.

Спектральна функція  $G(j\omega)$  має певні недоліки і тому при спектральному аналізі процесів часто використовується дещо інша **спектральна характеристика процесу**.

Візьмемо квадрат модуля  $|G(j\omega)|^2$  спектральної функції  $G(j\omega)$  і проінтегруємо по всіх частотах  $\omega$  від  $-\infty$  до  $+\infty$ . Враховуючи, що квадрат модуля  $|G(j\omega)|^2 = G(j\omega) \cdot G(-j\omega)$ , одержимо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) \cdot G(-j\omega) d\omega. \quad (2.74)$$

В цю формулу підставимо значення  $G(j\omega)$  згідно з (2.73). Відповідно знайдемо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(-j\omega) d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.75)$$

Змінимо в правій частині цієї залежності порядок інтегрування:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} G(-j\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega. \quad (2.76)$$

Враховуючи формулу (2.72) із (2.76), одержимо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\tau)]^2 d\tau. \quad (2.77)$$

З цієї залежності одержимо **формулу Релея** [4], яка відповідає енергетичній формі інтеграла Фур'є:

$$2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\tau)]^2 d\tau. \quad (2.78)$$

Права частина формули (2.78) представляє собою величину, пропорційну енергії процесу  $f(t)$ .

Для більшості фізичних процесів енергія за нескінченний інтервал часу дорівнює нескінченності. Тому замість енергії використовують середню потужність процесу  $f(t)$ , а саме:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [f(t)]^2 d\tau = N = \overline{[f(t)]^2}, \quad (2.79)$$

де  $\overline{[f(t)]^2}$  представляє собою середній квадрат значення процесу.

Взявши середні значення в часі для обох частин формули (2.78), знайдемо:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |2\pi G(j\omega)|^2 d\omega = N = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [f(t)]^2 dt. \quad (2.80)$$

Введемо позначення:

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |2\pi G(j\omega)|^2. \quad (2.81)$$

Одержана дійсна функція  $S(\omega)$  параметра  $\omega$  має назву **спектральної щільності потужності процесу**, визначеного залежністю  $f(t)$  [1, 4, 35, 37, 44].

Спектральна щільність потужності зв'язана із середнім квадратом процесу згідно з інтегральною залежністю:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega = \overline{[f(t)]^2}. \quad (2.82)$$

Спектральна щільність потужності дає кількісну характеристику розподілу потужності процесу по частотах гармонік у всьому частотному діапазоні.

Формули (2.82) є узагальненням залежності (2.81) на випадок функції нескінченного періоду.

Застосування спектральної щільності потужності є дуже зручним і широко вживаним методом спектрального аналізу процесів, зокрема, вона використовується для **спектрального аналізу випадкових процесів**.

Розглянемо застосування спектральної щільності потужності для спектрального аналізу **стаціонарного** випадкового процесу. Такі випадкові процеси в часі протікають приблизно однорідно. Вони мають вигляд неперервних випадкових коливань відносно деякого середнього значення, причому ні зовнішній вигляд коливань, ні їх амплітуда не виявляють суттєвих змін з часом (рис. 2.19, а).

Кожний стаціонарний випадковий процес можна розглядати як нескінченно довгий. Початок відліку часу для такого процесу не має значення.

Для стаціонарного випадкового процесу всі статистичні характеристики не залежать від часу, зокрема, математичне сподівання та дисперсія

$$m_{\varphi}(t) = \text{const}; \quad \sigma_{\varphi}^2(t) = \text{const}.$$

Випадковий процес  $\varphi^*(t)$  (рис. 2.19, а) характеризується кореляційною функцією  $R(\tau)$ , яка є математичним сподіванням добутку значень процесу:

$$R(\tau) = M[\varphi^*(t) \cdot \varphi^*(t + \tau)].$$

Кореляційна функція є дійсною парною затухаючою функцією аргументу  $\tau$  (рис. 2.19, б).

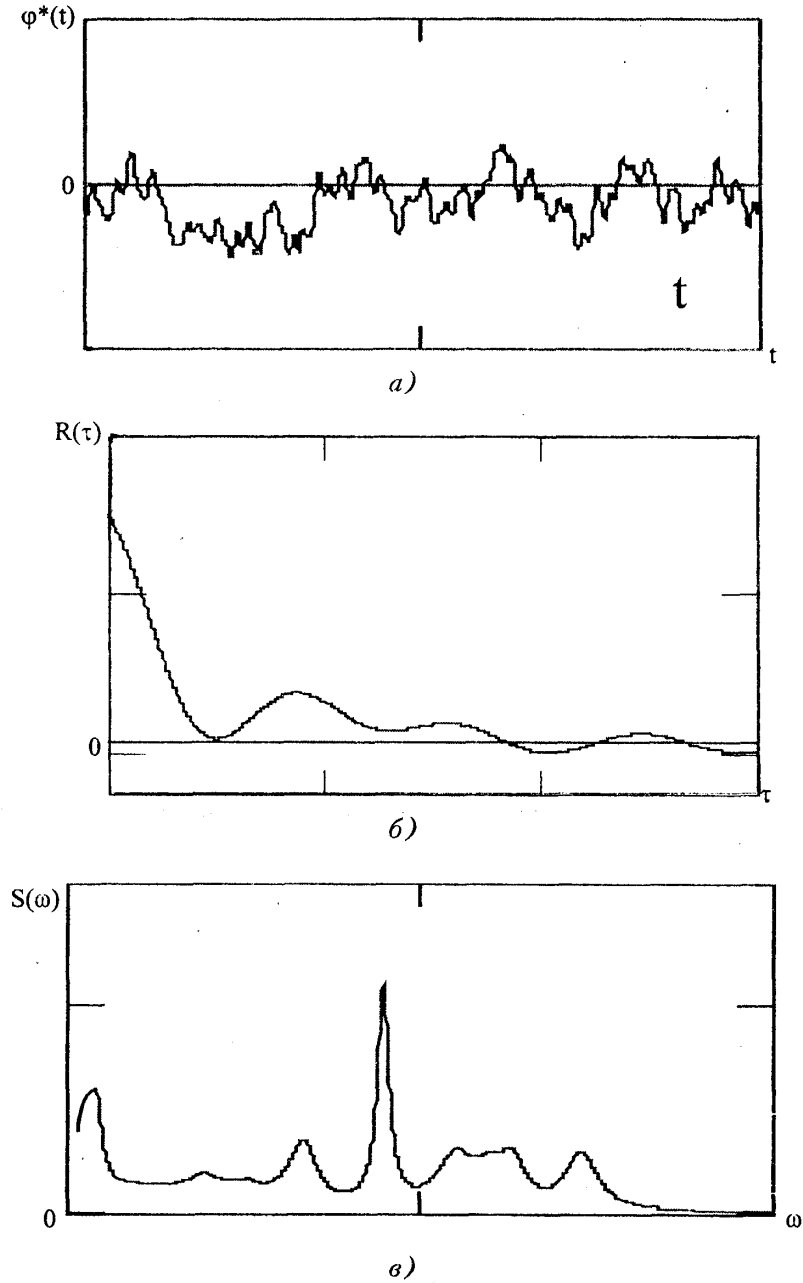


Рис. 2.19. Стационарний випадковий процес (а), його кореляційна функція (б) та спектральна густина потужності процесу (в)

Кореляційна функція дає можливість визначити основні статистичні параметри випадкового процесу:

- середнє значення процесу (момент першого порядку):

$$\overline{[\varphi^*(t)]} = \sqrt{R(\infty)} \quad (2.83)$$

Для процесу, що відповідає рис. 2.19, середнє значення процесу дорівнює нулю (процес є центрованим);

- середньоквадратичне значення (статистичний момент другого порядку):

$$\overline{[\varphi^{*2}(t)]} = R(0); \quad (2.84)$$

- дисперсію випадкового процесу:

$$D_{\varphi} = \sigma_{\varphi}^2 = R(0) - R(\infty); \quad (2.85)$$

- середньоквадратичне відхилення випадкового процесу:

$$\sigma_{\varphi} = \sqrt{R(0) - R(\infty)}. \quad (2.86)$$

Для центрованого випадкового процесу дисперсія дорівнює середньоквадратичному значенню і кореляційній функції при  $\tau = 0$ :

$$D_{\varphi} = \overline{[\varphi^{*2}(t)]}. \quad (2.87)$$

Введемо спектральну щільність потужності  $S_D(\omega)$  випадкового процесу  $\varphi^*(t)$ . Враховуючи (2.87), із залежності (2.82) одержимо:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_D(\omega) d\omega = \overline{[\varphi^{*2}(t)]} = D. \quad (2.88)$$

Спектральну щільність потужності  $S_D(\omega)$  ще називають **спектром випадкового процесу** або **спектральною щільністю дисперсій**. Вона зв'язана із кореляційною функцією інтегральним перетворенням, згідно з залежностями [4]:

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega; \quad (2.89)$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.90)$$

Ці формули з точністю до постійного множника відповідають формулам (2.62) та (2.63), а також з точністю до постійного множника вони відповідають зворотному та прямому перетворенню Фур'є (2.65), (2.64).

Для опису стаціонарних випадкових процесів загального виду використовуються базові кореляційні функції [44]:

$$R_1(\tau) = \sigma_1^2 \cdot e^{-\alpha|\tau|}; \quad (2.91)$$

$$R_2(\tau) = \sigma_2^2 \cdot e^{-\alpha|\tau|} \cdot \cos(\beta\tau) \quad (2.92)$$

$$R_3(\tau) = \sigma_3^2 \cdot e^{-\alpha|\tau|} \cdot \left( \cos(\beta\tau) + \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta|\tau|) \right) \quad (2.93)$$

де  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  - середньоквадратичні відхилення процесів;  $\alpha, \beta$  - деякі параметри, що характеризують резонансні властивості процесів.

Кореляційним функціям виду (2.91)–(2.93) відповідають базові вирази спектральних щільностей. Кореляційній функції (2.91) відповідає спектральна щільність:

$$S_1(\omega) = \frac{2\sigma_1^2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{\sigma_1^2 \cdot 2T_1}{1 + \omega^2 T_1^2}, \quad (2.94)$$

де  $T_1 = \frac{1}{\alpha}$ .

Кореляційній функції (2.92) відповідає спектральна щільність:

$$\begin{aligned} S_2(\omega) &= \sigma_2^2 \alpha \left[ \frac{1}{\alpha^2 + (\beta^2 - \omega^2)} + \frac{1}{\alpha^2 + (\beta^2 + \omega^2)} \right] = \\ &= \frac{2\alpha\sigma_2^2(\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2)}{[\omega^4 + 2(\alpha^2 - \beta^2)\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2]} = \frac{\sigma_2^2(1 + T_2^2\omega^2)}{(1 - T_2^2\omega^2)^2 + 4\xi_2 T_2^2\omega^2}, \end{aligned} \quad (2.95)$$

де  $T_2 = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}$ .

Кореляційній функції (2.93) відповідає спектральна щільність:

$$\begin{aligned} S_3(\omega) &= \sigma_3^2 \frac{\alpha}{\beta} \left[ \frac{2\beta - \omega}{\alpha^2 + (\beta - \omega)^2} + \frac{2\beta + \omega}{\alpha^2 + (\beta + \omega)^2} \right] = \\ &= \frac{\sigma_3^2}{(1 - T_3^2\omega^2)^2 + 4\xi_3 T_3^2\omega^2}, \end{aligned} \quad (2.96)$$

де  $T_3 = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}$ .

Спектральна щільність довільного стаціонарного випадкового процесу може бути одержана у вигляді лінійної математичної моделі, базисні функції якої відповідають набору спектральних щільностей виду (2.94)–(2.96) [54].

Ця властивість використовується для побудови математичних моделей випадкових процесів, що мають місце у складних динамічних системах.

В розділі (12.3) наведена методика розробки і використання математичної моделі спектральної щільності віброакустичного процесу складної динамічної системи побудована з використанням базових залежностей (2.94)–(2.96).

Спектральний аналіз випадкових процесів реалізується в сучасних математичних пакетах.

При математичному моделюванні випадкових процесів спектральний аналіз застосовується в різних формах, як неперервних, так і дискретних.

## РОЗДІЛ 3

### Система SIMULINK пакету MATLAB для моделювання процесів та систем

#### 3.1. Загальна характеристика системи

##### 3.1.1. Принципи побудови системи, приклади S-моделей

Система візуального математичного моделювання SIMULINK входить до програмного середовища MATLAB (MATLAB 5.3, MATLAB 6.0). Вона призначена для математичного моделювання лінійних та нелінійних динамічних процесів та систем [29]. Об'єкт моделювання описується у вигляді структури, яка включає різноманітні блоки (елементи, модулі) та зв'язки між ними. Структура чи блок-схема об'єкта утворює математичну модель в графоаналітичному вигляді. Структура об'єкта моделювання доповнюється блоками, що визначають входи і виходи моделі. При цьому входи задаються набором конкретних функцій, а виходи невідомі і розраховуються в процесі математичного моделювання.

Математична модель включає набір блоків, які утворюють замкнену структуру з вхідними та вихідними блоками. Ця структура становить так звану **S-модель** процесу чи системи.

На рис. 3.1 наведена найпростіша S-модель, яка включає лише два вхідні та один вихідний блоки.

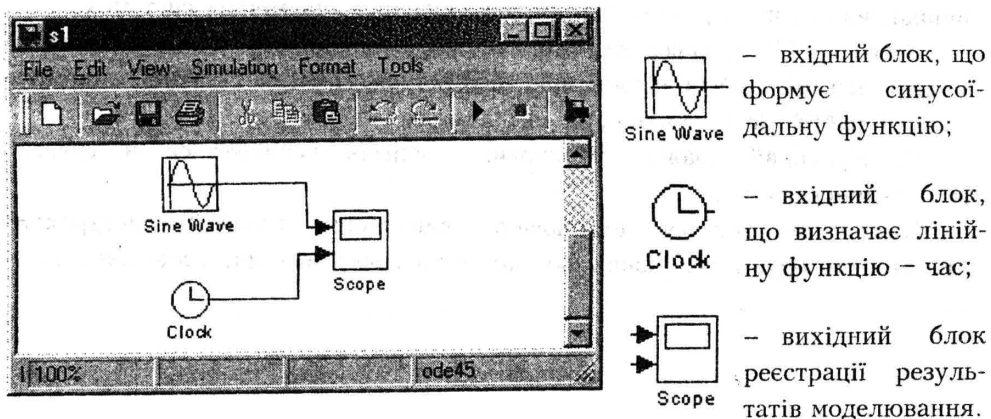
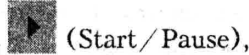
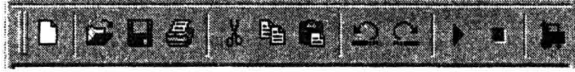


Рис. 3.1. Приклад найпростішої S-моделі в системі SIMULINK

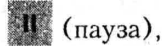
Процес моделювання розпочинається за допомогою кнопки



яка знаходиться на панелі інструментів:



Після запуску моделі на кнопку Start/Pause виводиться символ

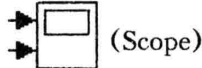


якому відповідає команда Pause (призупинити моделювання). Закінчити процес моделювання можна в довільний момент часу. Для цього служить кнопка



на панелі інструментів.

Після завершення процесу моделювання у вихідному блоці



зберігається відповідна інформація про вихід системи, який змінювався в часі. Активізація вихідного блока Scope виводить на екран оглядове вікно блока з графіками вихідних параметрів.

Оглядове вікно (рис. 3.2) за виглядом нагадує екран електронного осцилографа. До початку моделювання вікно включає лише шкали, після обчислень з'являються графіки відповідних величин.

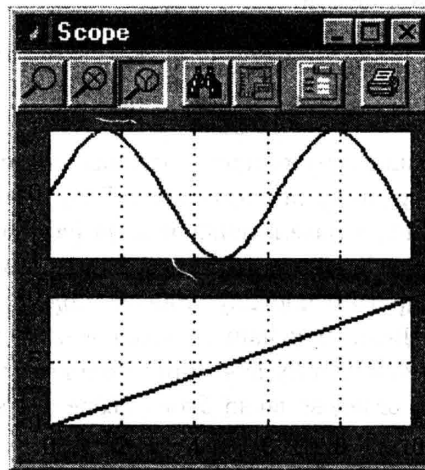


Рис. 3.2. Оглядове вікно блока Scope, що відповідає моделі, зображеній на рис. 8.1

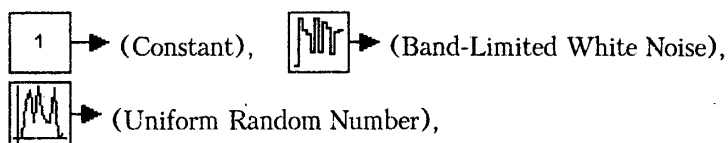
Вікно має панель, кнопки якої дозволяють регулювати параметри графіків та здійснювати виведення графіків на принтер.



Система візуального математичного моделювання SIMULINK дозволяє виконувати математичне моделювання технічних систем і процесів різними методами, зокрема, моделювання в часовому просторі, моделювання на основі спектральних перетворень Фур'є, моделювання стохастичних процесів з використанням методів Монте-Карло та інших.

Розроблювані S-моделі можуть мати різний рівень складності. На рис. 3.3 наведено приклад S-моделі середнього рівня складності.

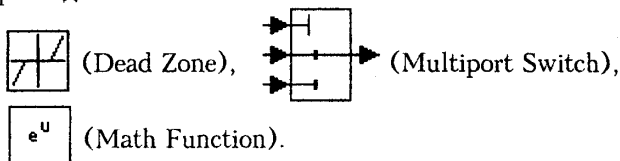
Блоки, які включені в дану S-модель (див. рис. 3.3), зв'язані один з одним як за інформацією, так і за керуванням. Тип зв'язку залежить від типу блока і логіки роботи моделі. Модель включає різні входні та вихідні блоки. Вхідними блоками є:



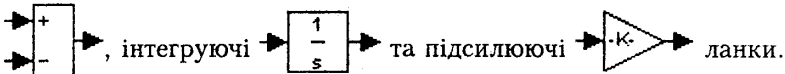
а вихідними:



Структура моделі включає нелінійні елементи:



S-модель включає зворотні зв'язки, блоки одержання суми сигналів



Дана S-модель здійснює математичне моделювання динамічної системи, на яку діють випадкові збурення у вигляді "білого" шуму. При цьому структура технічної системи, а отже, і математична модель системи, змінюється випадковим чином. В процесі обчислень модель набуває форми диференціального рівняння третього або другого порядку. Запуск моделі здійснюється так, як це показано раніше. Після виконання моделювання кнопкою Start/Pause інформація виводиться по кожному із чотирьох блоків Scope.

На рис. 3.4 наведено оглядове вікно блока Scope без номера, який реєструє вихід моделі.

Блоки Scope 1 ... Scope 3, а також всі блоки Display служать для контролю проміжних параметрів системи в процесі моделювання.

Зв'язки між блоками служать для обміну інформацією між ними. Напрямки розповсюдження інформації показані стрілками. Дані, якими обмінюються блоки, можуть бути скалярними чи векторними величинами довільної розмірності (в цій моделі вони скалярні).

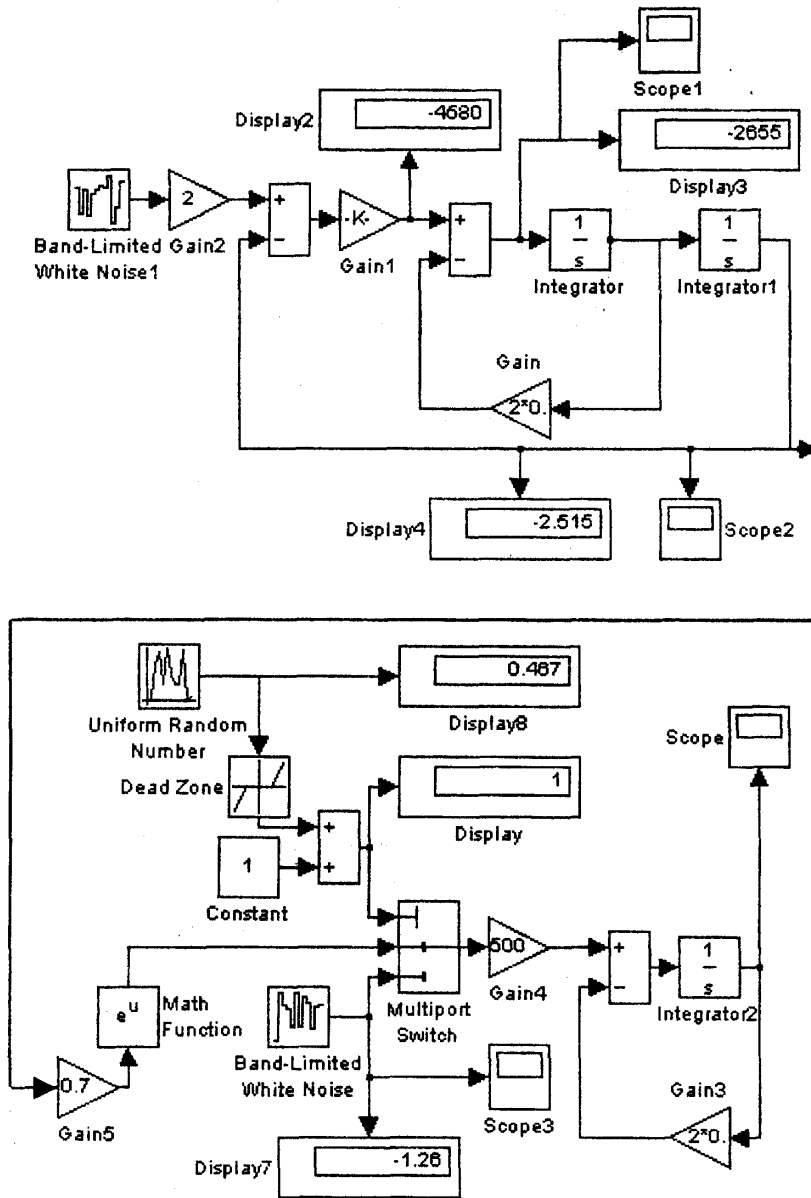


Рис. 3.3. Приклад S-моделі технічної системи з нелінійними характеристиками, на яку діють випадкові збурення, а структура системи змінюється випадковим чином

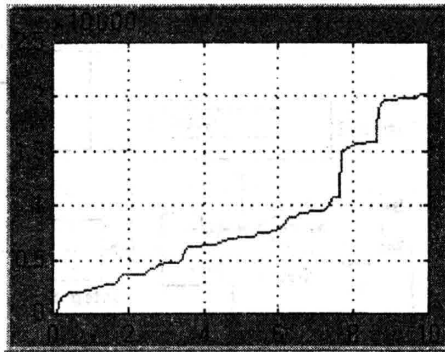


Рис. 3.4. Оглядове вікно блока Scope, в якому показані результати моделювання

Кожна S-модель може мати ієрархічну структуру, тобто включати математичні моделі більш низького рівня. Число рівнів ієрархії не обмежене. На рис. 3.5 наведено приклад нескладної S-моделі технічної системи, яка включає в себе S-модель більш низького рівня.

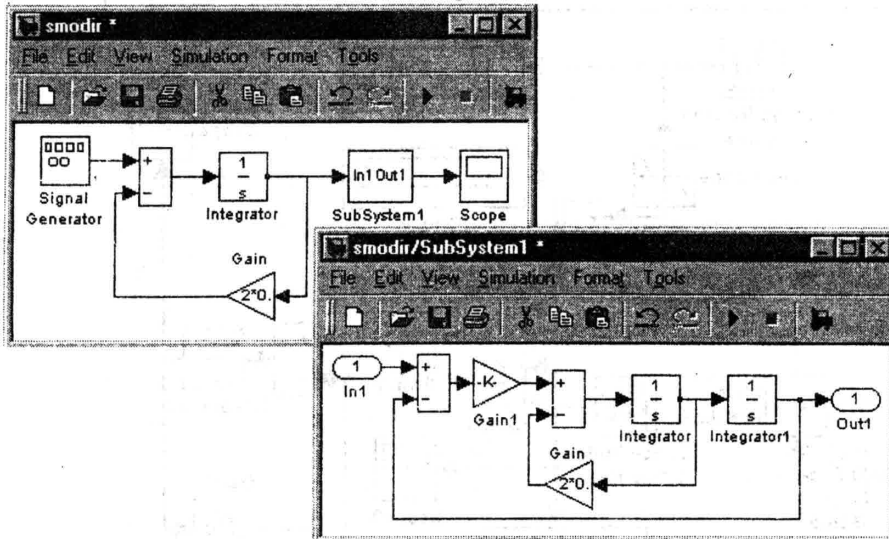


Рис. 3.5. Приклад S-моделі ієрархічної структури

S-модель нижчого рівня названа SubSystem 1. Вона має вхідний In 1 та вихідний Out 1 порти, які служать для обміну інформацією між S-моделями основної системи Smodir та її підсистеми SubSystem 1. Підсистема в основній моделі зображена у вигляді блока з назвою SubSystem 1, на якому позначені вхід In1 та вихід Out1.

### 3.1.2. Бібліотека модулів (блоків) SIMULINK

Необхідна візуальна математична модель в системі SIMULINK формується з використанням технології **Drag-and-Drop** (Перетягти і Залишити). Як елементи моделі використовуються блоки із бібліотеки Simulink Library Browser (рис. 3.6).

Версії MATLAB 5.3 та MATLAB 6.0 мають близьку структуру розділів бібліотеки.

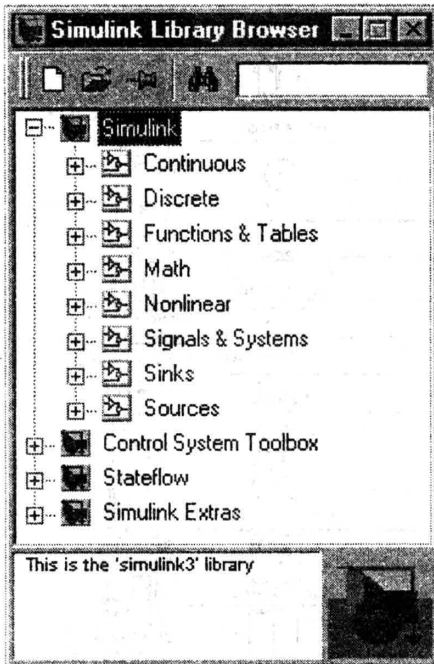


Рис. 3.6. Розділи бібліотеки:

Continuous – лінійні елементи системи;  
Discrete – дискретні елементи системи;  
Functions & Tables – функції та таблиці;  
Math – математичні функції;  
Nonlinear – нелінійні елементи системи;  
Signals & Systems – зв'язки між системами;  
Sinks – вихідні параметри (отримувачі);  
Sources – вхідні параметри (джерела);  
Control System Toolbox – засоби аналізу;  
Stateflow – зміна стану системи;  
Simulink Extras – додаткові блоки

Бібліотека модулів є набором графічних елементів, використовуючи які можна скласти довільну структуру моделі. Бібліотека модулів (блоків) має ряд розділів. Деякі із них є базовими, інші можуть змінюватись в залежності від потреб.

Розділи, які можуть змінюватись, включають компоненти MATLAB, що додатково включені до бібліотеки модулів.

Кожен модуль (блок), який входить в бібліотеку, має, як правило, один і більше параметрів, які задаються з метою корекції характеристики блока.

Параметри блока задаються у діалоговому вікні. Вікна всіх блоків мають ідентичну структуру і включають коротку характеристику блока, поля введення (або вибору значень параметрів) і 4 кнопки: Apply – застосувати; Revert – повернути попередні значення; Help – виклик файлу допомоги; Close – закрити діалогове вікно.

Розглянемо окремо всі розділи бібліотеки модулів SIMULINK.

### 3.2. Основні розділи бібліотеки, характеристика модулів

#### 3.2.1. Sources – вхідні модулі (джерела)

На рис. 3.7 розкрито зміст розділу бібліотеки Sources (джерела, вхідні блоки).

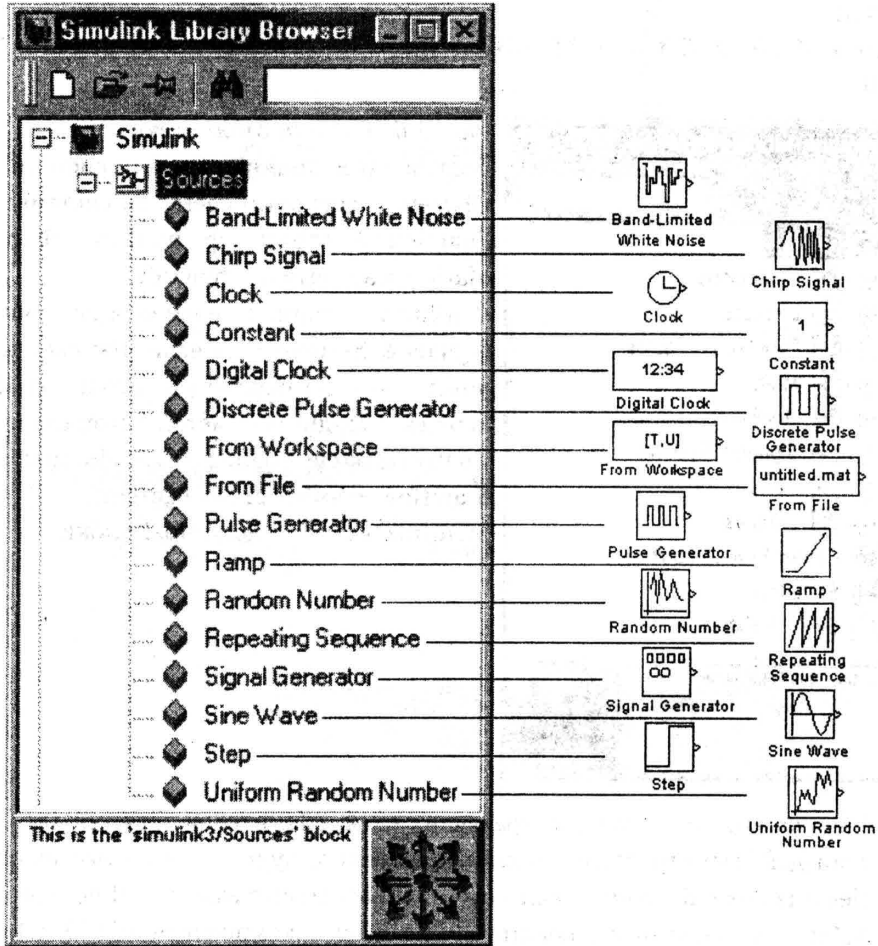


Рис. 3.7. Sources – розділ вхідних параметрів

**Sources** – розділ вхідних параметрів – модулі, що входять до даного розділу, призначені для формування сигналів, що забезпечують роботу S-моделі в цілому або окремих її частин. Кожній назві відповідає окремий блок з відповідним графічним зображенням. Модулі даного розділу мають по одному виходу і не мають входів.

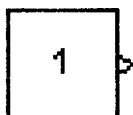
Основними джерелами вхідних параметрів є:



Band-Limited White Noise – генератор “білого шуму” в обмеженому діапазоні частот.



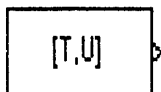
Chirp Signal – генератор гармонічних коливань змінної частоти.



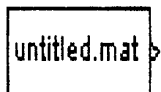
Constant – блок, який формує постійну величину (скаляр чи вектор), значення величини (в даному випадку 1 – показано в середині блока).



Discrete Pulse Generator – генератор дискретних імпульсних сигналів.



From Workspace – блок, який забезпечує введення даних в S-модель безпосередньо із робочої області MATLAB.



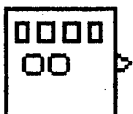
From File – блок, призначений для введення в S-модель даних із файлу untitled.mat. Структура даних в цьому файлі є масивом із змінною кількістю рядків. Елементи першого рядка включають послідовні значення модельного часу, елементи інших рядків – відповідні значення змінних.



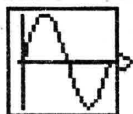
Ramp – блок, який формує лінійно зростаючий (або лінійно спадний) сигнал.



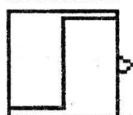
Random Number – блок, який формує дискретний сигнал, амплітуда якого розподілена за нормальним законом. Блок має чотири параметри регулювання: Mean і Variance – задають математичне сподівання та дисперсію нормального закону; Initial Seed – задає початкове значення для генератора випадкових чисел. При фіксованому значенні цього параметра генерується завжди одна і та ж послідовність випадкових чисел. Четвертий параметр Sample time є кроком зміни модельного часу. Його можна задати у формі константи або виразу. Якщо результат обчислення виразу є дробом, він округляється до найближчого цілого значення.



Signal Generator – блок, який формує вхідний сигнал різної форми: синусоїдальний; послідовність прямокутних імпульсів; послідовність трикутних імпульсів та випадковий вхідний сигнал.



Sine Wave – блок, який генерує гармонічний (синусоїдальний) вхідний сигнал системи, який є скалярною або векторною функцією часу.



Step – блок, який задає дискретний вхідний сигнал, що відповідає ступінчастій функції. Блок має три регульованих параметри: час зміни сигналу, початкове та кінцеве значення.



Uniform Random Number – блок, що формує сигнал, амплітуда якого є рівномірно розподіленою випадковою величиною. Блок має чотири параметри регулювання. Два з них, Initial Seed і Sample Time, мають ті ж значення, що і в блоці Random Number, два інших параметри, Minimum і Maximum, задають діапазон розподілу випадкової величини.

### 3.2.2. Розділ Sinks – вихідні модулі (отримувачі)

На рис. 3.8 розкрито зміст розділу Sinks, що охоплює модулі для виведення інформації.

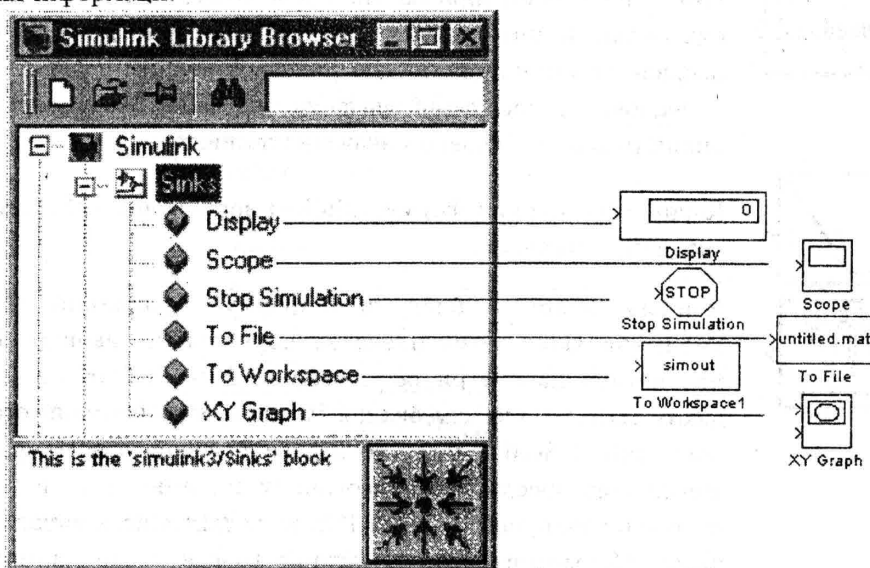
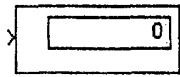


Рис. 3.8. Розділ бібліотеки Sinks (блоки виведення інформації, одержаної при математичному моделюванні)

Sinks – розділ бібліотеки, який включає модулі реєстрації вихідних параметрів (отримувачі). Блоки, що входять до даного розділу, дозволяють здійснити виведення або передачу інформації, одержаної в результаті математичного моделювання конкретної системи.

Виведення інформації здійснюється наступними блоками.



Display – блок, призначений для виведення на екран числових значень величин, одержаних при моделюванні. Блок має чотири параметри регулювання, а саме: Format – задає формат виведення; Decimation – визначає періодичність виведення; Floating display – визначає спосіб використання блока Display; Sample Time – задає величину кроку модельного часу, тобто дискретність виведення даних у вікно Display.

Блок Display може використовуватись для виведення як скалярних, так і векторних чи матричних величин. Робота блока в цих випадках ілюструється рис. 3.9. На рис. 3.9, а показано, як здійснюється виведення скалярної величини, а на рис. 3.9, б – як здійснюється виведення вектора, компонентами якого є 1, 2 і 3.

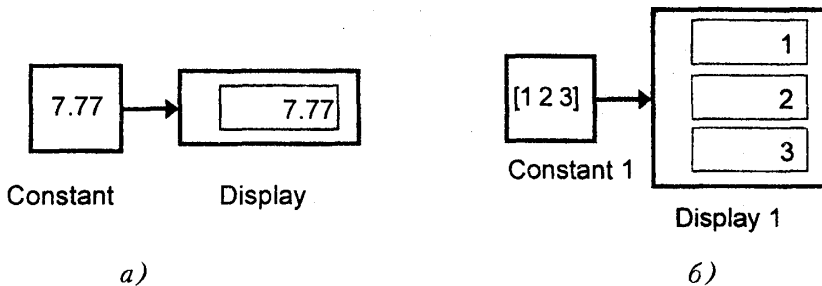
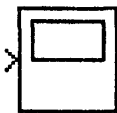


Рис. 3.9. Приклади S-моделей, що ілюструють роботу блока Display при виведенні скалярних (а) та векторних (б) величин

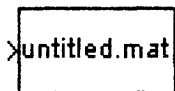


Score – блок, який здійснює графічне виведення результатів моделювання в функції часу. Він включає ряд регульованих параметрів, що дозволяють змінювати масштаб графіків. Одночасно в блоці Score можна вивести до 30 графіків величин в функції модельного часу. Блок дозволяє роздруковувати одержану графічну інформацію.

Приклад застосування блока Score наведено раніше (див. рис. 3.1 та 3.2).



Stop Simulation – блок керування моделюванням, який дозволяє зупинити процес моделювання при виконанні певних умов. Блок зупиняє моделювання, коли на його вході з'являється ненульовий сигнал.



To File – блок, який забезпечує запис в MAT-файл untitled.mat результатів математичного моделювання. Блок використовується в парі з раніше розглянутим блоком From File.



simout

To Workspace – блок, призначений для збереження даних, одержаних в результаті моделювання безпосередньо в робочій області MATLAB. Блок має чотири параметри регулювання: Variable name – ім'я, під яким дані зберігаються в робочій області; Simout Maximum number of rows – допустиме число кроків моделювання, для якого дані реєструються; Decimation – дискретність реєстрації даних; Sample Time – дискретність зміни модельного часу.

### 3.2.3. Continuous – аналогові блоки

На рис. 3.10 розкрито зміст розділу Continuous, що охоплює модулі для опису аналогових лінійних елементів динамічних систем, зокрема тих, які включають диференціальні операції.

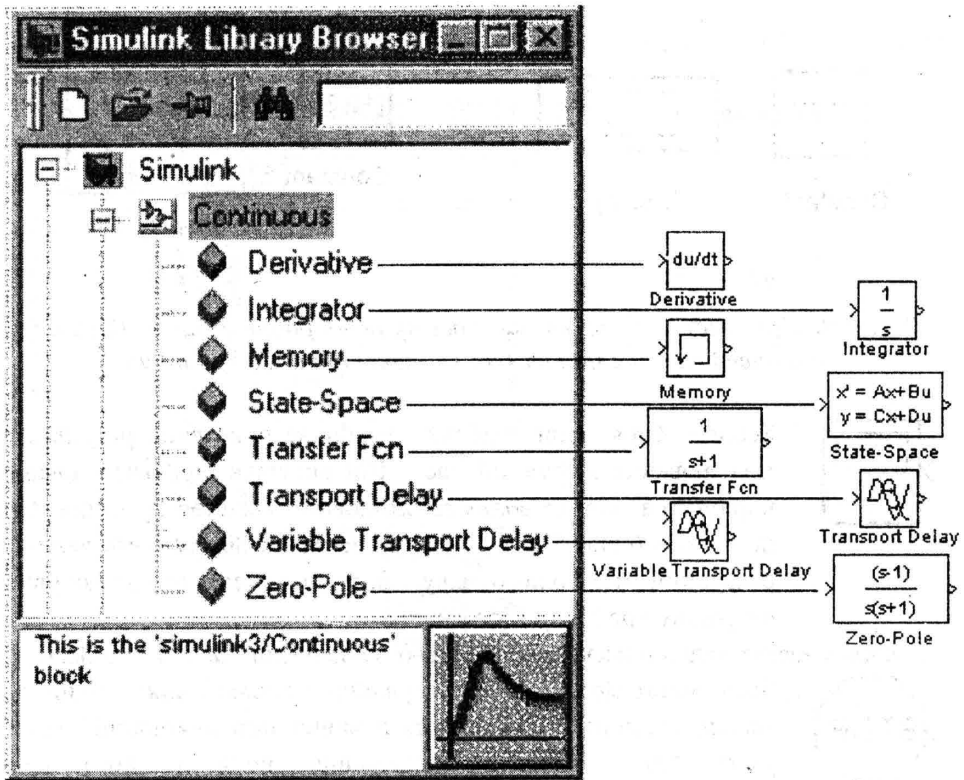
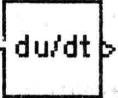
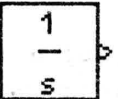
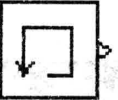
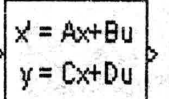
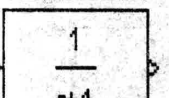


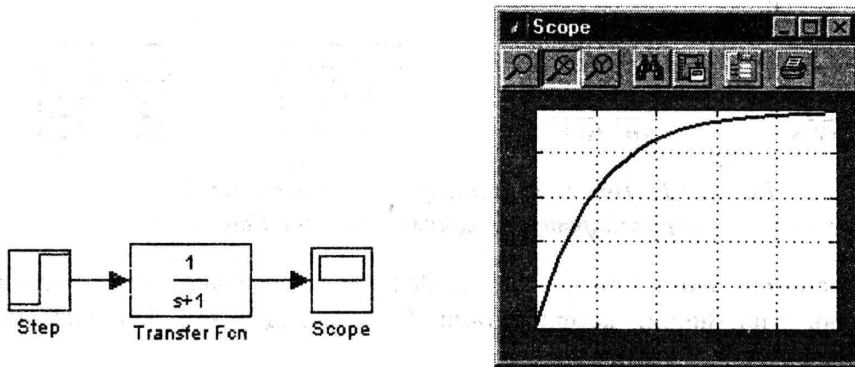
Рис. 3.10. Розділ бібліотеки Continuous, що містить модулі для опису аналогових лінійних елементів динамічних систем

	Derivative – блок обчислення похідної вхідного сигналу (диференціююча ланка системи автоматичного керування).
	Integrator – блок-суматор неперервного часу (інтегруюча ланка системи автоматичного керування).
	Memory – блок, що здійснює затримку сигналу на один крок модельного часу.
	State-Space – блок формування змінних стану систем.
	Transfer Fcn – блок, який відповідає лінійній ланці системи автоматичного керування із трансформуючою функцією, показаною в середині блока. Коефіцієнти трансформуючої функції визначаються параметрами регулювання блока.

Останній блок призначений для розв'язку диференціальних рівнянь, заданих в операторній формі.

В початковому стані блока трансформуюча (передавальна) функція відповідає аперіодичній ланці першого порядку з постійною часу та коефіцієнтом передачі, що дорівнюють 1.

Робота блока Transfer Fcn ілюструється наступним прикладом. В ньому виконується розрахунок перехідного процесу системи, яка відповідає аперіодичній ланці першого порядку. Блок-схема моделі та результати розрахунків наведені на рис. 3.11.



a)

b)

Рис. 3.11. Блок-схема S-моделі (a) та результати розрахунків (б)

Регулювання блока Step, який задає ступінчасту зміну вхідного сигналу,

здійснено таким чином, що сигнал на вході системи змінюється від 0 до 1 в момент часу  $t = 0$ .

Блок Transfer Fcn, як і інші блоки S-моделей, можуть з'єднуватись довільним чином, зокрема паралельно чи послідовно.

Наступний приклад (рис. 3.12) ілюструє розрахунок виходу моделі, яка включає 4 послідовно з'єднані аперіодичні ланки першого порядку при подачі на вхід системи одиничної ступінчастої функції.

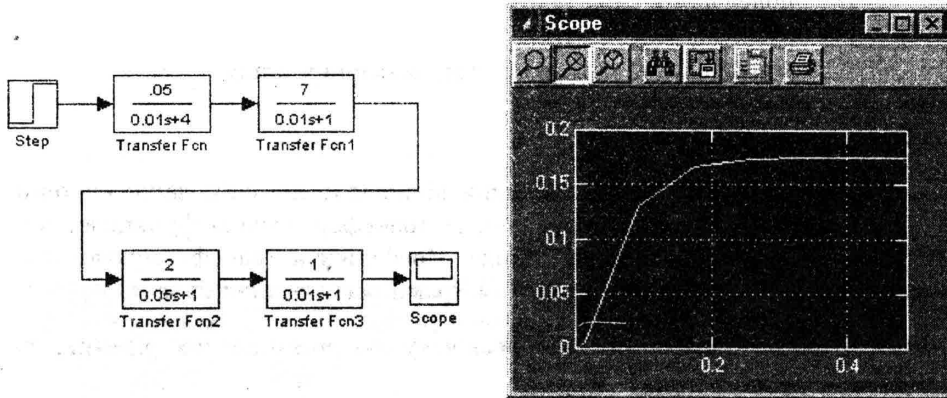


Рис. 3.12. Математична модель системи з послідовним з'єднанням елементів

Трансформуючі функції, які задаються блоком Transfer Fcn, відповідають довільній дробово-раціональній функції. Єдине обмеження полягає в тому, що степінь чисельника трансформуючої функції не повинен бути більшим за степінь знаменника функції. На рис. 3.13 наведено характерні приклади блоків Transfer Fcn.

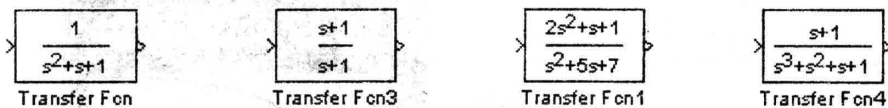


Рис. 3.13. Приклади трансформуючих функцій, які реалізуються блоками Transfer Fcn

За допомогою блока Transfer Fcn здійснюється розв'язок диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Як приклад розглянемо диференціальне рівняння:

$$\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = x + \frac{dx}{dt},$$

де  $x = \sin(t)$  – синусоїдальна функція часу.

Початкові умови для даного рівняння є нульовими, тобто

$$\text{при } t = 0 \quad x = 0, y = 0, \frac{dy}{dt} = 0, \frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Перетворимо диференціальне рівняння по Лапласу і одержимо:

$$Y(s) \cdot [s^3 + s^2 + s + 1] = X(s) \cdot [s + 1].$$

Знайдемо трансформуючу функцію системи:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s + 1}{s^3 + s^2 + s + 1}.$$

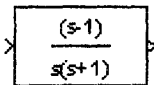
Для розв'язку рівняння необхідно використати правий крайній блок, зображений на рис. 3.13. Подавши на вхід даного блока синусоїдальну функцію з розділу Sourse (див. рис. 3.7), на виході одержимо розв'язок рівняння у вигляді  $y(t)$ .



Transport Delay – блок, що забезпечує затримку сигналу на задану кількість (не обов'язково цілих) кроків модельного часу. Регулювання блока здійснюється за допомогою трьох параметрів: Time delay – кількість кроків модельного часу, на який здійснюється затримка сигналу; Initial input – значення амплітуди вхідного сигналу, при якому відбувається активація блока (встановлено нуль); Initial buffer size – об'єм пам'яті в байтах, що виділяється в робочій області MATLAB для зберігання параметрів затриманого сигналу (встановлено 1024 байт).



Variable Transport Delay – блок, який дозволяє задавати керувану ззовні величину затримки сигналу. Для цього блок має додатковий вхід. Регулювання блока здійснюється трьома параметрами: Maximum delay встановлює найбільшу допустиму величину затримки сигналу; два інших параметри – Initial input і Buffer Size – мають ті ж самі значення, що і в блоці Transport Delay який розглянуто вище.



Zero-Pole – модуль формування трансформуючої функції нульового поля. Блок має три параметри регулювання (Zeros, Poles, Gain), які призначені для формування змісту блока.

На рис. 3.14 наведено характерні приклади трансформуючих функцій, реалізованих за допомогою блоку Zero-Pole.

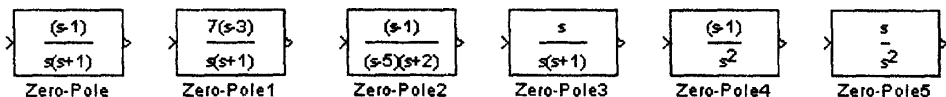


Рис. 3.14. Приклади трансформуючих функцій, які реалізуються блоками Zero-Pole

### 3.2.4. Discrete та Function & Tables – дискретні модулі, функції та таблиці

На рис. 3.15 наведено зміст розділів Discrete та Function & Tables.

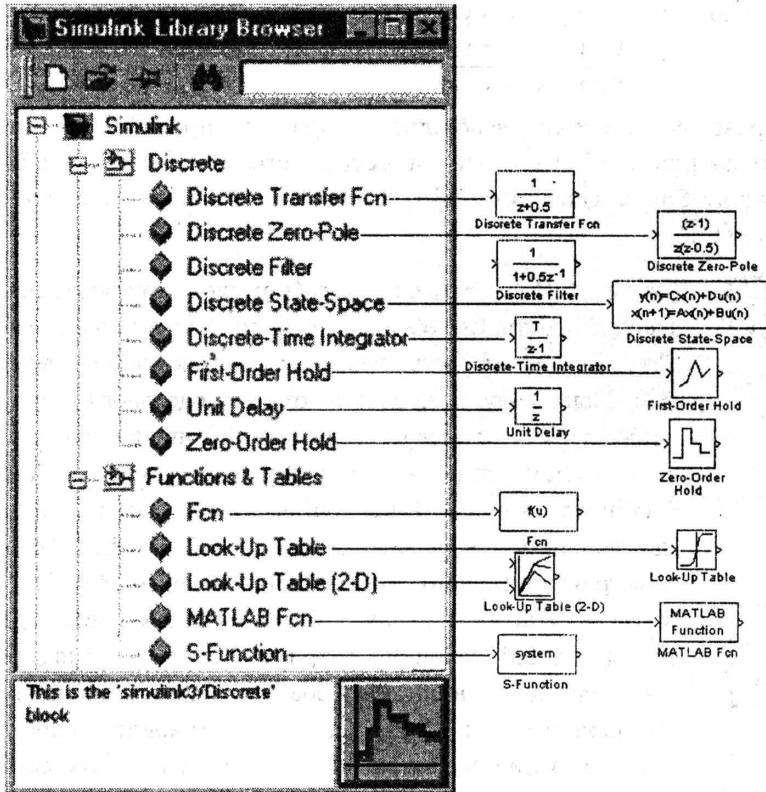


Рис. 3.15. Розділи бібліотеки Discrete та Function & Tables, які мають модулі для опису дискретних елементів та функцій

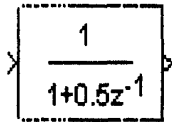
Discrete – розділ бібліотеки модулів, призначених для опису дискретних систем. Основні модулі розділу наведені нижче.

$$\frac{1}{z+0.5}$$

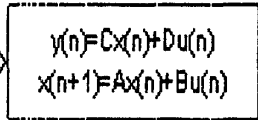
Discrete Transfer Fcn – матричний вираз дискретної трансформуючої функції. Векторний вираз для знаменника тієї ж функції. Розмірність вектора дорівнює числу колонок матриці.

$$\frac{(z-1)}{z(z-0.5)}$$

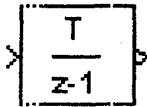
Discrete Zero-Pole – матричний вираз для нульового поля. Векторний вираз для поля та коефіцієнтів підсилення. Розмірність вектора дорівнює числу колонок матриці нульового поля або одиниці, коли нульове поле є вектором.



Discrete Filter – блоки, які забезпечують Z-перетворення вхідного сигналу.



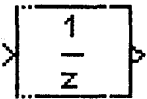
Discrete State-Space – блок формування змінних стану системи.



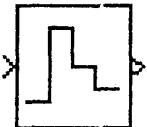
Discrete Time Integrator – блок, що дозволяє одержати суму інтервалів часу між значеннями, при яких на вхід блока подається сигнал. Регульовані параметри блока визначають метод інтегрування (параметр Integrator method), підключення додаткового керуючого сигналу (параметр External reset) і використання зовнішнього встановлення початкового значення вхідного сигналу (параметр Initial condition source).



First-Order Hold – екстраполятор першого порядку.

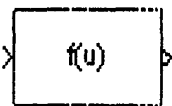


Unit delay – блок затримки сигналу. Він забезпечує затримку вхідного сигналу на задане число кроків модельного часу. Блок має два параметри регулювання. Параметр Initial condition задає значення амплітуди вхідного сигналу, при якому блок активізується. Цей параметр задається як константа або вираз, що обчислюється в процесі моделювання. Другий параметр – Sample time – визначає число кроків модельного часу, протягом якого зберігається значення сигналу, що поданий на вхід блока. Параметр є додатним і може бути заданий як константою, так і обчислюваним виразом.



Zero-Order Hold – блок-екстраполятор нульового порядку.

**Function & Tables** – розділ бібліотеки модулів, призначених для опису довільних функцій. Основні модулі розділу наведені нижче.



Fcn – універсальний обчислювальний блок. При його регулюванні може бути введений довільний аналітичний вираз, аргументом якого є вхідний сигнал  $u$ . Вхідний сигнал може мати векторну форму. Результатом обчислення є скаляр.

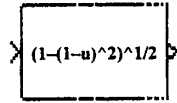
Прикладом функцій, які реалізуються даним блоком, є довільні ірраціональні

функції.

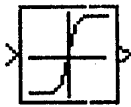
Для реалізації ірраціональної функції виду

$$y = f(u) = \sqrt{1 - (1 - u)^2}$$

необхідно використовувати наступний блок:



За допомогою даного блока можна задати дробово-раціональну або поліноміальну функцію з відповідними значеннями коефіцієнтів.



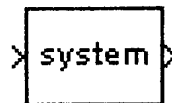
Look - Up Table - блок, який виконує лінійну інтерполяцію вхідного сигналу у відповідності із таблично заданою функцією.



Look - Up Table (2D) - блок, який здійснює лінійну інтерполяцію двовимірного вхідного сигналу.



MATLAB Fcn - блок, який містить програму із середовища MATLAB. Дозволяє застосувати до вхідного сигналу довільну програму, реалізовану у вигляді М-файла. Це може бути як бібліотечна функція пакета MATLAB, так і власна розробка. Якщо використовується бібліотечна функція MATLAB, то у вікні регулювання параметрів блока вказується ім'я функції (можна без аргументу  $u$ ). Інший параметр регулювання блока Output width (ширина вихідного сигналу) вказує, що виходом блока є вектор, розмірність якого дорівнює Output width.



Блок, який визначається при моделюванні. Він може бути написаний з використанням мови програмування С або FORTRAN, відповідає S-функції стандартного вигляду і автоматично транслюється в S-функцію SIMULINK.

Останній блок має важливе значення і дає можливість об'єднати традиційні засоби програмування з можливостями системи візуального математичного моделювання SIMULINK.

Застосування даного блока дозволяє використовувати наявний пакет прикладних програм написання на мові С чи FORTRAN.

### 3.2.5. Math – модулі для реалізації математичних операцій

На рис. 3.16 наведено зміст розділу Math.

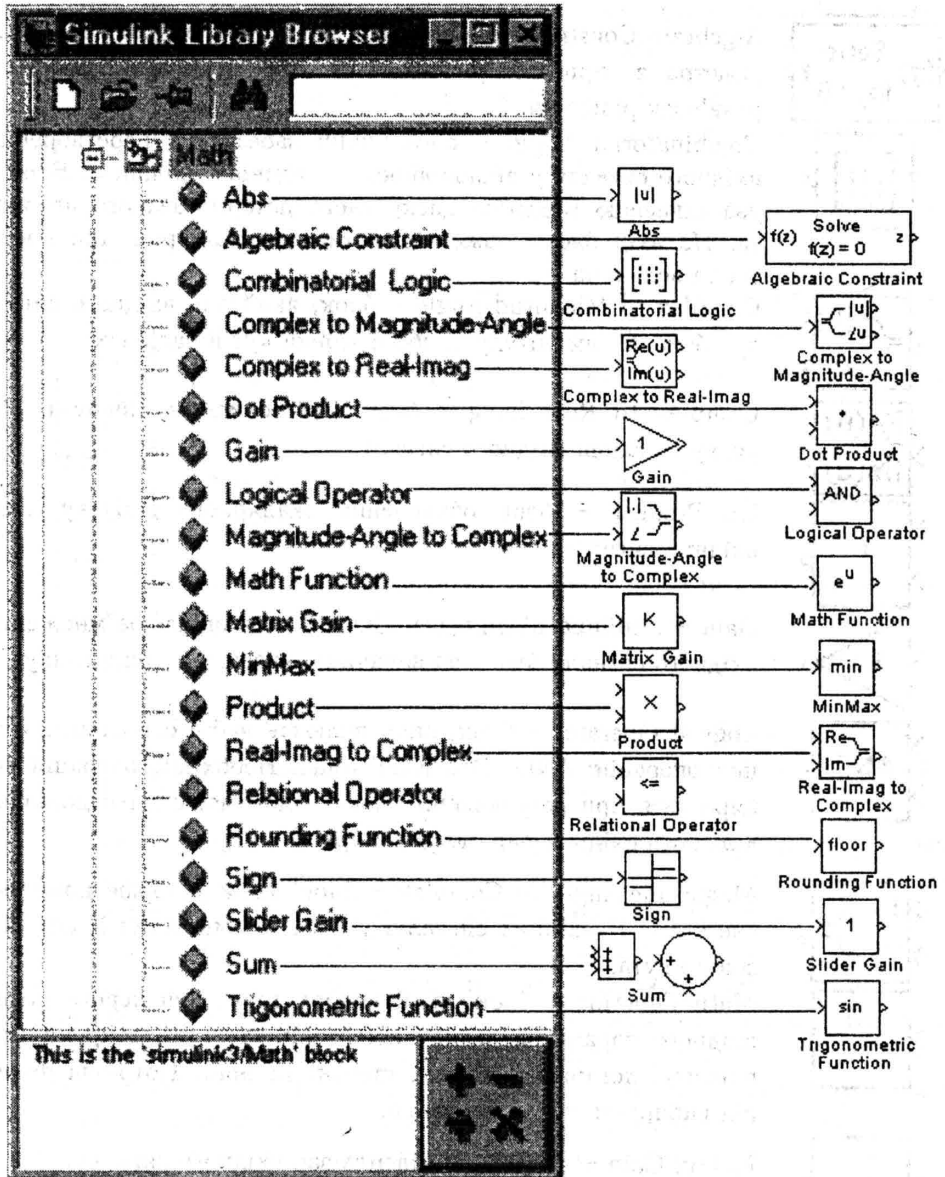

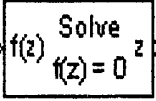



Рис. 3.16. Розділ бібліотеки Math, який містить функції та операції математичного аналізу

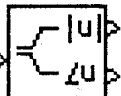


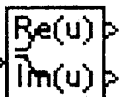
Модулі розділу Math містять функції та операції математичного аналізу.

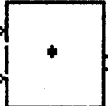
- 

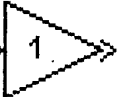
Abs – блок, який формує на виході абсолютне значення вхідного сигналу. Цей блок не має параметрів регулювання.
- 


Algebraic Constraint – блок, що забезпечує знаходження параметра  $z$ , при якому  $f(z) = 0$ . При цьому здійснюється розв'язок рівняння.
- 


Combinatorial Logic – блок, який забезпечує перетворення вхідного сигналу у відповідності із заданою таблицею. Блок є узагальненою моделлю дискретного детермінованого автомата. На вхід блока може подаватись як скалярна, так і векторна величина.
- 

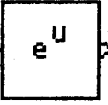
Complex to Magnitud-Angle – блок, який для вхідного сигналу обчислює амплітуду  $i/$  або фазовий кут в радіанах.
- 


Complex to Real Imag – блок, що обчислює дійсну  $i/$  або уявну складові вхідного сигналу.
- 


Dot-Product – блок обчислення скалярного добутку двох вхідних сигналів.
- 

Gain – лінійний підсилювач. Даний блок здійснює множення вхідного сигналу блока на величину, вказану в трикутнику.
- 

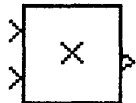
Logical Operator – блок, який включає набір основних логічних операцій: AND, OR, NOT тощо. Необхідна операція вибирається при регулюванні блока. Блок може мати довільну кількість вхідних параметрів (портів).
- 

Magnitud-Angle to Complex – блок, який утворює комплексне число із вхідних сигналів у вигляді амплітуди  $i/$  або фазового кута.
- 

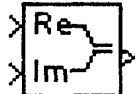
Math Function – блок, який використовує для перетворення вхідного параметра деякі елементарні функції, зокрема експоненту, логарифм, корені, степені та інші. Потрібна функція вибирається в меню блока.
- 

Matrix Gain – матричний підсилювач вхідного сигналу.
- 

Min Max – блок, який забезпечує знаходження мінімального чи максимального значень елементів вхідного вектора.



Product – блок, який виконує множення чи ділення кількох вхідних сигналів. Регульованими параметрами є число входів блока та вид функції, що виконується.



Real – Imag to Complex – блок, який утворює комплексне число із дійсного і/або уявного вхідних сигналів.



Relational Operator – блок, який реалізує операції відношення над двома вхідними сигналами. Зокрема, реалізуються відношення  $<$ ,  $>$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ ,  $==$  (тотожність),  $\neq$  (не дорівнює). Вибір операції здійснюється при регулюванні блока. Знак операції показується на зображенні блока.



Rounding Fncion – блок, що включає різноманітні функції округлення значень амплітуди вхідного сигналу блока.



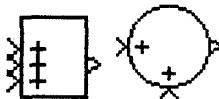
Sign – блок, який формує ідеальну релейну характеристику (сигнатуру).



Slider Gain – блок-підсилювач зі змінним коефіцієнтом підсилення.



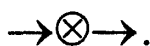
Trigonometric Function – блок, що забезпечує перетворення вхідного сигналу за допомогою однієї з тригонометричних функцій, яка вибирається при регулюванні параметрів із меню блока.



Sum – блок-суматор вхідних сигналів (у даному випадку трьох та двох). Іконка блока може мати різну форму.

Даний модуль може використовуватись у двох режимах роботи: перший – додавання (із врахуванням знаків) вхідних сигналів; другий режим відповідає підсумовуванню компонент вектора, що подається на вхід блока. Для керування роботою блока використовується лише один параметр List of sings (список знаків). Цей параметр може бути заданий у вигляді послідовності знаків “+” і “-”, Наприклад, (+ + -). При цьому число знаків визначає число входів блока, а сам знак – полярність вхідного сигналу. Якщо параметр задається у вигляді цілої додатної константи (більше 1), то ця константа визначає число входів, які всі вважаються додатними. Коли значення константи дорівнює 1, то блок працює у другому режимі і, отже, визначає на виході суму компонент вхідного вектора. Число входів і знаки відображаються на виході блока.

Еквівалентом позначення блока на структурних схемах систем автоматичного керування є суматор



### 3.2.6. Nonlinear – модулі, що реалізують нелінійні функції

На рис. 3.17 наведено основні модулі розділу Nonlinear.

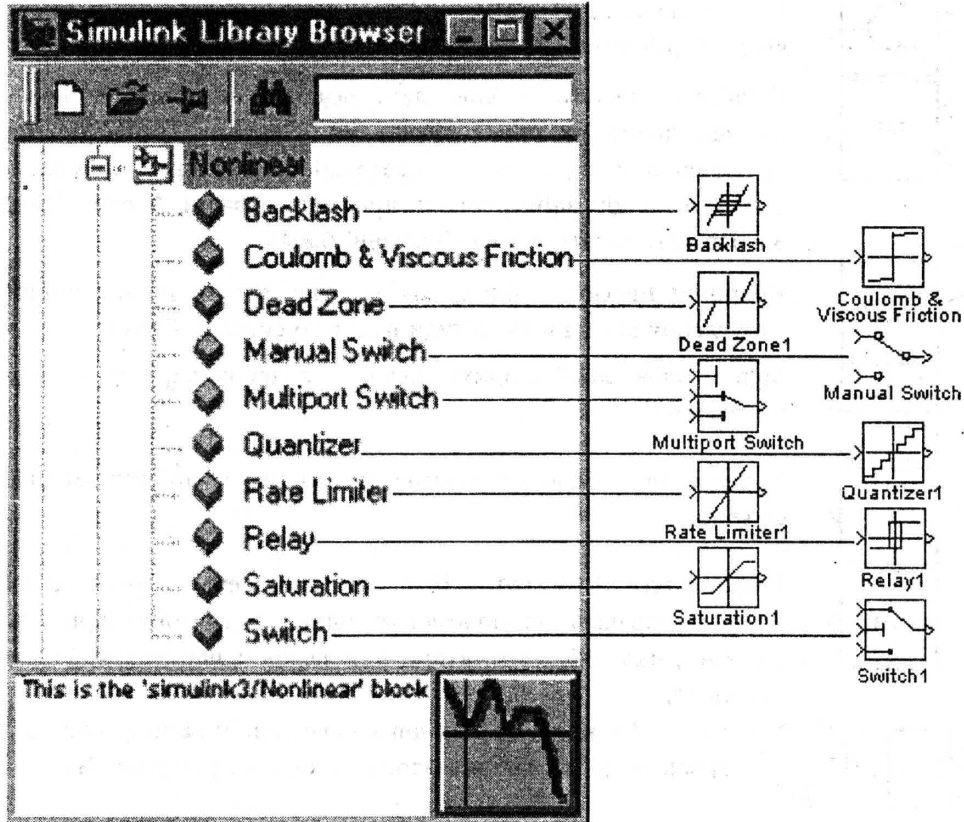


Рис. 3.17. Розділ бібліотеки Nonlinear, який включає модулі для опису нелінійних елементів систем, що моделюються

Nonlinear – розділ бібліотеки, що включає модулі для опису нелінійних елементів системи.

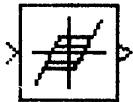
Блоки, що входять до розділу, дозволяють виконати математичне моделювання всіх основних суттєвих нелінійностей, які зустрічаються при моделюванні процесів та систем. Суттєві нелінійності відповідають розривним функціям довільного виду, петлеподібним неоднозначним характеристикам та логічним умовам.

Розділи блоку є потужним засобом математичного моделювання реальних технічних систем і процесів, що в них протікають.

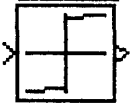
Блоки розділу Nonlinear дають можливість формувати дискретні матема-

тичні моделі процесів з неперервних функціональних залежностей, які описують процес.

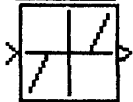
Основні модулі розділу Nonlinear:



Backlash – блок призначення для формування петлеподібної лінійної характеристики (гістерезис у системі).



Coulomb & Viscous Friction – характеристика модуля відповідає сумі кулонівського і рідинного тертя.

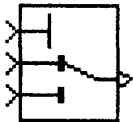


Dead Zone – блок, який замінює значення вхідного сигналу, що лежить в даному діапазоні, нульовим значенням.



Manual Switch – блок, який переключується “вручну” і виконує функцію перемикача на блок-схемі.

Використання даного блока дає можливість реалізувати зміну структури моделі.



Multiport Switch – модуль, що забезпечує підключення до виходу одного із інформаційних каналів.

Робота модуля ілюструється блок-діаграмою, показаною на рис. 3.18.

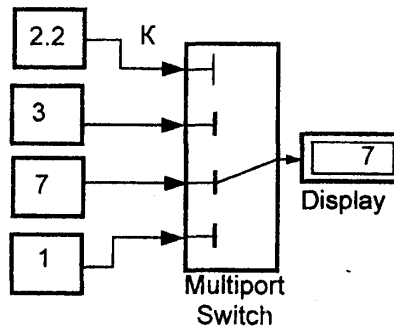
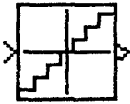


Рис. 3.18. Схема, яка ілюструє роботу блока Multiport Switch

Підключення здійснюється в залежності від значення амплітуди керуючого сигналу, що подається на вхід К. Сигнал на вході К округлюється до цілого числа, яке визначає номер входу. Якщо керуючий сигнал менший 1, то підключається 1-й канал. Коли керуючий сигнал більший 3, то підключається 3-й канал. Параметром регулювання блока є число інформаційних каналів Number of inputs. Для даного випадку цей параметр дорівнює трьом.

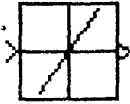
Цей блок призначений для формування математичних моделей змінної структури. Зміна структури S-моделей здійснюється автоматично при вико-

нанні певних умов.

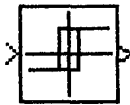


Quantizer – блок, який формує дискретний вихідний сигнал із заданою дискретністю.

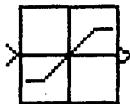
Цей блок призначений для формування Кусково-постійних дискретних моделей процесів. Нижче наведено приклади застосування даного блоку (див. розділ 6.3.2).



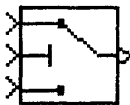
Rate limited – блок, що обмежує величину відношення сигналів.



Relay – блок, який забезпечує формування релейної характеристики з петлею гістерезису. Блок має чотири параметри регулювання: Switch on point – точка включення; Switch of point – точка виключення; Output when of – вихід при виключеному стані; Output when on – вихід при включеному стані.



Saturation – блок, який формує лінійну характеристику з насиченням.



Switch – модуль (перемикач), який служить для перемикання входів 1:3 на вихід. Якщо значення амплітуди сигналу 2-го входу більше або дорівнює заданому пороговому значенню Threshold, то на вихід подається сигнал з 1-го входу, а якщо менше – з третього.

На рис. 3.19 наведено приклад використання блока Switch (параметр Threshold = 7).

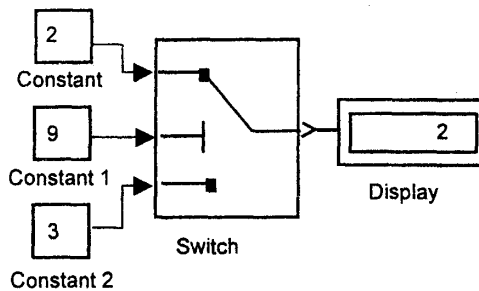


Рис. 3.19. Схема, яка ілюструє роботу блока Switch

Періодичність переключення блока Switch визначається кроком модельного часу (параметр Sample time) блока, підключеного до його 2-го (керівного) входу. Блок Switch має один параметр регулювання Threshold (поріг). Він може задаватись як константа або обчислюваний вираз.

### 3.2.7. Signal & System – модулі для формування структури системи

На рис. 3.20 наведено основні модулі розділу Signal & System.

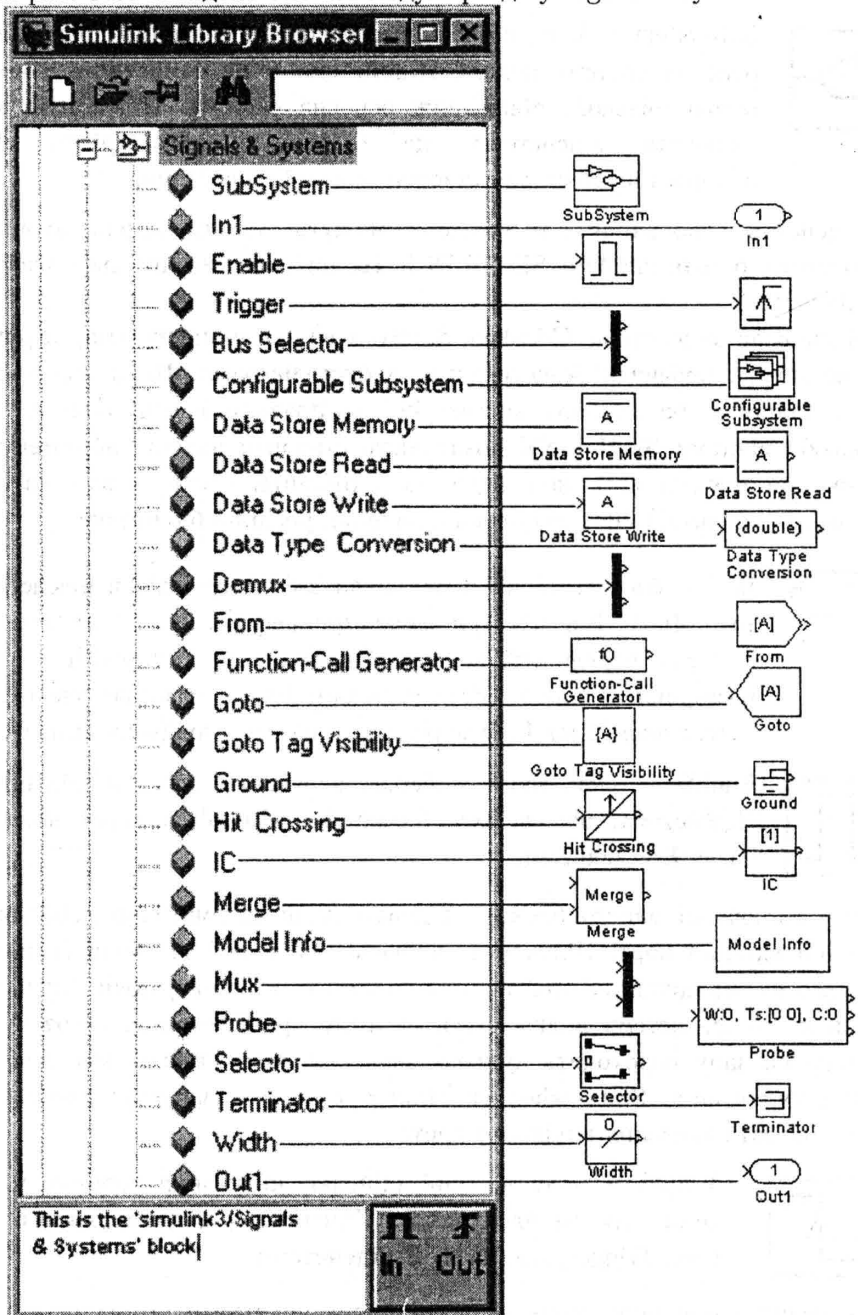
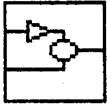


Рис. 3.20. Розділ бібліотеки Signal & System

**Signal & System** – розділ бібліотеки, що включає модулі формування підсистем та зв'язків між ними. Більшість блоків розділу Signal & System призначено для розробки S-моделей підсистем. Основні модулі розділу:

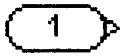


**Subsystem** – блок, який є заготовкою підсистеми, що входить в основну систему моделі. **Підсистема** – це **самостійна S-модель** більш низького рівня, ніж основна система. Підсистема може включати підсистеми ще більш низького рівня. Блок використовується для створення нової підсистеми.

Підсистеми, що входять в S-модель, можуть бути приведені до вигляду бібліотечних блоків системи SIMULINK. Ця операція називається маскуванням підсистеми.

Маскована підсистема (Masked SubSystem) – це підсистема, структуру якої не можна побачити безпосередньо з блок-діаграми. Ця підсистема має власне діалогове вікно вибору параметрів і, як правило, власну іконку.

Засоби системи SIMULINK дозволяють створити власну бібліотеку блоків, використовуючи масковані підсистеми. Бібліотеки можуть включати блоки, розроблені самостійно, або блоки з наявних розділів бібліотеки.



**In 1** – блок (вхідний порт), який забезпечує вхід в підсистему в точці In 1. Він має три параметри регулювання: Port number – визначає порядковий номер вхідного порта; Port width – змінює розмірність вхідного сигналу; Sample time – визначає дискретність часу, з якого блок In буде реагувати на зміну вхідного сигналу.



**Enable** – блок, який здійснює керування роботою підсистеми. Підсистема, яка має хоча б один блок Enable, є керованою і має назву **E-підсистеми**.

При включенні даного блока в підсистему їй автоматично додається керуючий вхідний порт. Підсистема включається в роботу, коли сигнал, що подається на керуючий вхідний порт, є додатним. Якщо керуючий сигнал змінює знак, то підсистема включається на тому кроці модельного часу; коли величина сигналу переходить нульове значення. Блок Enable має два параметри регулювання: State when enabling – стан при запуску; Show output port – показати значення вихідного порта.



**Trigger** – модуль, який здійснює керування роботою підсистеми шляхом блокування. Підсистема, яка має хоча б один блок Trigger, має назву **T-підсистеми**.

T-підсистема працює лише на тому кроці моделювання, на якому була зміна полярності вхідного сигналу, що подається на блок Trigger.

T-підсистема не повертається у вихідний стан, її поточний стан зберігається до чергового запуску.

Якщо підсистема має хоча б один блок Enable і хоча б один блок Trigger, то вона має назву **ET-підсистеми**. Дана підсистема має два вхідні керуючих порти. Підсистема працює наступним чином. Коли на певному кроці моделювання має місце зміна полярності керуючого сигналу, який подається на блок Trigger, то перевіряється значення сигналу, що подається на блок Enable. Якщо це значення більше нуля, то підсистема включається і працює протягом даного кроку моделювання.



Data Store Memory – блок, призначений для збереження даних. Він має два параметри регулювання: Data Store name – імена даних, що зберігаються; Initial value – початкове значення. Останній параметр визначає також і формат даних, що зберігаються.

Наприклад, якщо початкове значення встановлене як  $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ , змінна є масивом розмірністю  $2 \times 2$ . Область доступності змінної, яка зберігається, визначається тим, де розміщено блок Data Store Memory. Коли він розміщений в блок-діаграмі самого верхнього рівня, то дані, які зберігаються, доступні у кожній підсистемі S-моделі. Якщо ж цей блок знаходиться в деякій підсистемі, то область доступності даних розповсюджується на цю підсистему і в неї включені підсистеми (при їх наявності). Разом з блоком Data Store Memory використовуються блоки введення-виведення даних.



Data Store Read

Блоки мають два параметри регулювання.

Параметр Data Store Name (ім'я) повинен співпадати з параметром блока Data Store Memory. Інший параметр Sample time визначає крок зміни модельного часу.



Data Store Write



Demux – модуль, який виконує операцію розділення вхідного вектора на вектори меншої розмірності або скаляри. Його функція протилежна функції блока Mux, який буде розглянуто нижче.

Параметром регулювання блока є величина Number of outputs – число виходів. Число виходів може відрізнятись від розмірності вхідного вектора (може бути меншим). Якщо число виходів дорівнює розмірності вхідного вектора, то на кожному виході блока формуються скалярні величини. Блок-схема моделі, що відповідає даному випадку, наведена на рис. 3.21, а.

Якщо розмірність вхідного вектора  $M$  більша за число виходів блока  $N$ ,



то на перших  $(n - 1)$  виходах блока формуються вектори, розмірність яких дорівнює цілій частині відношення  $\frac{M}{N}$ . Розмірність вектора на останньому виході дорівнює остачі від ділення. Блок-схема моделі, що відповідає даному випадку, наведена на рис. 3.21, б.



From – блок, який забезпечує прийом даних А з підсистеми. Блок From може бути зв'язаний лише з одним блоком Goto.



Goto – блок, призначений для передачі даних із підсистеми в систему. Він має два параметри регулювання. Tag (ознака) означає ім'я даних – А. Інший параметр Tag visibility має три пункти: local – змінна, що передається, є локальною, тобто вона визначена тільки в тій підсистемі, де знаходиться блок Goto; Score – змінна, визначена у всіх підсистемах більш низького рівня, що пов'язані з даною підсистемою; Global – змінна є глобальною, тобто вона доступна у всіх підсистемах і в основній системі S-моделі. Для локальної змінної на позначенні блока застосовуються квадратні дужки (як у даному випадку), для параметра Score – фігурні, для глобальної змінної – без дужок.

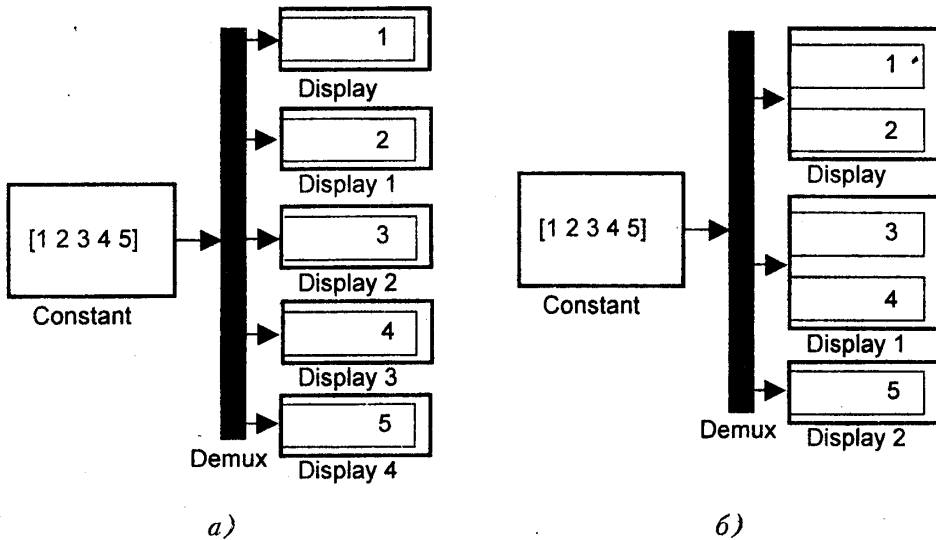


Рис. 3.21. Приклади застосування блока Demux

Приклад застосування блоків Goto та From наведено на рис. 3.22.

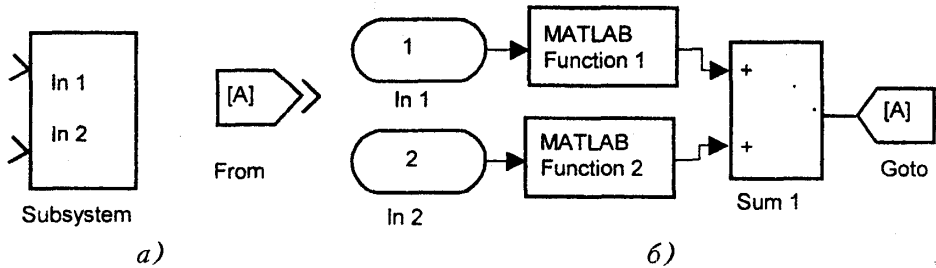
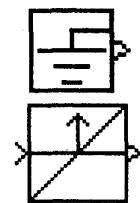
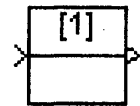


Рис. 3.22. Застосування блоків From та Goto для зв'язку основної системи (а) з підсистемою (б)

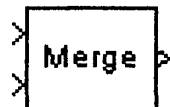


Ground – блок, який використовується для блокування вхідного порта.

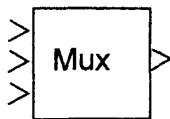
Hit Crossing – блок, який виявляє момент часу, при якому вхідний сигнал приймає певне значення. В даній ситуації на вході блока формується одиничний сигнал. Блок має три параметри регулювання: Hit crossing offset – задає певне значення вхідного сигналу; Hit crossing direction – вказує напрямок переходу вхідного сигналу через задане значення; Show output port – вказує формат використання блока.



IC – блок, який дозволяє встановлювати довільне початкове значення сигналу. Тривалість перебування системи в даному стані відповідає кроку моделювання.

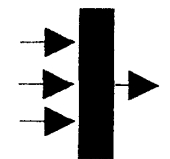


Merge – блок, який виконує об'єднання сигналів, що подаються на його входи, в один сигнал. Всі вхідні сигнали повинні мати одну розмірність.



Mux – модуль, який виконує об'єднання вхідних параметрів в один лінійний вектор. При цьому вхідні параметри можуть бути як скалярними, так і векторними. Блок Mux має один параметр регулювання – Number of inputs (число входів).

Призначення блока Mux протилежне функції розглянутого блока Demux.



Шляхом трансформації іконки блока він приводиться до більш простого вигляду. При цьому назва блока, як правило, не вказується. Така форма іконки використовується з метою спрощення блок-схеми моделі.

Наприклад, якщо на перший вхід блока подається матриця розміром  $2 \times 2$ , а саме:  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ , на другий вхід блока подається константа 5, на третій

вхід – константа 6, то вихідний вектор буде мати вигляд: [1 2 3 4 5 6]. Блок-схема моделі, що реалізує дану процедуру, показана на рис. 3.23.



Selector – модуль, який здійснює вибір відповідних компонент вхідного вектора і формування із них нового вихідного вектора. Блок має два параметри регулювання: Elements – список номерів компонент вхідного вектора, які потрібно відібрати; Input port width – розмірність вхідного вектора.

Розмірність вихідного вектора менша або дорівнює розмірності вхідного вектора.

Якщо на вхід блока Selector подається матриця, то використовується наскрізна нумерація її компонент по рядках. Приклад роботи блока ілюструється схемою, зображеною на рис. 3.24.

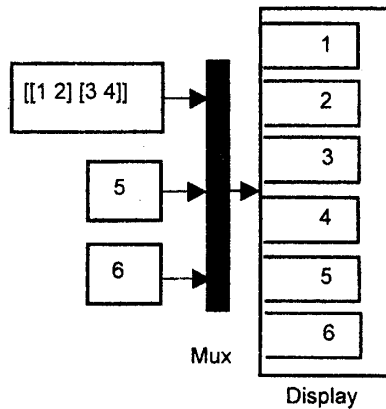


Рис. 3.23. Використання блока Mux для об'єднання одного матричного та двох скалярних входів в один векторний вихід

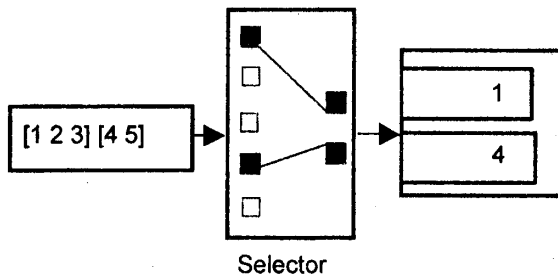
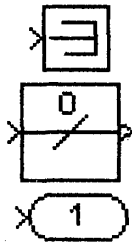


Рис. 3.24. Формування двовимірного вихідного вектора із входу у вигляді масиву

На вхід блока Selector подається масив, у першому рядку якого три елементи

[1 2 3], а у другому – два елементи [4 5]. На виході одержано двомірний вектор.



Terminator – модуль, який виключає вихідний порт.

Width – блок, призначений для знаходження розмірності сигналу. Знайдена розмірність виводиться на зображенні блока.

Out 1 – модуль (вихідний порт), призначений для виходу із підсистеми. Даний модуль має три параметри регулювання: Port number – встановлює порядковий номер вихідного порта; Output when disabled (значення на виході при забороненому стані) – використовується тоді, коли блок входить до підсистеми, що керується. Даний параметр відповідає двом пунктам: Held – на вихід подається сигнал, сформований при останньому спрацюванні підсистеми; Reset – на вихід подається сигнал, що відповідає початковому стану підсистеми. Третій параметр Initial Output встановлює початкове значення вихідного сигналу.

Приклад застосування модулів In та Out наведено на рис. 3.25.

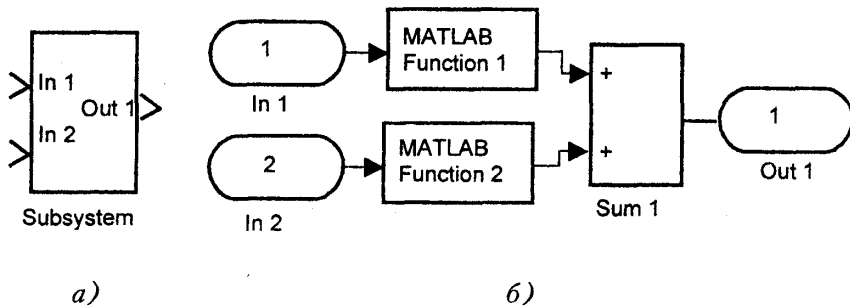


Рис. 3.25. Застосування модулів для зв'язку блока основної системи (а) із S-моделлю підсистеми (б)

Вхідні та вихідні блоки (порти) дозволяють зміну назви та коментарі.

У випадку наявності в S-моделі кілька вхідних (вихідних) блоків з однією назвою, вони нумеруються цифрами: 1, 2,... При цьому блок, який введено першочергово, немає номера.

### 3.2.8. Control System Toolbox, Stateflow та Simulink Extras – модулі зв'язку між системами, візуалізація процедури моделювання та модулі обробки сигналів

На рис. 3.26 наведено основні модулі розділів Control System Toolbox, Stateflow та Simulink Extras.

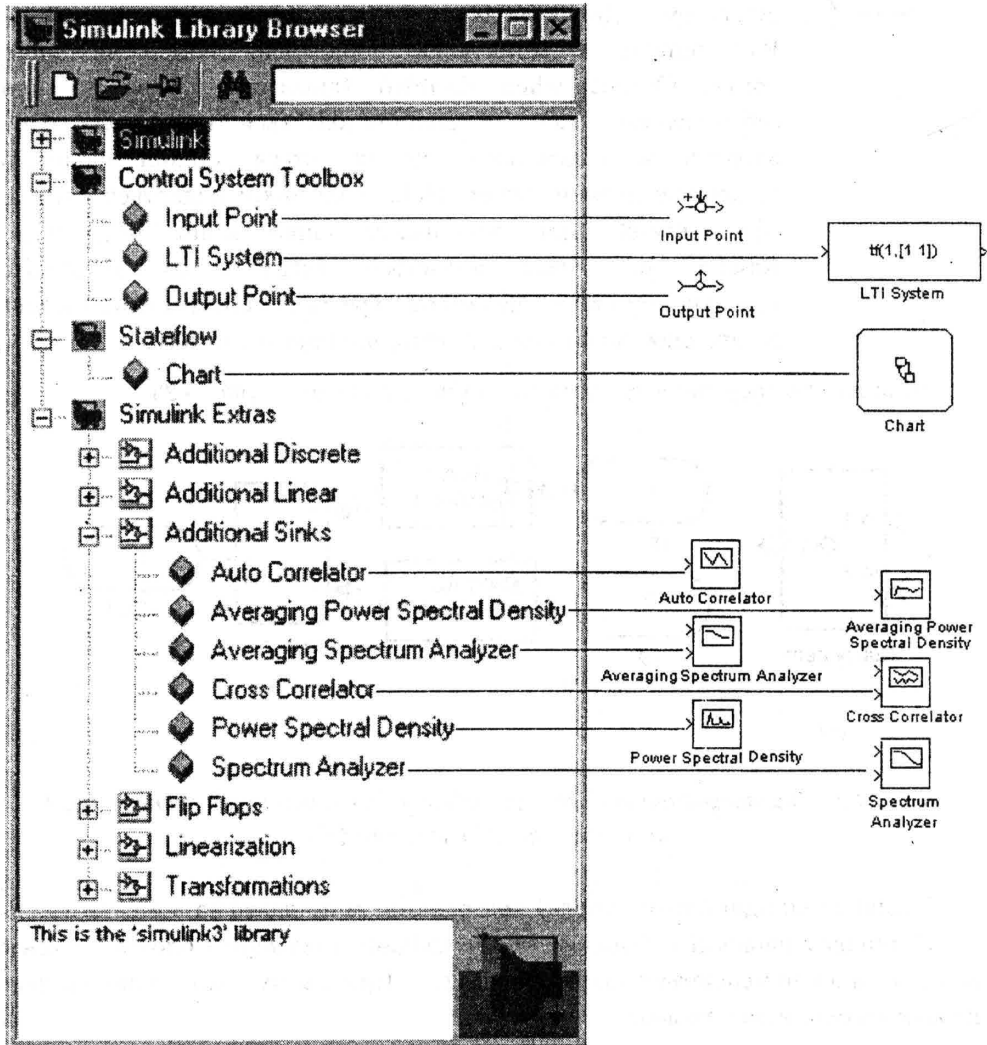


Рис. 3.26. Основні модулі розділів Control System Toolbox, Stateflow та Simulink Extras

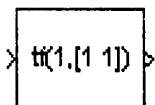
Розділи включають набір додаткових модулів, що дозволяють здійснити аналіз результатів моделювання. Найбільш характерні модулі наведені нижче.



Input Point – блок, призначений для формування входу системи.



Output Point – блок формування виходу системи.



LTI System – системний блок, який може описувати як неперервні, так і дискретні процеси. В даному блоці може бути задано довільну трансформуючу функцію.



Chart – блок формування заготовки діаграми Stateflow.



Auto Correlator – автокорелятор, що використовує графічне вікно. Потребує засобів для обробки сигналу.



Averaging Power Spectral Density – аналізатор спектра, що використовує графічне вікно.



Cross Correlator – блок визначення кореляції сигналів. Для своєї роботи потребує бібліотеку Signal Processing Toolbox.



Power Spectral Density – аналізатор спектра, який визначає спектральну щільність сигналів. Використовує графічне вікно.



Spectrum Analyzer – аналізатор спектра, що використовує графічне вікно. Має два входи, які підключаються відповідно до входу і виходу системи.

В математичному пакеті MATLAB версії 6.0 додаткові розділи бібліотеки SIMULINK значно розширені, в них наявний широкий набір засобів обробки сигналів, значну увагу приділено роботі з матрицями, реалізовані всі основні операції з ними.

## РОЗДІЛ 4

### Операції з векторами і матрицями в пакеті MathCAD

#### 4.1. Алгебраїчні операції з векторами і матрицями

При математичному моделюванні використовуються різноманітні векторні та матричні математичні об'єкти. Вони утворюють математичні моделі, пов'язані з обробкою елементів лінійного простору. Математичні моделі реалізуються використовуючи апарат лінійної алгебри та засоби математичних пакетів. Векторні та матричні математичні об'єкти мають свою специфіку визначення.

**Матриця** розміру  $m \times n$  – це **прямокутна таблиця**, яка складена з дійсних або комплексних функцій (дійсних або комплексних чисел), що є компонентами матриці. Прямокутна матриця має  **$m$  рядків та  $n$  стовпців**. Якщо кількість рядків дорівнює кількості стовпців, то матрицю називають квадратною матрицею порядку  $n$ . Компоненти (складові) матриці позначають  $a_{ij}$ , де індекс  $i$  – визначає номер рядка,  $j$  – номер стовпця.

Коли матриця має лише один рядок, її називають **матрицею-рядком** або **вектором-рядком**. Матрицю, що має лише один стовпець, називають **матрицею-стовпцем** або **вектором (вектором-стовпцем)**.

Матриці та вектори записують звичайно у табличному вигляді, як це показано нижче для прямокутної матриці  $A$ , **вектора-рядка**  $U$  та **вектора-стовпця**  $V$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad U = [u_{11} \quad u_{12} \quad u_{13} \quad \dots \quad u_{1n}]; \quad V = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \dots \\ v_{m1} \end{bmatrix}.$$

При математичному моделюванні використовуються окремі випадки матриць, частина елементів яких є нульовими.

**Діагональною матрицею** називається квадратна матриця, в якій відмінні від нуля лише елементи головної діагоналі. Для діагональної матриці:

$$a_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j, \quad a_{ij} \neq 0 \text{ при } i = j.$$

Окремим випадком діагональної матриці є **одинична матриця**, всі елементи якої, що знаходяться на головній діагоналі, дорівнюють одиниці:  $a_{ij} = 1$ .

**Верхньою трикутною** матрицею називають квадратну матрицю з нульовими компонентами знизу від головної діагоналі.

**Нижньою трикутною** матрицею називають квадратну матрицю з нульовими компонентами, розташованими вище від головної діагоналі.

**Стрічкова матриця** – це квадратна матриця, в якій ненульовими компонентами є компоненти головної діагоналі та сусідні з ними. Стрічкові

матриці розрізняють в залежності від кількості ненульових компонент, розміщених біля головної діагоналі. **Тридіагональна матриця** має три ненульових компоненти в кожному рядку.

Нижче наведені таблиці діагональної  $D$ , одиничної  $E$ , верхньої трикутної  $T$  та стрічкової тридіагональної  $C$  матриць:

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}; & E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}; \\
 T &= \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}; & C &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Квадратні матриці, компоненти яких розташовані симетрично відносно головної діагоналі, називаються **симетричними**. Відповідно діагональна та одинична матриця є симетричними.

Математичний пакет MathCAD різних версій включає ефективні засоби обробки математичних об'єктів у вигляді векторів і матриць. За допомогою них можна формувати матриці, виконувати алгебраїчні операції над векторами і матрицями, здійснювати графічну інтерпретацію векторних і матричних математичних об'єктів. Операції з векторами і матрицями здійснюються двома способами. По-перше, операції з матрицями виконуються аналогічно операціям із звичайними скалярними величинами, по-друге, наявні спеціальні засоби (вбудовані функції) здійснення операцій над векторами і матрицями.

В математичному пакеті MathCAD наявний широкий набір функцій та операцій для роботи з векторами і матрицями. В панелі математичних інструментів MathCad Pallete (рис. 4.1, *a*) наявна панель операцій з матрицями і векторами Matrix or vector (рис. 4.1, *b*).

**Формування матриці** або вектора необхідної конфігурації та розмірності здійснюється шляхом ініціалізації кнопки



на панелі роботи з матрицями (рис. 4.1, *b*). При цьому відкривається діалогове вікно (рис. 4.2, *a*).

В діалоговому вікні (рис. 4.2, *a*) задається число рядків матриці (Rows) та число стовпців (Columns). Після визначення цих параметрів на екрані з'являється заготовка матриці (рис. 4.2, *b*). Задаючи відповідну кількість рядків та стовпців формують прямокутні матриці довільної розмірності, в тому числі вектор-рядок, заготовка якого наведена на рис. 4.2, *в*, або вектор-стовпець (рис. 4.2, *г*). Коли заготовка виведена на екран, наприклад,



рис. 4.2, д), тоді на місце чорних квадратиків вводяться числові дані або символічні вирази (рис. 4.2, е). Це один із способів формування векторів і матриць. Існує ряд інших способів, які будуть розглянуті нижче.

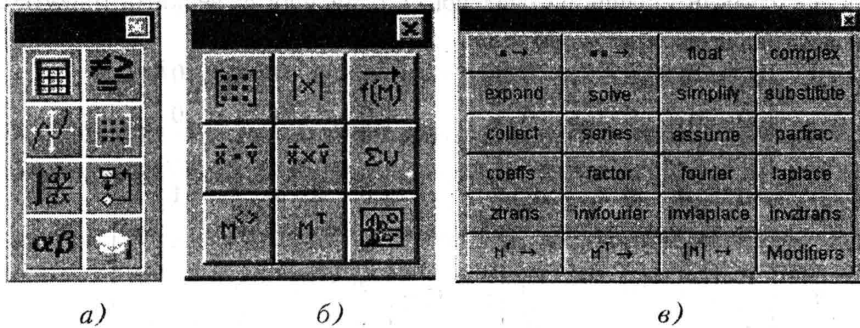


Рис. 4.1. Панель інструментів MathCAD Palette (а), панель роботи з матрицями та векторами Matrix or vector (б) та панель символічних операцій Symbolic Keyboard (в)

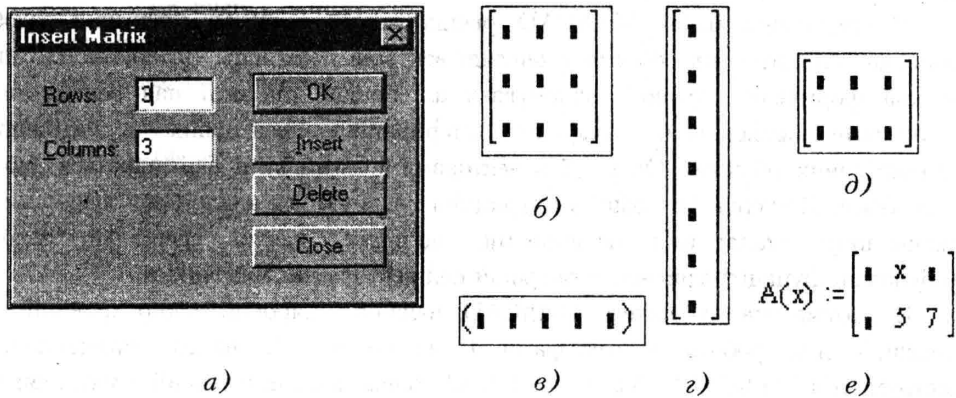


Рис. 4.2. Формування векторів та матриць необхідної конфігурації та розмірності: а – діалогове вікно; б – заготовка квадратної матриці; в, г – заготовки вектора-рядка та вектора-стовпця; д – заготовка прямокутної матриці; е – приклад формування символічної прямокутної матриці

Панель операцій з векторами і матрицями (див. рис. 4.1, б) дозволяє виконувати різноманітні операції лінійної алгебри. Визначник матриці або довжину вектора обчислюють за допомогою кнопки



При цьому довжина вектора з компонентами  $x_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ )

розраховується за формулою  $|x| = \sqrt{\sum_{i=0}^n x_i^2}$ . По-елементні операції з матрицями здійснюються шляхом ініціалізації кнопки



Якщо задано дві матриці  $A = \{a_{ij}\}$  та  $B = \{b_{ij}\}$ , то  $\overline{AB} = \{a_{ij}b_{ij}\}$ . Кнопка



служить для обчислення скалярного добутку двох векторів  $\vec{X}$  і  $\vec{Y}$ , а кнопка



для обчислення векторного добутку векторів. Обчислення суми компонент вектора  $V$  здійснюється шляхом ініціалізації кнопки



Нижче наведено фрагмент документа MathCAD, який ілюструє виконання вищевказаних операцій, а саме: формування двох числових векторів  $u$  і  $v$ , обчислення довжини кожного вектора, знаходження суми компонент векторів, визначення скалярного та векторного добутків векторів, а також поелементні операції з векторами:

$$\begin{aligned}
 v &:= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} & u &:= \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} & |v| &= 5,916 & |u| &= 4,583 & \sum u &= 7 \\
 u \cdot v &= 19 & v \times u &= \begin{bmatrix} -17 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix} & v(\vec{u})u &= \begin{bmatrix} 38 \\ 76 \\ 19 \end{bmatrix} & v(\vec{u}) &= 19.
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

Формування окремого вектора із стовпця матриці здійснюється за допомогою кнопки



Вона служить для виділення із матриці стовпця з номером  $j$ , що вказується в трикутних дужках. Кнопка



призначена для виконання операції транспонування матриці. Транспонування матриці полягає в заміні місцями рядків і стовпців при збереженні послідовності елементів в середині кожного рядка чи стовпця. Симетрична матриця співпадає з транспонованою.

Нижче наведений фрагмент документа MathCAD, який ілюструє виконання вищевказаних операцій, зокрема формування квадратної матриці та її транспонування, а також формування векторів із окремих стовпців

матриці. Нумерація стовпців здійснюється починаючи з першого стовпця, який має нульовий індекс.

$$\begin{aligned}
 A &:= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} & A^T &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
 A^{<0>} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} & A^{<1>} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} & A^{<2>} &= \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

В математичному пакеті є можливість візуалізації інформації, що відповідає компонентам вектора чи матриці. Для цього служить кнопка



на панелі роботи з матрицями (рис. 4.1, б). Ініціалізація даної кнопки призводить до появи на екрані графічної заготовки (рис. 4.3, а).

В чорний прямокутник заготовки необхідно помістити ім'я матриці чи вектора. При візуалізації матриця зображується у вигляді прямокутника. Затуюшована частина прямокутника відповідає компонентам матриці, які дорівнюють або перевищують значення -0,5.

Даний спосіб візуалізації не завжди є раціональним, оскільки числова інформація подається у спрощеному вигляді.

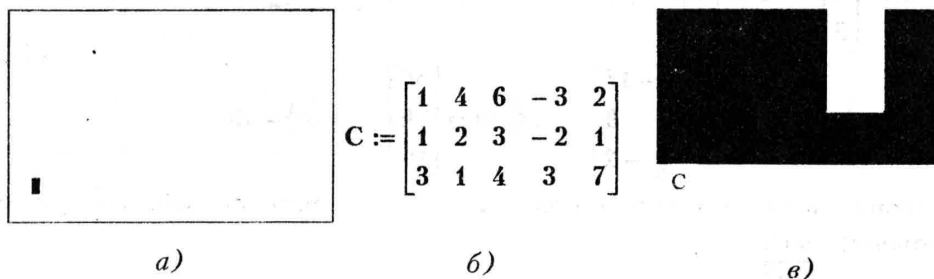



Рис. 4.3. Візуалізація матриці за допомогою засобів математичного пакету MathCAD: а – графічна заготовка; б – матриця, візуалізація якої здійснюється; в – результат візуалізації матриці

за допомогою кнопки 

Засоби пакету дозволяють здійснити більш ефективну візуалізацію числової інформації, наведеної в матриці. Це здійснюється за допомогою просторових графіків. На рис. 4.4 наведена візуалізація матриці С (рис. 4.3, б) за допомогою стовпчастих просторових діаграм.

Компоненти матриці зображуються у вигляді стовпців, висота яких визначає значення компоненти. Враховується знак компонентів матриці. За

допомогою меню просторового графіка можна змінювати величину перерізу елементів діаграми, а також просторове розташування графіка і масштаби. Можливе зображення матриці по окремих стовпцях (рис. 4.4, в). Візуалізація за допомогою просторових графіків дає геометричну інтерпретацію інформації, наведеної в матриці.

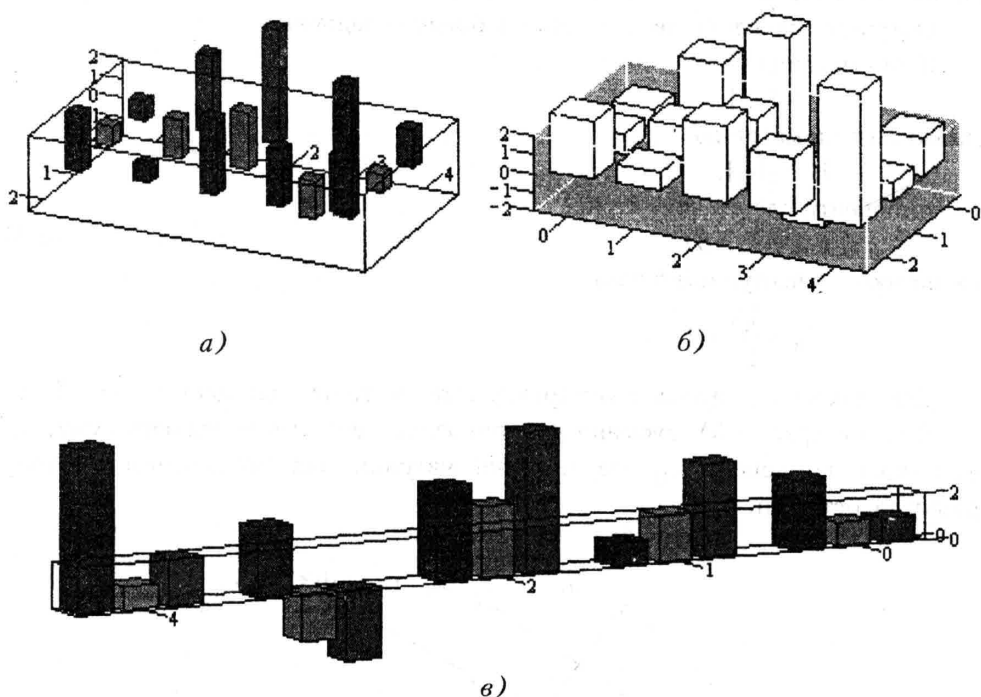


Рис. 4.4. Графічна інтерпретація числових даних із прямокутної матриці за допомогою тривимірної стовпчастої діаграми (3D Bar Chart):  
 а – матрична стовпчаста діаграма; б – варіант оформлення кольорової гами; в – зображення матриці по стовпцях

При математичному моделюванні використовуються різноманітні **операції з матрицями**. Це, зокрема, **порівняння матриць**.

Дві матриці

$$A = [a_{ij}] \text{ і } B = [b_{ij}]$$

однакового виду і розмірності вважаються рівними, коли рівні їх відповідні компоненти  $a_{ij} = b_{ij}$ .

**Сумою** двох чи більше матриць

$$A = [a_{ij}] \text{ і } B = [b_{ij}], \tag{4.4}$$

які мають однакову структуру (однакове число рядків і стовпців), вважається матриця

$$C = [c_{ij}],$$

компоненти якої  $c_{ij}$  є сумами відповідних компонент матриць-доданків, тобто

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

**Множення матриці**

$$A = [a_{ij}]$$

на число  $\alpha$  означає множення кожної компоненти матриці на це число.

Операція множення двох матриць є більш складною.

Якщо матриця

$$A = [a_{ij}]$$

множиться на матрицю

$$B = [b_{ij}],$$

то компоненти одержаної матриці

$$C (C = AB)$$

(4.5)

визначаються наступним чином:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Дане правило допускає геометричну інтерпретацію, наведену на рис. 5.11.

Лініями (рис. 4.5) показано добутки яких елементів складають суму, що відповідає компоненті  $c_{ij}$  результуючої матриці, яка знаходиться в  $i$ -тому рядку та  $j$ -стовпці.

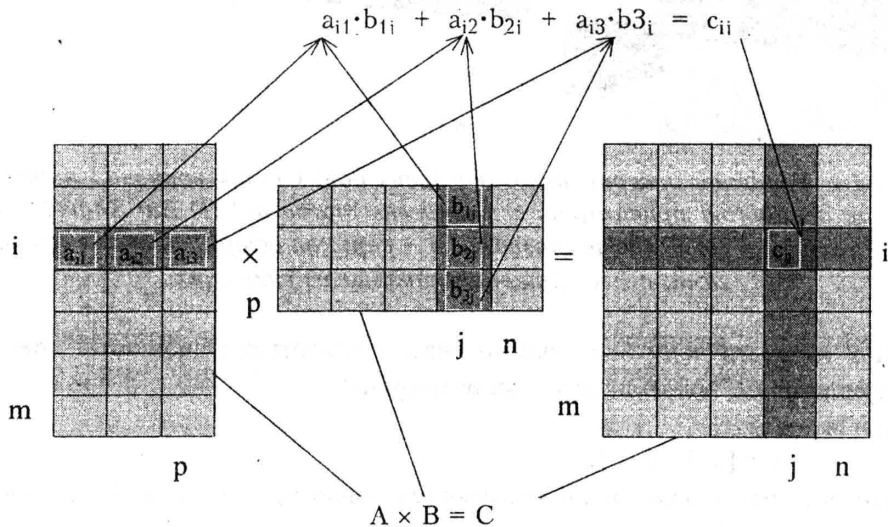


Рис. 4.5. Геометрична інтерпретація знаходження компоненти  $c_{ij}$  результуючої матриці  $C$  при множенні двох прямокутних матриць:  $A$  (розміром  $m \times p$ ) та  $B$  (розміром  $p \times n$ )

Добуток матриць визначено в загальному випадку для матриць різної розмірності. Єдиною умовою є те, що число стовпців  $p$  матриці  $A$  повинно дорівнювати числу рядків  $p$  матриці  $B$ . Тому допустимі операції множення матриці на вектор та множення вектора-рядка на вектор-стовпець. На рис. 4.6 наведена схема множення квадратної матриці  $M$  на вектор-стовпець  $V$  та множення вектора-рядка  $W$  на вектор-стовпець  $Q$ .

За допомогою засобів математичного пакету MathCAD виконуються всі операції з матрицями, які потрібні при моделюванні процесів та систем.

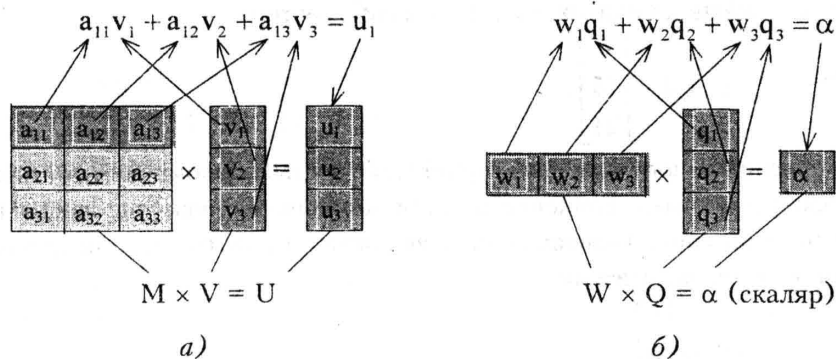


Рис. 4.6. Геометрична інтерпретація множення квадратної матриці  $M$  на вектор  $V$  (а) та множення вектора-рядка  $W$  на вектор-стовпець  $Q$  (б)

В математичному пакеті MathCAD можна виконувати різноманітні алгебраїчні операції з матрицями і векторами. Операції додавання, віднімання та множення здійснюються як операції зі звичайними скалярними величинами чи функціями. Результати множення двох матриць  $A$  і  $B$  та множення матриці  $A$  на вектор  $v$  наведені нижче:

$$A := \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad v := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A * B = \begin{bmatrix} 26 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 26 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 36 \end{bmatrix} \quad A * v = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 4 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Використовуючи множення матриць, можна здійснювати деякі додаткові операції обробки матриць, наприклад, знаходження суми елементів матриці по стовпцях або рядках. Для цього вводяться допоміжні вектори:

$$C1: = (1 \ 1 \ 1) \text{ та } C2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Тоді для матриці  $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$  суми по стовпцях знаходяться як

компоненти вектора:

$$C1 \cdot A = [12 \ 15 \ 18],$$

а суми елементів по рядках – як компоненти вектора:

$$A \cdot C2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{bmatrix}.$$

Виділення одного стовпця матриці здійснюється допоміжним вектором C3. Він має всі нульові компоненти, крім компоненти, яка відповідає номеру виділеного стовпця. Відповідно для виділення третього стовпця допоміжний вектор буде визначатися як:

$$C3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

а третій стовпець буде виділений множенням матриці A на вектор C3:

$$A \cdot C3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Виділення одного рядка матриці здійснюється допоміжним вектором:

C4: = (1 0 0) – для першого рядка;

C5: = (0 1 0) – для другого рядка;

C6: = (0 0 1) – для третього рядка.

Відповідно перший рядок матриці буде результатом добутку C4 на матрицю A, тобто

$$C4 \cdot A = [1 \ 2 \ 3].$$

Використовуючи допоміжні матриці, можна переставляти рядки і стовпці, наприклад, перестановка першого та другого рядків матриці A здійснюється наступною процедурою MathCAD:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Перестановка другого та третього рядків матриці A здійснюється наступним чином:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Аналогічно можна переставити стовпці матриці. Перестановка першого та другого стовпців матриці  $A$  виконується наступним чином:

$$A * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Перестановка другого та третього стовпців матриці  $A$  має вигляд:

$$A * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

Всі вищезазвані операції лінійної алгебри можна виконувати з матрицями, які мають як дійсні, так і **комплексні** числові компоненти. Матриця із комплексними складовими включає уявну одиницю  $i = \sqrt{-1}$ . Нижче наведено приклад реалізації в пакеті MathCAD визначення числової матриці з комплексними складовими, транспонування цієї матриці, виділення першого стовпця з матриці та знаходження визначника комплексної числової матриці, який відповідно є комплексним числом.

$$A := \begin{bmatrix} 5+i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2i & 0 \\ 0 & i & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 5+i & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & i & 0 \\ 0 & 2i & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix};$$

$$A^{<0>} = \begin{bmatrix} 5+1i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |A| = 684 + 132i.$$

Всі наявні **операції з комплексними матрицями** не відрізняються від операцій з дійсними числовими матрицями.

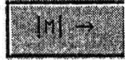
Засоби математичних пакетів також дозволяють здійснювати операції з матрицями, компоненти яких задані у **символьному вигляді**, тобто є функціями. Матриці, компоненти якої залежать від одного аргументу  $x$  або кількох аргументів, є функціями відповідно одного або декількох аргументів.

**Операції з символьними матрицями** виконуються з використанням панелі символьних операцій Symbolic Keyboard. Панель символьних операцій включає процедури для роботи з символьними матрицями. Процедура транспонування (Transpose) здійснюється за допомогою кнопки





обчислення визначника (Determinant) символічної матриці – з використанням кнопки



Дані процедури можуть бути застосовані як для символічних, так і для числових матриць з дійсними або комплексними компонентами.

Нижче наведено приклад реалізації в пакеті MathCAD визначення символічної матриці, компоненти якої залежать від одного аргументу  $x$ , знаходження транспонованої символічної матриці, визначення стовпців символічної матриці та обчислення визначника матриці у символічному вигляді.

$$A(x) := \begin{bmatrix} x & x & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A(x)^T \rightarrow \begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A(x)^{\langle 0 \rangle} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A(x)^{\langle 1 \rangle} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A(x)^{\langle 2 \rangle} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A(x)^{\langle 3 \rangle} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|A(x)| \rightarrow -6 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 3.$$

Якщо визначник квадратної матриці дорівнює нулю, то матриця називається **сингулярною (виродженою)**. Всі прямокутні матриці є сингулярними.

Для несингулярної матриці  $A$  існує **обернена матриця**  $A^{-1}$ , яка задовольняє матричним рівностям:

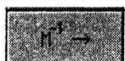
$$A * A^{-1} = A^{-1} * A = E, \quad (4.6)$$

де  $E$  – одинична матриця.

Обернена матриця добутку дорівнює добутку обернених матриць, записаних у зворотному порядку, наприклад:

$$(A * B * C) = C^{-1} * B^{-1} * A^{-1}. \quad (4.7)$$

В пакеті MathCAD знаходження **оберненої матриці (Invert)** здійснюється за допомогою кнопки



Нижче наведено фрагмент документа MathCad, де виконано знаходження символної оберненої матриці. Обернена матриця існує, оскільки визначник матриці  $A$  не дорівнює нулю ( $\det(A(x)) \neq 0$ ):

$$A(x) := \begin{bmatrix} x & x & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A(x)^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \cdot \frac{(-7+5 \cdot x)}{(-2 \cdot x+x^2+1)} & \frac{2}{3} \cdot \frac{(x-2)}{(-2 \cdot x+x^2+1)} & \frac{1}{3} \cdot \frac{(x^2-5 \cdot x+6)}{(-2 \cdot x+x^2+1)} & \frac{-1}{3} \cdot \frac{(3 \cdot x^2-4 \cdot x-1)}{(-2 \cdot x+x^2+1)} \\ \frac{-2}{3} \cdot \frac{1}{(-1+x)} & \frac{-2}{3} \cdot \frac{1}{(-1+x)} & \frac{1}{3} \cdot \frac{(x-3)}{(-1+x)} & \frac{1}{3} \cdot \frac{(3 \cdot x-1)}{(-1+x)} \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(-2 \cdot x+x^2+1)} & \frac{1}{3} \cdot \frac{(3 \cdot x-1)}{(-2 \cdot x+x^2+1)} & \frac{-2}{3} \cdot \frac{x}{(-2 \cdot x+x^2+1)} & \frac{-1}{3} \cdot \frac{(3 \cdot x-1)}{(-2 \cdot x+x^2+1)} \\ \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{(-1+x)} & \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{(-1+x)} & \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{(-1+x)} & \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(-1+x)} \end{bmatrix}$$

Всі операції з символними матрицями виконуються також для комплексних складових компонент матриці. Наведений нижче фрагмент документа MathCAD ілюструє операції з комплексними символними матрицями, зокрема визначення символної матриці з комплексними складовими, операції транспонування матриці, знаходження визначника та оберненої матриці:

$$A(x) := \begin{bmatrix} 4+i & x \cdot i & 7 \\ 1 & x & 1 \\ 2+x & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad A(x)^T \rightarrow \begin{bmatrix} 4+i & 1 & 2+x \\ i \cdot x & x & 3 \\ 7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A(x)| \rightarrow 6x + 9 + 2ix - 3i + ix^2 - 7x^2$$

$$A(x)^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{(5x-3)}{(6x+9+2ix-3i+ix^2-7x^2)} & \frac{-(5ix-21)}{(6x+9+2ix-3i+ix^2-7x^2)} & \frac{x(-7+i)}{(6x+9+2ix-3i+ix^2-7x^2)} \\ \frac{(x-3)}{(6x+9+2ix-3i+ix^2-7x^2)} & \frac{-(-6-5i+7x)}{(6x+9+2ix-3i+ix^2-7x^2)} & \frac{(3-1i)}{(6x+9+2ix-3i+ix^2-7x^2)} \\ \frac{-(2x-3+ix^2)}{(6x+9+2ix-3i+ix^2-7x^2)} & \frac{(-12-3i+2ix+ix^2)}{(6x+9+2ix-3i+ix^2-7x^2)} & \frac{4x}{(6x+9+2ix-3i+ix^2-7x^2)} \end{bmatrix}$$

Для символних матриць з комплексними складовими також застосовується **візуалізація**. Звичайно символна матриця перед візуалізацією трансформується в числову матрицю шляхом підстановки значення аргументу. При візуалізації загашовані прямокутники відповідають елементам матриці, дійсні частини яких більші -0,5. Нижче наведено фрагмент документа MathCAD, що здійснює візуалізацію символної матриці  $A(x)$  з

комплексними складовими.

Для матриці з комплексними складовими може бути окремо виконана візуалізація дійсних та уявних складових компонент матриці. При цьому формуються допоміжні матриці дійсних та уявних складових компонент. Далі здійснюється візуалізація одержаних допоміжних матриць. Нижче (рис. 4.8) наведено фрагмент документа MathCAD, що здійснює дані операції стосовно матриці  $A(x)$ , наведеної на рис. 4.7 (при  $x = -3$ ).

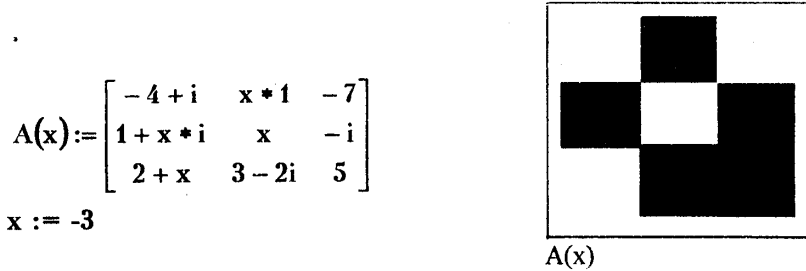


Рис. 4.7. Візуалізація символічної матриці з комплексними складовими для значення аргументу  $x = -3$

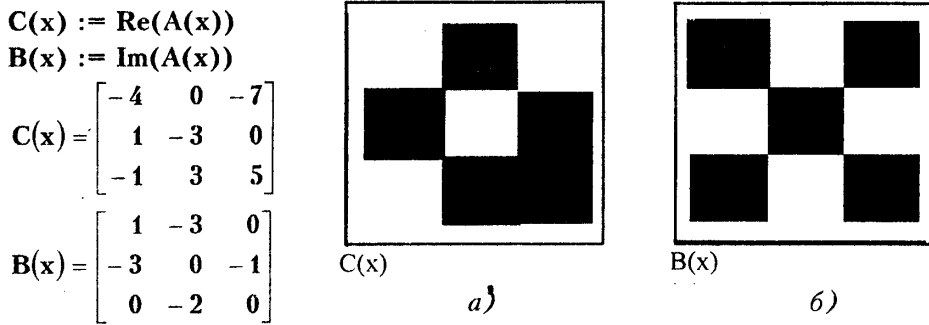


Рис. 4.8. Візуалізація матриць дійсних  $C(x)$  та уявних  $B(x)$  складових компонент матриці  $A(x)$  з комплексними складовими: а – візуалізація матриці дійсних складових; б – візуалізація матриці уявних складових

Із порівняння рис. 4.7 і рис. 4.8, а випливає, що результати візуалізації матриці з комплексними складовими співпадають з візуалізацією дійсних складових компонент матриці.

Разом з плоскою візуалізацією використовується також об'ємна візуалізація дійсних чи уявних складових компонент матриці за допомогою просторових стовпчастих діаграм. Вона здійснюється так, як показано раніше (див. рис. 5.10).

Практично важливим випадком квадратної матриці є **ортогональна**

матриця:

$$Q = [q_{ij}].$$

Для неї транспонована матриця співпадає із оберненою, при цьому:

$$Q^T = Q^{-1}. \quad (4.8)$$

Для ортогональної матриці:

$$Q * Q^T = Q^T * Q = Q^{-1} * Q = Q * Q^{-1} = E,$$

де  $E$  – одинична матриця.

Ортогональна матриця має ряд особливих **властивостей**.

Визначник ортогональної матриці дорівнює одиниці:

$$|Q| = 1.$$

Сума квадратів елементів стовпця або рядка дорівнює одиниці, тобто

$$\sum_{i=1}^n q_{ij}^2 = \sum_{j=1}^n q_{ij}^2 = 1.$$

Сума добутоків елементів двох стовпців  $j$  та  $k$ :

$$\sum_{i=1}^n q_{ij}q_{ik} = 0. \quad (4.9)$$

Теж саме маємо для суми добутоків елементів двох рядків  $i$  та  $m$ :

$$\sum_{j=1}^n q_{ij}q_{mj} = 0. \quad (4.10)$$

Прикладом символної ортогональної матриці є наступна матриця  $A$ :

$$A(x) := \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}.$$

Визначник цієї матриці дорівнює одиниці, а її транспонована матриця співпадає з оберненою. Це підтверджується наступними символними обчисленнями в пакеті MathCAD:

$$|A(x)| \rightarrow 1 \quad A(x)^T \rightarrow \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$$

$$A(x)^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}.$$

Символьними ортогональними матрицями є наступні:

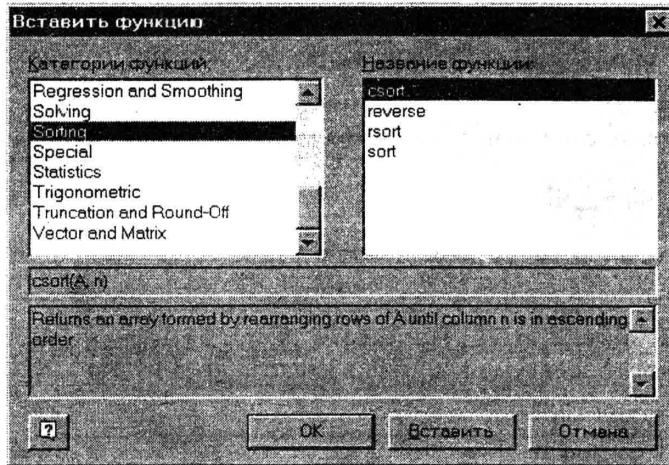
$$A1 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad A2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix};$$

$$A3 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

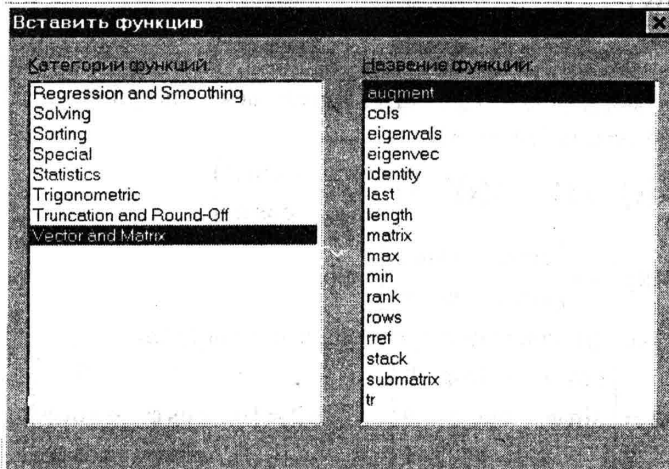
Дані ортогональні матриці використовуються в операціях перетворення систем координат шляхом повороту осей [1].

## 4.2. Вбудовані функції пакету MathCAD для роботи з матрицями та векторами

Вбудовані функції пакету MathCAD для роботи з матрицями та векторами дозволяють здійснювати різноманітні операції над векторами і матрицями. Вбудовані функції MathCAD виводяться за допомогою меню (рис. 5.15).



a)



б)

Рис. 4.9. Меню вбудованих функцій, в яких розташовані функції для здійснення операцій з векторами та матрицями: а – група вбудованих функцій сортування; б – основні вбудовані функції для роботи з матрицями пакету MathCAD 8

Вбудовані функції поділяються на три групи:

- функції формування матриць та операцій з блоками матриць;
- функції обчислення різних числових характеристик матриць;
- функції, що реалізують різноманітні чисельні та символічні алгоритми рішення задач лінійної алгебри.

Розглянемо **функції формування матриць та операцій з блоками матриць** і функції обчислення різних числових характеристик матриць. Дані групи функцій включають, зокрема наступні функції:

**matrix(m, n, f)** – формує та заповнює матрицю розміром  $m \times n$ , причому елемент, розташований в  $i$ -му рядку,  $j$ -му стовпці дорівнює значенню  $f(i, j)$  функції  $f(x, y)$ . Дана функція особливо ефективна, коли матриця має велику розмірність. Нижче наведено фрагмент документа MathCAD, що здійснює формування матриці розмірності  $7 \times 20$ :

$$f(x, y) = 1 + x^2 + y$$

matrix(7, 20, f) =

:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
4	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
5	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
6	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48

**diag(v)** – формує діагональну матрицю, елементи головної діагоналі якої знаходяться у векторі  $v$ . Фрагмент документа MathCAD, який ілюструє застосування даної функції, має вигляд:

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad i := 1..4 \quad v_i = i + 2$$

$$B := \text{diag}(v) \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

**identity(n)** – створює одиничну матрицю порядку  $n$ ;

**augment(A,B)** – формує матрицю, в перших стовпчиках якої записується матриця  $A$ , а в останніх – матриця  $B$  (матриці  $A$  і  $B$  повинні мати однакове число рядків);

**stack(A,B)** – формує матрицю, в перших рядках якої записується матриця  $A$ , а в останніх – матриця  $B$  (матриці  $A$  і  $B$  повинні мати однакове число стовпців);

**submatrix(A, ir, jr, ic, jc)** – формує матрицю, яка є блоком матриці  $A$ , розташованим у рядках з  $ir$  по  $jr$  і в стовпцях з  $ic$  по  $jc$  ( $ir \leq jr$ ,  $ic \leq jc$ ).

Приклади застосування вбудованих функцій **identity(n)**, **augment(A,B)**, **stack(A,B)** та **submatrix(A, ir, jr, ic, jc)** для формування матриць наведено в

наступному фрагменті документа MathCAD:

$$\text{identity}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{augment}(A, B) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad C := \text{stack}(A, B)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{submatrix}(C, 2, 5, 0, 1) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Вищенаведені вбудовані функції дозволяють проводити операції як з матрицями, так і з векторами, наприклад, операції з вектором  $v$ :

$$v := \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \text{stack}(v, v) = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \text{augment}(v, v) = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 7 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{submatrix}(v, 1, 2, 0, 0) = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

**Функції обчислення різноманітних числових характеристик** матриць включають, зокрема, наступні функції:

- last(v)** – обчислює номер останньої компоненти вектора  $v$ ;
- length(v)** – обчислює кількість компонент вектора  $v$ ;
- rows(A)** – знаходить число рядків матриці  $A$ ;
- cols(A)** – знаходить число стовпців матриці  $A$ ;
- max(A)** – знаходить найбільший елемент в матриці  $A$ ;
- tr(A)** – обчислює слід (суму діагональних елементів) матриці  $A$ ;
- rank(A)** – обчислює ранг матриці  $A$ .

Приклади застосування даних вбудованих функцій наведено нижче:

$$v := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{last}(v) = 3 \quad \text{length}(v) = 4$$

$$A := \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{rows}(A) = 4 \quad \max(A) = 6$$

$$\text{cols}(A) = 4 \quad \text{tr}(A) = 20 \quad \text{rank}(A) = 4.$$

В пакеті наявні вбудовані функції для обчислення узагальнених характеристик матриці так званих норм:

**norm1(A)**, **norm2(A)**, **normc(A)**, **normi(A)** – функції обчислення норм квадратної матриці **A**. Дані функції обчислюють наступні норми для векторів-стовпців чи рядків **x**, що утворюють матрицю:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|; \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}; \quad \|x\|_\infty = \max_i |x_i|, \quad (4.11)$$

де  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Важливою властивістю всіх цих норм є те, що коли послідовність векторів по одній з цих норм наближається до нуля, то і по інших нормах вона також прямує до нуля. Якщо для векторів

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

введена деяка норма  $\|x\|$ , то узгодженою з нею нормою матриць називають величину (sup означає найбільше із значень):

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \quad (4.12)$$

Так, для норми  $\|x\|_1$  узгоджена з нею норма матриці дорівнює:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad (4.13)$$

а для норми  $\|x\|_\infty$ :

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \quad (4.14)$$

Для норми  $\|x\|_2$  узгоджена з нею норма матриці має вигляд:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(AA^T)}, \quad (4.15)$$

де  $\lambda_{\max}(AA^T)$  – максимальне власне значення матриці  $AA^T$ .

Використовують також так звану евклідову норму матриці

$$\|A\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}. \quad (4.16)$$

При цьому справедлива нерівність  $\|A\|_2 \leq \|A\|_e$ .

Обчислення норм матриці здійснюється вбудованими функціями **norm1(A)**, **norm2(A)**, **normi(A)**, **normc(A)**.





або

$$Ax = b,$$

де матриця коефіцієнтів  $A$ , вектор невідомих  $x$  та вектор правих частин  $b$  дані у вигляді:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Розв'язком даної системи є сукупність значень  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , які обертають рівняння системи в тотожності.

Прямий хід методу Гауса здійснює приведення розширеної матриці системи  $R$  до трикутного вигляду  $T$ , а зворотній хід метода Гауса здійснює перетворення матриці  $T$  в матрицю  $F$ , як це схематично показано нижче:

$$R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \rightarrow T = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d_n \end{bmatrix} \rightarrow F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_n \end{bmatrix}.$$

В результаті останній стовпець матриці  $F$  буде являти собою вектор розв'язку системи рівнянь. Фрагмент документа MathCAD, який включає приклад розв'язку лінійної системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \quad (4.18)$$

за допомогою функції  $\text{rref}(A)$ , наведено нижче:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Ar := \text{augment}(A, b) \quad \text{rref}(Ar) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Таким чином, розв'язок системи рівнянь (5.38):

$$Ax = b$$

одержано як останній стовпець матриці  $\text{rref}(Ar)$ , а саме:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2.$$

Ряд вбудованих функцій математичного пакету призначений для обчис-

лення власних векторів та власних значень матриці, зокрема:

$\mathbf{eigenvals(A)}$  – здійснює обчислення вектора власних значень  $\mathbf{I}$  числової чи символічної квадратної матриці  $\mathbf{A}$ ;

$\mathbf{eigenvec(A, I_k)}$  – обчислює власний вектор матриці  $\mathbf{A}$ , що відповідає власному значенню  $\mathbf{I_k}$ ;

$\mathbf{eigenvecs(A)}$  – знаходить набір власних векторів квадратної матриці  $\mathbf{A}$ , причому порядок розташування власних векторів відповідає порядку власних значень, обчислених функцією  $\mathbf{eigenvals(A)}$ .

Функція  $\mathbf{eigenvecs(A)}$  обчислює модальну матрицю  $[\mu]$  для матриці  $\mathbf{A}$ . Модальна матриця переводить матрицю  $\mathbf{A}$  в діагональну форму шляхом перетворення:

$$[\mu]^{-1} \mathbf{A} [\mu] = \Lambda, \quad (4.19)$$

де  $\Lambda$  – діагональна матриця, яка включає власні значення матриці  $\mathbf{A}$  як компоненти головної діагоналі.

Модальна матриця дозволяє знайти матрицю  $\mathbf{A}$  за власними значеннями згідно з формулою:

$$[\mu] \Lambda [\mu]^{-1} = \mathbf{A}. \quad (4.20)$$

Модальна матриця визначена з точністю до множника. Цей множник має вигляд довільної діагональної матриці.

Фрагмент документа MathCAD, що включає приклади застосування вищеназаних вбудованих функцій, наведено нижче:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{eigenvals(B)} = \begin{bmatrix} 8.312 \\ -2.12 \\ -1.192 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{eigenvecs(B)} = \begin{bmatrix} 0.467 & -0.643 & -0.492 \\ 0.87 & 0.764 & 0.825 \\ 0.161 & -0.057 & -0.279 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{eigenvec(B, 8.312)} = \begin{bmatrix} -0.467 \\ -0.87 \\ -0.161 \end{bmatrix} \quad \mathbf{eigenvec(B, -2.12)} = \begin{bmatrix} -0.643 \\ 0.764 \\ -0.057 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{eigenvec(B, -1.192)} = \begin{bmatrix} 0.492 \\ -0.825 \\ 0.279 \end{bmatrix}$$

На рис. 4.11 показана графічна інтерпретація знайдених власних векторів матриці  $\mathbf{B}$  та обчисленої модальної матриці. Модальна матриця з точністю до знаків відповідає власним векторам.



$$Ax = b,$$

де  $A$  – матриця коефіцієнтів;  $b$  – вектор правих частин рівнянь;  $x$  – вектор значень розв’язків.

Приклад застосування даної функції для знаходження коренів системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 7 \\ 5x_1 + x_2 + 0x_3 = 1 \end{cases}$$

та перевірка правильності знайденого розв’язку наведені нижче:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{lsolve}(A, b) = \begin{bmatrix} -0.145 \\ 1.727 \\ 0.382 \end{bmatrix}$$

$$x := \text{lsolve}(A, b) \quad A * x = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

На рис. 4.12 наведена графічна інтерпретація матрично-векторної форми запису даної системи трьох лінійних алгебраїчних рівнянь та її розв’язку.

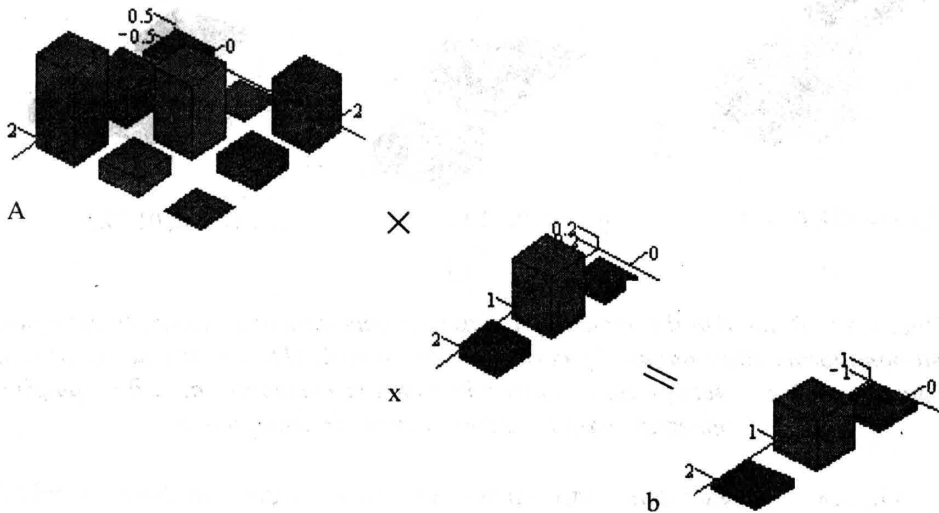


Рис. 4.12. Графічна інтерпретація матрично-векторної форми запису системи лінійних рівнянь та знайденого розв’язку системи

Корені рівняння одержані у вигляді вектора  $X = (-0.145 \quad 1.727 \quad 0.382)^T$ .

В пакеті MathCAD наявний ряд спеціальних вбудованих функцій, які здійснюють розклад матриці на матриці спеціального вигляду (трикутного тощо):

$\text{svd}(\mathbf{A})$  – здійснює сингулярний розклад матриці  $\mathbf{A}$  розміром  $n \times m$ :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T,$$

де  $\mathbf{U}$  і  $\mathbf{V}$  – ортогональні матриці розміром  $m \times m$  і  $n \times n$  відповідно;

$\mathbf{S}$  – діагональна матриця, на діагоналі якої знаходяться сингулярні числа матриці  $\mathbf{A}$ ;

$\text{svds}(\mathbf{A})$  – вектор, який включає сингулярні числа прямокутної матриці  $\mathbf{A}$ , яка має розмірність  $n \times m$ , де  $n \geq m$ .

Приклад сингулярного розкладу та знаходження сингулярних чисел матриці наведено в наступному фрагменті документа MathCAD:

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{svds}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 7.131 \\ 3.686 \\ 0.748 \end{bmatrix}$$

$$\text{svd}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} -0.442 & -0.26 & 0.083 \\ -0.467 & 0.853 & 0.227 \\ -0.719 & -0.441 & -0.28 \\ -0.294 & 0.099 & 0.929 \\ -0.326 & -0.079 & -0.942 \\ -0.895 & -0.294 & 0.335 \\ -0.303 & 0.953 & 0.026 \end{bmatrix}$$

Графічна інтерпретація сингулярного розкладу прямокутної матриці  $\mathbf{A}$  наведена на рис. 4.13;

$\text{lu}(\mathbf{M})$  – здійснює трикутний розклад матриці  $\mathbf{M}$ , який задовольняє матричній рівності:

$$\mathbf{P}\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{U},$$

де  $\mathbf{L}$  і  $\mathbf{U}$  – нижня та верхня трикутні матриці. Всі чотири матриці квадратні, одного порядку.

Схема знаходження трикутного розкладу конкретної числової матриці  $\mathbf{M}$  ілюструється наступним фрагментом документа MathCAD:

$$\mathbf{M} := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{lu}(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Складові розкладу матриці знаходяться як блоки матриці  $\text{lu}(\mathbf{M})$ :

$$\mathbf{P} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

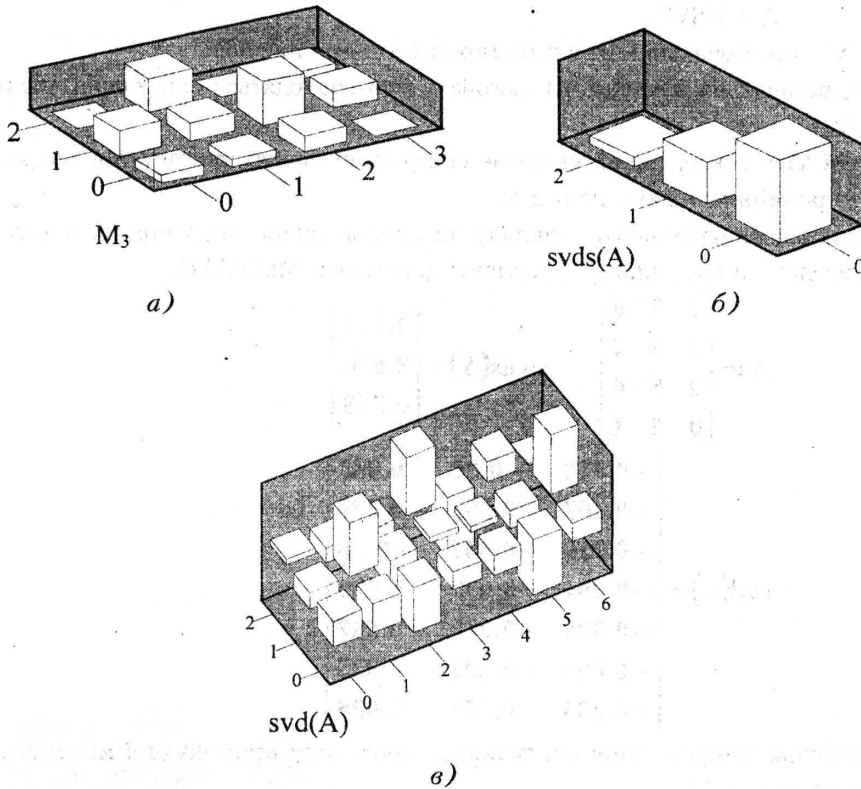


Рис. 4.13. Результати візуалізації прямокутної матриці  $A$  (а), графічні зображення сингулярних чисел даної матриці (б) та її сингулярний розклад (в)

Для перевірки правильності розкладу знайдемо праву та ліву частини рівності.

Обидві частини рівності  $PM = LU$  однакові:

$$P * M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad L * U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Графічна інтерпретація одержаного трикутного розкладу матриці наведена на рис. 4.14;

**holesky(M)** – здійснює трикутний розклад матриці  $M$  методом Холецького. Матриця  $M$  повинна бути симетричною та додатно визначеною. Її розклад має вигляд:

$$M = LL^T,$$

де  $L$  – трикутна матриця.

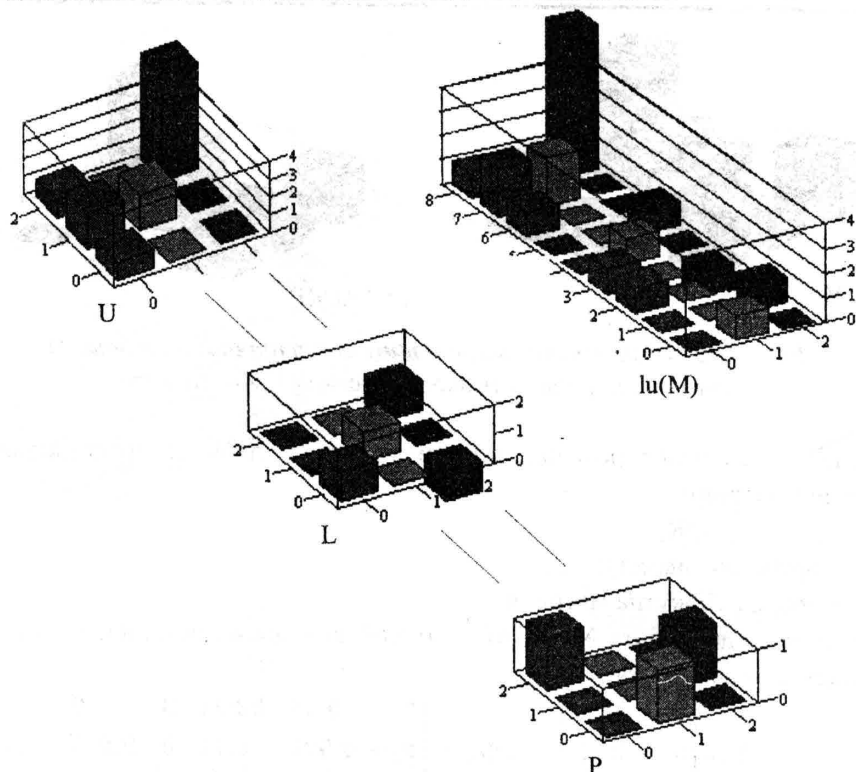


Рис. 4.14. Графічне зображення одержаного трикутного розкладу  $lu(M)$  квадратної матриці  $M$  та складові трикутного розкладу у вигляді квадратних матриць  $P$ ,  $L$ ,  $U$ , де  $L$  і  $U$  – нижня та верхня трикутні матриці

В результаті розрахунків повертається матриця  $L$ .

Реалізація розкладу матриці методом Холецького та перевірка розкладу засобами пакету MathCAD наведені нижче:

$$M := \begin{bmatrix} 14 & -4 & 7 \\ -4 & 10 & 2 \\ 7 & 2 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{cholesky}(M) = \begin{bmatrix} 3.742 & 0 & 0 \\ -1.069 & 2.976 & 0 \\ 1.871 & 1.344 & 2.587 \end{bmatrix}$$

$$L := \text{cholesky}(M)$$

$$L * L^T = \begin{bmatrix} 14 & -4 & 7 \\ -4 & 10 & 2 \\ 7 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

Графічна інтерпретація розкладу симетричної матриці  $M$  методом Холецького наведена на рис. 4.15.



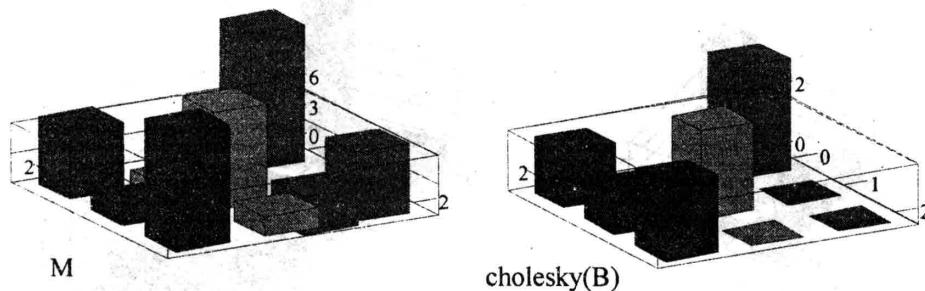


Рис. 4.15. Результати візуалізації симетричної матриці  $M$  та її трикутного розкладу методом Холецкого

$qr(A)$  – здійснює розклад матриці у вигляді добутку ортогональної та трикутної матриці:

$$A = QR,$$

де  $Q$  – ортогональна матриця;

$R$  – верхня трикутна матриця.

Фрагмент документа MathCAD, що здійснює даний розклад, та перевірка розкладу наведені нижче:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad qr(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0.11 & 0.994 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -0.994 & 0.11 & 0 & 9.055 & -1.988 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.221 \end{bmatrix}$$

$$Q := \begin{bmatrix} 0 & 0.11 & 0.994 \\ 0 & -0.994 & 0.11 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 9.055 & -1.988 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$QR = \begin{bmatrix} 0 & 0.996 & 9.994 \cdot 10^{-4} \\ 0 & -9.001 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Одержаний добуток  $QR$  дає матрицю, що відповідає вихідній матриці  $A$ . Матриця  $Q$  є ортогональною, тобто її детермінант дорівнює одиниці, а транспонована матриця дорівнює оберненій, що і підтверджується наведеним нижче фрагментом документа MathCAD:

$$|Q| \rightarrow 1.0 \quad Q^T \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.11 & -0.994 & 0 \\ 0.994 & 0.11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.11 & -0.994 & 0 \\ 0.994 & 0.11 & 0 \end{bmatrix}$$

На рис. 4.16 наведена графічна інтерпретація даного розкладу.

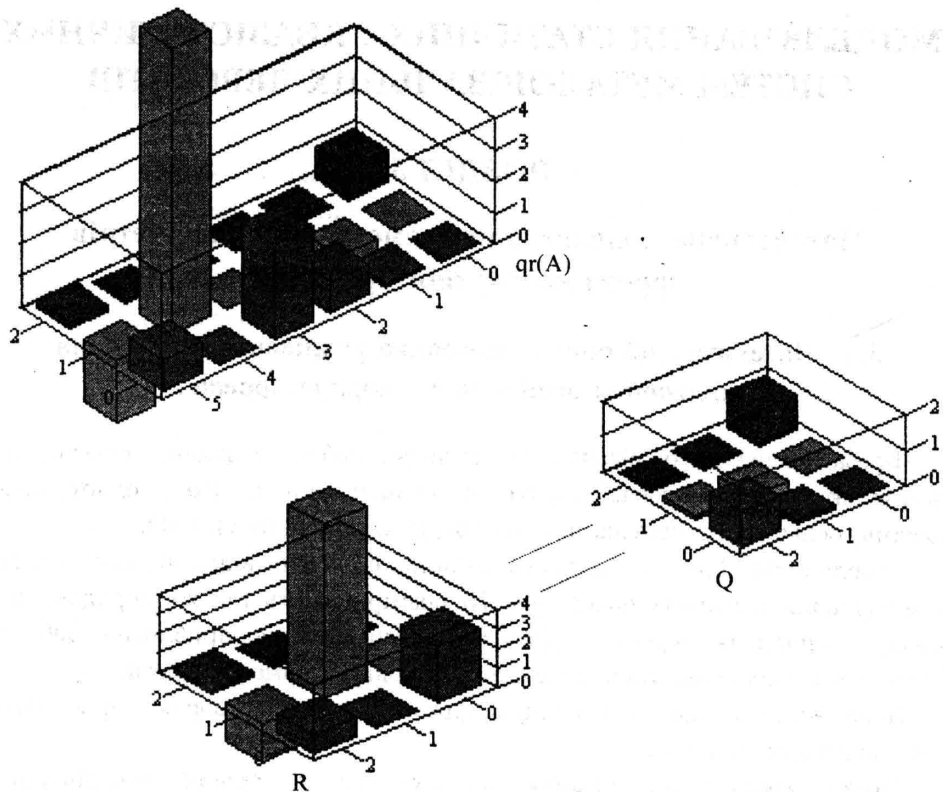


Рис. 4.16. Графічне зображення розкладу  $qr(A)$  квадратної матриці  $A$  та складові розкладу у вигляді квадратних матриць  $Q$ ,  $R$ , де  $Q$  – ортогональна матриця;  $R$  – верхня трикутна матриця

Засоби математичного пакету MathCAD дозволяють виконати практично всі операції з векторними і матричними математичними об'єктами.

Математичний пакет MATLAB також включає широкий набір засобів для роботи з векторами і матрицями.

Перспективним є використання візуальних математичних моделей на основі матричного числення, реалізованих в системі SIMULINK пакету MATLAB 6.0.

В останніх версіях пакету MATLAB наявний широкий набір блоків, які реалізують всі основні операції матричного числення. Зокрема є блоки для розв'язку систем лінійних рівнянь та блоки, які здійснюють розклад матриці на матриці спеціального виду.

## ЧАСТИНА II

# МОДЕЛЮВАННЯ СТАТИЧНИХ І КВАЗІСТАТИЧНИХ СИСТЕМ МЕТАЛОРІЗАЛЬНИХ ВЕРСТАТІВ

### РОЗДІЛ 5

#### Математичне моделювання геометричних параметрів фрези косокутного різання

##### 5.1. Математичний опис і програмна реалізація визначення положення осей ножів в корпусі фрези

Фреза косокутного різання представляє собою складний просторовий інструмент, який включає корпус із вставленими в нього однотипними ножами, оснащеними вставками із надтвердих матеріалів (НТМ).

Особливістю фрез косокутного різання є значні відстані між точками розташування різальних поверхонь. Ці розміри мають той же порядок, що і розміри шпинделя верстага. Діаметр фрези складає приблизно 300 мм. Діаметр розташування отворів під ножі відповідає діаметру фрези.

Ножі встановлюються в корпусі фрези в точних отворах і фіксуються клиновими механізмами.

Фрези косокутного різання виконуються в різних модифікаціях. Найпоширенішими є інструменти для обробки відкритих (рис. 5.1).

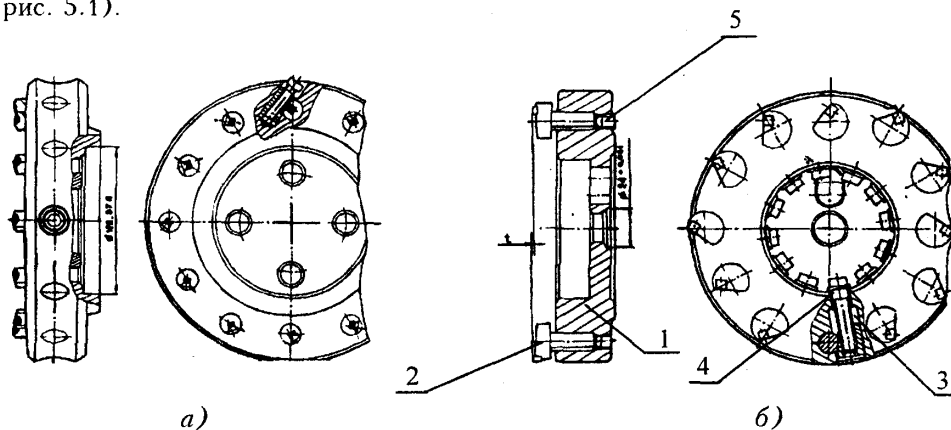


Рис. 5.1. Конструктивні схеми ступінчастих торцевих фрез косокутного різання для обробки відкритих (а) та напівзакритих (б) поверхонь

Типова фреза косокутного різання (рис. 5.1) складається з корпусу 1, у якому встановлені ножі 2, оснащені НТМ. Ножі 2 базуються по циліндричних отворах у корпусі 1 фрези і закріплюються відносно корпусу клино-гвинтовими механізмами, що складаються з циліндричного клина 3 і гвинта 4. Осьове положення ножів 2 регулюється за допомогою гвинтів 5 з дрібною різьбою.

Застосування ступінчастої схеми різання з використанням косокутної геометрії дозволяє виконувати операції чистового (максимальна величина припуску – 0,7 мм) та напівчистового фрезерування (максимальна величина припуску – 2 мм).

Для визначення ефективності застосування косокутної геометрії ножів фрез необхідно вивчити процес косокутного різання, що дозволить уточнити геометричні параметри ножів фрез.

Фреза косокутного різання має значне число ножів, які розташовані на значній відстані від осі обертання.

Фрези можуть мати різноманітну конструктивну реалізацію. В процесі досліджень розглянуті різні варіанти виконання інструмента. Як базова конструкція для аналізу прийнята фреза прогресивного типу (рис. 5.2).

Ножі фрези розташовані в спеціальних отворах і затискаються клиновими механізмами. Їх положення визначається в основному точністю виконання отворів.

Як правило, ножі розташовані по окремих групах. Осі ножів фрези розташовані на кривих, які представляють собою спіралеподібні лінії. В номінальному (розрахунковому) вигляді ці криві представляють собою ділянки логарифмічної спіралі. Для базової конструкції фрези маємо п'ять груп ножів, які об'єднані у 5 спіралей (рис. 5.3).

Встановлення особливостей геометрії фрез косокутного різання виконане для базової конструкції інструменту (фрези), розробленого і виготовленого в процесі досліджень.

Схема розташування ножів базової фрези та їх розміри встановлені шляхом вимірювань. При вимірюваннях використовувались спеціальні ступінчасті стрижні, які поміщались в отвори корпусу фрези (рис. 5.4).

Вимірювалось радіальне розташування кожного ножа і відстань між сусідніми ножами.

За знайденими радіусами  $r_i$  та відстанню між центрами ножів  $\Delta_i$  розраховані полярні кути між центрами ножів (рис. 5.5).

При розрахунках кутів між центрами ножів використана теорема косинусів. Відповідно кути між сусідніми ножами знайдені за формулою:

$$\Delta\phi_i = \arccos \frac{r_{i+1}^2 + r_i^2 - \Delta_i^2}{2r_{i+1}r_i}. \quad (5.1)$$

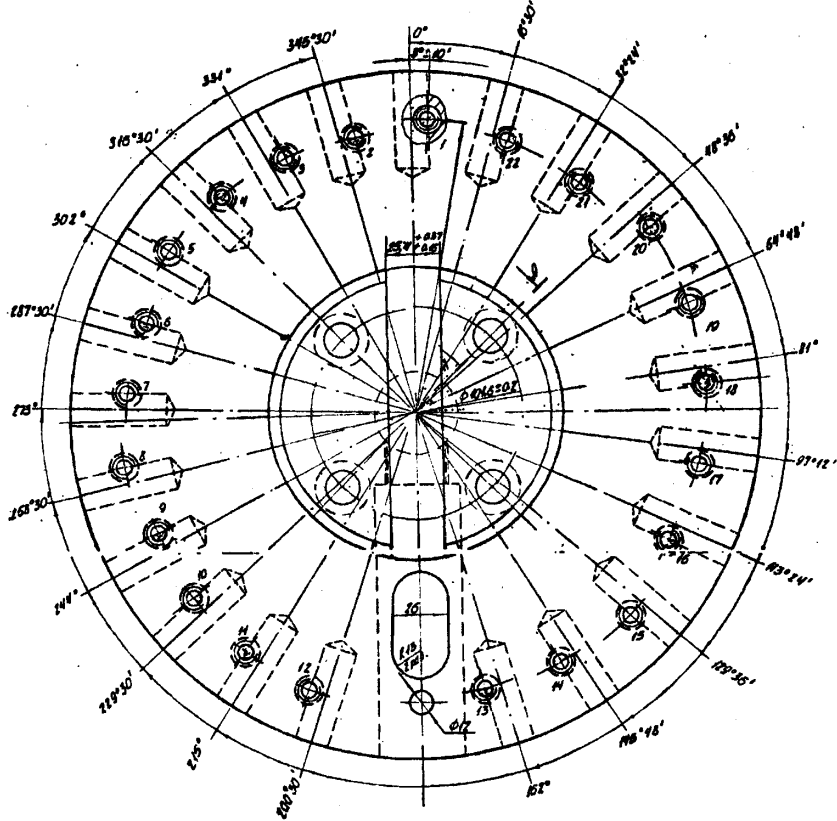


Рис. 5.2. Базова конструкція фрези косокутного різання (конструктивна схема)

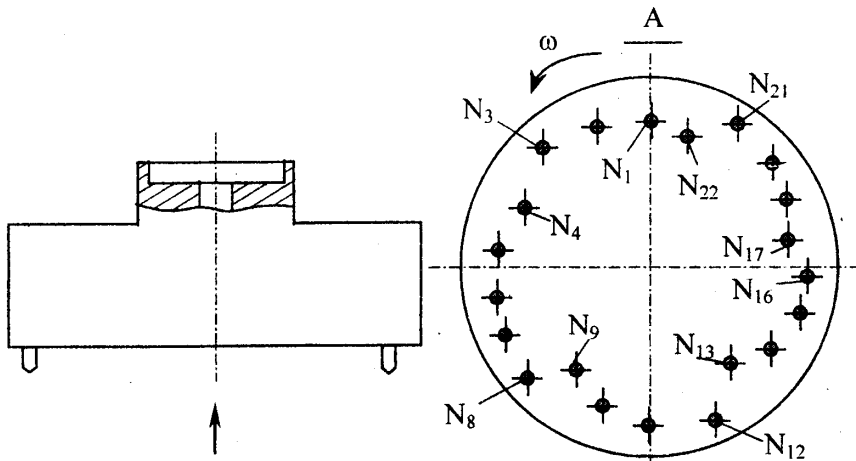


Рис. 5.3. Розташування ножів на площині фрези (вид знизу; цифрами позначена нумерація ножів)

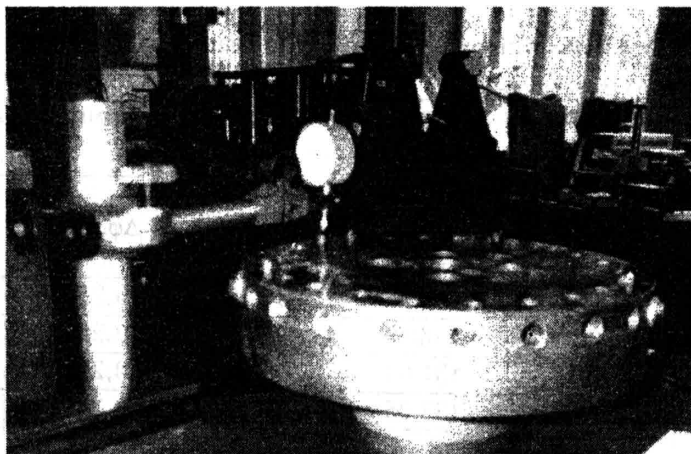


Рис. 5.4. Фото, яке ілюструє визначення геометричних розмірів посадочних отворів для ножів базової фрези косокутного різання

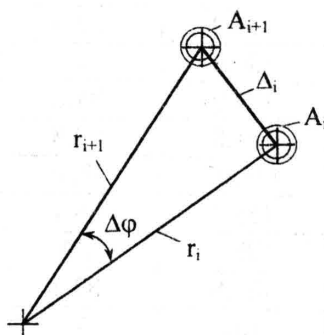


Рис. 5.5. Схема для визначення кута між центрами ножів фрези

Проведені вимірювання відстані між усіма парами ножів. За результатами вимірювань взаємного положення сусідніх ножів знайдена фактична кутова відстань між ними (табл. 5.1).

В результаті знайдені фактичні координати центрів ножів фрези.

Радіальні та кутові координати центрів ножів наведені в порівнянні із номінальними значеннями в табл. 5.2.

Одержані координати центрів ножів в цілому відповідають логарифмічним спіралям. Це встановлено за результатами порівняння фактичних координат центрів розташування ножів із апроксимуючими залежностями у вигляді:

$$\rho(\varphi) = \rho_{0_k} \cdot a_k^{(\varphi - \varphi_0)} \quad (5.2)$$

Таблиця 5.1

Визначені в результаті вимірювань радіальні  
та кутові координати ножів фрези косокутного різання

Номери сусідніх пар ножів №-№	Радіус центра першого ножа $R_i$ , мм	Радіус центра другого ножа $R_{i+1}$ , мм	Відстань між центрами двох ножів $\Delta$ , мм	Кут між центрами ножів $\Delta\varphi_i$	
				$\Delta\varphi_i$ , рад	$\Delta\varphi_i$ , град
1-2	134,2	136,75	34,25	0,2528	14,4842
2-3	136,75	140	34,8	0,2511	14,3851
3-4	140	131,05	37,4	0,2689	15,4069
4-5	131,05	133,05	30,95	0,2344	13,4321
5-6	133,05	135,4	33,8	0,2519	14,4318
6-7	135,4	138,3	34,45	0,2515	14,4109
7-8	138,3	141,6	35,3	0,2518	14,4277
8-9	141,6	132	35,65	0,2518	14,4266
9-10	132	134,2	33,5	0,2518	14,4283
10-11	134,2	136,8	34	0,2509	14,3730
11-12	136,8	139,9	34,8	0,2512	14,3934
12-13	139,9	131,9	89,8	0,6710	38,4428
13-14	131,9	134,05	37,45	0,2821	16,1638
14-15	134,05	136,7	38,1	0,2817	16,1404
15-16	136,7	139,9	39	0,2820	16,1572
16-17	139,9	130,9	39,1	0,2821	16,1637
17-18	130,9	133	37,1	0,2817	16,1377
18-19	133	135,4	37,9	0,2828	16,2033
19-20	135,4	138,35	38,55	0,2818	16,1440
20-21	138,35	141,5	39,5	0,2823	16,1775
21-22	141,5	131,9	39	0,2776	15,9041
22-1	131,9	134,2	38,2	0,2876	16,4777

Підібрані значення коефіцієнтів для кожної із п'яти спіралей.

Підбір коефіцієнтів здійснено таким чином, щоб для кожної кривої спіраль проходила через центр першого і останнього ножів. Такий вид апроксимації вибрано враховуючи, що перший і останній ножі визначають геометрію зруйнованого шару, який зрізує група ножів.

Рівняння, одержані для окремих спіралей, наведені в табл. 5.3.

Фактичні значення координат центрів ножів, які знаходяться між крайніми ножами окремої групи (спіралі), відрізняються від розрахункових. Характер відмінності координат встановлений шляхом порівняння фактичних

значень радіуса із розрахунковим за наведеними в табл. 5.3 рівняннями.

Таблиця 5.2

Порівняння номінальних і фактичних полярних координат розташування центрів ножів фрези

№ спіралі	№ ножа	Номінальний радіальний розмір $R_i$ , мм	Дійсний радіальний розмір, мм	Відхилення радіального розміру	Номінальний кутовий розмір	Фактичний кутовий розмір	Відхилення кутового розміру	Примітка
I	22	132	131,9	-0,1	0	0	0	
	1	134,2	134,2	0	16,5	16,48	-0,02	
	2	136,8	136,75	-0,05	30,4	30,96	0,56	
	3	140	140	0	48,5	45,35	-3,15	
II	4	131	131,05	+0,05	64,75	60,75	-4	
	5	133,1	133,05	-0,05	75,0	74,19	-0,81	
	6	135,5	135,4	-0,1	87,5	88,62	1,32	
	7	138,4	138,3	-0,1	103,25	103,03	0,18	
	8	141,6	141,6	0	116,5	117,46	0,94	
III	9	132	132	0	132,0	131,88	-0,12	
	10	134,2	134,2	0	145,75	146,31	0,56	
	11	136,8	136,8	0	160,0	160,68	0,68	
	12	140	139,9	-0,1	175,0	175,08	0,08	
IV	13	132	131,9	-0,1	215	213,52	0,52	
	14	134,2	134,05	-0,15	230	229,68	-0,32	
	15	136,8	136,7	-0,1	246	245,82	-0,18	
	16	140	139,9	-0,1	262	261,98	-0,02	
V	17	131	130,9	-0,1	278	278,15	0,15	
	18	133,1	133	-0,1	295	294,28	-0,72	
	19	135,5	135,4	-0,1	311	310,49	-0,51	
	20	138,4	138,35	-0,05	325	326,63	1,63	
	21	141,6	141,5	-0,1	343	342,81	-0,19	

Відхилення радіуса для кожної із груп ножів наведені в табл. 5.4.

Із аналізу даної таблиці випливає, що відхилення розрахункового радіуса від фактичного знаходиться в межах 0,4...0,7 мм. Тому можна вважати, що ножі розташовані по кривих, що наближено відповідають спіралям, рівняння яких мають вигляд (5.2).



Таблиця 5.3

Рівняння логарифмічних спіралей, які відповідають кожній із п'яти груп розташування центрів ножів

Номери ножів	Номер спіралі	Рівняння, яке відповідає групі ножів
22	I	$\rho_1 = 131,9 \cdot 1,008292 \frac{\varphi - \varphi_0}{2\pi}$
1		
2		
3		
4	II	$\rho_2 = 131,05 \cdot 1,008617 \frac{\varphi - \varphi_0}{2\pi}$
5		
6		
7		
8	III	$\rho_3 = 132 \cdot 1,008491 \frac{\varphi - \varphi_0}{2\pi}$
9		
10		
11		
12	IV	$\rho_4 = 131,9 \cdot 1,007664 \frac{\varphi - \varphi_0}{2\pi}$
13		
14		
15		
16	V	$\rho_5 = 130,9 \cdot 1,007595 \frac{\varphi - \varphi_0}{2\pi}$
17		
18		
19		
20		
21		

Логарифмічна спіраль є однією із особливих кривих і має характерні властивості. З метою врахування цих властивостей виконаний всебічний аналіз кривих такого типу. Логарифмічна спіраль є нескінченною кривою, яка асимптотично наближається до початку системи координат (рис. 5.6).

Рівняння логарифмічної спіралі в полярній системі координат має вигляд:

$$\rho = \rho_0 e^{\varphi k}, \quad (5.4)$$

де  $\rho$  – полярний радіус;

$\rho_0$  – деяке постійне значення радіуса;

$\varphi$  – полярний кут;

$k$  – параметр, значення якого характеризує ступінь розширення спіралі протягом витка.

Таблиця 5.4

Порівняння фактичних значень полярних радіусів розташування центрів ножів по окремих групах із розрахованими за формулами:

$$\rho(\varphi) = \rho_{0k} \cdot a_k \frac{\varphi - \varphi_0}{2\pi} \quad (5.3)$$

Но- мер спі- ралі k	Но- мер ножа i	Значення кута		Дійс- ний радіус $r_i$	Коефі- цієнти формул $\rho_{0k}, a_k$	Розрахун- ковий радіус $\rho_{ki}$	Відхи- лення радіуса $r_i - \rho_{ki}$
		абсо- лютне $\varphi$ , град	відносне $\varphi - \varphi_{0k}$				
I	22	0	0	131,9	0,008258 1,008292	131,90	0,00
	1	16,4777	16,4777	134,2		134,78	0,58
	2	30,9619	30,9619	136,75		137,37	0,62
	3	45,3770	45,3770	140		140,00	0,00
II	4	60,7539	0	131,05	0,00858 1,008617	131,05	0,00
	5	74,1860	13,4321	133,05		133,47	0,42
	6	88,6177	27,8638	135,4		136,13	0,73
	7	103,0287	42,2748	138,3		138,83	0,53
	8	117,4563	56,7025	141,6		141,60	0,00
III	9	131,8830	0	132	0,008455 1,008491	132,00	0,00
	10	146,3112	14,4283	134,2		134,58	0,38
	11	160,6842	28,8013	136,8		137,21	0,41
	12	175,0776	43,1946	139,9		139,90	0,00
IV	13	213,5204	0	131,9	0,007634 1,007664	131,90	0,00
	14	229,6842	16,1638	134,05		134,51	0,46
	15	245,8245	32,3042	136,7		137,18	0,48
	16	261,9818	48,4614	139,9		139,90	0,00
V	17	278,1455	0	130,9	0,007566 1,007595	130,90	0,00
	18	294,2831	16,1377	133		133,46	0,46
	19	310,4864	32,3409	135,4		136,09	0,69
	20	326,6304	48,4849	138,35		138,77	0,42
	21	342,8078	64,6623	141,5		141,50	0,00

Якщо ввести позначення:

$$a = e^k, \quad (5.5)$$

то рівняння логарифмічної спіралі набуде вигляду:

$$\rho = \rho_0 a^\varphi. \quad (5.6)$$

Даний вигляд рівняння спіралі при виборі масштабу відповідає рівнянню (5.3).

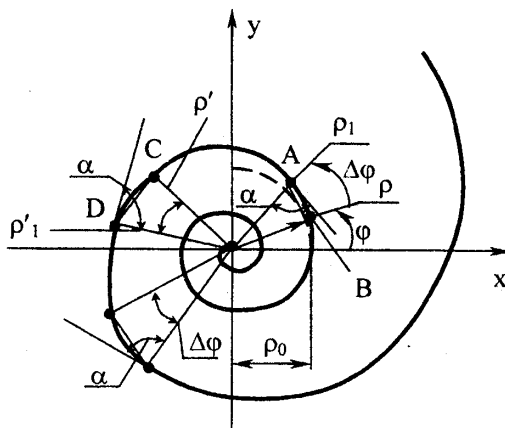


Рис. 5.6. Загальний вигляд логарифмічної спіралі та її основні параметри

Логарифмічна спіраль має ряд характерних властивостей. Зокрема основна геометрична властивість полягає в наступному. Якщо взяти деяку пару полярних радіусів  $\rho_1$  і  $\rho$  (рис. 5.6), розділених полярним кутом  $\Delta\varphi$ , та іншу довільну пару радіусів  $\rho_1$  і  $\rho$ , розділених тим же полярним кутом  $\Delta\varphi$ , то одержані трикутники  $\Delta OAB$  і  $\Delta ODC$  будуть подібними.

Інша властивість спіралі полягає в тому, що кут між двома полярними радіусами пропорційний логарифму їх відношення:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{k} \ln \frac{\rho_1}{\rho} \quad (5.7)$$

Дотична, проведена до логарифмічної спіралі, утворює з полярним радіусом кут  $\alpha$ , для якого  $k = \operatorname{ctg} \alpha$  або  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{k}$ , або  $\alpha = \operatorname{arccotg} k$ .

Значення цього кута не залежить від точки, в якій визначена дотична.

Тому іноді логарифмічну спіраль називають рівнокутною.

Для логарифмічної спіралі визначений характеристичний трикутник (рис. 5.7).

В характеристичному трикутнику наявні деякі корисні співвідношення:

- Довжина дуги  $l$  від точки  $O$  (полюса) до точки  $A$  дорівнює відрізку  $AC$ . Відповідно довжина дуги:

$$l = \frac{\rho}{\cos \alpha} \quad (5.8)$$

Довжина дуги між двома окремими точками спіралі:

$$\Delta l = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\cos \alpha} \quad (5.9)$$

- Коефіцієнт росту спіралі  $q$  є відношенням довжин полярних радіусів, кутова відстань між якими складає  $2\pi$ , тобто:

$$q = \frac{\rho(\varphi + 2\pi)}{\rho(\varphi)}. \quad (5.10)$$

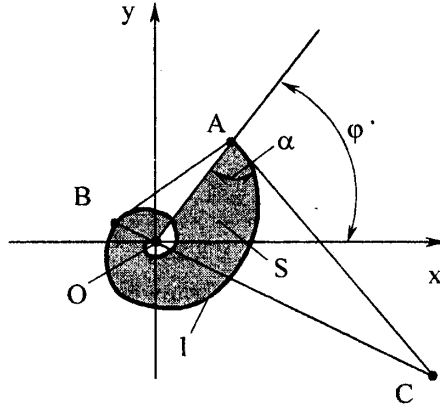


Рис. 5.7. Характеристичний трикутник ( $\Delta OAC$ ) логарифмічної спіралі

Коефіцієнт росту зв'язаний із параметром  $k$  співвідношенням:

$$q = e^{2k\pi}. \quad (5.11)$$

Рівняння спіралі, визначене через коефіцієнт росту, має вигляд:

$$\rho = \rho_0 q^{\frac{\varphi}{2\pi}}. \quad (5.12)$$

Дане рівняння точно співпадає із рівнянням (5.3), яке описує розташування ножів фрези.

Інші властивості спіралі полягають в наступному:

- Площа, яка описується полярним радіусом  $OA$  (рис. 5.7) при його повороті у напрямку зменшення радіуса і необмеженому наближенні полюса, (секторіальна площа) дорівнює половині площі характеристичного трикутника ( $\Delta OAC$ ):

$$S = \frac{1}{2} S_{\Delta OAC} = \frac{1}{4} \rho^2 \operatorname{tg} \alpha, \quad (5.13)$$

де  $\rho$  – полярний радіус в точці  $A$ .

Площа спіралі між двома полярними радіусами  $\rho_1$  і  $\rho_2$  дорівнює:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{4} (\rho_1^2 - \rho_2^2) \operatorname{tg} \alpha. \quad (5.14)$$

Центр кривизни логарифмічної спіралі лежить на нормалі, проведеної до спіралі в точці  $A$ , а також на продовженні більшого катета ( $OC$ )

характеристичного трикутника. Відповідно центр кривизни знаходиться в точці В (рис. 5.7).

Деякі властивості спіралі стосуються характеристик кривизни цієї плоскої кривої.

Радіус кривизни спіралі в точці з полярним радіусом  $\rho$  :

$$R = \frac{\rho}{\sin \alpha} . \quad (5.15)$$

• Геометричне місце центрів кривизни спіралі (еволюта) також представляє собою логарифмічну спіраль, яка зміщена відносно вихідної спіралі.

Значення цього кута складає:

$$\phi = (2n + 1) \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg} \alpha \cdot \ln \operatorname{tg} \alpha , \quad (5.16)$$

де  $n$  – довільне ціле число ( $n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$ ).

Існує нескінченна кількість логарифмічних спіралей, еволюти яких співпадають із самою спіраллю. Це – спіралі, в яких  $\phi = 0$ , або відповідно:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \ln \operatorname{tg} \alpha = (2n + 1) \frac{\pi}{2} . \quad (5.17)$$

Для логарифмічної спіралі визначене натуральне рівняння.

Натуральне рівняння логарифмічної спіралі зв'язує довжину дуги з радіусом кривизни спіралі і має вигляд:

$$R = kl . \quad (5.18)$$

• Кінематична властивість логарифмічної спіралі полягає в наступному: якщо дуга логарифмічної спіралі котиться без ковзання по деякій прямій  $OL$ , то центр кривизни, що відповідає точці дотику, зменшується по прямій, яка нахилена до прямої  $OL$  під кутом  $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ .

• Картографічна властивість логарифмічної спіралі полягає в наступному. Якщо на сфері визначена лінія, що перетинає меридіани під постійним кутом  $\alpha$  (локсодрома), то проекція локсодроми на площину екватора представляє собою логарифмічну спіраль, полюс якої знаходиться в центрі сфери. Меридіани сфери проєктуються на площину екватора у вигляді прямих, направлених по полярних радіусах спіралі. Ці прямі перетинають спіраль під тим же кутом, під яким локсодрома перетинає меридіану.

Для математичного опису геометрії фрези косокутного різання були використані спеціальні методи. Вони базуються на описі геометричних параметрів окремого ножа у вигляді суми ряду геометричних параметрів. Використовуються різні системи декартових координат. Загальна система координат відповідає напрямкам переміщення стола і шпинделя верстата (координати  $X, Y, Z$ ).

Для опису положення ножа відносно заготовки використано ряд локальних систем координат. Зокрема опис розташування окремого ножа здійснено в полярній системі координат, яка обертається разом із фрезою.

Розташування осі отвору окремого ножа характеризується полярними координатами  $r_i$  та  $\phi_i$ . Ці розміри є номінальними. Фактичне положення ножа буде визначатись як похибками виготовлення, так і умовами його закріплення клиновим механізмом.

Номінальне фактичне положення осей всіх 22 ножів фрези встановлене в результаті вимірювань (див. табл. 5.2). Аналітичний опис розташування ножів наближено відповідає логарифмічній спіралі. Для математичного опису розташування осей ножів використані засоби пакету MATLAB. Зокрема використана система візуального математичного моделювання SIMULINK. Особливістю системи є використання зручних графоаналітичних методів опису геометрії фрези. Дані засоби дозволяють врахувати весь комплекс геометричних факторів, зокрема випадкові зміни геометрії фрези, а також статичні та динамічні переміщення ножів фрези.

Номінальні геометричні розміри розташування осей ножів задаються спеціальними блоками системи. Радіуси розташування центрів осей отворів для кожного із ножів задаються в блоці, наведеному на рис. 5.8.

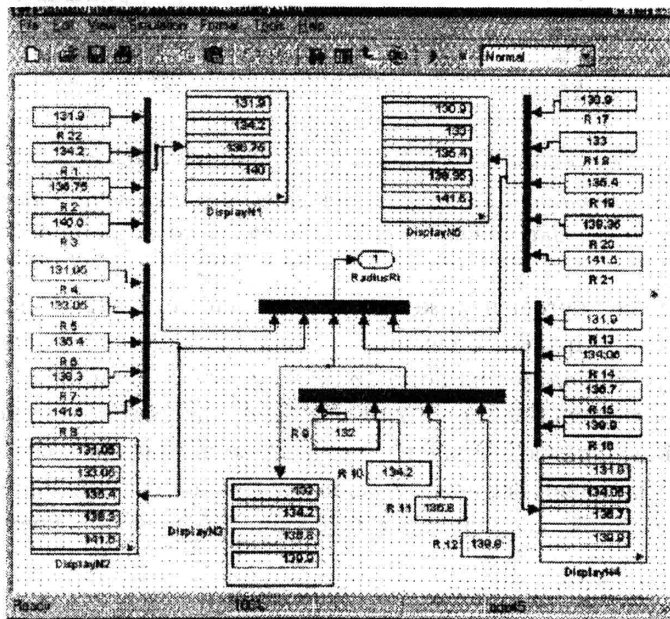


Рис. 5.8. Структура S-моделі, призначена для введення номінальних значень радіусів розташування осей отворів для кожного ножа

Радіуси осей кожного із ножів вводяться по групах, які відповідають кожній із п'яти спіралей. На виході S-моделі одержано вектор, розмірність якого дорівнює числу ножів (у даному випадку 22).

Аналогічним чином сформовано блок моделі, призначений для введення номінальних фактичних значень кутового положення осей отворів кожного з ножів (рис. 5.9).

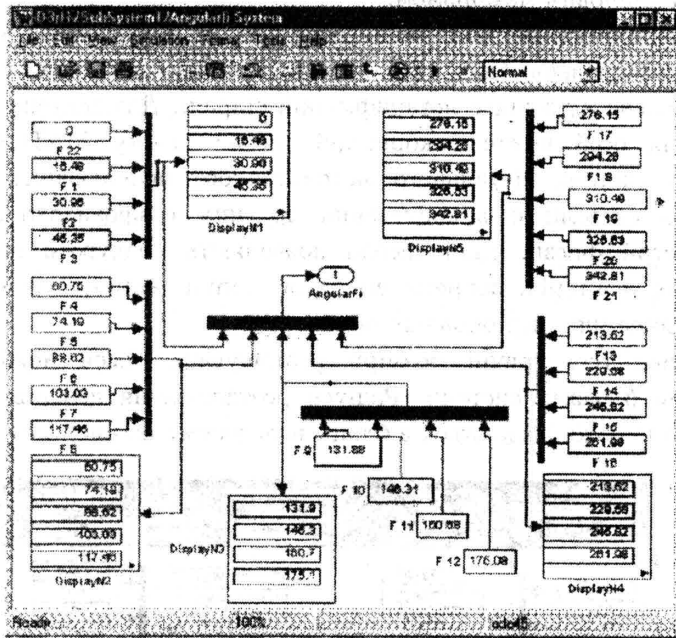


Рис. 5.9. Візуальна математична модель, призначена для введення номінальних фактичних значень кутових координат осей ножів

Як і радіуси, кутові положення осей введені по групах, що відповідають кожній з п'яти спіралей. Значення кутових положень осей задані в куткових градусах. Кутове положення ножа № 22 прийняте за нульове.

Дійсне положення осі кожного ножа буде відрізняться від номінального з різних причин. Однією з причин є похибки встановлення ножа в отворі. Для врахування відхилень осі ножа в радіальному та тангенціальному напрямках блоки формування координат осей ножів забезпечені окремими входами (рис. 5.10).

Врахування зміни радіальної координати кожної осі здійснюється векторними входами  $InR_i$ . Для врахування зміни тангенціальної координати задіяно векторний вхід  $InF_i$  та додатковий вхід у вигляді постійного кута  $F30$  (в даному випадку він дорівнює нулю), який дозволяє змінити точку відліку кутової координати. Крім того, наявний блок зміни одиниць вимірювань

кутової координати із градусів у радіани – блок Gain.

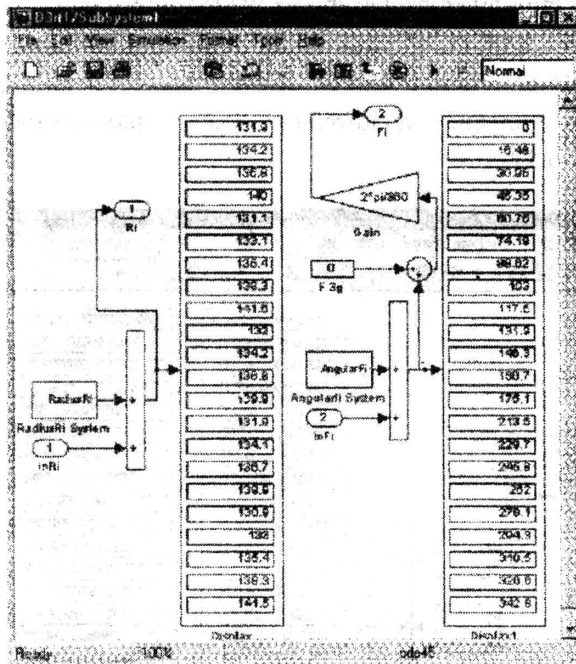


Рис. 5.10. Формування дійсних координат осей кожного ножа в радіальному та тангенціальному напрямках

Ніж фрези представляє собою стрижень, встановлений по посадці  $\varnothing 12\text{ H7/h7}$  в отворі фрези. При закріпленні ножа клиновим механізмом має місце його зміщення відносно отвору. Враховуючи, що посадка ножа в отворі є точною, будемо вважати, що зміщення ножа при затисканні змінюється на деяку частину поля допуску. Поле допуску, яке відповідає 7-му квалітету, при діаметрі  $\varnothing 12\text{ мм}$  складає  $IT7 = 18\text{ мкм}$ . Будемо вважати, що геометричне положення центра (осі) ножа може змінюватись випадковим чином в межах поля допуску. При цьому змінюється як радіальна, так і тангенціальна координати ножа. Радіальна координата може змінюватись в межах  $\pm 18\text{ мкм}$ , а кутова (тангенціальна координата) – в межах  $\pm 18\text{ мкм}/r_{\text{сер}}$  ( $r_{\text{сер}}$  – середній радіус розташування ножа).

Прийmemo рівномірний закон розподілу випадкового положення ножа в отворі. При цьому задамо випадкове положення центра ножа за допомогою генератора випадкових чисел з рівномірним законом розподілу. Із врахуванням цього радіальне положення ножа визначається формулою:

$$r_i = r_{i0} + \delta r_i,$$



де  $\delta r_i$  – випадкове положення ножа в отворі, задане генератором.

Кутове положення ножа визначається формулою:

$$\varphi_i = \varphi_{i0} + \delta\varphi_i,$$

де  $\delta\varphi_i$  – випадкове кутове відхилення ножа.

Випадкове відхилення положення ножа враховується в S-моделі, наведеній на рис. 5.11.

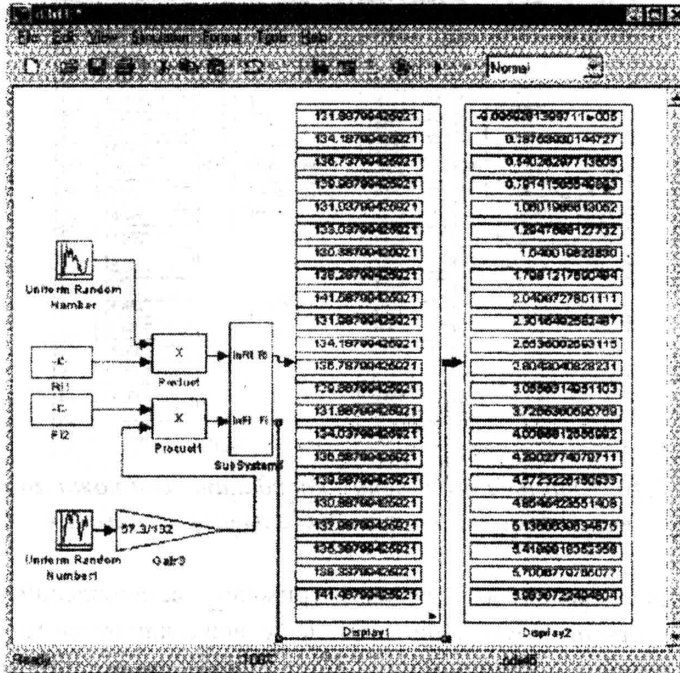


Рис. 5.11. Структурна S-модель, яка служить для розрахунку положення осі ножа із врахуванням його випадкових відхилень в посадочному отворі

Дана S-модель включає блоки формування постійних одиничних значень векторів відхилень в радіальному та тангенціальному напрямках (блоки Ri1 та Fi2). Генератори випадкових чисел (блок Form Random Number) служать для формування випадкових відхилень радіальної та кутової координат. Отримані значення координат осей ножів із врахуванням випадкових відхилень в посадочних отворах наведені в блоках Display.

## 5.2. Геометричні параметри різальних поверхонь ножів фрез косокутного різання

Ніж фрези косокутного різання представляє собою інструмент складної просторової форми (рис. 5.12).

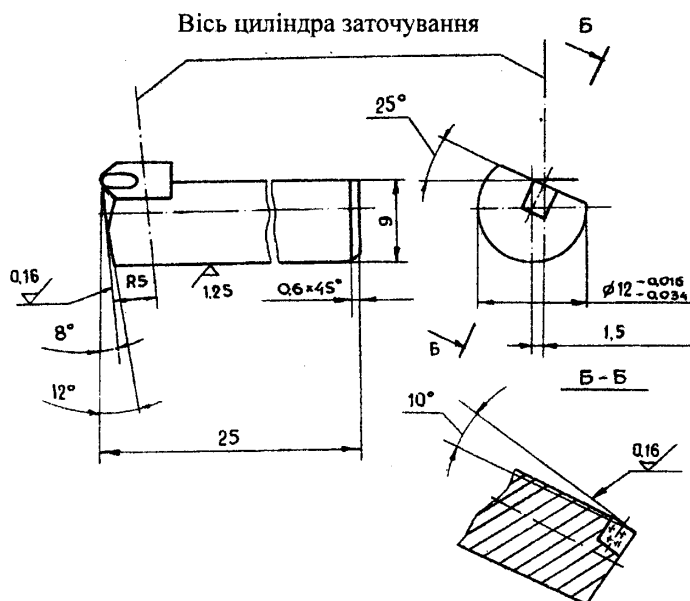


Рис. 5.12. Конструкція різального ножа фрези косокутного різання

Ніж включає циліндричну вставку зі НТМ. Вона утворює різальну поверхню складної просторової форми.

Передня поверхня ножа є плоскою, а задня поверхня ножа виконана циліндричною. Перетин задньої циліндричної поверхні з передньою плоскою поверхнею утворює різальну кромку криволінійної форми. Такі особливості геометрії полегшують процес заточування ножа. Криволінійна форма кромки забезпечує умови різання, близькі до вільного різання. Аналіз літературних джерел підтвердив ефективність застосування косокутної геометрії ножів для процесу чистового фрезерування, де товщини зрізаних шарів близькі до радіуса заокруглення різальних кромки. Тому ножі фрез виконувались з кутами нахилу різальної кромки  $\lambda = -35 \dots -45^\circ$ .

Заточування ножів фрез проводилося на спеціальному верстаті моделі 3629 для заточування радіусів. Попередньо виконувалось чорнове заточування алмазними кругами 2724-0037 зернистістю 160/100 (ГОСТ 16172-80), після чого різальні поверхні доводилися алмазними

кругами зернистістю 28/20. Чистота передньої та задньої поверхонь контролювалася на профілометрі – профілографі “Калібр ВЕІ”. При цьому шорсткість не перевищувала  $R_a = 0,2$  мкм.

У фрезі косокутного різання використовується набір однотипних ножів. Різальні поверхні таких ножів характеризуються рядом геометричних параметрів. На рис. 5.13 наведені основні геометричні розміри, які характеризують передню та задню різальні поверхні ножа.

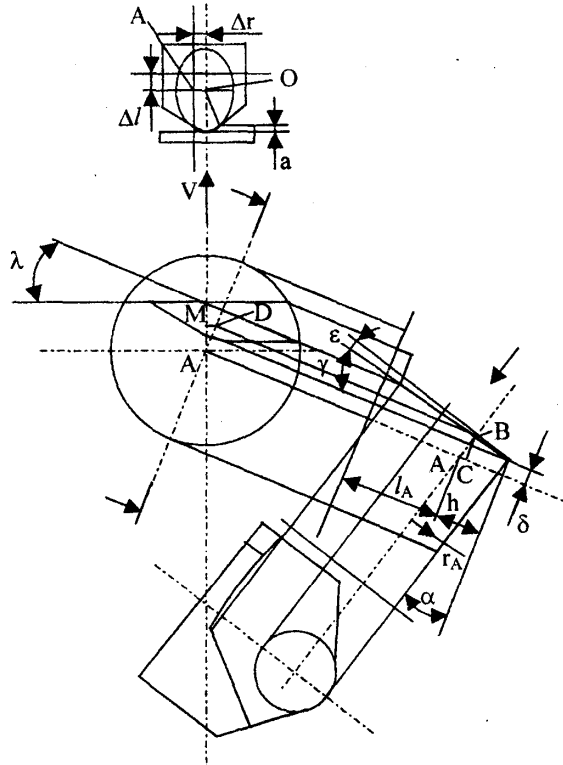


Рис. 5.13. Геометрія передньої та задньої поверхонь ножа і параметри, які використовуються для опису геометрії ножа

Ніж має плоску передню поверхню та циліндричну задню. Циліндрична поверхня характеризується радіусом  $r_a$  і кутом нахилу осі циліндра до площини, перпендикулярної до осі ножа. Цей кут відповідає задньому куту ножа  $\alpha$ . Вісь циліндра перетинається з віссю ножа в точці  $A$ , яка є характерною. Відстань  $l$  від цієї точки до торця фрези прийнята для характеристики осьового положення ножа відносно фрези. Вона буде різною для різних ножів.

Розташування різальної кромки відносно точки А характеризується розмірами  $h$  і  $\delta$ . Маємо геометричне співвідношення між радіусом циліндра і вищевказаними розмірами:

$$h = \frac{r_a}{\cos \alpha} + \delta \operatorname{tg} \alpha. \quad (5.19)$$

Проекція передньої поверхні ножа на площину, перпендикулярну до напрямку швидкості різання, представляє собою еліпс. Центр еліпса зміщений відносно точки А на величину АС. Із геометричних міркувань одержуємо зміщення центра еліпса відносно точки А у вигляді:

$$AC = h - \frac{r_A}{\cos \alpha} \cdot \cos \varepsilon. \quad (5.20)$$

Враховуючи, що  $\varepsilon = \alpha - \gamma$ , одержуємо:

$$AC = h - \frac{r_A \cdot \cos(\alpha - \gamma)}{\cos \alpha}.$$

Використовуючи тригонометричне співвідношення, дану формулу подамо у вигляді:

$$\Delta l = AC = h - r_A [\cos \gamma + \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \gamma]. \quad (5.21)$$

Напівосі еліпса визначаються із геометричних співвідношень і складають:

$$d_1 = \frac{r_A \cdot \cos \varepsilon \cdot \cos \gamma}{\cos \alpha}; \quad d_2 = r_A \cos \lambda. \quad (5.22)$$

Центр еліпса зміщено відносно осі ножа на величину:

$$\Delta r = MD = \frac{AC}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \sin \lambda = \frac{\Delta l \cdot \sin \lambda}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (5.23)$$

Розглянемо проекцію різальної поверхні на площину, перпендикулярну до напрямку швидкості переміщення ножа відносно заготовки.

Різальна поверхня має вигляд частини еліпса (рис. 5.14).

На ділянці між точками К та  $L_m$  рівняння кривої в полярних координатах відповідає рівнянню еліпса:

$$\rho_p = \frac{d_2}{\sqrt{1 - \left[1 - \frac{d_2^2}{d_1^2}\right] \cos^2 \theta}}, \quad (5.24)$$

де  $d_1, d_2$  – напівосі еліпса;

$\theta$  – полярний кут;

$\rho_p$  – полярний радіус.

Розглянемо координати точки L в напрямку координатних осей R і Z, які відповідають системі координат, що має центр на осі фрези.

Радіальна координата точки різальної кромки:

$$R = r_i + \delta r_i + \Delta r_i + \frac{d_2 \sin \theta}{\sqrt{1 - \left[1 - \frac{d_2^2}{d_1^2}\right] \cos^2 \theta}}, \quad (5.25)$$

де  $r_i$  – фактичний радіус розміщення центра осі отвору для установки ножа;

$\delta r_i$  – радіальне відхилення точки А за рахунок деформації та неточностей посадки ножа в отворі ( $\varnothing 12 \text{ H7/h7}$ );

$\Delta r_i$  – зміщення центра еліпса відносно точки А в радіальному напрямку, яке визначається формулою (5.23);

$d_1, d_2$  – напівосі еліпса, які визначаються формулами (5.22).

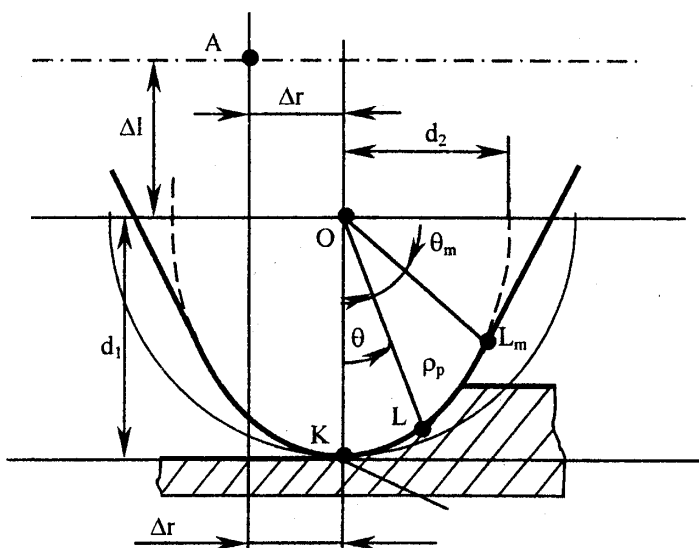


Рис. 5.14. Схема розташування проєкції різальної поверхні відносно базової точки А, що знаходиться на осі ножа

Осьова координата точки різальної кромки:

$$z_i = l_{Ai} + \Delta l_i + \frac{d_2 \cos \theta}{\sqrt{1 - \left[1 - \frac{d_2^2}{d_1^2}\right] \cos^2 \theta}} + \Delta z_i, \quad (5.26)$$

де  $l_i$  – фактична відстань від торця фрези (початку відліку) до точки А;

$\Delta l_i$  – зміщення центра еліпса в осьовому напрямку відносно точки А, що визначається формулою (5.21);

$\Delta z_i$  – зміна осьової координати точки (L) різальної кромки з причини утворення фаски зносу на задній поверхні ножа. Цей параметр загалом

залежить від зміни кута  $\varepsilon$ .

При відсутності зносу різальної кромки формула (5.26) набуде вигляду:

$$z_i = l_{Ai} + \Delta l_i + \frac{d_2 \cdot \cos \theta}{\sqrt{1 - \left[1 - \frac{d_2^2}{d_1^2}\right] \cos^2 \theta}} \quad (5.27)$$

Визначимо осьову координату точки К (для неї  $\theta = 0$ ):

$$z_i = l_{Ai} + \Delta l_i + d_1. \quad (5.28)$$

Цей розмір допускає безпосереднє вимірювання і може задаватися при встановленні та закріпленні ножа.

Підставимо в формулу (5.28) значення величин із формул (5.22), (5.21), (5.19) і одержимо зв'язок геометричних параметрів фрези, який дозволяє здійснити контроль осьового положення ножа:

$$z_{i0} = l_{Ai} + r_A \cdot \frac{\cos(\alpha - \gamma) \cdot \cos \gamma}{\cos \alpha} + \frac{r_A}{\cos \alpha} + \delta \cdot \operatorname{tg} \alpha - r_A [\cos \gamma + \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \gamma].$$

Виконавши перетворення даної залежності, знайдемо формулу для обчислення осьової координати точки А:

$$l_{Ai} = z_{i0} - r_A \left[ \frac{\cos(\alpha - \gamma) \cdot \cos \gamma}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} - \cos \gamma - \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \gamma \right] - \delta \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (5.29)$$

Формула (5.29) дозволяє визначити координату точки А за виміряним значенням  $z_{i0}$ . Якщо всі ножі мають однакову геометрію різальної кромки, то їх відносні відстані не будуть залежати від геометрії різальної поверхні. Відповідно

$$l_{Ai} - l_{Aj} = z_{i0} - z_{j0}, \quad (5.30)$$

де  $i$  та  $j$  – відповідно номери ножів.

Для визначення висоти ножів можна взяти довільну (не співпадаючу з торцем фрези) площину, перпендикулярну до осі фрези. Тоді координати точок  $A_i$  будуть визначені з точністю до деякого постійного доданка  $l_0$ :

$$l_{Ai} = l_0 + L_{Ai},$$

де  $L_{Ai}$  – висота точки А ножа, яка визначається від деякої площини.

Враховуючи залежність (5.31), із (5.30) одержимо:

$$\Delta L_{Ai} = L_{Ai} - L_{Aj} = z_{i0} - z_{j0}.$$

Для чистового ножа  $j$  приймаємо:

$$\Delta L_{Aj} = 0.$$

Тоді осьові координати точок А всіх останніх ножів визначаються відносно чистового ножа, положення якого співпадає з початком координат.

Значення приростів осьових координат ножів та інших геометричних параметрів ножів знайдені в результаті експериментальних вимірювань. При вимірюваннях використані мікрометри, індикатори годинникового типу,

мікроскопи. Точність вимірювання геометричних розмірів склала 0,001 мм для лінійних розмірів і 5" для кутових розмірів. При вимірюваннях використані спеціальні методики.

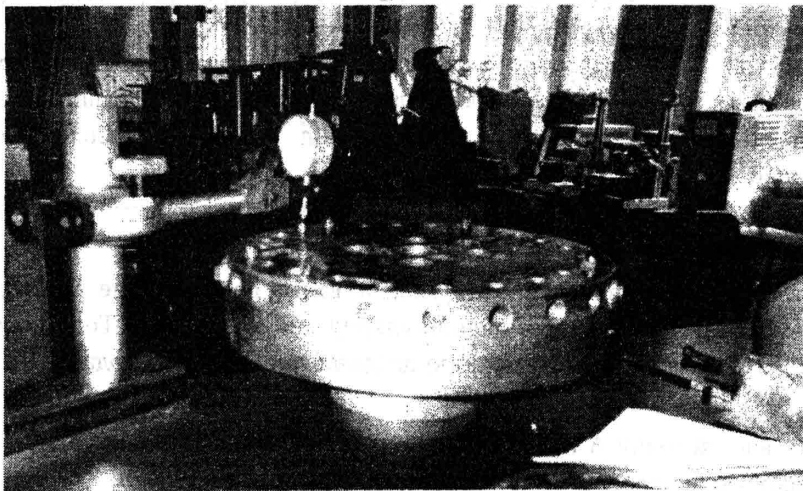
Вимірювання приростів осьових положень ножів здійснені індикатором з установкою фрези на плиті (рис. 5.15).

Виміряні значення приростів розташування ножів по висоті наведені в табл. 5.5. В ній також наведені значення відхилень геометричних розмірів ножа від номінального значення для всіх 22 ножів фрези косокутного різання.

В результаті експериментальних вимірювань встановлено, що геометричні параметри ножів є різними і змінюються випадковим чином відносно своїх номінальних значень.

Номінальними геометричними параметрами ножа є наступні:

- радіус заокруглення задньої циліндричної поверхні ножа  $r_n = 10$  мм;
- зміщення різальної кромки відносно головної осі ножа  $\delta = 2,1$  мм;
- значення переднього кута ножа  $\gamma = -10^\circ$  ;
- значення заднього кута ножа  $\alpha = 8^\circ$  ;
- значення кута розташування передньої поверхні  $\lambda = 32^\circ$  .



*Рис. 5.15. Вимірювання приростів осьових положень ножів, встановлених у фрезі косокутного різання*

Реальні значення кутів відрізняються від номінальних. Із аналізу табл. 5.5 випливає, що розміри окремих ножів фрези утворюють статистичні вибірки.

В процесі обробки деталей геометричні розміри ножів змінюються з причини зносу різальних поверхонь. Для виявлення основних закономірностей зносу необхідно мати достовірну інформацію про різальні геометричні параметри кожного з 22 ножів фрези. З цією метою виміряні геометричні параметри всіх

ножів піддані статистичній обробці. Для кожного параметра із статистичної вибірки, яка відповідає всім ножам, визначені середнє значення параметра ( $m$ ), середньоквадратичне відхилення ( $\sigma$ ), дисперсія ( $\sigma^2$ ) та ймовірний діапазон зміни параметра у вигляді нижньої ( $m - 3\sigma$ ) та верхньої ( $m + 3\sigma$ ) границь. Статистична обробка здійснена з використанням засобів математичного пакету MathCAD 2000 наступним чином. Масив числових значень параметрів, який утворює вибірку і поданий в колонці табл. 5.5, формується у вигляді вектора сповнення  $A$ . Значення компонент цього вектора виводяться на друк. Середнє значення параметра у вибірці знаходиться за допомогою вбудованої функції  $\text{mean}(A)$ . Середньоквадратичне відхилення обчислюється вбудованою функцією  $\text{stdev}(A)$ , а дисперсія – вбудованою функцією  $\text{var}(A)$ .

Додатково до обчислених значень дається геометрична інтерпретація вибірки у вигляді числової послідовності значень відхилень геометричного параметра (точковий графік). Для оцінки характеру зміни випадкових значень параметра побудована гістограма вибірки. Гістограма побудована з використанням функції  $\text{hist}$ .

Статистична обробка масивів фактичних значень геометричних параметрів здійснена для наступних розмірів ножа: радіуса задньої циліндричної поверхні ножа  $r_A$ , зміщення кромки ножа відносно осі  $\delta$  і кутових розмірів  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda$ . Результати статистичної обробки для одного з параметрів ( $r_A$ ) наведені на рис. 5.16.

Із аналізу результатів розрахунків випливає, що середнє відхилення радіуса від його номінального значення в цілому незначне і не перевищує одного відсотка. Середньоквадратичне відхилення радіуса складає приблизно 0,18 мм.

Аналіз графіка точкових значень елементів вибірки (див. рис. 5.16, *a*) показав, що значення вибірки групуються у вузькому діапазоні, хоча у вибірці наявні два різнознакові викиди, які відповідають ножам з номерами 5 та 9. Значення відхилень радіусів для цих ножів в 2...3 рази перевищують середні відхилення.

Враховуючи, що ці ножі не є чистовими, дані відхилення радіуса не є суттєвими.

Із графіка точкових значень вибірки випливає, що чистові ножі № 4 та № 17 мають відхилення радіуса від номінального значення одного знаку і воно дорівнює -0,19 для ножа № 4 і -0,151 для ножа № 17.

Із аналізу гістограми випливає, що вибірка випадкових значень відхилень радіуса в цілому відповідає нормальному закону з деякими відхиленнями в середній частині гістограми, які не є суттєвими.

Аналогічним чином здійснена статистична обробка вибірок значень інших геометричних параметрів ножа. Графічна інтерпретація вибірок та відповідних гістограм наведена на рис. 5.17.



Таблиця 5.5

Результати експериментальних вимірювань геометричних параметрів  
різальних ножів фрези косокутного різання

Но- мер спі- ралі k	Но- мер ножа i	Осьова коорди- ната, мм $\Delta L_{Ai} = 0$	Відхи- лення радіуса $r_{Ai}$ , мм	Відхи- лення зміщення кромки $\delta_i$ , мм	Відхи- лення кута $\gamma_i$ , град	Відхи- лення кута $\alpha_i$ , град	Відхи- лення кута $\lambda_i$ , град
I	22	0,2	-0,103	0,305	-0,548	-0,328	-0,526
	1	0,4	-0,088	0,167	0,144	-0,404	-1,42
	2	0,6	-0,136	-0,073	0,411	0,353	0,638
	3	0,8	-0,095	0,027	0,592	0,243	0,396
II	4	0	-0,19	0,379	-0,013	-0,289	0,071
	5	0,2	-0,337	-0,212	0,223	0,036	-0,503
	6	0,4	$8,706 \cdot 10^{-3}$	$5,593 \cdot 10^{-4}$	0,13	0,424	-0,463
	7	0,6	-0,024	0,332	0,343	-0,08	-0,439
	8	0,8	0,111	0,268	-0,38	-0,508	0,139
III	9	0,2	0,438	-0,87	-0,556	-0,353	-0,201
	10	0,4	0,162	-0,647	2,439	-0,331	0,651
	11	0,6	0,197	0,062	-0,229	-0,129	-0,689
	12	0,8	0,172	-0,185	-1,024	0,016	0,19
IV	13	0,2	0,183	-0,359	0,608	-0,149	0,219
	14	0,4	0,135	0,03	-0,314	-0,083	0,88
	15	0,6	-0,209	0,231	-0,963	0,135	-0,324
	16	0,8	0,014	0,092	-0,829	0,055	0,276
V	17	0	-0,151	$3,397 \cdot 10^{-3}$	-0,015	0,101	0,773
	18	0,2	0,139	-0,229	0,026	-0,289	-0,911
	19	0,4	-0,036	-0,123	0,212	-0,276	0,654
	20	0,6	-0,129	-0,202	0,393	-0,276	-0,524
	21	0,8	-0,145	-0,04	0,191	-0,102	0,23

В результаті аналізу даних статистичної обробки встановлено, що фактичні значення параметрів групуються відносно середніх значень. Для деяких ножів мають місце відхилення окремих параметрів. Наприклад, це має місце для відхилення кута  $\gamma$  ножів № 9 та № 10, а також відхилення кута  $\lambda$  для ножа № 10. Статистична вибірка відхилення положення кромки ножа ( $\Delta\delta$ ) показує наявність значного розсіювання цього параметра (рис. 5.17, а). Гістограма розподілу даного параметра має якісно відмінний від інших гістограм вигляд (див. рис. 5.17, б). Низька точність виконання цього розміру обумовлюється

специфікою процесу заточування та складністю контролю даного розміру.

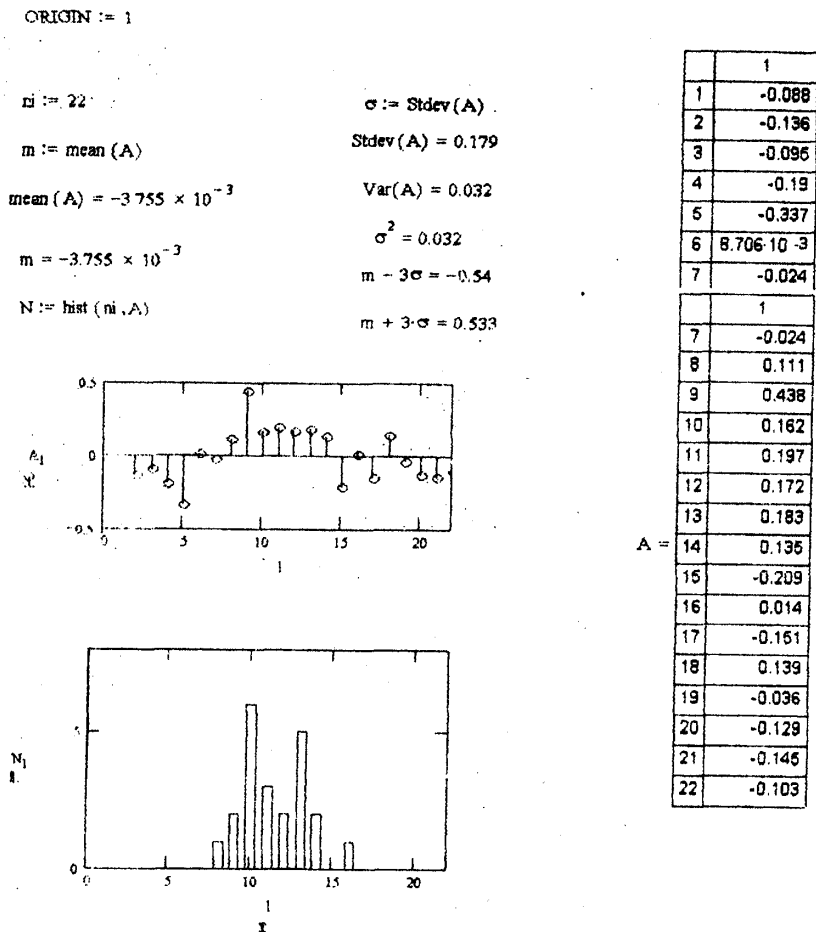


Рис. 5.16. Фрагмент документа MathCAD, який здійснює статистичну обробку вибірки випадкових значень відхилення радіуса задньої поверхні ножа, графічна інтерпретація вибірки відхилень радіуса (а) та гістограма розподілу значень відхилень радіуса (б)

В цілому для всіх кутових параметрів закон розподілу випадкових значень параметра відповідає нормальному закону. Наявні викиди гістограм (наприклад, викид, показаний на рис. 5.17, е) не є суттєвими і не змінюють загального характеру закону розподілу.

Таким чином, для всіх геометричних параметрів, крім геометричного положення кромки ножа ( $\Delta\delta$ ), можна рекомендувати використання нормального закону розподілу для опису параметра.

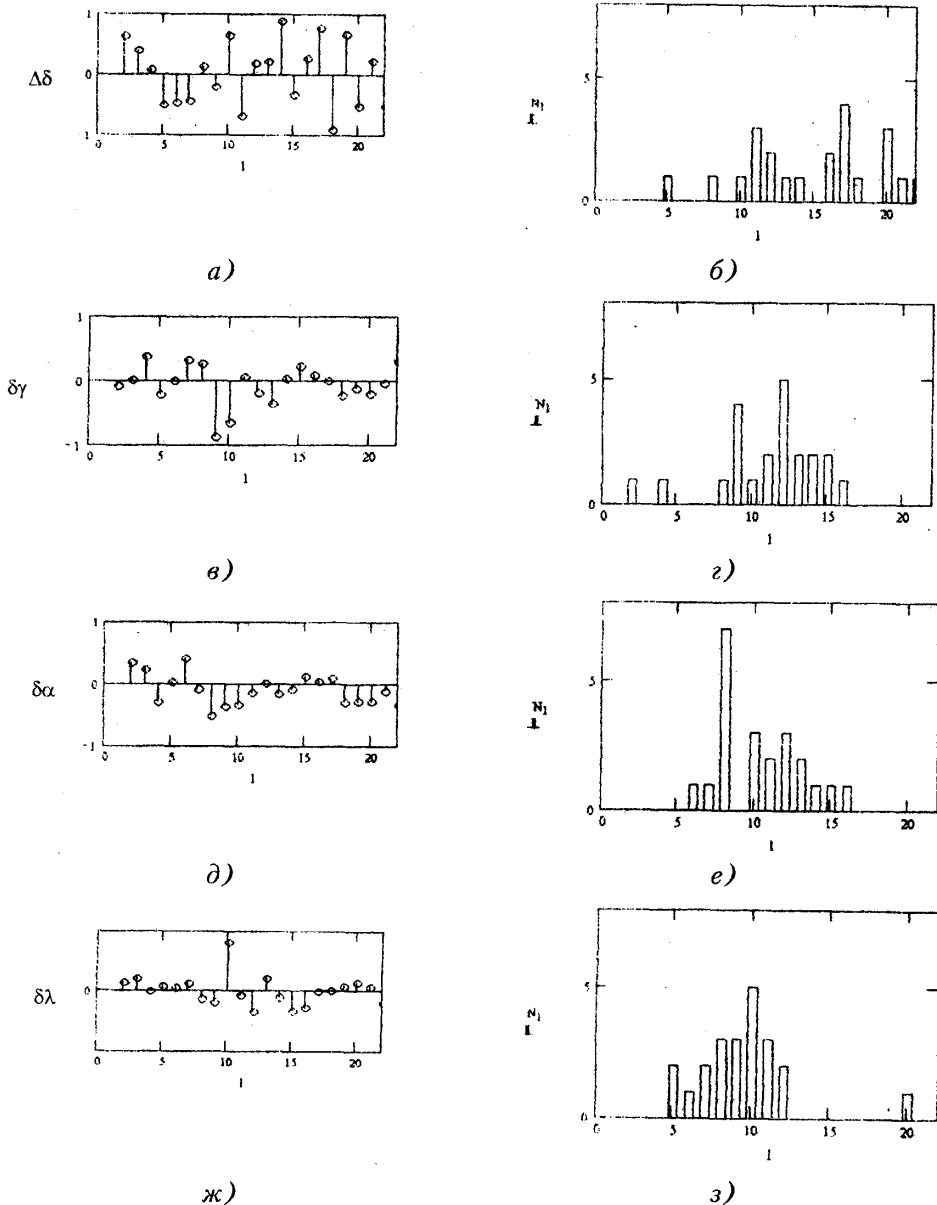


Рис. 5.17. Графічна інтерпретація числових вибірок експериментально визначених відхилень геометричних параметрів ножів та гістограми розподілу значень параметрів: а, б – зміщення кромки ножа; в, г – відхилення кута  $\gamma$ ; д, е – відхилення кута  $\alpha$ ; ж, з – відхилення кута  $\lambda$

В результаті статистичної обробки вибірок знайдені їх характерні значення для окремих параметрів (табл. 5.6).

Для всіх розглянутих параметрів середні значення загалом мало відрізняються від номінальних. Тому в табл. 5.6 маємо незначні середні величини ( $m$ ) вибірки відхилень. Розсіяння значень параметрів є більш суттєвим. Середньоквадратичні відхилення кутових розмірів ножів складають 12...50 кутових хвилин. Як впливає із аналізу вибірки значень положення кромки ножа ( $\Delta\delta$ ), даний розмір не може вважатись випадковою величиною.

Таблиця 5.6

Статистичні характеристики вибірки значень відхилень від номінальних значень параметрів різальної частини всіх 22-х ножів фрези косокутного різання

Відхилення геометричного параметра	Середнє значення $m$	Середньо-квадратичне відхилення $\sigma$	Вибіркова дисперсія $\sigma^2$	Ймовірний діапазон зміни параметра	
				нижня межа	верхня межа
$\Delta r_A$ , мм	-0,004	0,179	0,032	-0,54	0,533
$\Delta \gamma$ , град	-0,047	0,306	0,094	-0,965	0,87
$\Delta \lambda$ , град	0,038	0,718	0,515	-2,115	2,191
$\Delta \alpha$ , град	-0,102	0,25	0,063	-0,852	0,649
$\Delta \delta$ , мм	-0,04	0,604	0,365	-1,853	1,773

### 5.3. Встановлення закономірностей зносу різальних поверхонь ножів

Геометричні параметри різальної частини ножа змінюються під час роботи фрези. Відбувається знос різальної частини ножів. Знос передньої та задньої поверхонь ножа є суттєво різним. Характер зносу визначається робочим процесом різання.

З метою встановлення особливостей зносу ножів проведено комплекс експериментальних досліджень. Дослідження включали довготривалу обробку різних матеріалів фрезами косокутного різання. Здійснена обробка різних матеріалів: сталі 45 та чавуну СЧ21. В процесі обробки здійснювалось фотографування передньої та задньої поверхонь ножів. Збільшення розмірів при фотографуванні складало 50 разів. При цьому по фотографіях зношених поверхонь визначені розміри дефектів на поверхні ножа та динаміка і характер зносу. Нижче наведені фото поверхонь ножів для різної тривалості процесу обробки. Враховуючи збільшення при фотографуванні, на отриманих фото один міліметр розміру відповідає 0,02 мм фактичного розміру поверхні ножа. З метою узагальнення одержаних результатів час обробки подано у відносному вигляді. За одиницю прийнято період стійкості ножа. Періодом стійкості вважається час обробки або довжина траєкторії різання, або площа обробленої поверхні. В інтервалі часу до досягнення періоду стійкості знос поверхонь ножа незначний.

Це ілюструють фото поверхонь ножа в різні моменти часу (рис. 5.18, 5.19). Обробка здійснена при швидкості різання 13 м/с при товщині зрізуваного шару  $t = 0,1$  мм і подачі  $S = 0,25$  мм/зуб. Геометричні розміри розглянутого ножа склали:  $\lambda = 30^\circ$ ,  $\gamma = -10^\circ$ ,  $\alpha = 8^\circ$ ,  $R = 7$  мм. На передній поверхні ножа (рис. 5.18) майже не простежуються явища зносу половини періоду стійкості. При досягненні 80 % періоду стійкості на передній поверхні ножа виникає зона зносу шириною 0,04 мм. Відповідно на задній поверхні ножа простежується нерівномірна фаска зносу шириною приблизно 0,06 мм. Краї фаски зносу є нерівними, хоча загальна форма фаски зносу близька до сегменту (рис. 5.19, д). На задній поверхні ножа наявна зона стирання задньої поверхні. Її ширина сягає 0,2 мм при довжині вздовж кромки ножа 1,0...1,2 мм.

Після досягнення періоду стійкості на різальній кромці виникають відколи (див. рис. 5.18, е). Розміри відколу передньої поверхні: довжина – 0,16 мм; ширина – 0,03...0,04 мм. Обробка даним ножом після досягнення періоду стійкості призводить до його подальшого зносу. За час обробки, що склав 150 % періоду стійкості, виникла фаска зносу глибиною 0,02 мм (див. рис. 5.19, з). Відповідний знос задньої поверхні охоплював ділянку шириною 0,3 мм і довжиною 1,0 мм (див. рис. 5.19, з).

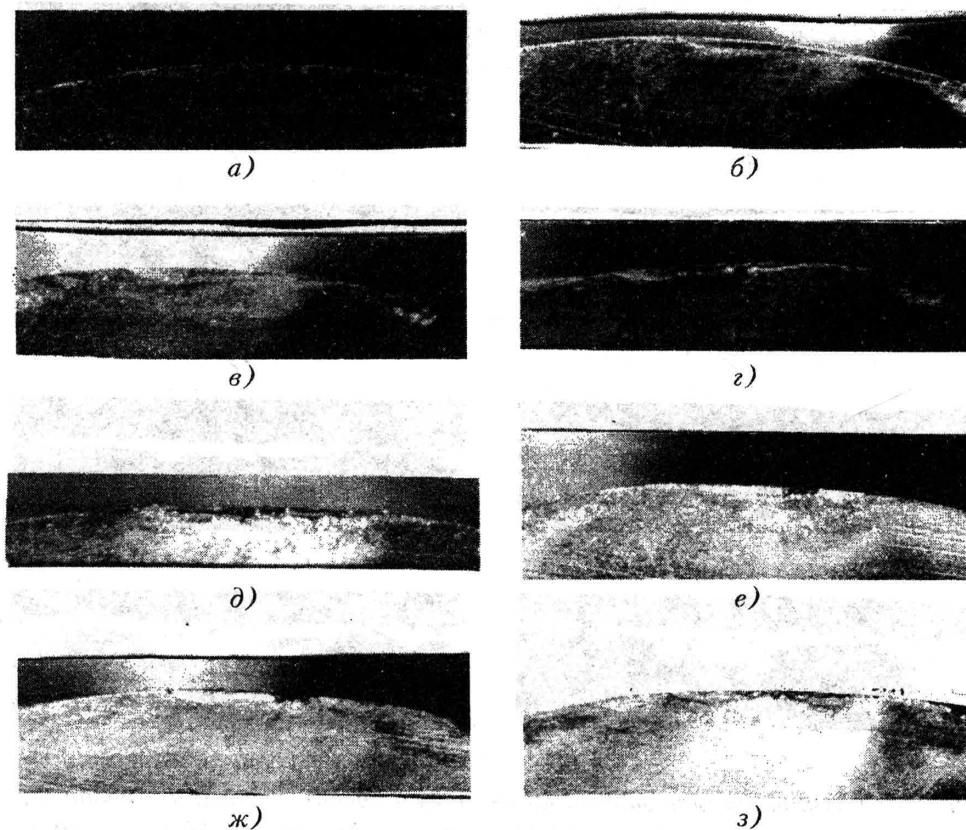


Рис. 5.18. Зміна передньої поверхні ножа протягом середнього періоду стійкості фрези: а – поверхня нового ножа; б – поверхня після виробітку 10 % середнього періоду стійкості; в – 20 %; г – 40 %; д – 80 %; е – 100 %; ж – 120 %; з – 150 %

Аналогічний характер зносу має місце для всіх ножів фрези, включаючи чистовий ніж. Це підтверджено комплексом експериментальних вимірювань. Період стійкості фрези визначено як усереднений період стійкості окремих ножів. Прийнято, що середній період стійкості досягається тоді, коли 75 % ножів мають на своїй поверхні дефекти більші 0,05 мм. Ці дефекти носять, як правило, ізовований характер і мають вигляд зламів чи викришування різальної кромки, або суттєві зміни конфігурації передньої чи задньої поверхні.

Середній період стійкості ножів не є часом, коли треба припиняти обробку. Чистові ножі, як правило, мають більший період стійкості. Тому можлива обробка деталей фрезою, в якій більшість ножів (без чистового) мають дефекти різальної кромки. Задовільна обробка поверхонь здійснювалась при перевищенні середнього періоду стійкості в 2 і більше разів.

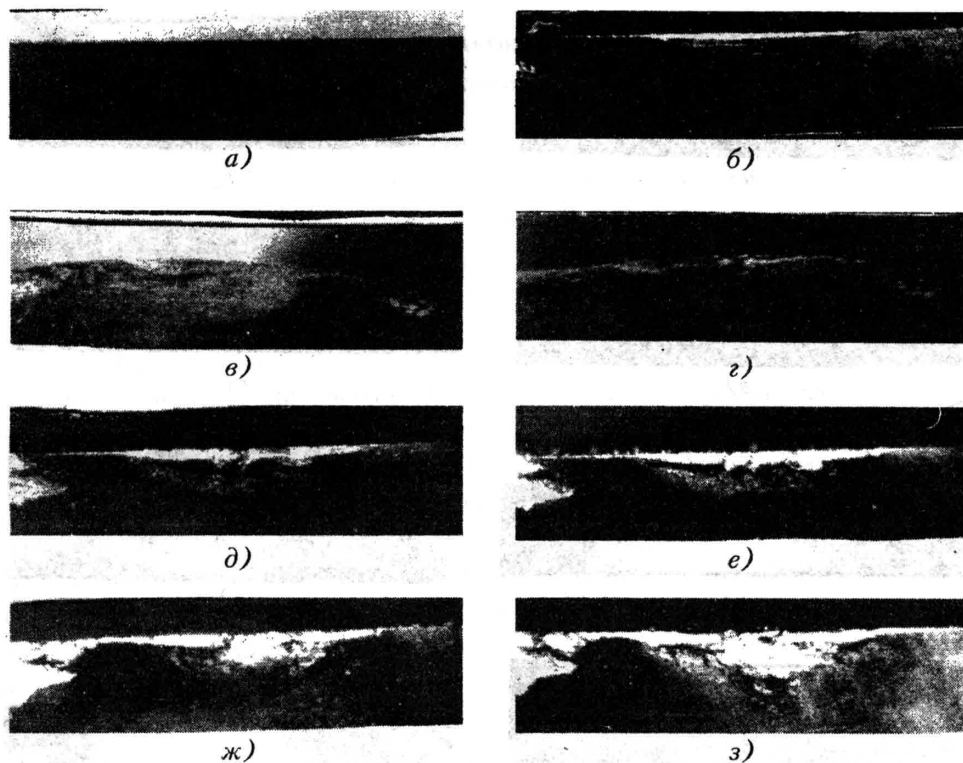


Рис. 5.19. Зміна вигляду задньої циліндричної поверхні ножа: а – новий ніж; б – поверхня після виробітку 10 % періоду стійкості; в – 20 %; г – 40 %; д – 80 %; е – 100 %; ж – 120 %; з – 150 %

На рис. 5.20 наведені фото передніх і задніх поверхонь ножів, які ілюструють характер їх зносу при значному перевищенні середнього періоду стійкості ножа фрези. Обробка здійснена при швидкості 4,15 м/с та подачі  $S = 0,25$  мм/зуб. Оброблюваний матеріал – сталь 45.

Характер зносу передньої поверхні ножа відповідає її крихкому руйнуванню. Дефекти типу відколів різальної кромки простежуються уже в кінці середнього періоду стійкості (див. рис. 5.20, в). Відколи мають ширину приблизно 0,06 мм при довжині відколу 0,1...0,14 мм. Глибина відколу досягає 0,02 мм, що простежується на фото задньої поверхні ножа (див. рис. 5.20, г). При цьому задня поверхня не має видимих слідів фаски зносу, що підтверджується порівнянням їх із поверхнею заточеного ножа (порівняння рис. 5.20, г та б). При подальшій роботі фрези (див. рис. 5.20, д, е) явища зносу прогресують, хоча досягнення часу обробки в 1,8 раза більшого за середній період стійкості не призводить до суттєвих змін геометрії різальної кромки (див. рис. 5.20, ж). Зміни геометрії ножа мають

місце при перевищенні часу роботи над періодом стійкості в 2,2 рази (див. рис. 5.20, з, і). Зміни геометрії проявляються у зменшенні радіуса ножа на 0,02...0,03 мм (див. рис. 5.20, з, стрілка Б). Задня поверхня ножа має фаску зносу, форма якої відповідає сегменту шириною 0,16 мм і довжиною 1,0 мм (див. рис. 5.20, і). Глибина западин на передній поверхні досягає 0,03 та 0,02 мм (стрілки В і Г на рис. 5.20, і). Загалом зміни форми ножа не є суттєвими (якщо даний ніж не використовується як чистовий).

Виникнення мікровідколів різальної кромки пов'язане із мікрорельєфом передньої та задньої поверхонь. Це підтверджується наведеними на рис. 5.21 фото різальних поверхонь ножа, які зафіксували його стан при напрацюванні середнього рівня стійкості. Обробка здійснювалась зі швидкістю різання 10 м/с (для деталі з чавуну СЧ21) при товщині зрізаного шару  $t = 0,1$  мм і подачі 0,4 мм/зуб. Мікровідколи виникають при досягненні періоду стійкості і мають вигляд зарубок, орієнтація яких співпадає із напрямком слідів зерен абразиву, що залишилися після заточувальної операції (див. рис. 5.21, е). Мікровідколи мають розміри порядку 0,06×0,02 мм і орієнтовані по слідах зерен. При подальшому використанні ножа розміри відколів збільшуються до 0,08×0,04 мм (див. рис. 5.21, з). Можливе об'єднання мікровідколів із утворенням заглибин, які простежуються як на передній, так і на його задній поверхні (див. рис. 5.21, ж).

Відколи різальної кромки звичайно призводять до утворення відколів передньої та задньої поверхонь ножа. Характерний вигляд відколу задньої поверхні ножа ілюструють фото, наведені на рис. 5.22. Відкол задньої поверхні виник з відколу різальної кромки при невеликому перевищенні середнього періоду стійкості (див. рис. 5.22, в, г). Розміри відколу кромки по передній поверхні ножа склали приблизно 0,05 мм в плані при глибині приблизно 0,01 мм. В процесі подальшої роботи ножа відкол на задній поверхні зростав. Його орієнтація відповідає слідам зерен абразиву, що залишилися після заточувальної операції. Відколи мають характерну трикутну форму зі стороною трикутника до 0,1 мм (див. рис. 5.22, ж). Відколи локалізуються в основному на задній поверхні і на різальній кромці. Передня поверхня ножа в даному випадку має незначні дефекти у вигляді вузької смуги (див. рис. 5.22, з).

Крім локальних відколів поверхні ножа, у деяких випадках відбувається руйнування деякої ділянки передньої та задньої поверхонь ножа (рис. 5.23). Ділянки зносу відображають ерозію різальної кромки. Вона проявляється у вигляді нерівномірної фаски довжиною приблизно 1 мм, нахиленої під кутом приблизно 30° до передньої поверхні ножа (див. рис. 5.23, ж, з). Фаска утворюється після досягнення середнього періоду стійкості (див. рис. 5.23, в, г) і в подальшому збільшується, краї фаски згладжуються і вона набуває характерної неправильної форми, близької до сегмента.



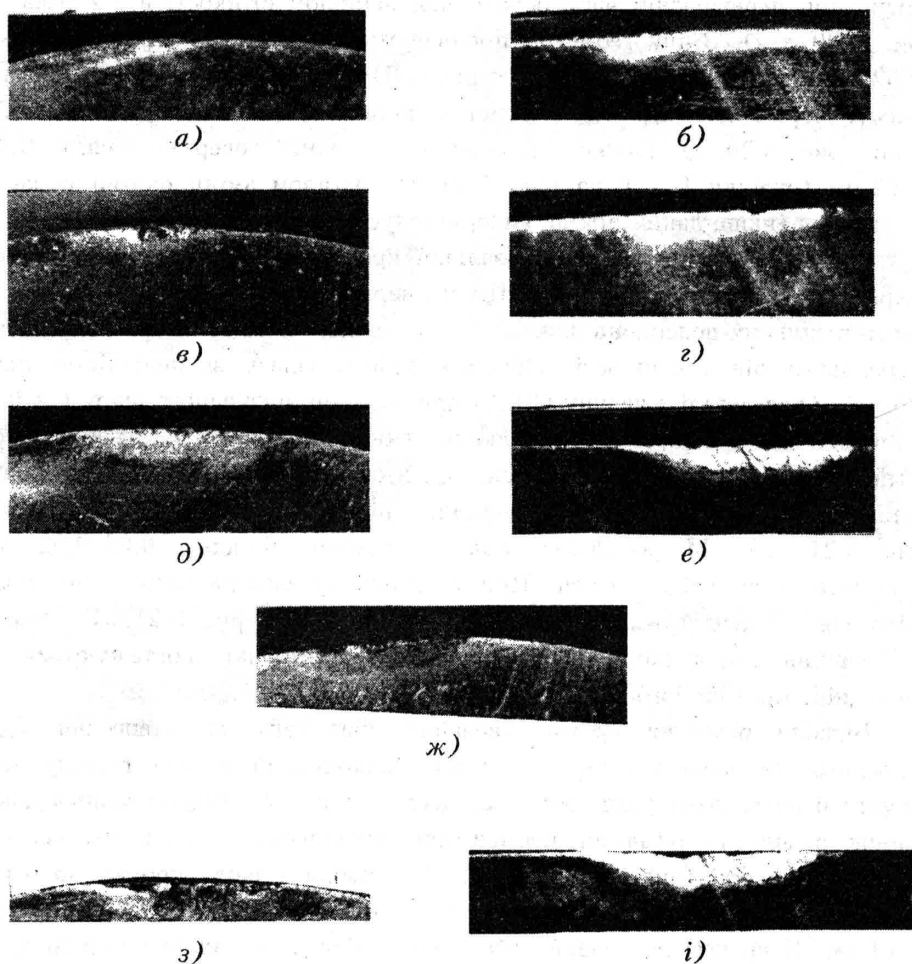


Рис. 5.20. Характер руйнування поверхонь ножа після відпрацювання ним середнього періоду стійкості: а, б – вигляд передньої та задньої поверхонь ножа перед обробкою; в, г – вигляд передньої та задньої поверхонь ножа в кінці середнього періоду стійкості; д, е – вигляд передньої та задньої поверхонь при напрацюванні 140 % часу середнього періоду стійкості; ж – вигляд передньої поверхні при напрацюванні 180 % часу періоду стійкості; з, і – передня та задня поверхні після напрацювання 220 % періоду стійкості

Локальні ділянки ерозії передньої та задньої поверхонь можуть комбінуватися з окремими відколами кромки ножа або відколами передньої чи задньої поверхонь (рис. 5.24). Окремий відкол, який виник в певний час обробки (див. рис. 5.24, в) на задній поверхні ножа, в подальшому росте і розвивається (див. рис. 5.24, д). Ерозія охоплює і передню поверхню ножа та різальну кромку (рис. 5.24, е). В подальшому ерозійна область і окремі

відколи об'єднуються в нерівну фаску зносу (довжиною приблизно 1 мм) на передній поверхні ножа.

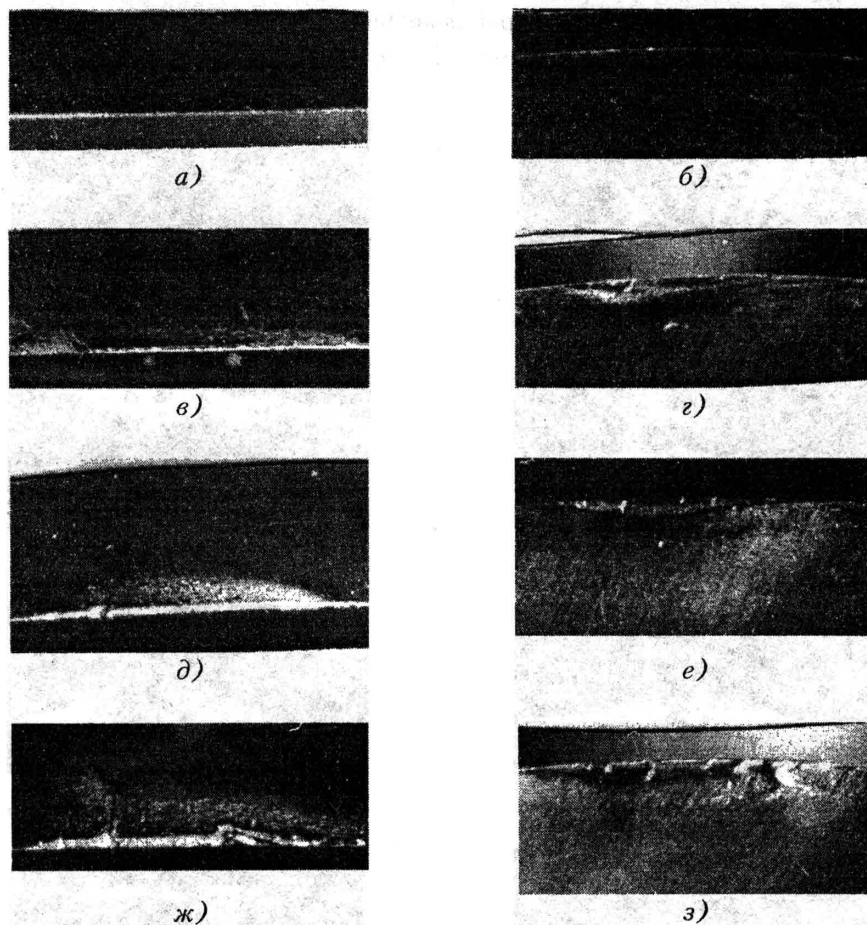


Рис. 5.21. Виникнення мікровідколів різальної кромки ножа при роботі фрези в кінці середнього періоду стійкості: а, б – задня та передня поверхні ножа після заточування; в, г – задня та передня поверхні ножа при роботі фрези в межах 80 % середнього періоду стійкості; д, е – задня та передня поверхні ножа при досягненні середнього періоду стійкості; ж, з – задня та передня поверхні ножа при напрацюванні 150 % часу середнього періоду стійкості

Особливими малоюмовірними видами зносу ножа є утворення на передній поверхні ізольованих заглибин (див. рис. 5.25). Дана форма ерозії поверхні виникла при обробці сталі 45 зі швидкістю різання 5,25 м/с при подачі 0,25 мм/зуб. Ніж мав наступні геометричні параметри:  $\gamma = -10^\circ$ ,  $\alpha = 8^\circ$ ,  $\lambda = -34^\circ$ ,  $R = 10$  мм.

Ізольована ерозійна зона у вигляді раковини виникла при досягненні

140 % середнього рівня стійкості. Раковини мали форму в плані близьку до прямокутної з розмірами  $0,5 \times 0,2$  мм при глибині приблизно  $0,12$  мм (див. рис. 5.25, в, г). В подальшому краї раковини згладжувались, хоча форма в плані залишалася без змін (див. рис. 5.25, д, е).

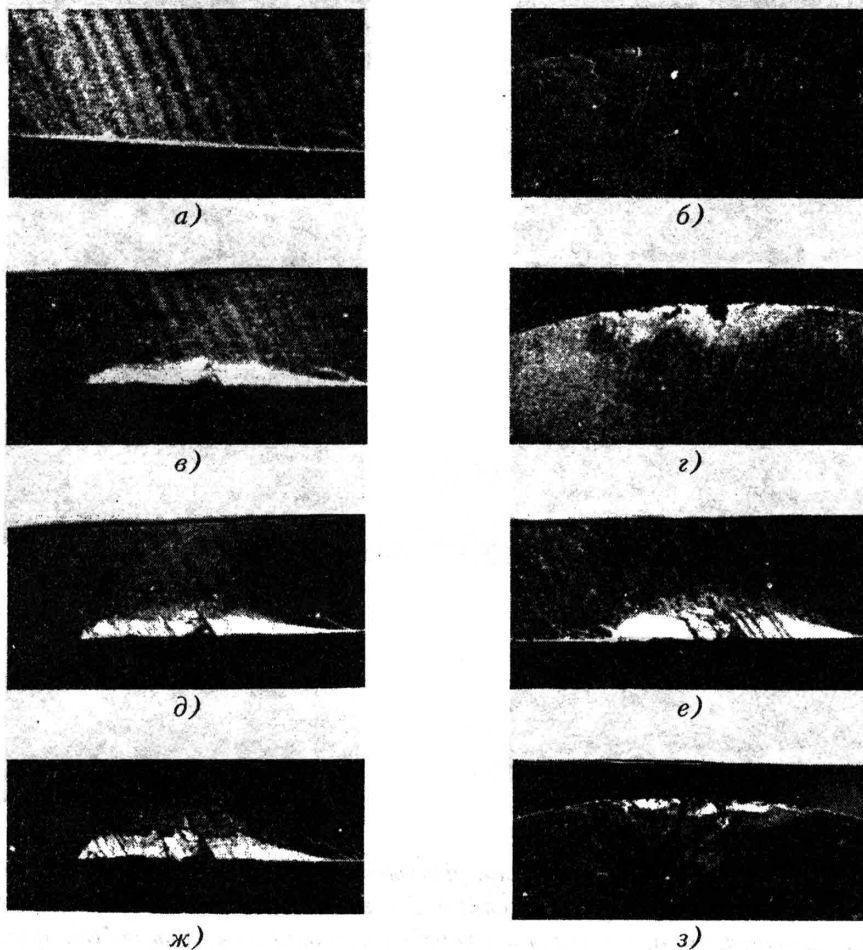


Рис. 5.22. Утворення відколу на задній поверхні ножа та його орієнтація в напрямку слідів шліфувальної операції задньої поверхні ножа: а, б – задня та передня поверхні ножа після заточування; в, г – задня та передня поверхні ножа після обробки, яка по часу відповідає 120 % середнього періоду стійкості; д, е – задні поверхні ножа після 150 % і 180 % середнього періоду стійкості; ж, з – задня та передня поверхні ножа після 220 % роботи відносно середнього періоду стійкості

Раковина залишалася незмінною і надалі, хоча поряд з нею виникала нова ділянка ерозії значно меншої інтенсивності (див. рис. 5.25, ж, з).

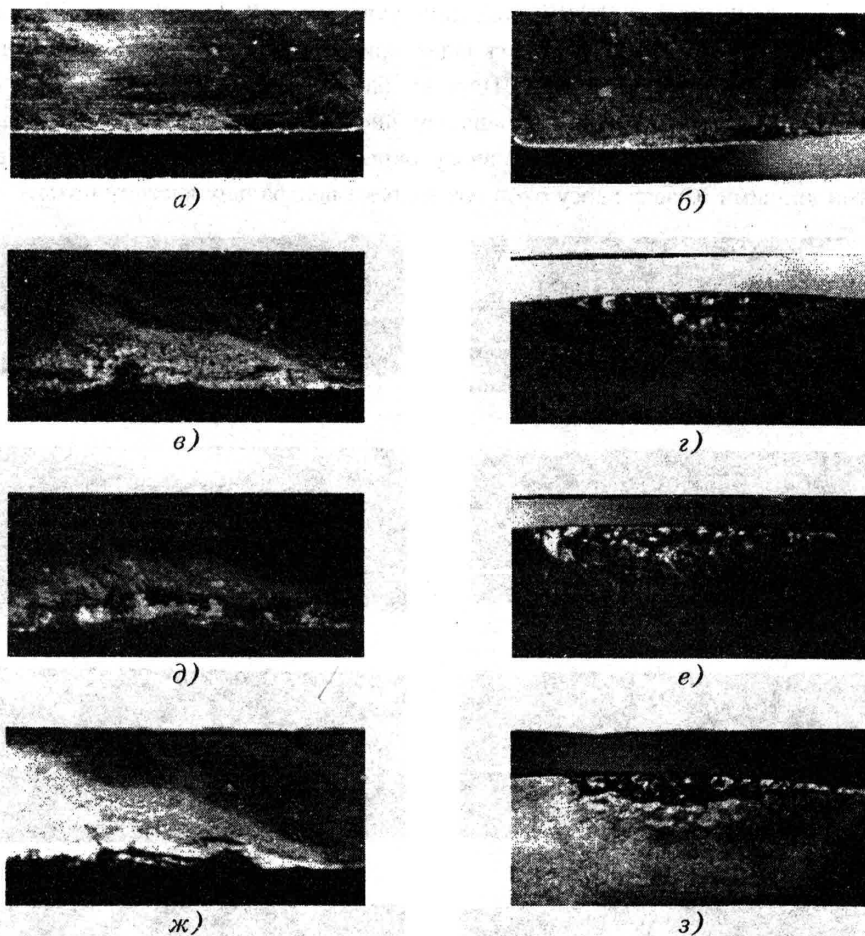
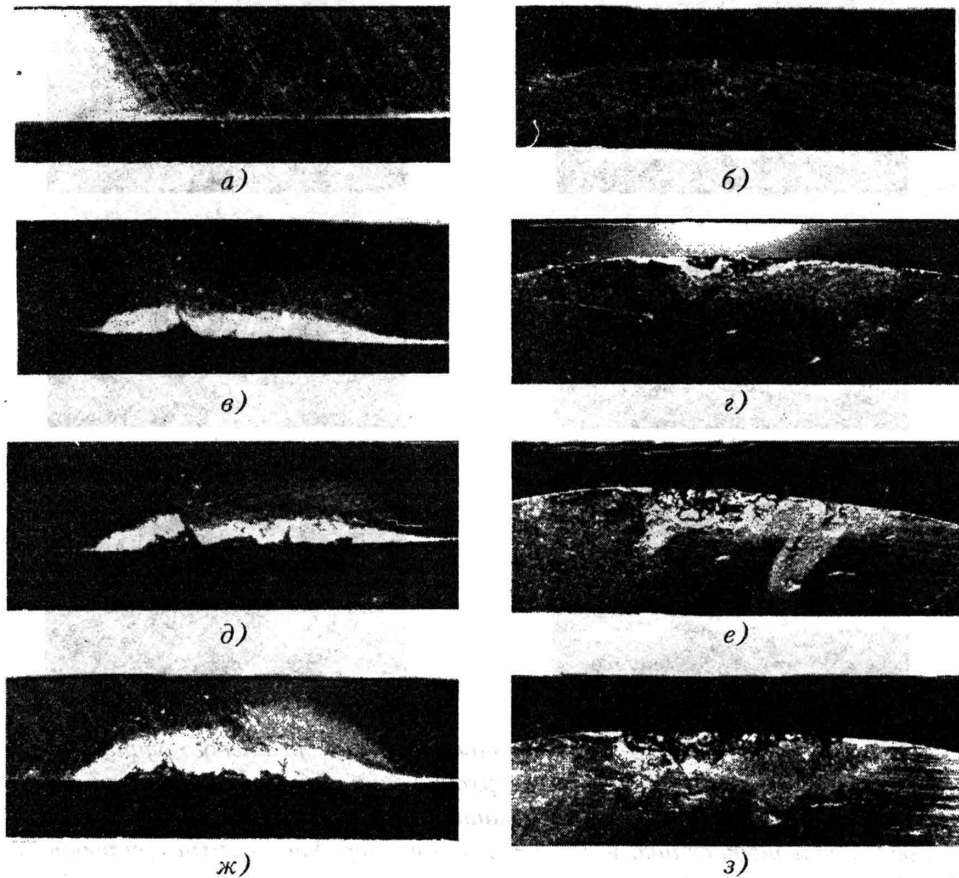


Рис. 5.23. Окремий різновид зносу ножа у вигляді локального руйнування (ерозії) передньої та задньої поверхонь ножа: а, б – вигляд задньої та передньої поверхонь після заточування; в, г – поверхні після досягнення середнього періоду стійкості; д, е – задня та передня поверхні при роботі в 150 % рівня стійкості; ж, з – відповідно при 220 % середнього рівня стійкості

В результаті експериментальних досліджень зносу різальних поверхонь ножів встановлено, що за час обробки, який рівний або менший за середній період стійкості ножів, суттєвого зносу їх різальних поверхонь не виявляється. Після досягнення середнього періоду стійкості і пізніше мають місце руйнування різальної кромки та ерозія передньої та задньої поверхонь ножів. Руйнування носять складний нерегулярний характер і визначаються численними факторами. На механізм руйнування особливо впливає крихке руйнування різальної кромки передньої та задньої поверхонь ножа. Після викришування дефект поверхні

загладжується і на різальних поверхнях утворюються фаски зносу. Довжина фаски зносу по різальній кромці складає приблизно 1 мм і мало залежить від параметрів оброблюваної деталі. Ширина фаски зносу досягає 0,04...0,1 мм в своєму найбільшому значенні. Із аналізу численних експериментальних даних випливає, що конфігурація фаски зносу окреслюється дугами кола або параболічними кривими. Фаска зносу охоплює зокрема центральну частину ножа.



*Рис. 5.24. Приклад інтенсивної ерозії передньої та задньої поверхонь ножа, яка ініціюється обмеженим відколом різальної кромки, що виник після відпрацювання періоду стійкості: а, б – задня та передня поверхні ножа після заточування; в, г – задня та передня поверхні ножа після відпрацювання 120 % періоду стійкості; д, е – фото поверхонь при напрацюванні 160 % періоду стійкості; ж, з – напрацювання 200 % періоду стійкості*

Результати експериментальних вимірювань зміни геометричної форми ножа узагальнені шляхом створення математичної моделі затуплення різальної кромки. Як показано раніше, затуплення кромки проходить по дузі

довжиною приблизно 1 мм і характеризується зміною форми ножа.

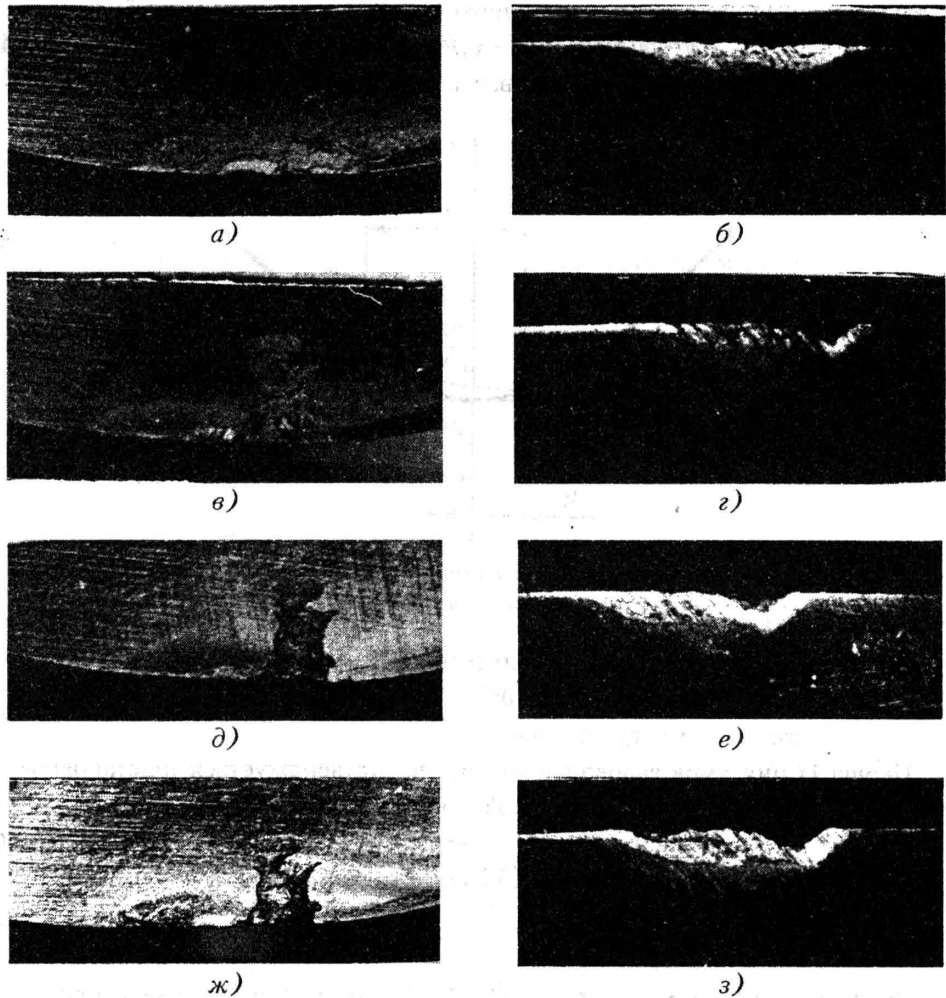


Рис. 5.25. Особливий вид зносу ножа, що супроводжується виникненням ізольованої заглибини на його передній поверхні: а, б – фото передньої та задньої поверхонь після відпрацювання 100 % середнього періоду стійкості; в, г – виникнення заглибини при напрацюванні 140 % середнього періоду стійкості; д, е – відпрацювання 160 % періоду стійкості; ж, з – відпрацювання 180 % періоду стійкості

За результатами досліджень встановлено характер затуплення кромки (рис. 5.26).

Затуплення кромки в першому наближенні визначається зміною осьових координат точок  $\Delta z_i$ , які входять у формулу (5.26). Ордината змінюється за

рахунок зносу так, як це показано на рис 5.26. Зміну осьових координат різальної кромки опишемо квадратичною параболою, рівняння якої:

$$\Delta z_i = a_1 \cdot (y - \tau_0) + a_2 \cdot (y - \tau_0)^2, \quad (5.34)$$

де  $a_1, a_2$  – коефіцієнти, які необхідно визначити через параметри фаски зносу.

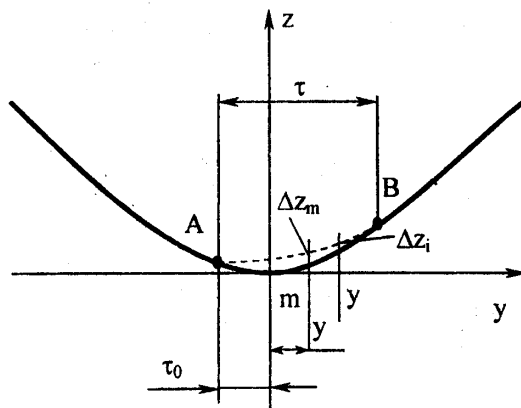


Рис. 5.26. Схема зміни розмірів і конфігурації різальної кромки ножа внаслідок зносу різальних поверхонь

Формула (5.34) повинна задовольняти умовам:

$$\begin{aligned} \text{при } y = -\tau_0 \quad \Delta z_i &= 0; \\ \text{при } y = \tau - \tau_0 \quad \Delta z_i &= 0. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Перша із цих умов задовольняється, що підтверджується підстановкою із формули (5.34). Із другої умови (5.35) випливає:

$$a_1 \tau + a_2 \cdot \tau^2 = 0 \quad \text{або} \quad a_1 + a_2 \cdot \tau = 0. \quad (5.36)$$

Визначимо похідну залежності (5.34):

$$\frac{dz_i}{dy} = a_1 + 2a_2 \cdot (y + \tau_0). \quad (5.37)$$

Знайдемо екстремум залежності (5.34). Це буде мати місце за умови:

$$\frac{dz_i}{dy} = 0.$$

Враховуючи останню рівність, із (5.37) одержимо рівняння, яке визначає координату точки екстремуму:

$$a_1 + 2a_2 \cdot (y_m + \tau_0) = 0. \quad (5.38)$$

В точці екстремуму ширина фаски зносу є максимальною і рівною  $\Delta z_m$ . Відповідно для точки екстремуму із (5.34) одержимо:

$$\Delta z_m = a_1 \cdot (y_m + \tau_0) + a_2 \cdot (y_m + \tau_0)^2 = 0. \quad (5.39)$$

Прийmemo, згідно із одержаними результатами експериментів, що найбільша ширина фаски зносу знаходиться на її середині. Це означає, що екстремум знаходиться посередині між точками А і В (див. рис. 5.26). Відповідно

$$y_m = \frac{\tau}{2} - \tau_0. \quad (5.40)$$

Підставивши значення координати точки екстремуму із (5.40) в (5.38) і (5.39), одержимо систему рівнянь для знаходження коефіцієнтів  $a_1$ ,  $a_2$ :

$$\begin{cases} a_1 + a_2\tau = 0 \\ \frac{a_1}{2}\tau + \frac{a_2}{4}\tau^2 = \Delta z_m \end{cases} \quad (5.41)$$

Перше із рівнянь (5.41) відповідає рівнянню (5.36), одержаному із умови (5.35). Тому розв'язок системи (5.41) не буде протирічити умові (5.35).

Розв'язок рівняння (5.41) знайдемо методом підстановки. В результаті одержимо:

$$a_1 = \frac{4 \cdot \Delta z_m}{\tau}; \quad a_2 = -\frac{4 \cdot \Delta z_m}{\tau^2}. \quad (5.42)$$

Із врахуванням одержаних значень коефіцієнтів формула (5.34) набуде вигляду:

$$\Delta z_i = \frac{4 \cdot \Delta z_m}{\tau} (y + \tau_0) - \frac{4 \cdot \Delta z_m}{\tau^2} (y + \tau_0)^2. \quad (5.43)$$

В дану формулу входить ряд параметрів:  $\tau$ ,  $\tau_0$ ,  $\Delta z_m$ . Найсуттєвішим з них є параметр  $\Delta z_m$ , який визначає максимальну ширину фаски зносу. Цей параметр визначений за результатами експериментів. Визначення ширини фаски зносу проведене для широкого кола зміни параметрів процесу різання. Враховано, що зміна ширини фаски зносу носить зростаючий характер із випадковими значеннями сусідніх значень. За результатами експериментальних вимірювань розроблена структурна математична модель процесу зносу різальної поверхні ножа. Для кожного з ножів використовується своя структурна модель процесу зносу. Моделі окремих ножів відрізняються наявністю випадкових змін зносу різальної кромки ножа в часі. В цілому випадкові зміни інтегруються в часі, формуючи випадкову складову ширини фаски зносу. Характерна структурна математична модель для визначення ширини фаски зносу наведена на рис. 5.27.

Математична модель призначена для формування векторного виходу у вигляді максимальної ширини фасок зносу чотирьох ножів, які утворюють одну логарифмічну спіраль. Модель має два ланцюги, призначені для формування випадкових і детермінованих складових ширини фаски зносу.

Ланцюг формування випадкових складових включає блок Random number та інтегруючий блок Integrator. Ці блоки генерують випадковий процес зміни розміру фаски зносу із врахуванням накопичення руйнувань.

Ланцюг для детермінованих змін розмірів фаски включає блоки, які формують суму лінійної та експоненціальної залежностей ширини фаски зносу від часу.

Модель включає блок обмеження Dead Zone, який враховує відсутність суттєвих змін різальних поверхонь в межах середнього періоду стійкості.



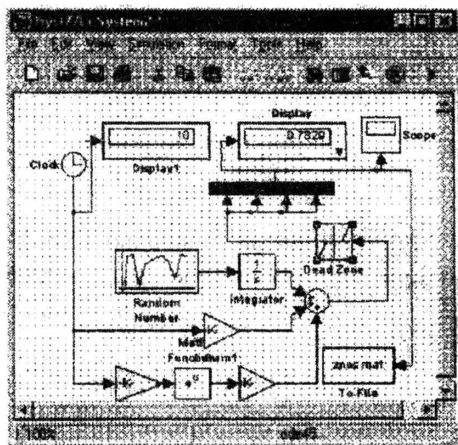


Рис. 5.27. Структурна математична модель, яка служить для розрахунку максимальної ширини фаски зносу різального ножа, одержаної шляхом теоретичного узагальнення результатів вимірювань фаски зносу

Результати розрахунків зміни ширини фаски зносу в часі наведені на рис. 5.28.

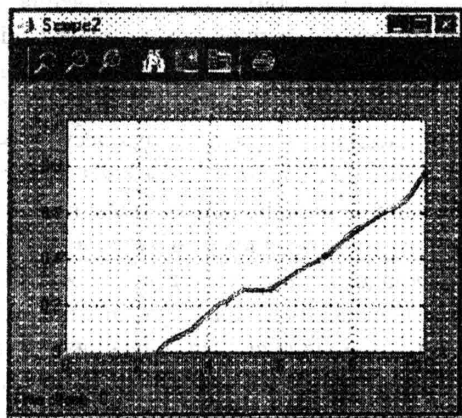


Рис. 5.28. Результати розрахунків окремої реалізації випадкового процесу зміни фаски зносу на різальній поверхні ножа

Розрахунки виконані в частинах середнього періоду стійкості ножа (аргумент графіка). Значення ширини фаски зносу подані в міліметрах.

На графіку випадкового процесу зміни ширини фаски зносу наявні нерегулярні зміни, які відповідають процесу руйнування ножа.

В процесі обробки заготовки форма різальної поверхні ножа змінюється. При цьому особливо важливо врахувати як мікро-, так і макрогеометрію ножа.

Геометричні розміри ножа в ідеальному випадку утворюють еліпс, який

описується рівнянням (5.27). Дане рівняння в декартовій системі координат (див. рис. 5.26) має вигляд:

$$z = - \left[ b + \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}} \right], \quad (5.44)$$

де  $b$  та  $a$  – напівосі еліпса.

Геометрія ножа відрізняється від правильної еліптичної форми.

Запишемо відхилення геометрії ножа у вигляді розкладу в ряд Тейлора в околі точки  $y = 0$ :

$$\Delta z_1 = \Delta z_0 + C_{z1}y + C_{z3}y^2 + \dots \quad (5.45)$$

Враховуючи, що в точка  $y = 0$  є мінімумом кривої, похідна  $\Delta z' = 0$  і, отже,  $C_{z1} = 0$  і  $\Delta z_0 = 0$ . Тому відхилення геометрії різальної кромки буде дорівнювати:

$$\Delta z_1 = C_{z3}y^2. \quad (5.46)$$

Зношування поверхні ножа має місце лише з боку різання. Враховуючи, що зношування описується залежністю (5.43), яка представляє собою параболу другого порядку, можна зробити висновок, що з боку, де відбувається різання, форма ножа має відхилення вигляду:

$$\Delta z_2 = C_1y - C_2y^2. \quad (5.47)$$

Параметри  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  визначаються за результатами експериментів. Відповідно до даних залежностей розраховуються відхилення геометричної форми ножа від ідеального еліпса. Нижче наведені розраховані типові відхилення форми кромки ножа від еліпса. Експериментальні дані представлені у вигляді трьох коефіцієнтів, а розрахунки зроблені засобами пакету MathCAD (рис. 5.29).

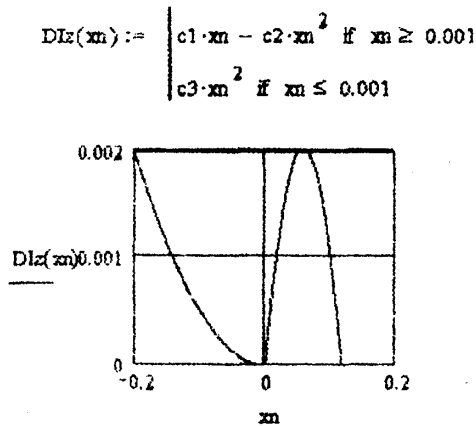


Рис. 5.29. Опис відхилень форми ножа від правильного еліпса та результати розрахунків, які узагальнюють експериментальні дані

Крім детермінованих відхилень форми різальної кромки ножа від

правильного еліпса, мають місце і відхилення мікрогеометрії кромки.

Відхилення мікрогеометрії представляють собою випадковий процес із певним значенням середньоарифметичного відхилення профілю  $Ra = 0,3...0,4$  мкм.

Випадкову форму різальної кромки як випадковий процес можна моделювати його канонічним розкладом виду:

$$\Delta z_c = \sum_{k=0}^N U_k \cos(k\omega_0 y) + V_k \sin(k\omega_0 y), \quad (5.48)$$

де  $U_k, V_k$  – випадкові величини з певним законом розподілу і однаковими дисперсіями.

Для математичного моделювання випадкових змін різальної кромки використаний інструментарій пакету MathCAD. На рис. 5.30 наведений фрагмент документа MathCAD та результати розрахунків параметрів мікропрофілю різальної кромки.

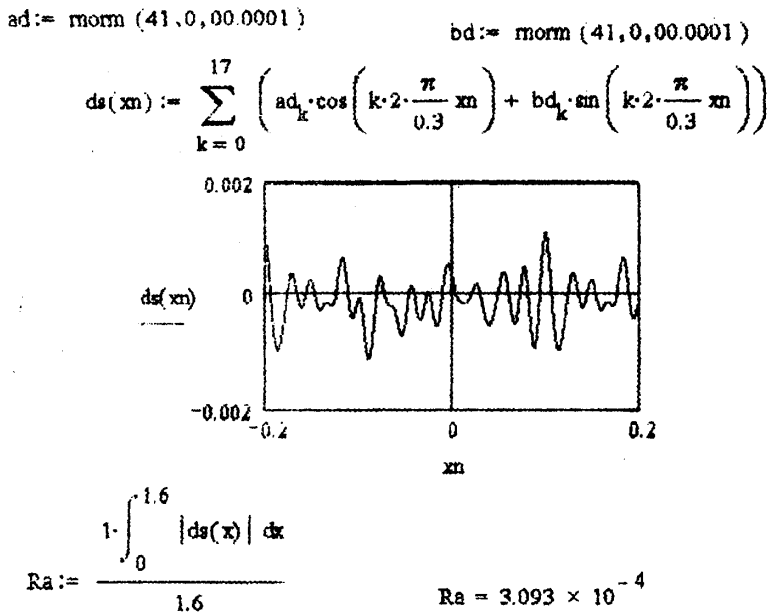


Рис. 5.30. Фрагмент документа MathCAD, в якому форма різальної кромки ножа подана у вигляді канонічного розкладу випадкового процесу, причому випадкові коефіцієнти  $U_k$  та  $V_k$  є випадковими величинами з нормальним законом розподілу

Випадкові коефіцієнти задані як випадкові числа з нормальним законом розподілу і обчислені за допомогою вбудованої функції пакету MathCAD  $\text{gnorm}$ .

Знайдене значення  $Ra = 0,31$  мкм відповідає параметру шорсткості різальної кромки.

### 5.4. Математичне моделювання силових характеристик процесу різання

Математичне моделювання силових характеристик процесу різання є основною для аналізу закономірностей формування обробленої поверхні. Математичне моделювання служить для розрахунку силових факторів, які визначають деформативність системи “шпиндель – інструмент”. Математична модель враховує особливості робочого процесу різання матеріалу заготовки.

Процес обробки починається при врізанні ножа у поверхню заготовки (рис. 5.31).

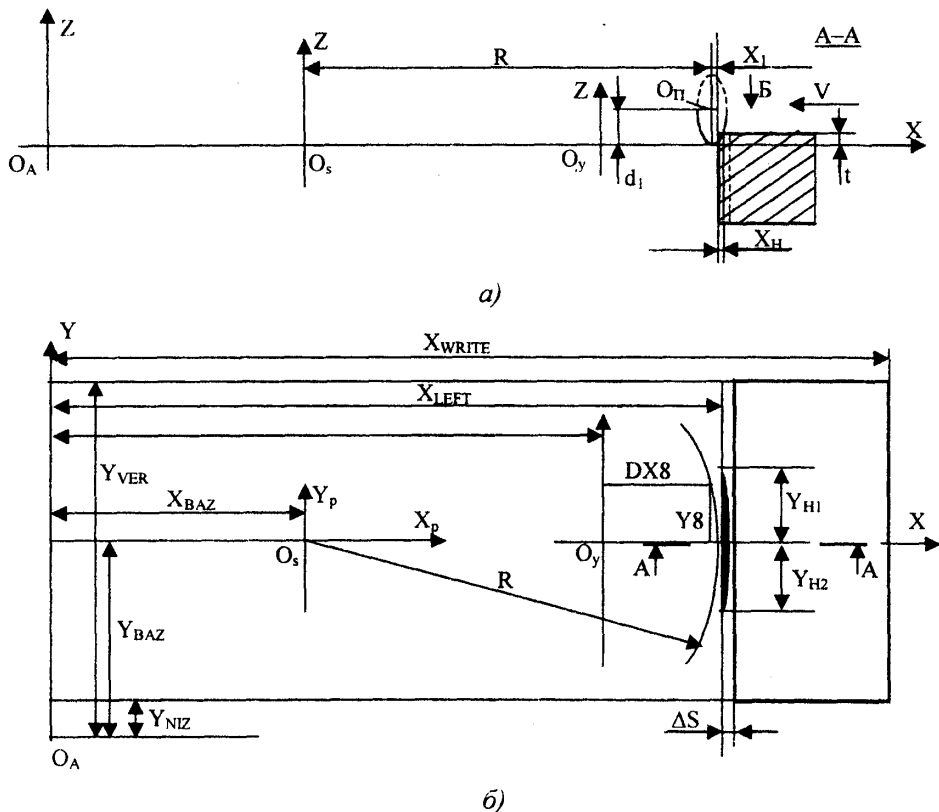


Рис. 5.31. Схема врізання ножа в поверхню заготовки:  
 а – переріз заготовки при найбільшому входженні в неї ножа;  
 б – вигляд обробленої поверхні зверху

При обробці заготовки одним ножом при першому врізанні ножа в заготовку утворюється сегментна лунка, яка характеризується довжиною та шириною  $X_H$ . Форма лунки залежить від радіуса розташування ножа  $R$ ,

товщини зрізаного шару  $t$  та швидкості  $V$ .

Наявність руху заготовки (швидкості подачі) призведе до виникнення асиметрії лунки ( $Y_{нл} = Y_{ер}$ ). Враховуючи, що складова швидкості різання, яка відповідає руху ножа в тангенціальному напрямку, набагато більша швидкості подачі, асиметрію лунки можна не враховувати.

Розглянемо типовий режим обробки і основні його параметри. Обробка характеризується частотою обертання шпинделя  $n$ , подачею  $S$  і товщиною  $t$ :  $n = 1200$  об/хв;  $t = 0,7$  мм;  $S = 15$  мм/хв за один оберт шпинделя. Подача заготовки (подача на зуб) буде приблизно  $\Delta S = 0,04$  мм.

В залежності від початкового положення заготовки, врізання ножа в її поверхню буде різним. На рис. 5.33 показано врізання ножа в поверхню заготовки при різних її початкових положеннях.

Якщо заготовка знаходиться у деякому середньому положенні  $K_0$ , вона зустрічається із ножом у точці  $K_\Phi$  і після врізання ножа глибина лунки  $K_\Phi K_L = \Delta S_1$  буде меншою подачі на зуб  $\Delta S$ .

Якщо врізання ножа в заготовку відбувається в точці  $K_1$ , то врізання буде максимальним  $K_a K_o$ . При знаходженні заготовки в точці  $K_m$  до своєї зустрічі з ножом вона зміститься на величину подачі на зуб і лише торкнеться ножа в точці  $K_1$ . Таким чином, перша лунка буде мати деякий невизначений переріз (затушований сегмент на рис. 5.32).

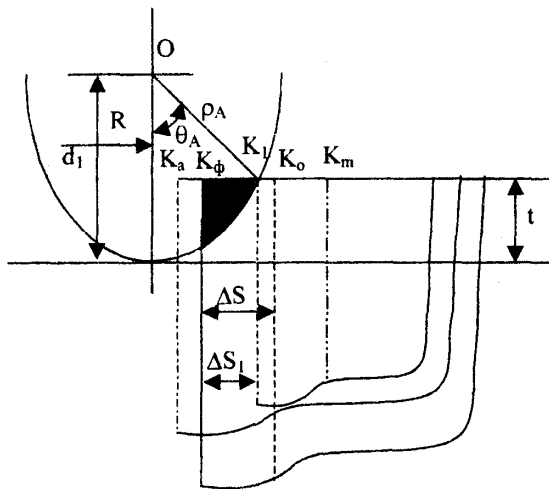


Рис. 5.32. Вплив початкового положення заготовки на формування першої лунки

Друга лунка і наступні лунки на поверхні заготовки будуть періодичними поверхнями, утвореними обертанням еліптичного контура ножа відносно осі фрези (рис. 5.33).

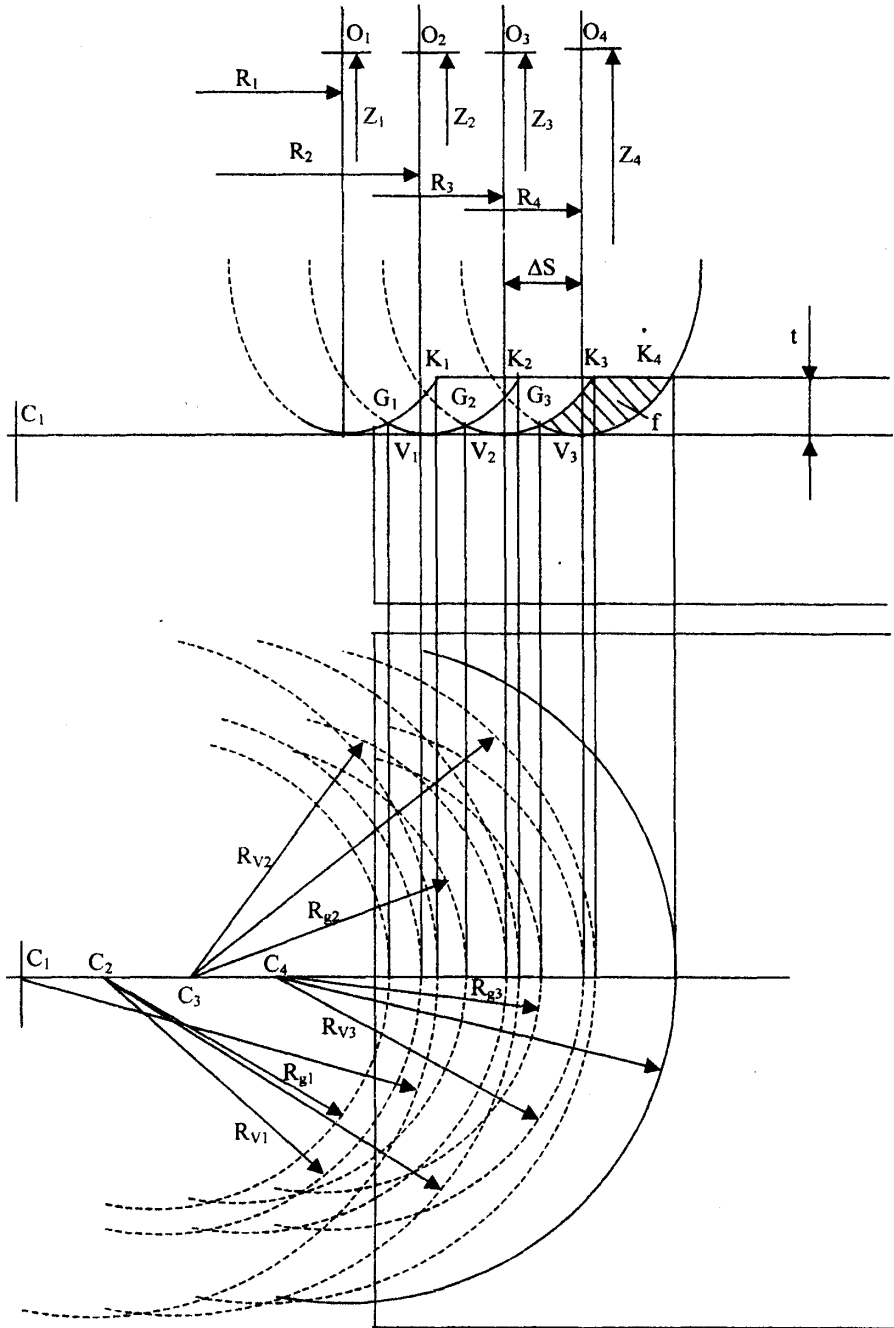


Рис. 5.33. Утворення концентричних лунок на поверхні заготовки при наявності одного ножа еліптичної форми при відсутності похибок геометрії та кінематики фрези

Рівномірне зміщення заготовки відносно фрези призводить до появи на поверхні заготовки концентричних канавок. При цьому на поверхні утворюється хвилястий рельєф із виступами  $G_1, G_2, \dots$  та западинами  $V_1, V_2, \dots$

Площа зрізаного шару дорівнює площі контуру  $G_3V_3K_4K_3$ .

Ця площа наближено дорівнює добутку товщини зрізаного шару на подачу  $f \cong t \cdot \Delta S$ .

Статична сила різання, що виникає при різанні одним ножом, може бути описана залежністю:

$$P_c = K t^m (\Delta S)^n,$$

де  $m$  та  $n$  – показники степенів;  $K$  – коефіцієнт різання.

Таким чином, при різанні за схемою, наведеною на рис. 5.33, виникає постійна сила різання. Дана постійна сила може бути лише в ідеальному випадку при відсутності похибок геометрії та кінематики фрези.

Враховуючи наявність похибок, буде змінюватися як величина подачі на зуб, так і глибина різання (рис. 5.34).

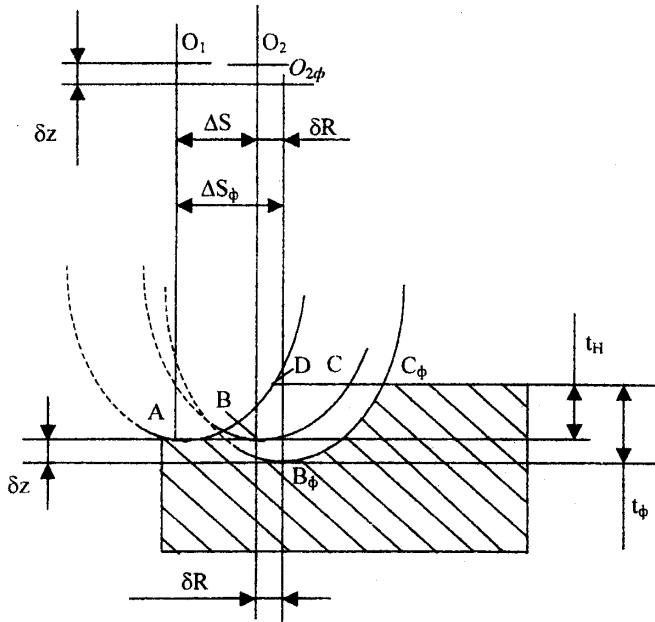


Рис. 5.34. Формування перерізу зрізаного шару при довільних (в тому числі і випадкових) зміщеннях положення двох сусідніх ножів

Глибина різання буде визначатись відношеннями статичними і динамічними деформаціями шпинделя і стола. Зміна подачі буде визначатись в основному змінами випадкового радіального положення ножа. Вищевказані зміни мають випадковий характер і визначаються всім комплексом параметрів динамічної системи верстата. Тому статичну силу різання визначимо у вигляді:

$$P_c = K \left[ t \cdot \frac{Z}{Z_H} \right]^m \cdot \left[ \Delta S \cdot \frac{R}{R_H} \right]^n, \quad (5.48)$$

де  $Z$ ,  $R$  – змінні в часі вертикальне та радіальне положення ножа;  $Z_H$ ,  $R_H$  – постійні (номінальні) значення вертикального і радіального положення.

Розрахунки сили різання, що діє на один ніж, здійснені спеціальною структурною математичною моделлю (рис. 5.35).

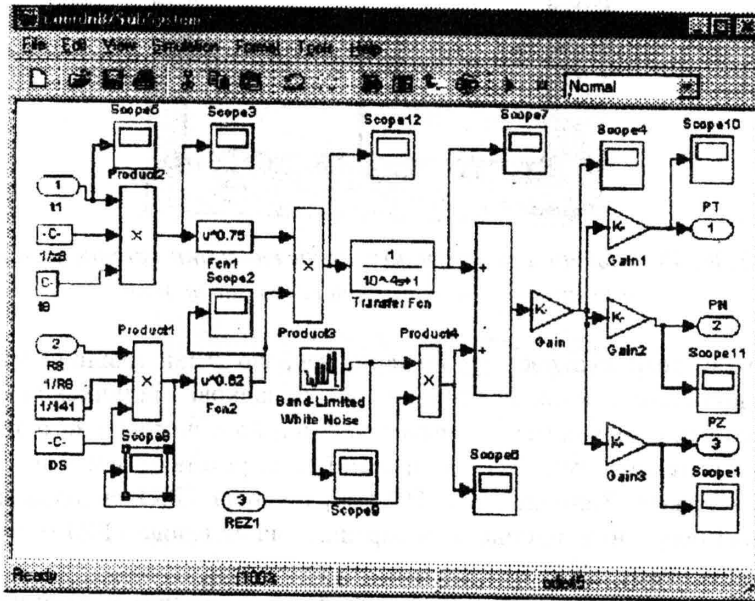


Рис. 5.35. Структурна математична модель, призначена для розрахунку вектора сили різання, що діє на окремий ніж фрези

Математична модель призначена для розрахунку проєкцій сили різання, що діє на окремий ніж. Модель враховує вплив випадкових факторів, у тому числі випадкове положення ножа відносно заготовки на статичну складову сили різання. В моделі реалізовано визначену експериментальну нелінійну статичну залежність сили різання від глибини різання і подачі. Загальна сила різання одержана в моделі у вигляді статичної та динамічної складових.

Динамічна складова враховує запізнення в часі зміни сили різання відносно зміни площі зрізаного шару. Крім того, динамічна складова моделі включає випадкові зміни сили різання в динаміці. Напрямок сили різання задано у відповідності із виконаними експериментальними дослідженнями.

Входами математичної моделі (рис. 5.35) є фактичні значення положення ножа по вертикалі ( $t_1$ ) та його радіальна координата ( $R_8$ ). Положення ножа по вертикалі змінюється при врізанні ножа в заготовку і має випадкові відхилення від номінального значення. Положення ножа визначає глибину різання і реєструється при математичному моделюванні блоком Scope5.



Оглядове вікно блока наведене на рис. 5.36.

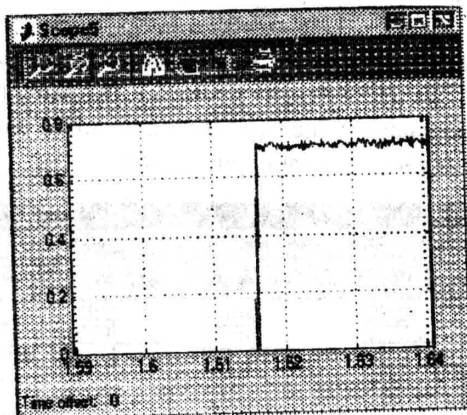


Рис. 5.36. Результати розрахунків зміни товщини зрізаного шару при візанні ножа в поверхню заготовки

Із аналізу розрахункової кривої випливає, що зміна товщини зрізаного шару відбувається майже миттєво, а випадкові відхилення товщини зрізаного шару знаходяться в межах  $\pm 5\%$  від його номінального значення.

Виходами моделі (рис. 5.36) є проєкції сили різання в системі координат, зв'язаної з ножом. Тангенціальна (PT) і радіальна (PN) складові визначені відносно осі обертання шпинделя, а вертикальна складова (PZ) – в напрямку осі обертання шпинделя.

Статичні нелінійні складові сили різання, що входять у формулу (5.48), обчислюються блоками моделі Fcp1 та Fcp2, а статична сила різання розраховується блоком множення Product3.

Загалом залежність статичної сили різання в часі змінюється аналогічно зміні товщини зрізаного шару (рис. 5.37). Це підтверджується виведенням результатів розрахунків за допомогою блока Score5. Оглядове вікно блока, в якому наведене розрахункове значення статичної сили різання, наведене на рис. 5.38.

Зміни сили різання в динаміці відбуваються з причини наявності запізнення сили в порівнянні зі зміною припуску. Згідно з [Кудінов], в першому наближенні зміна сили різання в динаміці визначається диференціальним рівнянням:

$$T_p \frac{dP_d}{dt} + P_d = K_p \cdot \alpha(t), \quad (5.49)$$

де  $P_d$  – динамічна складова сили різання;

$T_p$  – постійна часу процесу різання ( $T_p \approx 10^{-4}$  с);

$K_p$  – коефіцієнт передачі процесу різання;

$\alpha(t)$  – зміна площі зрізаного шару.

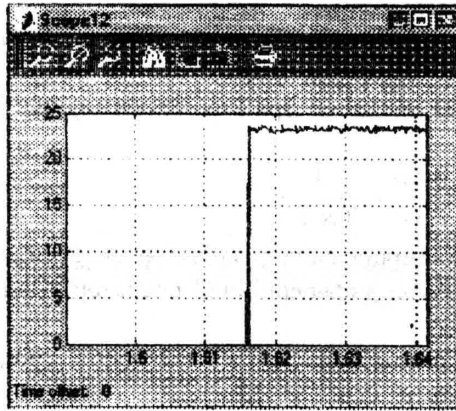


Рис. 5.37. Результати розрахунків статичної сили різання, що відповідає врізанню ножа в заготовку

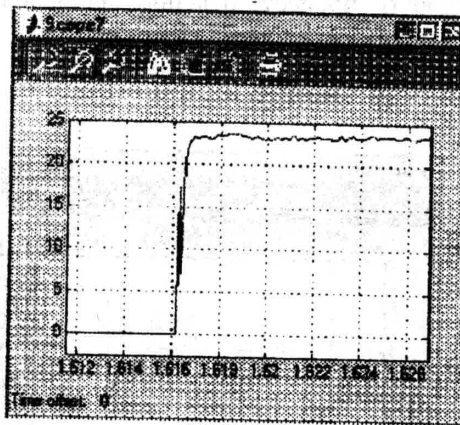


Рис. 7.38. Розрахункові значення сили різання, одержані із врахуванням динамічних властивостей процесу різання

Визначимо статичну силу різання із рівняння (5.49), поклавши в ньому  $\frac{dP_d}{dt} = 0$ . Остаточно одержимо:

$$P_C = K_p \alpha(t). \quad (5.50)$$

Об'єднавши залежності (5.50) і (5.49), одержимо співвідношення між статичною та динамічною складовими сили різання:

$$T_p \frac{dP_d}{dt} + P_d = P_C(t). \quad (5.51)$$

Виконаємо перетворення рівняння (5.51) по Лапласу:

$$(T_p s + 1) P_d(s) = P_C(s), \quad (5.52)$$

де  $s$  – оператор Лапласа;

$P_d(s)$ ,  $P_C(s)$  – зображення по Лапласу динамічної та статичної складових сили різання.

Із рівняння (5.52) знайдемо трансформуючу функцію процесу різання у вигляді:

$$W_p(s) = \frac{P_d(s)}{P_C(s)} = \frac{1}{T_p s + 1} \quad (5.53)$$

Таким чином, динамічна сила різання може бути одержана із статичної залежності множенням на диференційний оператор у вигляді трансформуючої функції.

Ця процедура реалізована в математичній моделі (рис. 5.35) за допомогою блока Transfer Fcn.

Вплив динамічних властивостей процесу різання проявляється у запізненні значення сили відносно її статичної зміни. Це пояснюється запізненням сили різання від часу відносно зміни площі зрізуваного шару (рис. 5.38).

Динамічні властивості процесу різання проявляються у знаходженні високочастотних складових статичної сили різання. Це підтверджується порівнянням розрахункових графіків статичної (рис. 5.38) і динамічної (рис. 5.39) сил різання.

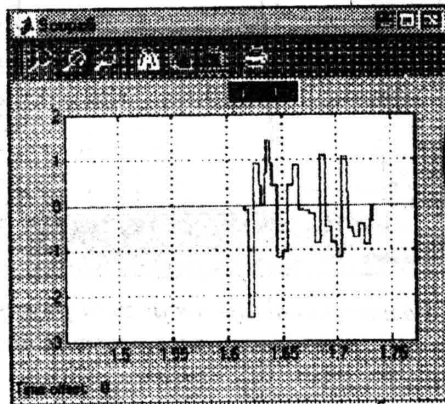
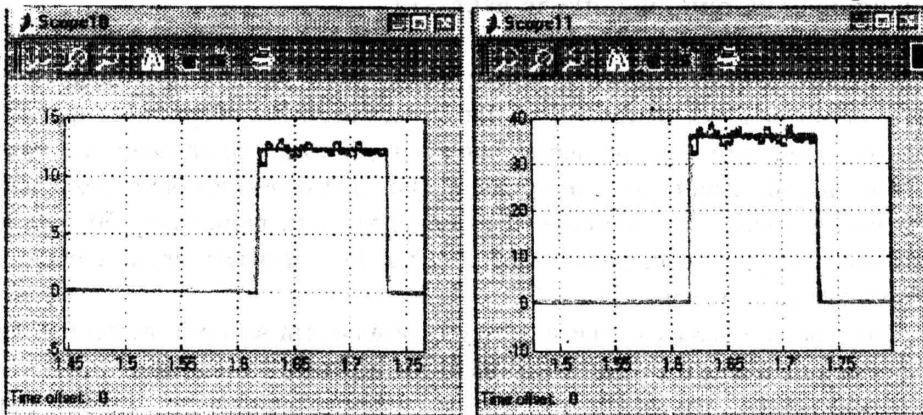


Рис. 5.39. Реалізація випадкового процесу, який моделює випадкові зміни сили різання при обробці заготовки одним ножом

При різанні виникають випадкові зміни сили різання. Як встановлено раніше, ці зміни можуть бути описані випадковим процесом у вигляді “білого шуму”. В математичній моделі випадкові зміни сили різання задаються блоком Band Limited White Noise (рис. 5.36). Даний блок формує стаціонарний центрований кусково-постійний випадковий процес із постійним спектром. З метою виключення впливу цього процесу на динамічну систему верстата при відсутності різання значення реалізації процесу множиться у блоці Product4 на логічну змінну REZ1. Ця величина дорівнює одиниці при різанні і нулю – при

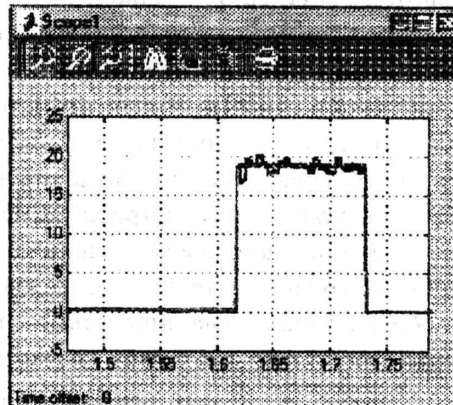
відсутності врізання ножа в поверхню заготовки. Реалізація випадкового процесу, що моделює випадкові зміни сили різання, реєструється блоком Score9 (рис. 5.36). Оглядове вікно блока, в якому показаний графік випадкових змін сили різання, наведено на рис. 5.39.

Загальна сила різання розраховується на виході суматора, а її проєкції виводяться в оглядових вікнах блоків Score1, Score10 та Score11 (рис. 5.40).



a)

б)



в)

Рис. 5.40. Розрахункові значення складових загальної сили різання, яка виникла при різанні одним ножом і визначається в системі координат  $(X, Y, Z)$ , зв'язаної з рухомих ножом

Всі проєкції сили різання мають подібні закони зміни сили в часі. В них присутні випадкові складові. Номінальні значення проєкцій сили різання відповідають експериментальним даним. Розходження результатів розрахунків із експериментальними даними не перевищує 7 %, що може вважатись задовільним при моделюванні процесу різання.

## РОЗДІЛ 6

### Геометричний аналіз системи “шпиндель – інструмент”

#### 6.1. Визначення закономірностей биття передньої та задньої підшипникових опор шпинделя верстата

В процесі обробки деталі фрезами косокутного різання має місце складний просторовий рух інструмента. Він обумовлений як обертанням фрези, а отже, неточностями, які при цьому виникають, так і деформаціями, які мають місце в системі “шпиндель – інструмент”. Розміри фрези косокутного різання (300 мм) порівняні з розмірами міжопорної відстані шпинделя 250–400 мм. Тому при дослідженні процесу обробки потрібно розглядати пружну обертову систему “шпиндель – інструмент”.

Дана система включає власне фрезу із різальними ножами, вузол кріплення фрези на шпинделі та шпиндельний вузол верстата з приводом.

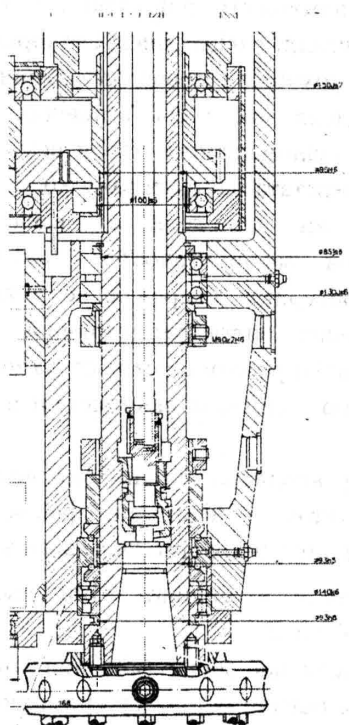
Кожна із перерахованих складових системи “шпиндель – інструмент” впливає на формування похибки обробки деталі фрезами косокутного різання. Зокрема для точного виготовлення фрези і шпинделя верстата, точність якого задовольняє встановленим вимогам, неправильне регулювання вузла кріплення може призвести до суттєвих похибок обробки.

В процесі обробки деталі мають місце геометричне зміщення та деформації елементів системи “шпиндель – інструмент” (рис. 6.1). Деформації виникають під дією сил різання, що діють на ножі, та під дією динамічних навантажень в приводі. Геометричні зміщення обумовлені в основному биттям підшипників, неточностями шпинделя, фрези та кінематичних ланцюгів приводу головного руху. Незалежно від причини зміни положення фрези при обробці деталі вона зміщується в трьох напрямках ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) і додатково змінює своє кутове положення (повертається на кути  $\theta_x$  та  $\theta_y$ ). В залежності від напрямку подачі деякі із цих переміщень не є суттєвими і мало впливають на точність обробки.

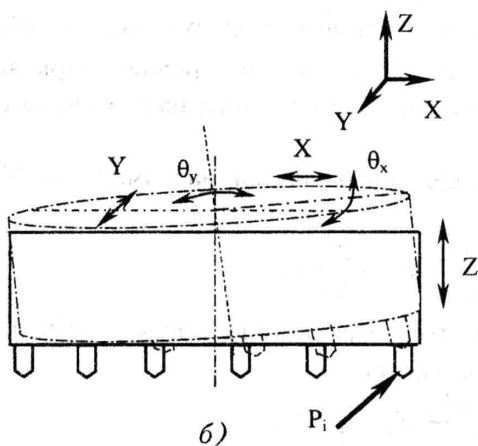
Метою геометричного аналізу системи “шпиндель – інструмент” є встановлення впливу геометричних факторів на геометричне положення кожного із ножів фрези.

Геометричний аналіз системи “шпиндель – інструмент” виконаний із врахуванням випадкових змін параметрів системи.

Фреза жорстко з'єднана із шпинделем верстата і обертається разом з ним в підшипниках. При установці фрези виникають геометричні неточності її розташування відносно геометричної осі обертання шпинделя.



a)



б)

Рис. 6.1. Система «шпиндель – інструмент» із фрезою косокутного різання (а) та схема переміщень елементів системи (б)

Основні геометричні неточності, пов'язані з установкою і закріпленням фрези, проявляються у вигляді ексцентриситету фрези відносно геометричної осі обертання шпинделя і похибки кутового положення фрези.

При обертанні шпинделя має місце зміщення (биття) його осі. Воно викликається факторами різноманітного характеру. Биття має місце як при різанні, так і при роботі верстата на холостому ході.

Биття геометричної осі шпинделя є незначним (порядку кількох мікрометрів). Визначення закономірностей "биття" представляє собою складну задачу. В літературних джерелах не виявлено [16–18] достатньо точних методик визначення биття геометричної осі шпинделя верстата. Врахування биття при аналізі роботи фрез косокутного різання є необхідним.

Для аналізу биття опор шпинделя використані як теоретичні, так і експериментальні методи.

За абсолютну систему координат приймаємо положення геометричної осі шпинделя при певному кутовому положенні фрези, а саме: в момент, коли фактична вісь  $Y_{\phi}$  фрези, яка проходить через вісь ножа № 22, паралельна осі  $Y$  абсолютної системи координат. При цьому вісь  $X$  буде перпендикулярною до осей  $Y$  та  $Z$ .

При обертанні шпинделя має місце зміщення "биття" його осі обертання. Воно проявляється в переміщенні осі обертання шпинделя в області передньої та задньої опор. Ці переміщення показані на рис. 6.1 у вигляді проєкцій переміщень передньої опори шпинделя  $X_{\Pi}$ ,  $Y_{\Pi}$ ,  $Z_{\Pi}$  та задньої опори  $X_3$ ,  $Y_3$ ,  $Z_3$ . Переміщення опор призводять до зміщення осі обертання шпинделя та фрези в площині її торця. Із геометричних міркувань зміщення осі обертання фрези (точки  $O_1$ ) в двох напрямках визначається згідно схеми, наведеної на рис. 6.2.

Загальне переміщення центра фрези напрямку осі  $Y$  визначається за формулою:

$$Y_{O\phi} = \frac{L_{\Pi} + L_3}{L_3} Y_{\Pi} - \frac{L_{\Pi}}{L_3} Y_3. \quad (6.1)$$

Аналогічно визначається переміщення центра фрези в напрямку осі  $X$ . Це переміщення загалом складне:

$$X_{O\phi} = \frac{L_{\Pi} + L_3}{L_3} X_{\Pi} - \frac{L_{\Pi}}{L_3} X_3. \quad (6.2)$$

При переміщенні центра фрези внаслідок биття опор має місце зміна кутового положення фрези на деякі кути  $\theta_{XO\phi}$  та  $\theta_{YO\phi}$ .

Визначимо кутове переміщення фрези, що відповідає її повороту відносно осі  $OX$ . Згідно зі схемою, зображеною на рис. 6.3,  $\epsilon$ , кутове переміщення фрези визначиться як:

$$\operatorname{tg}\theta_{\text{хоо}} = (Y_{\text{оф}} - Y_3) \cdot \frac{1}{L_3 + L_{\text{п}}} \quad (6.3)$$

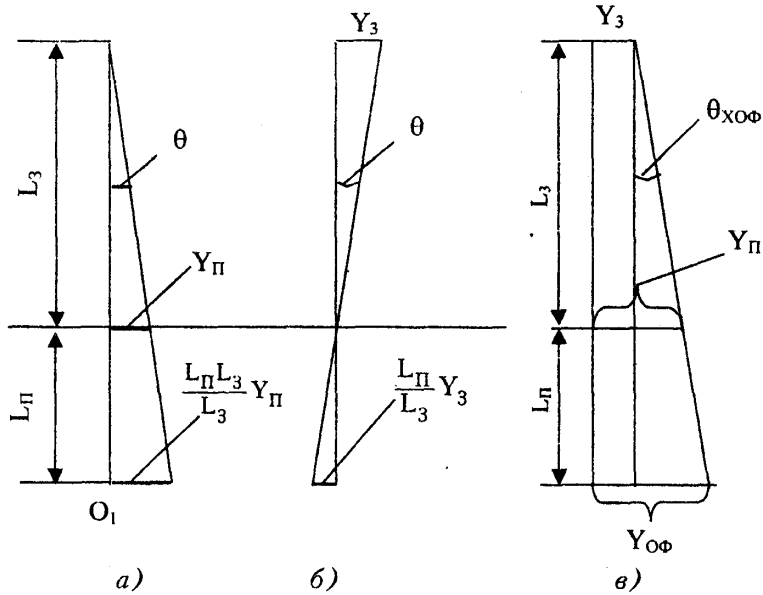


Рис. 6.2. Переміщення центра фрези в площині її торця, обумовлені биттям передньої (а) та задньої (б) опор шпинделя в напрямку осі Y, та загальне переміщення (в)

Враховуючи незначний кут відхилення фрези, одержимо:

$$\operatorname{tg}\theta_{\text{хоо}} \approx \theta_{\text{хоо}} \quad (6.4)$$

Підставивши значення величин із формул (6.1) та (6.4) в залежність (6.3), знайдемо кут повороту фрези навколо осі OX, обумовлений биттям підшипників шпинделя:

$$\theta_{\text{хоо}} = \frac{\frac{L_{\text{п}} + L_3}{L_3} Y_{\text{п}} - \frac{L_{\text{п}}}{L_3} Y_3 - Y_3}{L_3 + L_{\text{п}}} = (Y_{\text{п}} - Y_3) \frac{1}{L_3} \quad (6.5)$$

Аналогічно визначено кут повороту фрези навколо осі OY, обумовлений биттям підшипників шпинделя:

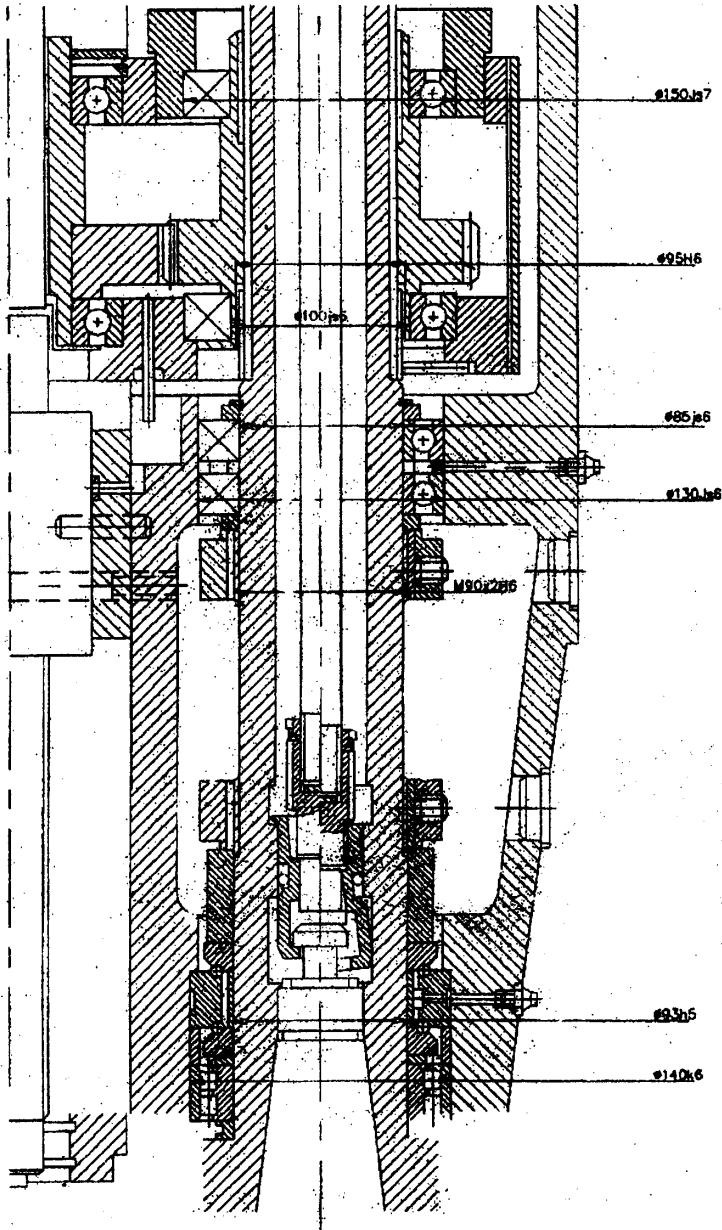
$$\theta_{\text{воо}} = (X_{\text{п}} - X_3) \frac{1}{L_3} \quad (6.6)$$

Биття підшипників шпинделя верстата визначається складними кінематичними та динамічними процесами в підшипниках.

Розглянемо кінематичні зміщення геометричної осі обертання шпинделя, обумовлені неточностями підшипників.



Передня та задня опори шпинделя мають загалом 4 підшипники (рис. 6.3). Передня опора має дворядний роликівий радіальний підшипник та упорно-радіальний кульковий підшипник. Задня опора має два радіальні кулькові підшипники.



*Рис. 6.3. Конструктивна схема підшипникових опор верстата*

При обертанні шпindelя мають місце його переміщення, обумовлені похибками підшипників.

Основними похибками підшипників та їх посадочних місць є наступні:

- ексцентричність та овальність посадочних місць внутрішніх та зовнішніх кілець підшипників;
- нерівномірність контактних напружень в зазорі між кільцем підшипника та посадочним місцем;
- похибки доріжок, по яких переміщуються кульки чи ролики, зокрема їх ексцентричність, овальність та хвилястість;
- похибки форми тіл кочення, в тому числі ексцентричність, овальність та гранність тіл кочення (роликів чи кульок);
- нерівномірність деформації тіл кочення, обумовлена перерозподілом навантаження між ними за рахунок геометричних неточностей і деформацій кілець підшипників;
- нерівномірність умов змащування зон контакту тіл кочення з опорними поверхнями, наявність забруднень та дефектів області контакту та інших випадкових чинників;
- локальні температурні деформації тіл кочення та інших деталей підшипників, які призводять до зміщення шпindelя відносно шпindelльної бабки.

Вищевказані похибки є загальними для всіх наявних підшипників шпindelя. В той же час кожна конструктивна схема підшипника має свої характерні неточності, які повинні бути враховані при аналізі.

Найбільше на точність обертання шпindelя впливає *передня опора шпindelя*, а саме радіальний конічний дворядний підшипник.

Точність підшипника визначається похибками, причинами яких є, зокрема, *ексцентричність* конічної поверхні роликового підшипника відносно геометричної осі шпindelя та *кутове зміщення* геометричної осі конічної поверхні відносно осі шпindelя.

Наявність ексцентриситету і перекосів призведе до зміщення геометричної осі обертання шпindelя. Враховуючи, що це зміщення є незначним, для його математичного опису використовуємо залежність:

$$\rho_1 = \epsilon_K \sin(\varphi + \Psi_{EK}) + \epsilon_{II} \sin(\varphi + \Psi_{EII}), \quad (6.7)$$

де  $\rho_1$  – радіальне зміщення геометричної осі шпindelя;

$\varphi$  – кут повороту шпindelя;

$\epsilon_K$  – амплітуда зміщення шпindelя, обумовлена ексцентриситетом конічної поверхні;

$\Psi_{EK}$  – деяка початкова фаза ( $0 \leq \Psi_{EK} \leq 2\pi$ ), яка визначає розташування ексцентриситету відносно абсолютної системи координат;

$\epsilon_{II}$  – амплітуда зміщення шпindelя, обумовлена переносом конічної поверхні;

$\Psi_{\text{еп}}$  – початкова фаза “биття” шпинделя, обумовленого перекосом конічної поверхні.

На похибки розташування геометричної осі шпинделя впливає овальність конічної поверхні, на якій розташоване внутрішнє кільце підшипника.

Зміщення геометричної осі шпинделя з причини овальності конічної поверхні описується залежністю:

$$\rho_2 = \epsilon_{\text{ок}} \sin(2\varphi + \Psi_{\text{ок}}), \quad (6.8)$$

де  $\rho_2$  – радіальне зміщення геометричної осі шпинделя за рахунок овальності конічної поверхні;

$\epsilon_{\text{ок}}$  – амплітуда зміщення, обумовлена овальністю;

$\Psi_{\text{ок}}$  – початкова фаза зміщення, обумовлена овальністю.

Похибки положення геометричної осі шпинделя, обумовлені нерівномірністю розподілу контактних напружень і, отже, контактних деформацій в контакті між внутрішнім кільцем роликowego підшипника і конічною ділянкою шпинделя, залежать від хвилястості контактуючих поверхонь. Наявність на конічній поверхні декількох контактуючих зон призводить до деформації кільця. Це викликає зміщення геометричної осі шпинделя за законом:

$$\rho_3 = \epsilon_{\text{нк}} \sin(n_{\text{к}}\varphi + \Psi_{\text{нк}}), \quad (6.9)$$

де  $\rho_3$  – радіальне зміщення осі, обумовлене нерівномірністю контактних напружень;

$n_{\text{к}}$  – середня по периметру кількість контактуючих ділянок конічної поверхні шпинделя та кільця;

$\Psi_{\text{нк}}$  – початкова фаза зміщення осі шпинделя, обумовленого нерівномірністю контактних напружень.

Середня по периметру кількість контактних ділянок складає:

$$n_{\text{к}} = 3 \dots 4. \quad (6.10)$$

Зміни положення геометричної осі шпинделя обумовлені похибками форми (ексцентриситетом, овальністю, хвилястістю) доріжок, по яких рухаються ролики, а також різнорозмірністю (розсіяння або розбіжність розмірів) роликів.

Зміна положення геометричної осі шпинделя з причини похибок форми доріжок визначається у вигляді тригонометричного ряду:

$$\rho_4 = \epsilon_{\text{р}} \sin(\varphi + \Psi_{\text{ер}}) + \epsilon_{\text{ор}} \sin(2\varphi + \Psi_{\text{ор}}) + \sum_{n=3}^{n_4} \epsilon_{\text{nc}} \sin(n\varphi + \Psi_{\text{nc}}), \quad (6.11)$$

де  $\epsilon_{\text{р}}$  – найбільше зміщення осі, обумовлене ексцентриситетом доріжки;

$\Psi_{\text{ер}}$  – початкова фаза зміщення, обумовлена ексцентриситетом;

$\epsilon_{\text{ор}}$  – амплітуда зміщення осі, обумовлена овальністю;

$\Psi_{\text{ор}}$  – початкова фаза овальності доріжки відносно вибраної системи

координат;

$\epsilon_{nc}$  – амплітуда гармонік, які визначають зміщення осі шпинделя, обумовлені хвилястістю доріжок та різнорозмірністю тіл кочення;

$n_e$  – кількість гармонік, які враховують хвилястість ( $n \approx 5...7$ , приймемо  $n = 6$ );

$\Psi_{nc}$  – початкові фази, які визначають взаємне положення окремих гармонік.

Зміна положення осі шпинделя, обумовлена похибками тіл кочення роликового підшипника, враховує похибки форми роликів, різнорозмірність, а саме: ексцентричність, овальність, хвилястість, конусність та бочкоподібність.

Різнорозмірність та ексцентричність роликів призводить до зміни положення геометричної осі шпинделя у вигляді:

$$\rho_5 = \sum_{m=1}^M \epsilon_{pm} \sin(M\varphi + \Psi_{pom}), \quad (6.12)$$

де  $M$  – загальне число роликів;

$\epsilon_{pm}$  – амплітуда гармоніки, обумовлена різнорозмірністю, ексцентриситетом  $m$ -го ролика;

$\Psi_{pom}$  – початкова фаза, яка відповідає  $m$ -му ролику.

Овальність роликів враховується появою полігармонічної складової биття осі шпинделя у вигляді:

$$\rho_6 = \sum_{n=1}^M \epsilon_{орп} \sin(2M\varphi + \Psi_{орп}), \quad (6.13)$$

де  $\epsilon_{орп}$  – амплітуда гармоніки, обумовлена овальністю роликів;

$\Psi_{орп}$  – початкова фаза розташування овальності відповідно вибраної системи координат.

Зміна положення геометричної осі шпинделя, обумовлена граничністю тіл кочення, описується залежністю:

$$\rho_7 = \sum_{m=1}^M \cdot \sum_{P=3}^P \epsilon_{ppm} \sin(PM\varphi + \Psi_{ppm}), \quad (6.14)$$

де  $P$  – загальне число врахованих огранок роликів (огранки по трьох гранях  $P = 3$ , по чотирьох –  $P = 4$ , ..., по 6-ти гранях –  $P = 6$ );

$\epsilon_{ppm}$  – амплітуда гармоніки, обумовлена гранністю  $m$ -го ролика по  $P$  гранях.

Точність підшипника залежить від похибок посадочного місця, в якому знаходиться підшипник, і похибок його зовнішнього кільця.

Ексцентриситет посадочного отвору, овальність зовнішнього кільця та нерівномірність розподілу контактних навантажень між зовнішнім кільцем підшипника і посадочним отвором враховується наступною залежністю биття осі шпинделя:

$$\rho_8 = \epsilon_3 \sin(\varphi + \Psi_{e3}) + \epsilon_{o3} \sin(2\varphi + \Psi_{o3}) + \sum_{e=3}^{n_e} \epsilon_{e3} \sin(e\varphi + \Psi_{e3}), \quad (6.15)$$

де  $\epsilon_3$  – найбільше зміщення осі, обумовлене ексцентричністю отвору;

$\Psi_{e3}$  – початкова фаза, яка визначає ексцентричне розташування координат;

$\epsilon_{o3}$  – амплітуда гармоніки, яка спричинила овальність посадочного отвору;

$\Psi_{o3}$  – початкова фаза гармоніки, обумовленої овальністю;

$n_e$  – число гармонік, які описують нерівномірність контакту деформацій зовнішнього кільця, обумовлених хвилястістю поверхні отвору і поверхні зовнішнього кільця підшипника ( $n_e = 3 \dots 7$ );

$\epsilon_{e3}$  – амплітуда гармонік биття осі, обумовлених хвилястістю;

$\Psi_{e3}$  – початкові фази вищеназваних гармонік.

При роботі підшипника наявні численні фактори випадкового характеру. Зокрема, нерівномірність деформацій роликів, обумовлена геометричними похибками кілець і посадочних місць підшипників.

Додатково зміни положення осі шпинделя спричиняються випадковими похибками в контактах між рамками і доріжками, обумовленими зміною умов змащування, наявності забруднюючих частинок в металі, продуктів зносу тощо. Випадкові причини призводять до деякого зміщення осі шпинделя. Вони враховуються деякою випадковою функцією:

$$\rho_9 = g_n. \quad (6.16)$$

Биття передньої опори шпинделя є незначним і не перевищує кількох мікрометрів. Враховуючи це, можна в першому наближенні вважати всі розглянуті фактори рівнозначними по їх впливу на зміну геометричного положення осі шпинделя. При цьому радіальне “биття” передньої опори буде визначатися сумою складових, що відповідають формулам (6.7)–(6.9), (6.11)–(6.16). Радіальні зміщення осі шпинделя обумовлені “биттям” роликів підшипника в області передньої опори.

$$\rho_n = \sum_{i=1}^8 \rho_i + g_n. \quad (6.17)$$

Підставимо значення радіальних змещень із формул (6.7)–(6.9) та (6.11)–(6.15) у формулу (6.17) і одержимо в загальному вигляді формулу:

$$\rho_n = \sum_{i=1}^{n_n} \epsilon_{in} \sin(\omega_{in} \varphi + \Psi_{oin}) + g_n, \quad (6.18)$$

де  $\epsilon_{in}$  – компоненти вектора, що задає значення амплітуд гармонік;

$\omega_{in}$  – частоти гармонік, що відповідають дії різних факторів;

$\Psi_{oin}$  – відповідні початкові фази гармонік;

$n_n$  – загальне число гармонік, що визначають биття передньої опори, яке

враховує всі складові, що входять у формули (6.7)–(6.9) та (6.11)–(6.15).

У формулу (6.18) входять величини, які утворюють нечітко визначену множину. Це вектори амплітуд  $E_n$ , частот  $\Omega_n$  та початкових фаз  $\Psi_n$ . Вони визначені з відповідних формул і складають:

$$E_n = \{\epsilon_{in}\}_{nn} = \begin{bmatrix} \epsilon_k \\ \epsilon_n \\ \epsilon_{ок} \\ \epsilon_{нк} \\ \epsilon_{\partial} \\ \epsilon_{o\partial} \\ \epsilon_{з\partial} \\ \epsilon_{4\partial} \\ \epsilon_{5\partial} \\ \epsilon_{6\partial} \\ \epsilon_{p1} \\ \dots \\ \epsilon_{pM} \\ \epsilon_{op1} \\ \dots \\ \epsilon_{opM} \\ \epsilon_{p11} \\ \dots \\ \epsilon_{pMp} \\ \epsilon_z \\ \epsilon_{o3} \\ \epsilon_{13} \\ \dots \\ \epsilon_{ne3} \end{bmatrix}, \quad \Omega_n = \{\omega_{in}\}_{nn} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ n_k \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ M \\ \dots \\ M \\ 2M \\ \dots \\ 2M \\ M \\ \dots \\ PM \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \dots \\ n_e \end{bmatrix}, \quad \Psi_n = \{\Psi_{oin}\}_{nn} = \begin{bmatrix} \Psi_{ек} \\ \Psi_{еп} \\ \Psi_{ок} \\ \Psi_{нк} \\ \Psi_{e\partial} \\ \Psi_{o\partial} \\ \Psi_{з\partial} \\ \Psi_{4\partial} \\ \Psi_{5\partial} \\ \Psi_{6\partial} \\ \Psi_{PO1} \\ \dots \\ \Psi_{POM} \\ \Psi_{OP1} \\ \dots \\ \Psi_{OPM} \\ \Psi_{P11} \\ \dots \\ \Psi_{PPM} \\ \Psi_{e3} \\ \Psi_{o3} \\ \Psi_{33} \\ \dots \\ \Psi_{ne3} \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

Нечітко визначена множина коефіцієнтів описана наступним чином. Проведено аналіз кожного із трьох векторів коефіцієнтів. Вектор початкових фаз  $\Psi_n$  прийнято у вигляді масиву випадкових чисел з рівномірним законом розподілу.

Діапазон зміни кожної компоненти вектора прийнято у вигляді:

$$0 \leq \Psi_{oin} \leq 2\pi.$$

З аналізу формули (6.18) випливає, що загальне биття підшипника складене із суми великого числа складових. Враховано ту обставину, що амплітуди високочастотних гармонік, як правило, менші, ніж низькочастот-

них. Прийнято, що середні значення амплітуди кратні деякій усередненій амплітуді  $\epsilon_{\Pi}$ .

При цьому для основних частот амплітуда гармоніки дорівнює усередненій амплітуді, а для високочастотних гармонік вона дорівнює усередненій амплітуді, поділеній на частоту.

Середнє значення математичного сподівання амплітуди:

$$\bar{\epsilon}_{in} = \epsilon_{\Pi} \begin{cases} 1 & \text{при } \omega_{in} = 1 \\ 1/\omega_{in} & \text{при } \omega_{in} > 1 \end{cases} \quad (6.20)$$

Враховуючи (6.20), одержимо векторну рівність, справедливу для математичних сподівань векторів:

$$\bar{E}_{\Pi} = \{\bar{\epsilon}_{in}\} = \epsilon_{\Pi} \left\{ \frac{1}{\omega_{in}} \right\}. \quad (6.21)$$

Визначимо математичне сподівання радіуса биття підшипника, яке відповідає формулі (6.18):

$$\bar{\rho}_{\Pi} = \sum_{i=1}^{n_{\Pi}} \bar{\epsilon}_{in} \sin(\omega_{in} \varphi + \Psi_{oin}) + \bar{g}_{\Pi}, \quad (6.22)$$

де  $\bar{\rho}_{\Pi}$  – математичне сподівання радіального биття підшипника передньої опори шпинделя;

$\bar{\epsilon}_{in}$  – математичне сподівання амплітуд гармонік;

$\bar{g}_{\Pi}$  – математичне сподівання випадкової функції, що визначає биття підшипника.

Математичне сподівання синусоїдальної функції обмежене значенням з діапазоном:

$$-1 \leq \sin(\omega_{in} \varphi + \Psi_{oin}) \leq 1. \quad (6.23)$$

Для півперіоду:

$$0 \leq \sin(\omega_{in} \varphi + \Psi_{oin}) \leq 1. \quad (6.24)$$

Визначимо математичне сподівання для деякого фіксованого значення кута  $\varphi$ . Враховуючи, що початкова фаза є випадковою з рівномірним законом розподілу, конкретне значення кута  $\varphi$  не має принципового значення. Тому приймемо  $\varphi = 0$ .

Тоді математичне сподівання синусоїдальної функції буде дорівнювати середньому за півперіод значенню синусоїдальної функції, а саме:

$$\sin(\omega_{in} \varphi + \Psi_{oin}) = \sin(\Psi_{oin}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta. \quad (6.25)$$

Обчислимо значення інтеграла:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = -\frac{1}{\pi} \cos \theta \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}. \quad (6.26)$$

Таким чином, залежність (6.22) набуде вигляду:

$$\bar{\rho}_{\Pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{n_{\Pi}} \bar{\epsilon}_{in} + \bar{g}_{\Pi}. \quad (6.27)$$

Математичне сподівання суми компонент вектора амплітуд знайдемо використовуючи залежність (6.21). Після підстановки цієї залежності в (6.27) одержимо:

$$\bar{\rho}_{\Pi} = \frac{2\epsilon_{\Pi}}{\pi} \sum_{i=1}^{n_{\Pi}} \frac{1}{\omega_{in}} + \bar{g}_{\Pi}. \quad (6.28)$$

Значення биття підшипника залежить від багатьох факторів випадкового характеру. Биття завжди додатне. Прийемо, що закон розподілу випадкових значень биття відповідає кривій Гауса. Використовуючи правило  $3\sigma$ , знайдемо орієнтовне значення середньоквадратичного відхилення биття у вигляді:

$$\sigma_{p\Pi} = \frac{1}{3} \bar{\rho}_{\Pi}. \quad (6.29)$$

Аналогічну залежність знайдемо для кожної амплітуди гармоніки. Із формули (6.21) випливає:

$$\sigma_{ein} = \frac{1}{3} \epsilon_{\Pi} \frac{1}{\omega_{in}}. \quad (6.30)$$

Середньоквадратичне відхилення випадкової складової биття шпинделя в околі передньої опори:

$$\sigma_{g\Pi} = \frac{1}{3} \bar{g}_{\Pi}. \quad (6.31)$$

Остаточне радіальне значення зміщення осі шпинделя в околі передньої опори буде визначатися формулою (6.18) із врахуванням (6.21) та (6.30), а саме:

$$\rho_{\Pi} = \sum_{i=1}^{n_{\Pi}} (\bar{\epsilon}_{in} + g_{in}^*) \sin(\omega_{in} \varphi + \Psi_{oin}) + \bar{g}_{\Pi} + g_{\Pi}^*, \quad (6.32)$$

де  $g_{in}^*$  – центрована випадкова величина з нормальним законом розподілу і середньоквадратичним відхиленням, що визначається формулою (6.30);

$g_{\Pi}^*$  – центрована випадкова величина з нормальним законом розподілу і середньоквадратичним відхиленням, що визначається формулою (6.31).

Передня опора шпинделя вносить основний вклад у деформування биття геометричної осі шпинделя.

Задня опора теж впливає на зміщення геометричної осі. Задня опора має два радіально-кулькові підшипники. Точність підшипників визначається похибками, обумовленими зокрема ексцентричністю посадочних місць підшипників, нерівномірністю контактних напружень в зазорі між кільцями



підшипника і посадочними місцями, похибками доріжок і похибками геометрії тіл кочення.

Ексцентриситет і овальність посадочного місця внутрішнього кільця підшипника призводить до виникнення зміщення осі шпинделя в місці розташування підшипників. Це зміщення описується залежністю виду (6.7) і складає:

$$\rho_{31} = \epsilon_3 \sin(\varphi + \Psi_{e3}) + \epsilon_{30} \sin(2\varphi + \Psi_{oe3}), \quad (6.33)$$

де  $\epsilon_3$ ,  $\Psi_{e3}$  – амплітуда і початкова фаза гармоніки, обумовленої наявністю ексцентриситету шийки шпинделя;

$\epsilon_{30}$ ,  $\Psi_{e3}$  – амплітуда і початкова фаза гармоніки, обумовленої овальністю шийки шпинделя.

Аналогічним чином визначимо зміщення шпинделя з причини ексцентричності та овальності отвору, в якому розміщуються зовнішні кільця підшипників:

$$\rho_{32} = \epsilon_{33} \sin(\varphi + \Psi_{33}) + \epsilon_{330} \sin(2\varphi + \Psi_{o33}), \quad (6.34)$$

де  $\epsilon_3$ ,  $\Psi_{e3}$  – амплітуда і початкова фаза гармоніки, обумовленої ексцентриситетом отвору і зовнішнього кільця;

$\epsilon_3$ ,  $\Psi_{o33}$  – амплітуда і початкова фаза гармоніки, обумовленої овальністю посадочного отвору.

Зміна положення геометричної осі шпинделя, обумовлена похибками форми доріжок підшипника, визначається формулою, аналогічною (6.11), і складає:

$$\rho_{33} = \sum_{n=1}^{n_{\rho 3}} \epsilon_{n \rho 3} \sin(n\varphi + \Psi_{n \rho 3}), \quad (6.35)$$

де  $\epsilon_{n \rho 3}$  – амплітуда гармоніки, обумовлена похибками форми доріжок;

$\Psi_{n \rho 3}$  – початкові фази гармонік;

$n_{\rho 3}$  – загальне число гармонік, які розглядаються.

Зміна положення геометричної осі шпинделя, обумовлена похибками кульок, визначається залежністю, аналогічною формулам (6.12), (6.13) та (6.14). Остаточно формула для визначення зміни положення шпинделя набуде вигляду:

$$\rho_{34} = \sum_{m=1}^{M_3} \sum_{n=1}^{n_{\rho 3}} \epsilon_{\rho 3 m} \sin(PM\varphi + \Psi_{\rho 3 m}), \quad (6.36)$$

де  $\epsilon_{\rho 3 m}$  – амплітуда гармоніки, обумовлена ексцентриситетом чи гранністю ролика;

$\Psi_{\rho 3 m}$  – початкова фаза;

$M_3$  – число кульок в підшипнику;

$P$  – найбільш номер огранки тіла кочення, яка враховується.

Підшипники задньої опори шпинделя об'єднані в блок. Тому вплив нерівномірності розподілу контактних навантажень на "биття" осі шпинделя не є суттєвим.

Загальне зміщення задньої опори шпинделя визначається об'єднанням формул (6.33)–(6.36). Загальне биття підшипника одержимо у вигляді:

$$\rho_3 = \sum_{j=1}^4 \rho_{3j} + g_3, \quad (6.37)$$

де  $g_3$  – випадкова функція, яка враховує нерівномірність деформацій кульок підшипника, наявність забруднюючих частинок та інші випадкові фактори.

Формула (6.37) аналогічна залежності (6.17), одержаній раніше для підшипника передньої опори шпинделя.

Підставимо значення радіальних зміщень із формул (6.33)–(6.36) в залежності (6.37). Одержимо загальну залежність:

$$\rho_3 = \sum_{j=1}^{n_3} \epsilon_{j3} \sin(\omega_{j3} + \Psi_{oj3}) + g_3, \quad (6.38)$$

де  $\epsilon_{j3}$  – компонента вектора амплітуд зміщень задньої опори;

$\Psi_{oj3}$  – початкові фази окремих гармонік, що визначають зміщення осі шпинделя;

$n_3$  – загальне число врахованих гармонік;

$\omega_{j3}$  – компоненти вектора частот окремих гармонік

Вектори амплітуд, частот і початкових фаз, які входять в формулу (6.38) і визначені згідно з формулами (6.33)–(6.36), мають вигляд:

$$E_3 = \{\epsilon_{j3}\} = \begin{bmatrix} \epsilon_3 \\ \epsilon_{30} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{330} \\ \epsilon_{1z} \\ \epsilon_{2z} \\ \dots \\ \epsilon_{n_3} \\ \epsilon_{131} \\ \dots \\ \epsilon_{p3m} \end{bmatrix}; \quad \Omega_3 = \{\omega_{j3}\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ \dots \\ n_{z3} \\ M_3 \\ \dots \\ \rho_3 M_3 \end{bmatrix}; \quad \Psi_3 = \{\Psi_{oj3}\} = \begin{bmatrix} \Psi_{e3} \\ \Psi_{oe3} \\ \Psi_{33} \\ \Psi_{oe3} \\ \Psi_{o33} \\ \Psi_{1z} \\ \Psi_{2z} \\ \dots \\ \Psi_{n_3z} \\ \Psi_{131} \\ \dots \\ \Psi_{p3m} \end{bmatrix}. \quad (6.39)$$

Система векторів (6.39) утворює визначену множину коефіцієнтів, які визначають биття задньої опори шпинделя.

Прийmemo, як і для передньої опори (див формулу (6.20)), що математичне сподівання амплітуд гармонік складає:

$$\bar{\epsilon}_{j3} = \epsilon_3 \begin{cases} 1 & \text{при } \omega_{j3} = 1 \\ 1/\omega_{j3} & \text{при } \omega_{j3} > 1 \end{cases}, \quad (6.40)$$

де  $\varepsilon_3$  – середнє значення амплітуди биття задньої опори шпинделя.

Аналогічно формулам (6.28) і (6.31) визначимо математичне сподівання і середньоквадратичні відхилення значень параметрів.

Математичне сподівання радіального “биття” задньої опори шпинделя:

$$\rho_3 = \frac{2\varepsilon_3}{\pi} \sum_{j=1}^{n_3} \frac{1}{\omega_{j3}} + \bar{g}_3, \quad (6.41)$$

де  $\bar{g}_3$  – математичне сподівання випадкової складової биття задньої опори.

Середньоквадратичне відхилення радіального биття задньої опори знайдемо із правила  $3\sigma$ . Воно буде складати:

$$\sigma_{\rho_3} = \frac{1}{3} \bar{\rho}_3. \quad (6.42)$$

Середньоквадратичне відхилення для кожної амплітуди гармоніки буде визначатися аналогічно формулі (6.30) і складе:

$$\sigma_{j3} = \frac{1}{3} \varepsilon_3 \frac{1}{\omega_{j3}}. \quad (6.43)$$

Середньоквадратичне відхилення випадкової складової биття шпинделя в околі його задньої опори визначимо як:

$$\sigma_{g_3} = \frac{1}{3} \bar{\rho}_3. \quad (6.44)$$

Остаточо радіальне зміщення осі шпинделя в околі задньої опори визначимо за формулою (6.38) із врахуванням залежності (6.43) і (6.44) у вигляді:

$$\rho_3 = \sum_{j=1}^{n_3} (\bar{e}_{j3} + g_{j3}^*) \sin(\omega_{j3}\varphi + \Psi_{oj3}) + \bar{g}_3 + g_3^*, \quad (6.45)$$

де  $g_{j3}^*$  – центрована випадкова величина з нормальним законом розподілу і середньоквадратичним відхиленням, що визначається формулою (6.43);

$g_3^*$  – центрована випадкова величина з нормальним законом розподілу і середньоквадратичним відхиленням, що визначається формулою (6.44).

## 6.2. Ідентифікація стохастичних параметрів кінематичної точності шпиндельного вузла верстата

Розглянемо биття шпинделя в околі закріплення фрези. Це биття визначається биттям як передньої, так і задньої опор шпинделя. Загальне биття буде визначатися формулою (6.1) або (6.2), в яку замість зміщення опори підставляються математичні сподівання радіального биття:

$$\bar{\rho} = \frac{L_{\Pi} + L_3}{L_3} \bar{\rho}_{\Pi} - \frac{L_{\Pi}}{L_3} \bar{\rho}_3. \quad (6.46)$$

Після підстановки значень математичних сподівань із формул (6.28) і (6.41) в залежність (6.46) одержимо рівняння зв'язку окремих параметрів підшипників у вигляді:

$$\bar{\rho} = \frac{2(L_{\Pi} + L_3)}{L_3 \pi} \sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{\omega_{in}} \varepsilon_{\Pi} - \frac{2L_{\Pi}}{L_3 \pi} \sum_{j=1}^{n_3} \frac{1}{\omega_{j3}} \varepsilon_3 + \frac{L_{\Pi} + L_3}{L_3} \bar{g}_{\Pi} - \frac{L_{\Pi}}{L_3} \bar{g}_3. \quad (6.47)$$

Будемо вважати, що введені одиниці биття для обох підшипників  $\varepsilon_{\Pi}$  та  $\varepsilon_3$  є еквівалентними. Це припущення є обґрунтованим. Кульковий підшипник загалом є точнішим за роликівий, але роликівий підшипник має кіничну посадочну поверхню, що забезпечує натяг внутрішнього кільця та підвищення точності підшипника. Тому можна вважати, що одиниці биття для обох підшипників є еквівалентними і в першому наближенні прийняти:

$$\varepsilon_{\Pi} \approx \varepsilon_3 = \varepsilon. \quad (6.48)$$

Відповідно приймемо, що математичні сподівання випадкових складових биття передньої та задньої опор є приблизно рівними:

$$\bar{g}_{\Pi} \approx \bar{g}_3 \approx \bar{g}_{on}. \quad (6.49)$$

Враховуючи рівності (6.48) і (6.49), із формули (6.47) одержимо співвідношення, яке зв'яже математичне сподівання биття та параметри точності підшипника:

$$\bar{\rho} = \frac{2}{\pi} \varepsilon \left[ \frac{L_{\Pi} + L_3}{L_3} \sum_{i=1}^{n_1} \omega_{in} - \frac{L_{\Pi}}{L_3} \sum_{j=1}^{n_3} \frac{1}{\omega_{j3}} \right] + \bar{g}_{on}. \quad (6.50)$$

Величина в квадратних дужках допускає безпосереднє обчислення. Це обчислення можна спростити, врахувавши наближений характер формули (6.50). Для цього приймемо до уваги, що значення частот є цілими числами. Відповідно під знаками кожної суми знаходяться величини:

$$\frac{1}{\omega_{in}} = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots \quad (6.51)$$

Враховуючи (6.51), залишимо кожну суму в спрощеному вигляді:

$$\sum_{i=1}^{n_{\Pi}} \frac{1}{\omega_{in}} = n_{\Pi 1} + \frac{1}{2} n_{\Pi 1/2} + \frac{1}{3} n_{\Pi 1/3} + \dots + 1;$$

$$\sum_{j=1}^{n_3} \frac{1}{\omega_{j3}} = n_{31} + \frac{1}{2} n_{31/2} + \frac{1}{3} n_{31/3} + \dots + 1,$$
(6.52)

де  $n_{\Pi 1}$ ,  $n_{31}$  – число складових векторів частот, що мають одиничну частоту;

$n_{\Pi 1/2}$ ,  $n_{31/2}$  – число складових вектора частот з частотою 2;

$n_{\Pi 1/3}$ ,  $n_{31/3}$  – число складових вектора частот значення з частотою 3.

Частоти вище 4 несуттєво впливають на формування суми (6.52) і їх можна врахувати деяким збільшенням результату (наприклад, на 1, як це зроблено в формулі (6.52)).

Число складових з постійними значеннями частот визначається із формул (6.19) та (6.39) і складає:

$$\begin{aligned} n_{\Pi 1} &= 4 & n_{31} &= 3 \\ n_{\Pi 1/2} &= 3 & n_{31/2} &= 3 \\ n_{\Pi 1/3} &= 3 & n_{31/3} &= 1 \\ n_{\Pi 1/4} &= 3 & n_{31/4} &= 1 \end{aligned}$$
(6.53)

Підставимо значення величин із (4.53) в (4.52) і одержимо:

$$\sum_{i=1}^{n_{\Pi}} \frac{1}{\omega_{in}} = 4 + \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 3 + 1 = 8,25;$$

$$\sum_{j=1}^{n_3} \frac{1}{\omega_{j3}} = 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 1 = 6,08.$$
(6.54)

Знайдені числові значення використаємо в формулі (6.50). Підставимо також значення геометричних розмірів для циліндричного переднього кінця шпинделя, а саме:

$$L_3 = 320 \text{ мм}; L_{\text{ПР}} = 90 \text{ мм}.$$

Після підстановки числових значень одержимо математичне сподівання радіального биття циліндричного кінця шпинделя:

$$\bar{r}_k = \frac{2}{\pi} \varepsilon \cdot \left[ \frac{90 + 320}{320} \cdot 8,25 - \frac{90}{320} \cdot 6,08 \right] + \bar{g}_{\text{он}}.$$
(6.55)

Після обчислення в даній формулі залежності між радіальним биттям шпинделя і параметрами опору набудуть вигляду:

$$\bar{r}_k \approx 5,8\varepsilon + \bar{g}_{\text{он}}.$$
(6.56)

Прийmemo, що суто випадкові складові биття шпинделя не є суттєвими і не перевищують 1/3 (33 %) від загального значення биття. Тоді із формули (6.56) знайдемо:

$$0,67\bar{r}_k = 5,8\varepsilon.$$
(6.57)

Значення математичного сподівання радіального биття циліндричного кінця шпинделя визначимо із наступних міркувань. Прийmemo, що закон розподілу радіального биття для різних верстатів є нормальним. Використо-

вучучи правило  $3\sigma$ , знайдемо ширину поля радіального биття у вигляді  $6\sigma_k$ , а значення математичного сподівання – у вигляді  $3\sigma_k$  (див. рис. 6.4).

Для верстата ГФ 2771С6, який має клас точності П, допуск на биття конічного отвору шпинделя складає  $\Delta_d = 6$  мкм. При цьому радіальне зміщення осі шпинделя в перерізі конічного отвору складає:

$$\Delta_m = \Delta_d / 2 = 3 \text{ мкм.}$$

Відповідно визначимо:

$$\bar{\rho}_k = \Delta_m / 2 = 1,5 \text{ мкм.} \quad (6.58)$$

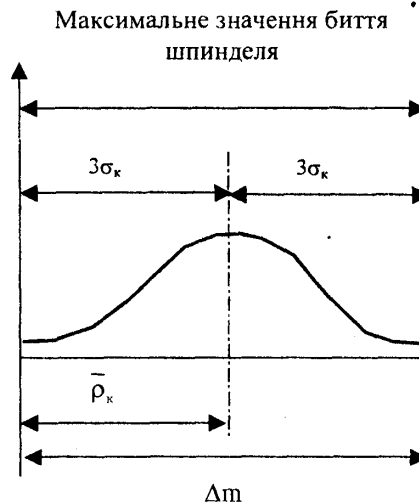


Рис. 6.4. Ймовірність формування випадкового биття циліндричного кінця шпинделя

Підставимо значення математичного сподівання із формули (6.58) у формулу (6.57) і знайдемо величину одиниці биття  $\varepsilon$  підшипника, яке складає 0,173 мкм. Прийемо значення:

$$\varepsilon = 0,17 \dots 0,18 \text{ мкм.} \quad (6.59)$$

Визначимо математичне сподівання суто випадкової складової биття. Враховуючи прийняте припущення, що суто випадкова складова вносить приблизно 33 % вкладу в загальне биття, одержимо рівняння:

$$0,33\bar{\rho}_k = \bar{g}_{оп}. \quad (6.60)$$

Враховуючи значення математичного сподівання радіального биття (6.58), одержимо:

$$\bar{g}_{оп} = 0,3 \dots 0,5 \text{ мкм.} \quad (6.61)$$

Визначимо биття в точці О (центр) фрези, що має місце з причини биття підшипників. Підставимо у формулу (6.1) значення радіального биття підшипників і одержимо:

$$\rho = \frac{L_{II} + L_3}{L_3} \rho_{II} - \frac{L_{II}}{L_3} \rho_3. \quad (6.62)$$

В цій формулі покладене значення радіального биття кожної опори згідно з формулами (6.32) та (6.45), в яких математичне сподівання амплітуд визначається за формулами (6.20) і (6.40). Остаточо отримуємо радіальне биття фрези у вигляді:

$$\rho = \frac{L_{II} + L_3}{L_3} \sum_{i=1}^{n_n} \left( \frac{\varepsilon}{\omega_{in}} + g_{in}^* \right) \sin(\omega_{in} \varphi + \psi_{oin}) - \frac{L_{II}}{L_3} \sum_{j=1}^{n_3} \left( \frac{\varepsilon}{\omega_{j3}} + g_{j3}^* \right) \sin(\omega_{j3} \varphi + \psi_{oj3}) \bar{g}_{on} + \frac{L_{II} + L_3}{L_3} g_{II}^* - \frac{L_{II}}{L_3} g_3^*, \quad (6.63)$$

де  $g_{in}^*$  і  $g_{j3}^*$  – центровані випадкові величини з нормальним законом розподілу і середньоквадратичними відхиленнями, які визначаються згідно з формулами (6.30) та (6.43), а саме:

$$\sigma_{in} = \frac{1}{3} \varepsilon \cdot \frac{1}{\omega_{in}}; \quad \sigma_{j3} = \frac{1}{3} \varepsilon \cdot \frac{1}{\omega_{j3}}. \quad (6.64)$$

Значення початкових фаз  $\Psi_{oin}$ ,  $\Psi_{oj3}$  є випадковими величинами з рівномірним законом розподілу в діапазоні  $[0; 2\pi]$ . В формулу (6.63) входять також центровані випадкові величини з нормальним законом розподілу  $g_{in}^*$  та  $g_{j3}^*$ . Їх середньоквадратичні відхилення, відповідно до формул (6.31) та (6.44), складають:

$$\sigma_{gn} = \sigma_{g3} = \bar{g}_{on} / 3. \quad (6.65)$$

Одержані формули використані для розрахунку значень биття осі шпинделя фрезерного верстата в околі закріплення фрези косокутного різання.

При розрахунках використані засоби математичних пакетів MathCAD 2000 та MATLAB 6.0. Математичний пакет MathCAD використано для перевірки адекватності розробленої математичної моделі та уточнення значень коефіцієнтів, а програмне середовище MATLAB застосоване для практичних розрахунків биття осі шпинделя при розробці загальної математичної моделі системи “шпиндель – інструмент”.

Нижче наведено фрагмент документа MathCAD, в якому здійснені розрахунки залежності биття шпинделя від кута його повороту.

Спочатку задають числові значення геометричних параметрів та коефіцієнтів, зокрема значення векторів частот, що визначають биття передньої та задньої опор підшипника:

```

Ln := 90      L3 := 320      ε := 0.17      g0m := 0.3
k := 0..3
      ωnk := 1

      k := 4..6      ωnk := 2      k := 21..23      ωnk := 12
      k := 7..9      ωnk := 3      k := 24..25      ωnk := 24
      k := 10..12     ωnk := 4      k := 36..30     ωnk := 48
      k := 13..15     ωnk := 5      k := 31..33     ωnk := 96
      k := 16..20     ωnk := 6
    
```

Потім обчислюється значення масивів випадкових складових амплітуд і початкових фаз окремих гармонік. Для цього використані вбудовані функції `norm` і `runif`:

```

sgn := norm(234, 0, 0.1)      sg3 := norm(234, 0, 0.1)
gn  := norm(234, 0, 0.06)     g3  := norm(234, 0, 0.06)

ψ03 := runif(234, 0, 2·π)     ψ0n := runif(234, 0, 2·π)
Ψ030 := (Ψ0n0 + π / 8)
    
```

Ці вбудовані функції визначають масиви з нормальним і рівномірним законами розподілу. В програмі враховано, що початкові фази перших гармонік биття передньої та задньої опор є близькими, оскільки вони задаються при складанні шпиндельного вузла верстата.

Розраховані значення коефіцієнтів математичної моделі показані у вигляді таблиць-векторів `gn`, `g3`, `ωn`, `ω3`, `ψ0n`, `ψ03`, `sgn`, `sg3`:



	0
0	-0.03
1	3.585·10 <sup>-3</sup>
2	-0.03
3	3.374·10 <sup>-3</sup>
4	-0.049
5	-2.836·10 <sup>-3</sup>
6	-0.015
7	1.153·10 <sup>-3</sup>
8	0.107
9	-4.337·10 <sup>-3</sup>
10	-0.028
11	0.062
12	0.083
13	-0.068
14	0.077
15	-0.07

$g_1 =$

	0
0	0.014
1	0.031
2	-0.055
3	0.098
4	0.036
5	0.078
6	0.029
7	-0.076
8	0.06
9	-0.07
10	-1.699·10 <sup>-3</sup>
11	-0.019
12	-0.058
13	-0.101
14	0.021
15	0.039

$g_3 =$

	0
0	1
1	1
2	1
3	1
4	2
5	2
6	2
7	3
8	3
9	3
10	4
11	4
12	4
13	5
14	5
15	5

$\psi_{0n} =$

	0
0	1
1	1
2	1
3	2
4	2
5	2
6	3
7	3
8	10
9	10
10	10

$\omega_3 =$

	0
0	4.548
1	3.095
2	4.209
3	3.917
4	5.019
5	6.213
6	3.955
7	3.715
8	3.176
9	2.826
10	5.909
11	1.583
12	4.59
13	3.927
14	4.03
15	3.496

$\psi_{0n} =$

	0
0	4.052
1	5.206
2	5.478
3	5.734
4	2.766
5	2.224
6	2.687
7	5.495·10 <sup>-3</sup>
8	4.86
9	0.564
10	4.297
11	0.968
12	0.305
13	0.117
14	4.069
15	5.744

$\psi_{03} =$

	0
0	-0.033
1	-0.046
2	0.04
3	0.05
4	-7.894·10 <sup>-3</sup>
5	8.305·10 <sup>-3</sup>
6	0.042
7	-0.077
8	-0.013
9	-0.146
10	0.02
11	0.168
12	-0.091
13	0.079
14	-0.013
15	-0.112

$sgn =$

	0
0	-0.061
1	-0.024
2	0.033
3	0.113
4	-0.061
5	-0.061
6	-0.109
7	-0.053
8	-0.031
9	-0.015
10	-0.098
11	-0.028
12	-0.036
13	-0.114
14	-9.629·10 <sup>-3</sup>
15	-0.027

$sg_3 =$

Задані обчислені значення коефіцієнтів використані при розрахунках биття осі шпинделя за формулою (6.63). Спочатку розраховане значення биття для однієї реалізації випадкових параметрів моделі. Це робиться наступними операторами:

$k := 1$

$$p_1(\phi) := \left( \frac{Ln + L3}{L3} \right) \cdot \sum_{i=0}^{33} \left( \frac{\epsilon}{\omega_{n_i}} + g_{1k} \right) \cdot \sin(\omega_{n_i} \cdot \phi + \psi_{0n_i}) - \frac{Ln}{L3} \cdot \sum_{j=0}^{10} \left( \frac{\epsilon}{\omega_{3_j}} + g_{3k} \right) \cdot \sin(\omega_{3_j} \cdot \phi + \psi_{03_j})$$

$$p(\phi) := p_1(\phi) + g_{0m} + \left( \frac{Ln + L3}{L3} \right) \cdot sgn_k - \frac{Ln}{L3} \cdot sg_3_k$$

Розрахункові значення окремих реалізацій залежностей положення геометричної осі шпинделя від кута його повороту наведені на рис. 6.5 та 6.6. Розрахунки проведені в основному для одного набору векторів випадкових значень амплітуд, початкових фаз і випадкових змін положення осі, які відповідають номеру  $k = 1$ . Виключенням є розрахунки, наведені на рис. 6.5, *в, г* та 6.6, *д, е*. Ці розрахунки проведені для іншого набору значень випадкових коефіцієнтів задачі.

На рисунках показані залежності положення осі від прямокутного кута повороту шпинделя в декартовій (ліві графіки) та в полярній (праві графіки) системах координат. Графіки відповідають послідовному збільшенню числа врахованих гармонік від 8 і 6 відповідно для передньої та задньої опор шпинделя до 33 і 13 для передньої та задньої опор відповідно.

Із аналізу наведених розрахунків даних випливає, що при врахуванні до 12 гармонік зазначена форма кривої биття шпинделя є плавною, має суттєво виражений випадковий характер (див. рис. 6.5, *а-е*).

Ці гармоніки обумовлені похибками розташування кілець підшипників та доріжок і відповідно відповідають змінам положення осі шпинделя, розрахованим за формулами (6.7) та (6.11).

Із порівняння графіків, які наведені на рис. 6.5, *а, в* та одержані для різних наборів значень випадкових коефіцієнтів шпиндельних опор, випливає, що форма кривої биття може мати різноманітний характер. В той же час амплітудні та середні значення биття зберігаються постійними.

Збільшення числа врахованих гармонік вище 12-ти призводить до появи високочастотних складових биття. Вони проявляються у вигляді помірних осциляцій кривої биття (див. рис. 6.5, *ж, з*). З подальшим підвищенням кількості врахованих гармонік крива биття змінюється незначним чином, що видно із порівняння графіків на рис. 6.5, *ж* і рис. 6.6, *а*, які відповідають врахованим 24-м і 29-м гармонікам відповідно.

Подальше врахування високочастотних гармонік викликає появу інтенсивних високочастотних осциляцій середньої амплітуди. Показані на рис. 6.5, *в* та 6.6, *д* графіки двох різних реалізацій залежності зміщень шпинделя від кута повороту мають регулярні високочастотні складові. Ці складові в основному визначаються параметрами передньої опори шпинделя. Це впливає із порівняння двох розрахованих реалізацій биття шпинделя, наведених на рис. 6.6, *д, ж*. Ці дві реалізації відповідають різному числу врахованих різночастотних гармонік при розрахунку биття задньої опори шпинделя (6 і 10). В результаті численних експериментів встановлено, що биття шпинделя представляє собою складний стохастичний процес.

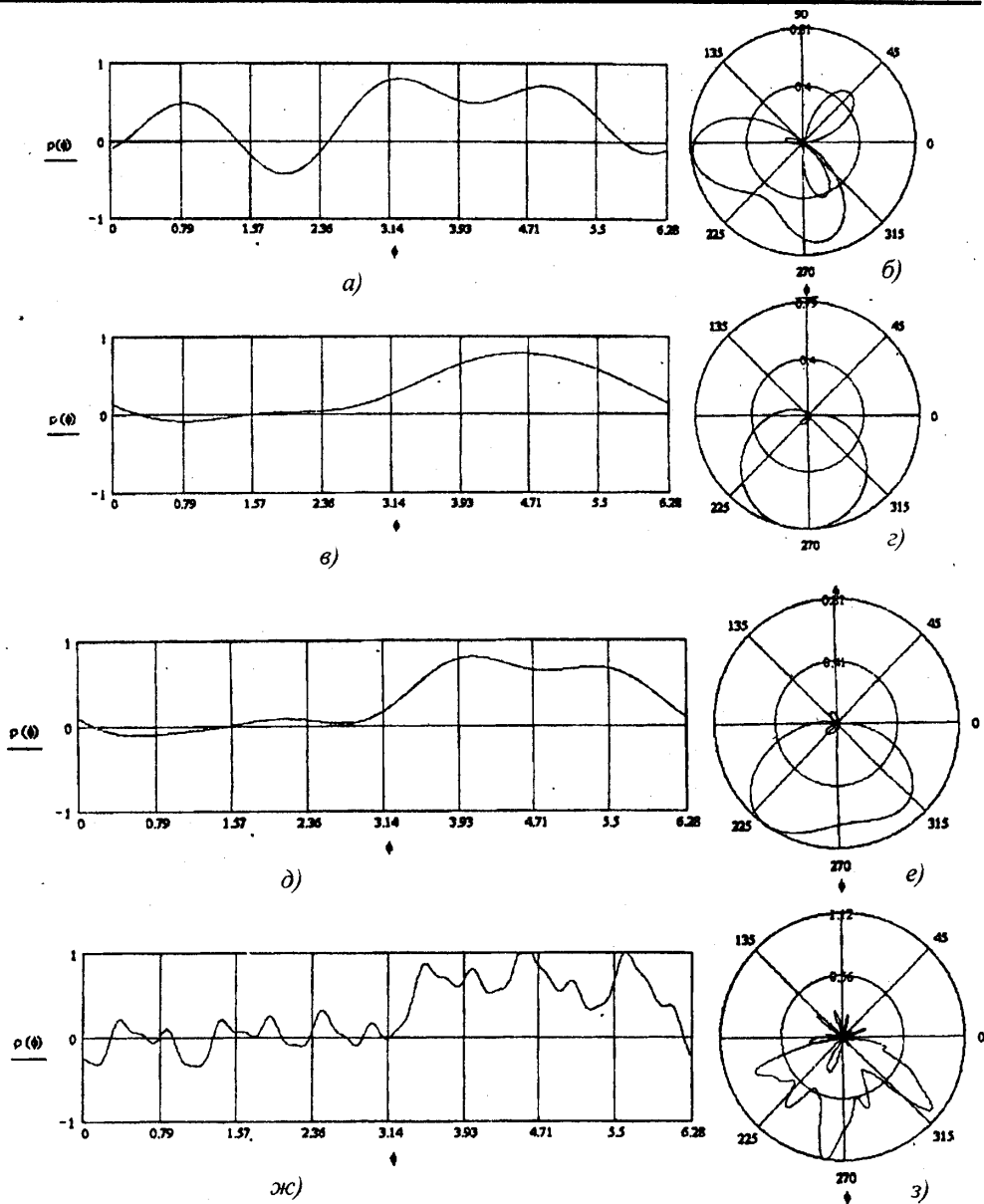


Рис. 6.5. Розрахунки залежності окремих реалізацій випадкової залежності биття шпинделя від кута повороту, одержані при врахуванні: а, б, в, г – 8-ми гармонік в передній опорі та 6-ти в задній; д, е – 12-ти гармонік в передній опорі та 6-ти в задній; ж, з – 24-х гармонік в передній опорі та 6-ти в задній

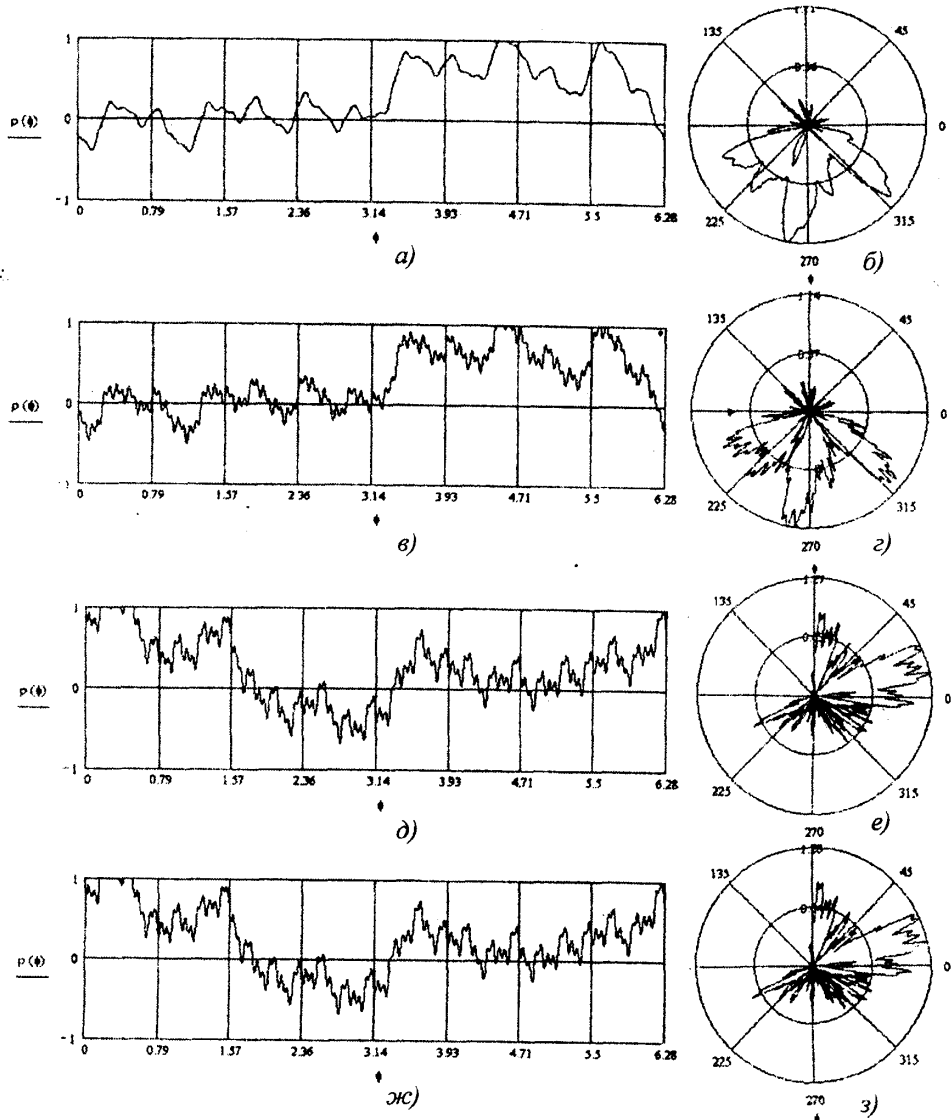


Рис. 6.6. Розрахунки реалізації випадкового процесу биття циліндричної поверхні шпинделя, одержані при врахуванні різного числа гармонік ряду Фур'є: а, б – 29-ти гармонік в передній опорі та 6-ти в задній опорі; в, г, д, е – 33-х гармоніки в передній опорі та 6-ти в задній; ж, з – 33-х гармонік в передній опорі та 10-ти в задній

Для дослідження структури цього процесу виконано аналіз ансамблю реалізацій залежності биття шпинделя від кута повороту. Встановлено, що цей процес є суттєво нестационарним. Для його дослідження розглянуто набір

реалізацій (всього 200) залежності зміщення осі шпинделя від кута повороту. Розрахунок набору фрагментом документа MathCAD наведений на рис. 4.7.

$$\rho(\phi, k) := \left( \frac{L_n + L_3}{L_3} \right) \cdot \sum_{i=0}^{29} \left( \frac{\varepsilon}{\omega_{n_i}} + g_{n_k} \right) \cdot \sin(\omega_{n_i} \phi + \psi_{0n_i}) - \frac{L_n}{L_3} \cdot \sum_{j=0}^{10} \left( \frac{\varepsilon}{\omega_{3_j}} + g_{3_k} \right) \cdot \sin(\omega_{3_j} \phi + \psi_{03_j})$$

$$\rho(\phi, k) := \rho(\phi, k) + g_{0m} + \left( \frac{L_n + L_3}{L_3} \right) \cdot \text{sgn}_k - \frac{L_n}{L_3} \cdot \text{sg}_{3_k}$$

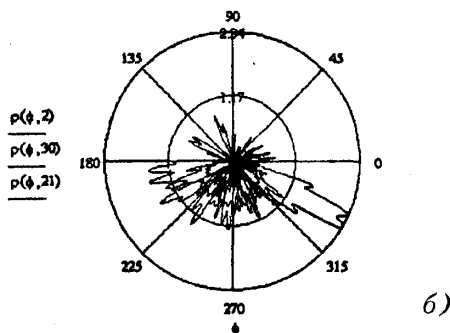
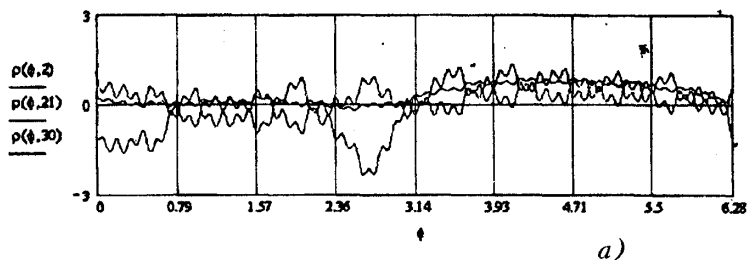


Рис. 6.7. Фрагмент документа MathCAD, призначений для розрахунку ансамблю реалізацій випадкової залежності зміщення осі шпинделя від кута повороту, і результати розрахунків трьох реалізацій в прямокутній (а) та полярній (б) системах

На рис. 6.7 показані три розраховані реалізації випадкового процесу биття шпинделя.

Ці реалізації відповідають розрахункам за формулою (6.63), в якій покладене значення одиниці амплітуди биття шпинделя  $\varepsilon = 0,17$  мкм, середньоквадратичне значення випадкової складової амплітуди  $\sigma = 0,06$  мкм, математичне сподівання випадкової складової биття  $\bar{g}_{on} = 0,3$  мкм та середньоквадратичне відхилення випадкової складової  $\sigma_g = 0,1$  мкм.

Для аналізу випадкового процесу вибраний один із перерізів процесу

(при  $\varphi = 0$ ). Знайдена вибірка випадкових значень биття шпindelя при  $\varphi = 0$  і виконано її статистичну обробку. Зокрема побудовані гістограми вибірок. Для цього використано 200 розрахованих при  $\varphi = 0$  значень биття шпindelя. Гістограми побудовані з використанням програмних засобів пакету MathCAD. При побудові гістограм приймалась різна ширина розрядів (кількість ординат) гістограм. На рис. 6.8 наведено фрагмент документа MathCAD для визначення гістограми 201 вибіркового значення биття шпindelя при значенні полярного кута  $\varphi = 0$  і числі розрядів гістограми  $n_i = 8$ .

$k := 0..200$        $\phi := 0$        $n_i := 8$

$A_k := \rho(\phi, k)$

$N := \text{hist}(n_i, A)$

$\text{hist}(n_i, A) =$

0
1
7
46
115
29
3
0

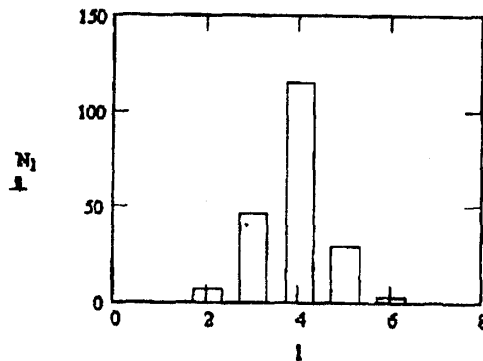


Рис. 6.8. Фрагмент документа MathCAD для визначення гістограми розподілу радіального биття шпindelя в перерізі випадкового процесу, що відповідає нульовому куту повороту шпindelя

Одержані значення ординат гістограми та побудовані графіки. Для побудови гістограми використано вбудовану функцію **hist**.

Із аналізу гістограми, що включає 8 розрядів (див. рис. 6.8), випливає, що закон розподілу значень биття відповідає нормальному.

Уточнення закону розподілу здійснене побудовою гістограм з числом розрядів 50 (рис. 6.9). Побудована гістограма з числом розрядів 50 не має

суттєвих відмінностей від гістограми з числом розрядів 8. Із аналізу вигляду гістограм випливає, що вони є близькими до нормального закону розподілу. Використовуючи засоби пакету MathCAD, знайдені числові статистичні характеристики одержаного масиву випадкових значень радіального биття шпинделя. Математичне сподівання вибірки знайдемо за допомогою вбудованої функції mean. Дисперсія випадкових значень елементів вибірки визначена з використанням вбудованої функції var, а середньоквадратичне відхилення – вбудованої функції stdev.

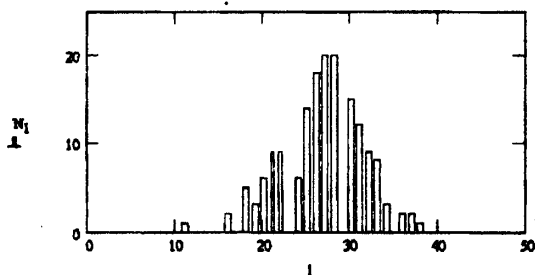
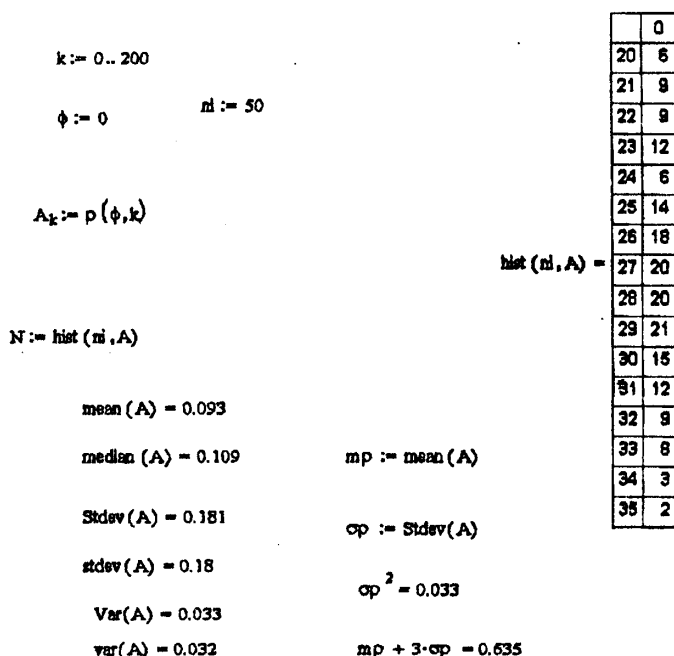


Рис. 6.9. Фрагмент документа MathCAD, який визначає числові характеристики вибірки биття шпинделя при нульовому куті повороту шпинделя та гістограми розподілу биття з числом розрядів 50

Розрахунок числових параметрів вибірки також наведений на рис. 6.9.

Вибірка значень випадкової функції, що визначає биття шпинделя при постійному (нульовому) значенні кута повороту, використана для уточнення параметрів залежності биття від кута повороту, що відповідає залежності (4.63).

Наведені на рис. 6.9 результати розрахунків статистичних характеристик випадкового биття шпинделя відповідають визначеним раніше значенням параметрів, а саме:  $\varepsilon = 0,17$  мкм,  $\sigma = 0,06$  мкм,  $\bar{g}_{om} = 0,3$  мкм,  $\sigma_g = 0,1$  мкм. Ці параметри відповідають нижнім значенням у формулах (6.59) та (6.61).

Одержані розрахунком статистичні характеристики загального биття складають (див. рис. 6.9): математичне сподівання  $\hat{m} = 0,063$ ,  $\sigma = 0,181$ . Це дає загальний ймовірний діапазон биття:

$$\Delta p = m + 3\sigma = 0,635. \quad (6.66)$$

Збільшення значення параметрів залежності (6.63) до верхньої межі призводить до збільшення діапазону биття. На рис. 6.10 наведено фрагмент документа MathCAD і результати розрахунків статистичних характеристик биття при тому ж самому (нульовому) положенні шпинделя, але збільшеному значенні  $\varepsilon = 0,18$  мкм,  $\sigma_g = 0,09$  мкм. При цьому, як і раніше,  $\bar{g}_{om} = 0,3$  мкм,  $\sigma_g = 0,1$  мкм.

Збільшення значень параметрів, що входять до розрахункової залежності, призводить до збільшення биття шпинделя. При цьому математичне сподівання складає  $m = 0,085$ ,  $\sigma = 0,242$ , а загальний ймовірний діапазон биття:

$$\Delta p = m + 3\sigma = 0,81. \quad (6.67)$$

Аналогічним чином на статистичні характеристики впливає зміна параметрів  $g_{om}$  та  $\sigma_g$ .

Нижче наведені фрагмент документа MathCAD і результати розрахунків статистичних характеристик биття для значень параметрів:  $\varepsilon = 0,17$ ,  $\sigma_g = 0,06$ ,  $\bar{g}_{om} = 0,4$ ,  $\sigma_g = 0,2$ . Ці значення відповідають середньому значенню параметра  $\bar{g}_{om}$ , визначеному за формулою (6.61) при нижньому значенні параметра  $\varepsilon$ , визначеного за формулою (6.59). Результати розрахунків для даного набору значень параметрів наведені на рис. 6.11.

Збільшення параметрів  $\bar{g}_{om}$  і  $\sigma_g$  також призводить до збільшення математичного сподівання та биття ( $m = 0,174$ ,  $\sigma = 0,242$ ). Загальний ймовірний діапазон зміни радіального биття складає:

$$\Delta p = m + 3\sigma = 0,898. \quad (6.68)$$

В результаті численних експериментів встановлено, що уточнені параметри биття шпинделя відповідають нижній межі значення параметра  $\varepsilon$ , заданого формулою (6.61). Відповідно уточнені значення параметрів складають (в мкм):  $\varepsilon = 0,18$ ,  $\sigma_p = 0,09$ ,  $\bar{g}_{om} = 0,4$ ,  $\sigma_g = 0,2$ .

Розраховані для даних параметрів масиви випадкових значень коефіцієнтів,



що входять в формулу (6.63), наведені нижче (рис. 6.12).

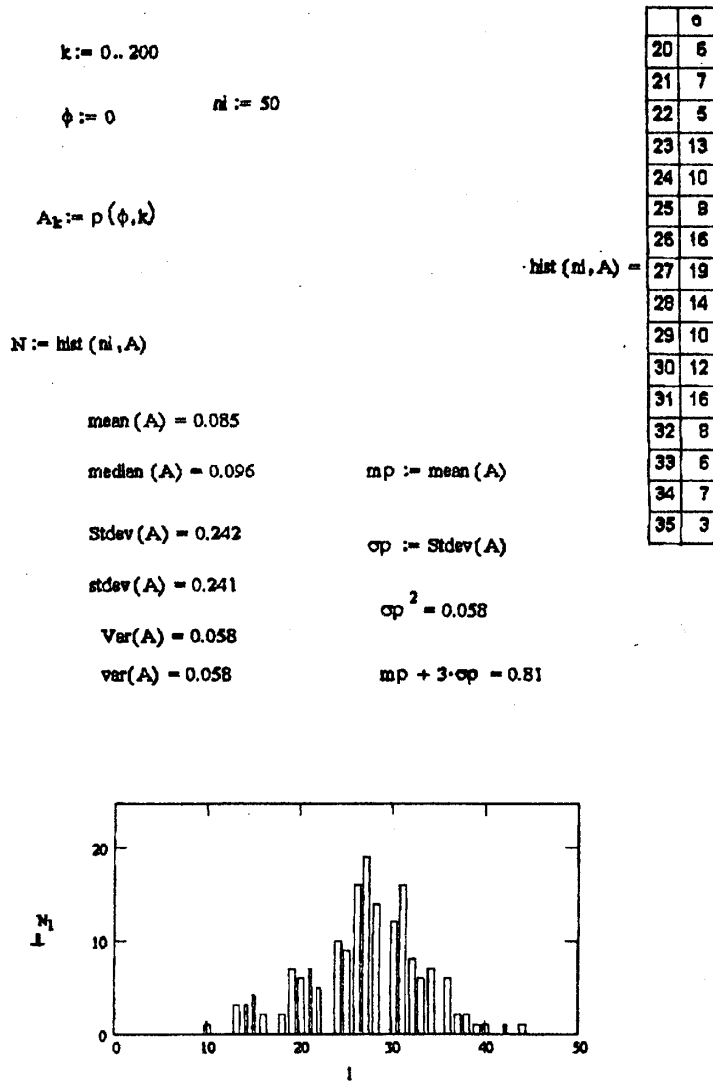


Рис. 6.10. Розрахунок статистичних характеристик биття шпинделя при нульовому куті повороту і збільшених значеннях параметрів  $\varepsilon$  і  $\sigma_p$  при постійних  $\bar{g}_{om}$  та  $\sigma_g$

Відповідно до розрахованих масивів коефіцієнтів побудована математична модель для розрахунку биття шпинделя. Реалізація цієї моделі в пакеті MathCAD наведена на рис. 6.13.

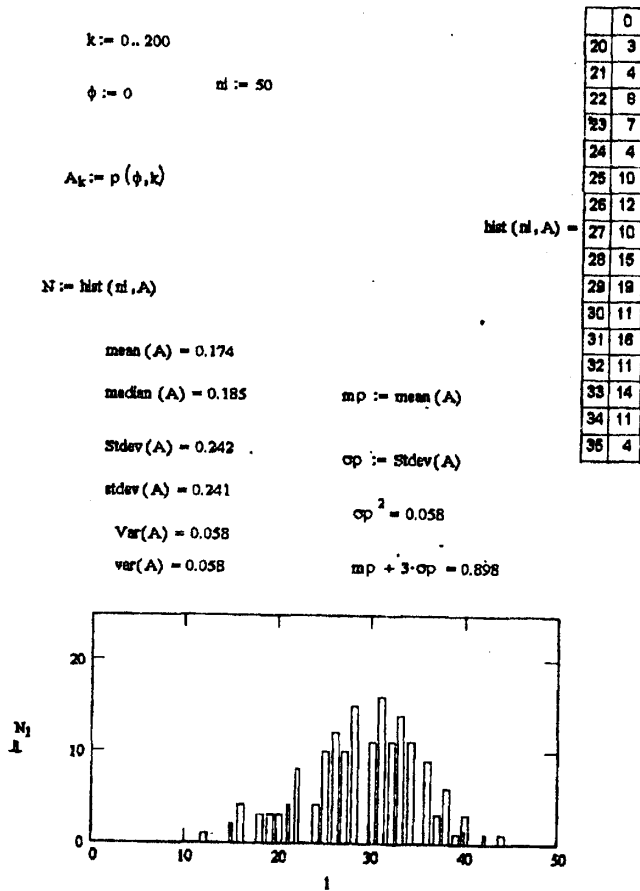


Рис. 6.11. Розрахунок статистичних характеристик биття шпинделя при збільшених значеннях параметрів  $\bar{g}_{om}$  та  $\sigma_g$  при постійних  $\varepsilon$  і  $\sigma_p$

Для кожного набору випадкових коефіцієнтів моделі розраховується окрема залежність (реалізація) зміщення осі шпинделя при його повороті. Окремі залежності утворюють ансамбль реалізацій випадкового зміщення осі шпинделя. Реалізації відповідають нестационарному випадковому процесу, в якому статистичні характеристики залежать від кутового положення шпинделя.

Для визначення зміни статистичних характеристик по куту повороту виконано ряд розрахунків для певних кутів повороту шпинделя.

Розглянуте кутове положення шпинделя  $\phi = 0; 2\pi$ , а також кутові положення  $\phi = \pi/2$  та  $\phi = \pi$ . Ці кутові положення показані на рис. 4.13, а цифровими позиціями 1, 6, 3, 4.

Із аналізу ансамблю реалізацій, наведеного на даному рисунку, випливає,

що за деяких кутових положень мають місце особливості поведінки випадкового процесу биття шпинделя. Це стосується кутових положень з  $\varphi = 0,9 \dots 1,1$  та  $\varphi = 5,7 \dots 5,9$ . Для встановлення особливостей процесу виконано його статистичний аналіз в перерізах  $\varphi = 1,043$  та  $\varphi = 5,8$ , що відповідає цифровим позиціям 2 і 5 на рис. 6.13, а.

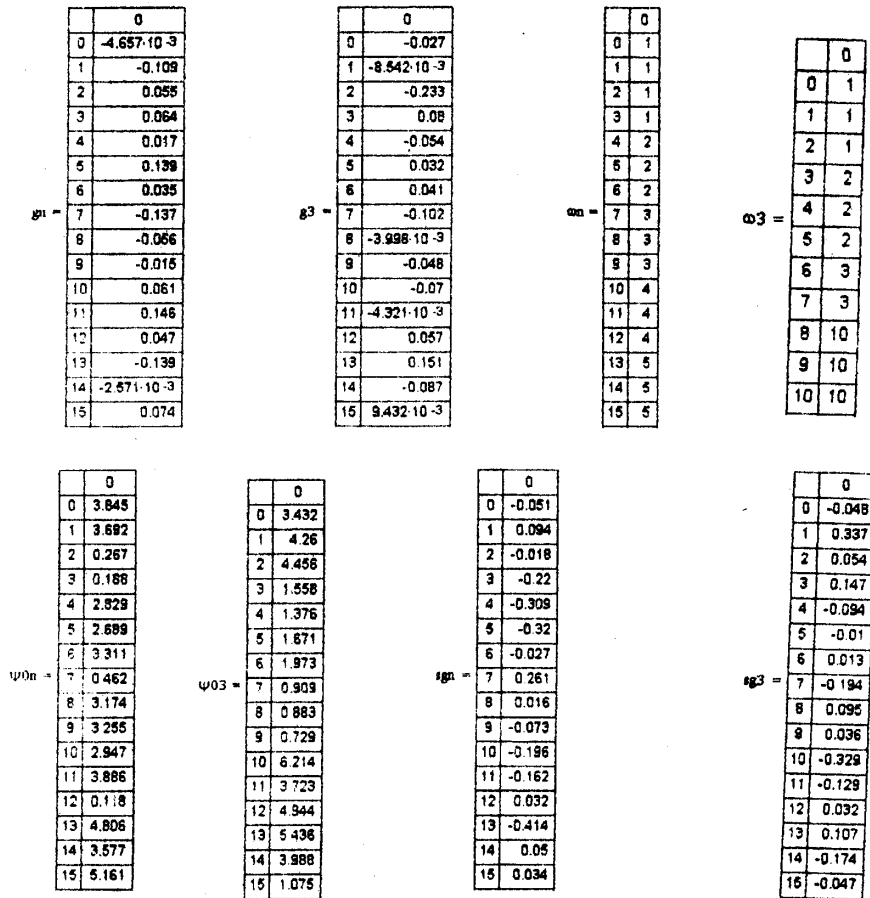


Рис. 6.12. Фрагмент документа MathCAD, який здійснює розрахунок випадкових коефіцієнтів математичної моделі биття шпинделя, та перші значення масивів коефіцієнтів

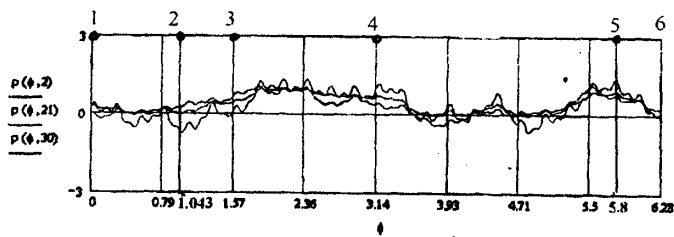
Для кожного із 6-ти перерізів знайдені статистичні вибірки (по 200 шт.) і виконано їх аналіз з метою знаходження числових характеристик і побудови гістограм процесу в кожному перерізі (рис. 6.14).

Всі побудовані гістограми в цілому відповідають нормальному закону розподілу. Тому для характеристики процесу в різних перерізах використано два

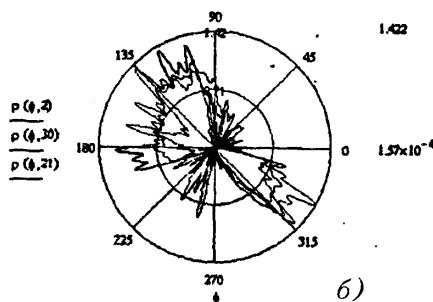
параметри: математичне сподівання  $m_p$  і середньоквадратичне відхилення  $\sigma_p$  (табл. 6.1).

$$p_1(\phi, k) := \left( \frac{L_n + L_3}{L_3} \right) \cdot \sum_{i=0}^{20} \left( \frac{\varepsilon}{\omega \omega_i} + g_{2k} \right) \cdot \sin(\omega \omega_i \cdot \phi + \psi_{0n_i}) - \frac{L_n}{L_3} \cdot \sum_{j=0}^{10} \left( \frac{\varepsilon^2}{\omega_3^2} + g_{3k} \right) \cdot \sin(\omega_3 \cdot \phi + \psi_{03_j})$$

$$p(\phi, k) := p_1(\phi, k) + g_{0m} + \left( \frac{L_n + L_3}{L_3} \right) \cdot g_{2k} - \frac{L_n}{L_3} \cdot g_{3k}$$



a)



b)

Рис. 6.13. Програма реалізації математичної моделі биття шпindelя з уточненими значеннями коефіцієнтів та розрахунок випадкових залежностей зміщення шпindelя при його повороті в прямокутній (a) та полярній (б) системах координат

Таблиця 6.1

Числові характеристики випадкового процесу биття шпindelя, що відповідають різним перерізам процесу (кутам повороту шпindelя)

№ з/п	$\phi$ , рад	$\phi$ , град	$m_p$ , мкм	$\sigma_p$ , мкм	$m_p + 3\sigma_p$ , мкм	Примітка
1	0	0	0,214	0,306	1,133	min
2	1,043	60	0,296	0,426	1,576	
3	$\pi/2$	90	0,644	0,306	1,561	
4	$\pi$	180	0,564	0,565	2,26	
5	5,8	333	0,765	0,839	3,283	max
6	$2\pi$	360	0,214	0,306	1,133	min

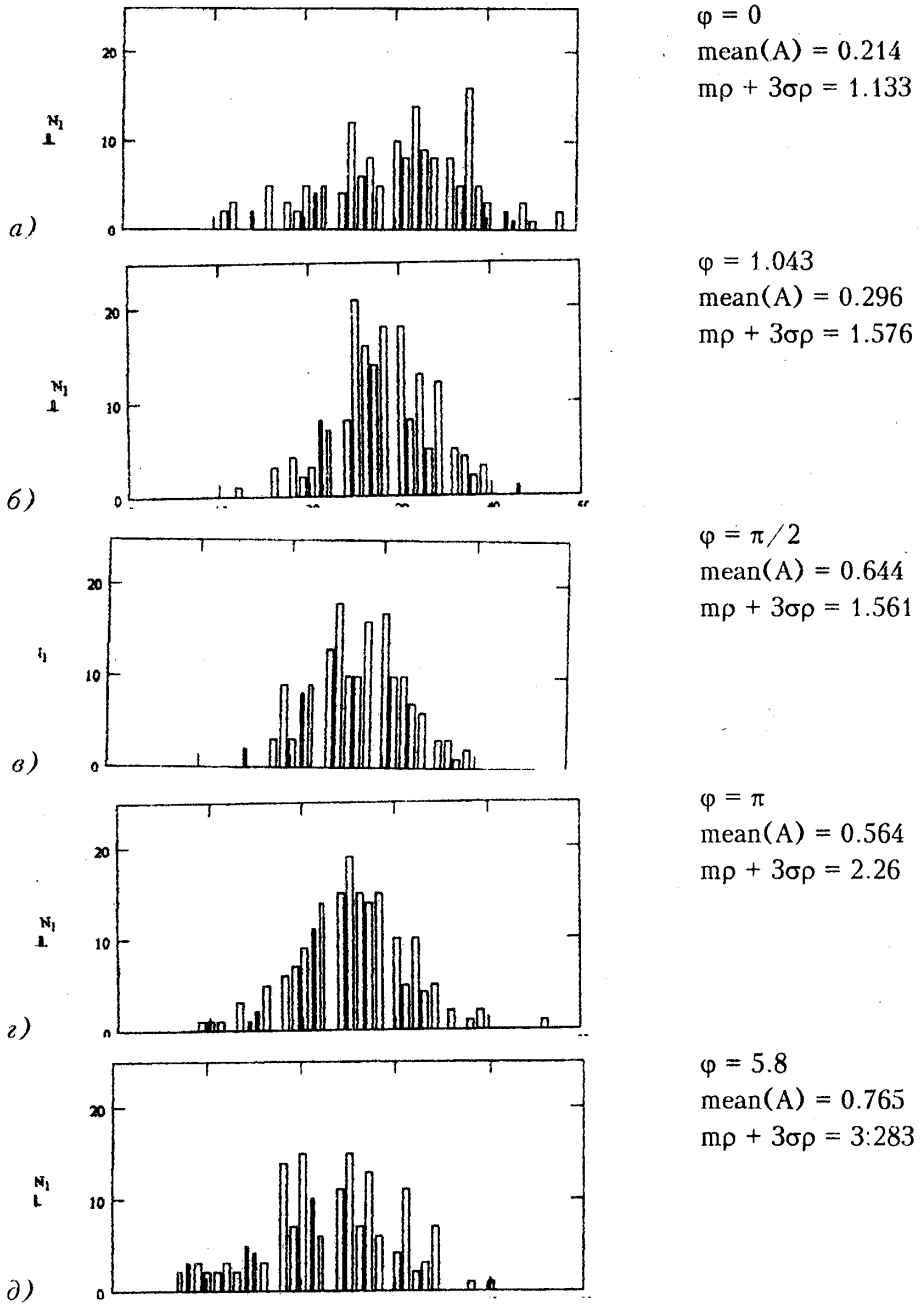


Рис. 6.14. Гістограми випадкових значень і числові характеристики биття шпинделя при різних значеннях кута повороту: а -  $\varphi = 0 = 2\pi$ , б -  $\varphi = 1,043$ ; в -  $\varphi = \pi/2$ ; г -  $\varphi = \pi$ ; д -  $\varphi = 5,8$

Із аналізу таблиці випливає, що математичне сподівання процесу биття складає:

$$m_p = 0,2...0,8 \text{ мкм.} \quad (6.69)$$

Зміна математичного сподівання по куту повороту шпинделя досягає 70 %. Середньоквадратичне відхилення биття знаходиться в межах:

$$\sigma_p = 0,3...0,9 \text{ мкм.} \quad (6.70)$$

Загальний ймовірний діапазон биття складає:

$$\Delta p = m_p + 3\sigma_p = 1,3...3,3. \quad (6.71)$$

Ці параметри характеризують биття шпинделя в області його циліндричної кінцевої частини.

Для підтвердження адекватності розробленої теоретичної моделі биття фрези, обумовленої властивостями опорних вузлів шпинделя верстата, виконано комплекс експериментальних вимірювань. Вимірювалося радіальне положення фрези при її повороті разом зі шпинделем верстата. Вимірювання радіального положення здійснювались індикаторами з ціною поділки 0,001 мм. Заміри здійснювались в обох взаємно перпендикулярних напрямках в площині, паралельній площині стола верстата.

Схема розташування індикаторів при вимірюваннях положення фрези показана на рис. 6.15.

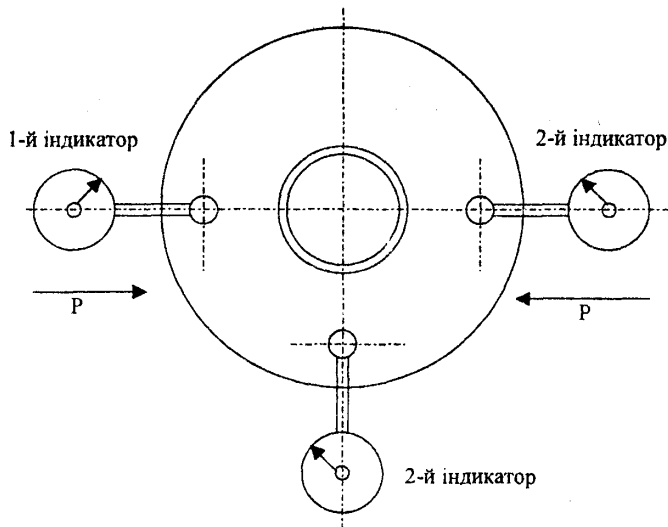


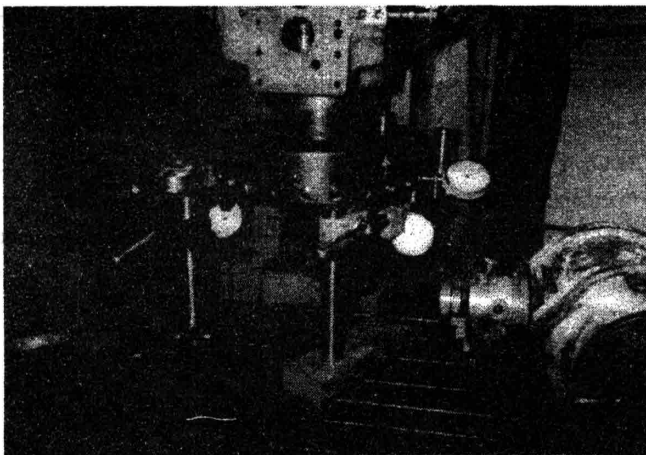
Рис. 6.15. Схема встановлення індикаторів при вимірюванні переднього положення фрези

Замість ножів в отвори фрези були поміщені спеціальні калібровані стрижні.

Вимірювання положення фрези здійснювались наступним чином.

Фрези встановлювались так, щоб індикатори торкались до каліброваних частин відповідних стрижнів. Потім шпindel верстата разом із фрезою повертався вручну на  $360^\circ$ . Індикаторами вимірювались відхилення положення фрези після першого оберту. Далі здійснювався ще один поворот на  $360^\circ$  і відповідні вимірювання відхилення фрези від початкового положення. Число обертів і відповідних вимірювань вибиралось достатньо великим (приблизно 20) з метою одержання статистичних характеристик положення фрези.

. Загальний вигляд фрези та індикаторів, які використовувались при вимірюваннях, наведені на рис. 6.16.



*Рис. 6.16. Схема установки індикаторів на столі верстата при вимірюваннях зміни положення осі фрези, обумовленого биттям підшипників*

Експериментальні вимірювання включали три цикли:

- вільний поворот шпинделя з фрезою при вимірюваннях положення фрези після кожного оберту;
- поворот фрези покроково на один оберт з прикладанням до фрези під час повороту знакозмінного статистичного навантаження;
- поворот фрези покроково при здійсненні протягом повороту динамічного (ударного) навантаження.

Цикл експериментальних вимірювань при вільному повороті шпинделя розглянуто раніше. Експериментальні вимірювання з прикладанням до фрези знакозмінного статичного навантаження здійснювались аналогічно. Відмінність полягала в тому, що при повороті на деякий кут шпindel зупинявся і до фрези в радіальному напрямку прикладалося зусилля приблизно 100 Н.

*Розділ 6. Геометричний аналіз системи "шпиндель – інструмент"*

Після зняття зусилля прикладалось зусилля в протилежному напрямку. Після цього продовжувалося обертання шпинделя і проводились вимірювання положення фрези. Знакозмінні статичні зусилля прикладалися після кожного із 20 обертів фрези.

Експериментальні вимірювання положення фрези при її динамічному навантаженні відрізнялись від розглянутого циклу вимірювань тим, що замість статичного знакозмінного зусилля до фрези прикладалось імпульсне (ударне) навантаження.

Результати вимірювань по всіх трьох циклах експериментального дослідження наведені в табл. 6.2.

Таблиця 6.2

Відносні радіальні зміщення фрези при її повороті  
при різних схемах навантаження

№ оберту	1-й цикл			2-й цикл			3-й цикл		
	Відносні покази індикаторів, мкм								
	1-го	2-го	3-го	1-го	2-го	3-го	1-го	2-го	3-го
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	-1	6	0	-1	1	-4	-3	-2
2	0	0	-2	0	0	-1	-6	-4	-4
3	0	2	-3	0	0	1	-3	-2	-1
4	-2	3	0	4	-1	3	-5	-2	1
5	0	5	-3	0	0	1	-6	-4	0
6	0	4	-1	0	-1	2	-7	-3	-1
7	2	2	-3	2	0	2	-6	-5	-3
8	0	0	-2	1	-1	4	-3	-3	-2
9	2	1	-3	0	-1	2	-4	-2	-3
10	2	3	-2	2	-2	0	-7	-3	-4
11	1	4	0	3	0	1	-7	-1	-2
12	2	2	-1	3	0	4	-6	-4	-1
13	0	1	-1	1	-1	4	-4	-3	-1
14	-1	1	-3	0	-3	3	-2	0	-3
15	0	3	-2	0	-2	1	-5	-2	4
16	0	3	0	3	-2	3	-4	-4	-4
17	1	2	0	4	0	4	-2	-5	-2
18	2	0	-1	3	0	2	-4	-3	-3
19	0	2	0	2	-1	2	-3	-2	-2
20	-1	1	1	2	-1	2	-3	-2	-4

Із аналізу експериментальних даних, наведених в табл. 6.2, випливає, що



діапазон зміщення фрези, виміряний кожним із індикаторів, складає 4...6 мкм.

За експериментально визначеними даними, наведеними в таблиці, побудовані графіки відносного зміщення фрези при її дискретному обертанні при різних циклах вимірювань. Графіки наведені на рис. 6.17.

Із аналізу графіків випливає, що розміщення (позиція) фрези характеризується деякою смугою та хаотичними змінами. Точність позиціонування відповідає залежностям, які змінюються випадковим чином.

Деякі нетипові зміни значень, виміряних індикаторами, мають місце при перших кількох обертах.

З метою визначення статистичних закономірностей процесу позиціонування фрези результати експериментальних вимірювань по всіх трьох циклах досліджень піддані статичному аналізу. При цьому із розгляду виключені перші три оберти як нетипові.

Статистична обробка полягає в наступному.

За даними табл. 6.1 та рис. 6.17 визначені частоти значень вимірів і побудовані гістограми розподілу частостей попадання значень вимірів у розряди. Величина розряду прийнята в 1 мкм. При визначенні частостей середина кожного розряду прийнята рівною цілому числу мікрометрів, а ширина розряду –  $\pm 0,5$  відносно середини розряду.

Значення частостей попадання результатів наведені в табл. 6.3.

За даними табл. 6.2 побудовані гістограми частоти появи відповідного значення показу кожного з датчиків.

Гістограми побудовані для вимірів, одержаних кожним із датчиків у відповідному циклі експериментальних вимірювань.

Вигляд гістограм наведений на рис. 6.20.

Із аналізу одержаних експериментальних гістограм точності позиціонування фрези випливає, що ширина смуги розсіяння значень, виміряних кожним із датчиків в різних циклах експерименту, є приблизно однаковою і складає 5...6 мкм.

За незначними відхиленнями в окремих випадках всі гістограми відповідають нормальному закону розподілу.

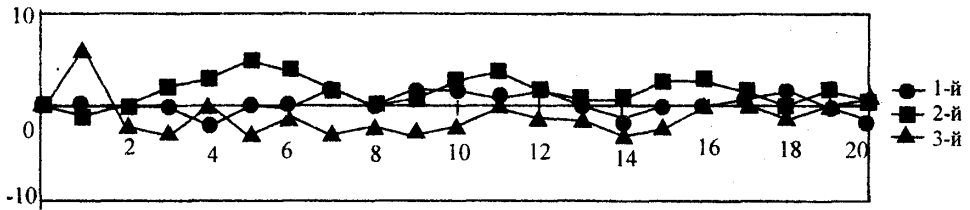
В результаті обробки експериментальних даних встановлено, що ймовірність появи радіального биття фрези  $\rho_E$  визначається формулою:

$$P(\rho_E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\rho_E}} e^{-\frac{(\rho_E - \bar{\rho}_E)^2}{2\sigma_{\rho_E}^2}}, \quad (6.72)$$

де  $\bar{\rho}_E$  – математичне сподівання биття фрези;

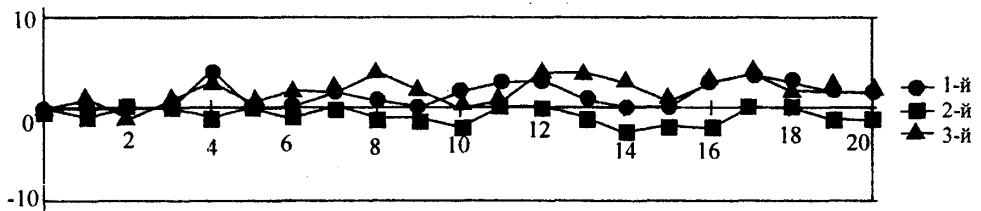
$\sigma_{\rho_E}$  – середнє квадратичне відхилення биття фрези.

1-й цикл – вільне обертання фрези



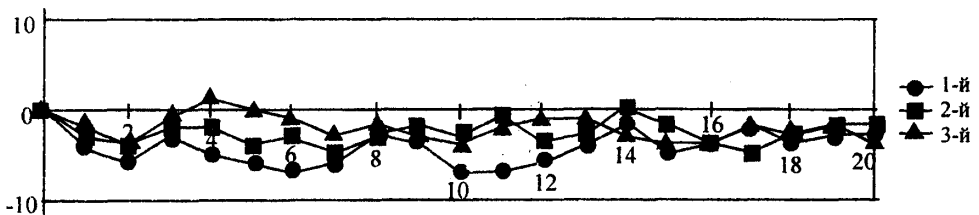
а)

2-й цикл – обертання із знакозмінним статичним навантаженням



б)

3-й цикл – обертання з імпульсним (ударним) навантаженням



в)

Рис. 6.17. Зміна радіального положення фрези при дискретному обертанні шпинделя на 20 оборотів: а-б – три цикли вимірювань

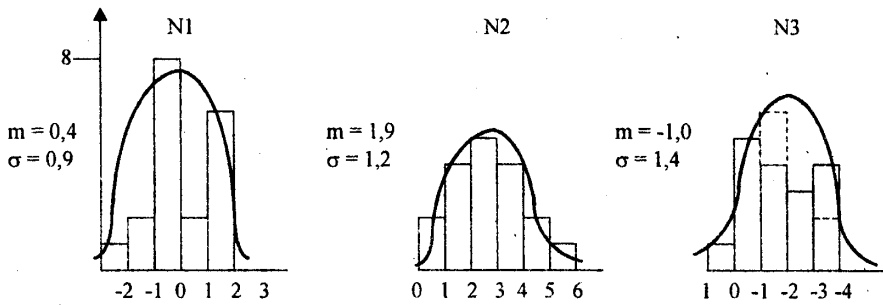


Рис. 6.18. Експериментально визначені гістограми показів датчиків, які відповідають точності позиціювання при циклі № 1 експериментальних вимірювань

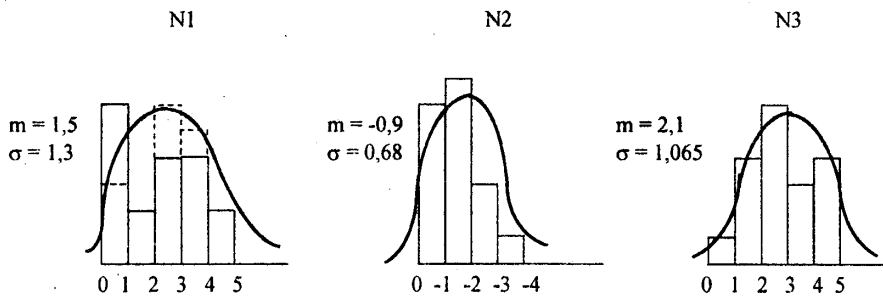


Рис. 6.19. Гістограми при другому циклі експериментальних вимірювань, що відповідає знакозмінним статистичним зусиллям на фрезу

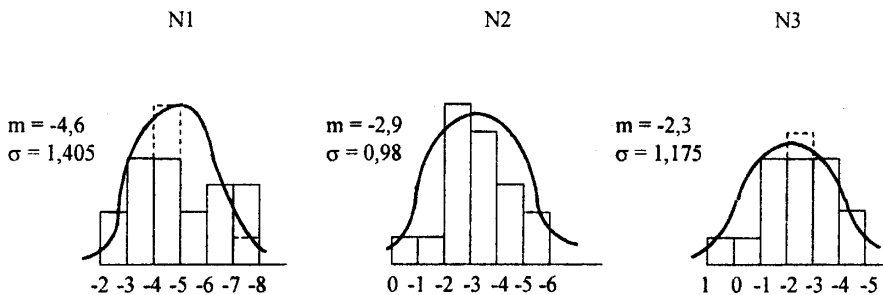


Рис. 6.20. Гістограми точності позиціювання при ударному навантаженні на фрезу

Таблиця 6.3

Значення частотей вимірювань точності позиціонування фрези  
при кожному циклі вимірювань  
1-й цикл вимірювань

Датчик	Частість	1	2	8	2	5	0
№ 1	Показники датчика, мкм	-2	-1	0	1	2	3

Датчик	Частість	2	4	5	4	2	1	0
№ 2	Показники датчика, мкм	0	1	2	3	4	5	6

Датчик	Частість	1	5	4	3	4	0
№ 3	Показники датчика, мкм	1	0	-1	-2	-3	-4

2-й цикл вимірювань (статичне знакозмінне навантаження)

Датчик	Частість	6	2	4	4	2	0
№ 1	Показники датчика, мкм	0	.1	2	3	4	5

Датчик	Частість	6	7	3	1	0
№ 2	Показники датчика, мкм	0	-1	-2	-3	-4

Датчик	Частість	1	4	6	3	4	0
№ 3	Показники датчика, мкм	0	1	2	3	4	5

3-ий цикл вимірювань (динамічне імпульсне ударне навантаження)

Датчик	Частість	2	4	4	2	3	3	0
№ 1	Показники датчика, мкм	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8

Датчик	Частість	1	1	6	5	3	2	0
№ 2	Показники датчика, мкм	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6

Датчик	Частість	1	1	4	4	4	4	0
№ 3	Показники датчика, мкм	1	0	-1	-2	-3	-4	-5

Ці параметри є статистичними характеристиками процесу биття фрези при її обертанні разом зі шпинделем верстата. Їх значення складають:

$$\bar{\rho}_E = 2...4 \text{ мкм}; \quad (6.73)$$

$$\sigma_{\rho E} = 0,8...1,2 \text{ мкм}. \quad (6.74)$$

Визначені формулами (6.73) і (6.74) характеристики биття фрези приведено до еквівалентного биття циліндричної кінцевої частини шпинделя.

Будемо вважати, що биття задньої опори шпинделя вносить незначний вклад в биття фрези. Тому для визначення взаємного зв'язку переміщень шпинделя використаємо схему, наведену на рис. 6.21.

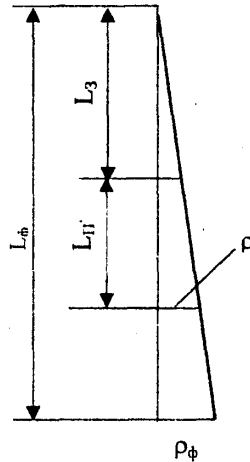


Рис. 6.21. Схема взаємозв'язку биття фрези  $\rho_\phi$  і биття циліндричної кінцевої частини шпинделя  $\rho$ :  $L_з = 320$ ;  $L_\pi = 90$ ;  $L_\phi = 510$

Із геометричних міркувань, співвідношення між радіальним биттям шпинделя і биттям фрези має вигляд:

$$\rho = \rho_\phi \cdot \frac{L_з + L_\pi}{L_\phi} \quad (6.75)$$

Використовуючи залежність (6.75), із формул (6.73) і (6.74) знайдемо експериментально визначені статистичні характеристики биття шпинделя:

$$\bar{\rho}_E = 1,5 \dots 3,2 \text{ мкм}; \quad (6.76)$$

$$\sigma_{\rho E} = 0,64 \dots 0,96 \text{ мкм}. \quad (6.77)$$

Із порівняння розрахункових (6.69) і (6.70) та експериментальних (6.76) і (6.77) статистичних характеристик биття випливає, що вони дають близькі результати.

Розрахункові та експериментальні середньоквадратичні відхилення співпадають в межах точності експерименту. Деяке перевищення експериментально визначеного математичного сподівання биття можна пояснити впливом широкого кола експлуатаційних факторів, наприклад зміни температури.

Таким чином, в результаті виконаних досліджень розроблена математична модель для розрахунку закономірностей биття шпинделя верстата. Модель враховує випадковий характер процесу биття. В результаті чисельних досліджень виконана ідентифікація параметрів моделі. При цьому уточнені їх



Масиви коефіцієнтів, які визначають частоти складових гармонік биття передньої та задньої опор шпинделя задаються блоками FreOn1 та FreOn2. Ці блоки формують на своєму виході відповідні вектори, компоненти яких визначають частоти гармонік. Блоки FreOn1 та FreOn2 формують вектори, компоненти яких є оберненими значеннями частот гармонік відповідно для передньої та задньої опор.

Структурна математична модель включає блоки множення, суматори, підсилювачі та в цілому точно відповідає формулі (6.63).

Для реалізації розрахунків биття за допомогою структурної математичної моделі розроблена допоміжна S-модель (рис. 6.23).

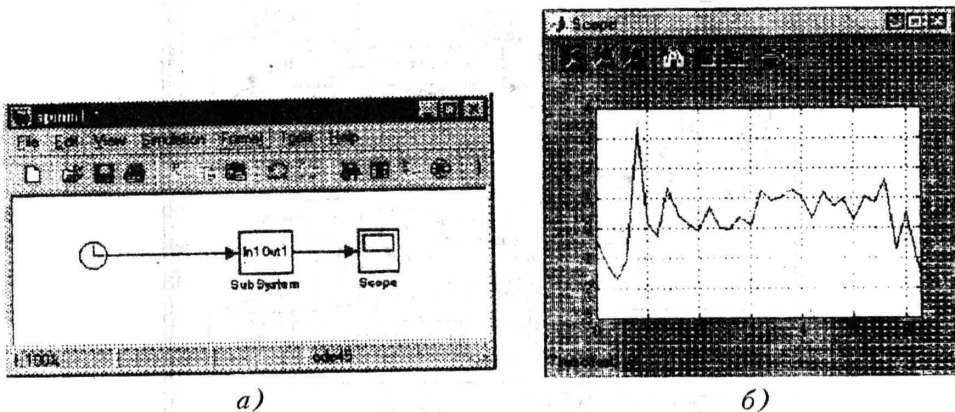


Рис. 6.23. S-модель (а) для реалізації розрахунку биття шпинделя в залежності від кута його повороту та результати розрахунків окремої реалізації випадкового биття шпинделя (б)

Допоміжна S-модель (рис. 6.23, а) включає блок, який задає змінний кут повороту шпинделя у вигляді лінійної функції часу, і блок Scope для виведення графіка биття в функції кута повороту шпинделя.

Результати розрахунків наведені на рис. 6.23, б. На ньому показана одна із реалізацій випадкової функції, що визначає радіальне биття шпинделя в залежності від кута його повороту.

Із аналізу графіка видно, що максимальне значення биття складає 3 мкм, а середнє значення – близько 0,8 мкм. По своїй структурі дана реалізація випадкового процесу відповідає раніше розглянутим розрахунковим реалізаціям процесу (див. рис. 6.5–6.7, 6.13).

Тому розроблена структурна модель биття шпинделя може бути використана як складова загальної математичної моделі шпиндель-інструмент, призначеної для розрахунку геометричної та кінематичної точності верстата, оснащеного фрезою косокутного різання.

### 6.3. Аналіз геометричної точності вузла кріплення фрези

Установка фрези в шпинделі верстата вносить суттєві похибки в обертову систему "шпиндель – інструмент". Посадочний отвір фрези (рис. 6.24) має певні геометричні похибки.

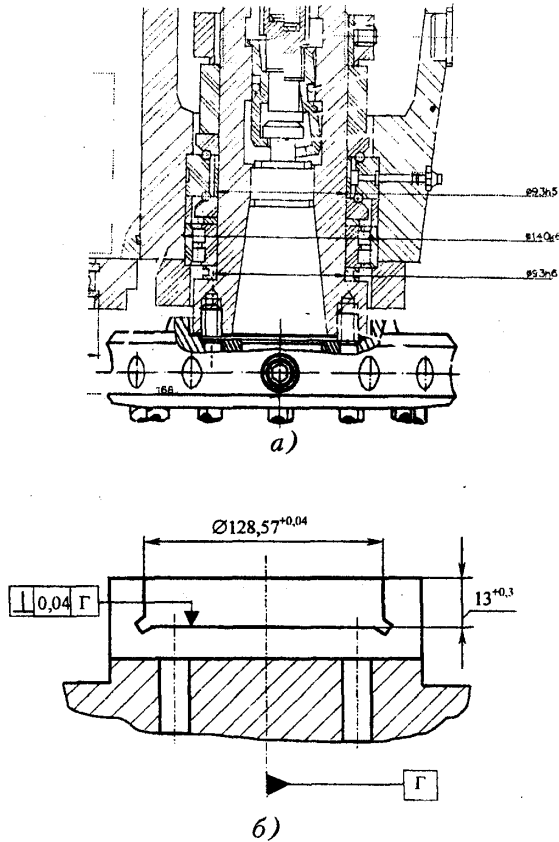


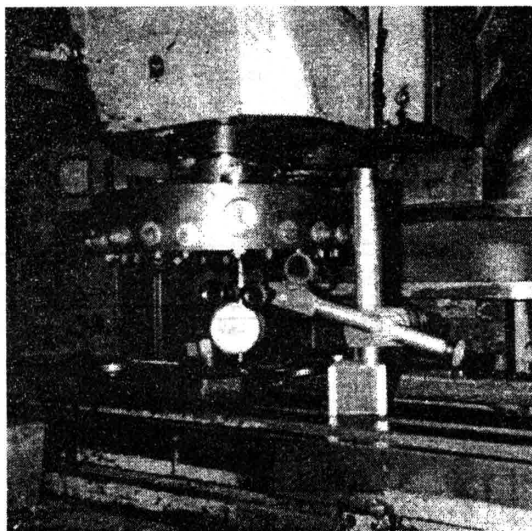
Рис. 6.24. Установка фрези в шпинделі верстата (а) і геометричні параметри вузла закріплення фрези на шпинделі (б)

Похибки установки фрези в шпинделі визначаються рядом факторів. Зокрема, вони залежать від похибок виготовлення посадочної поверхні фрези, її базування та центрування відносно осі шпинделя. Іншою причиною похибок є, власне відхилення розмірів кінцевої ділянки шпинделя. Похибки також визначаються вузлом кріплення фрези, затяжкою гвинтів, контактними деформаціями базуючої поверхні фрези і взаємодією їх із контактними деформаціями центруючого пояса фрези (див. рис. 6.24).



В цілому похибки установки фрези носять випадковий характер і мають тенденцію зміни при зміні установки фрези. Для виявлення основних закономірностей похибок установки фрези проведені спеціальні експериментальні дослідження. В експериментах визначена зміна положення ножа при зміні установки фрези. Для вимірювань використані індикатори з точністю вимірювань 0,001 мм.

Індикатор встановлювався на штативі з магнітним кріпленням його до поверхні стола верстата (рис. 6.25). Індикатор міг зміщуватись разом із штативом шляхом його повороту на площині поверхні стола.



*Рис. 6.25. Схема вимірювань геометричних похибок установки фрези, обумовлених геометричними і деформативними характеристиками вузла кріплення*

При вимірюваннях використовувалося чотири індикатори, які фіксували абсолютне положення чотирьох ножів у вертикальному напрямку. Ножі були розташовані в двох площинах, які наближено перпендикулярні одна одній. Розташування отворів ножів наближено відповідає лініям, на яких розташовані чотири отвори кріплення фрези. При вимірюваннях були задіяні ножі № 4 та 15, які розташовані по лінії осей отворів, і ножі, які знаходяться приблизно по середині між вищевказаними, а саме ножі з номерами № 10 та № 20. Один із ножів (ніж № 4) є чистовим.

Експериментальні дослідження здійснювались наступним чином. Фреза встановлювалась на шпинделі верстата і виконувались вимірювання положення кожного з ножів по вертикалі. Після цього індикатори плавно повертались на площині стола і відводилися від фрези. Фреза знімалась зі шпинделя верстата шляхом вилучення гвинтів. Здійснювався обмежений

поворот шпинделя (на  $10...30^\circ$ ), а потім він повертався в попереднє положення. Після цього фреза встановлювалось знову і здійснювалась затягування гвинтів вузла кріплення.

Знову здійснювався обмежений поворот шпинделя, після якого він встановлювався в своє попереднє положення. До кожного з ножів підводився відповідний індикатор і здійснювались вимірювання. Операція зняття та встановлення фрези була повторена 15 разів. Результати вимірювань подані в табл. 6.4.

Таблиця 6.4

Результати вимірювань кутового положення фрези після здійснення операцій зняття та встановлення фрези

№ операції	Виміряні значення вертикального положення ножів, мм			
	№ 4	№ 15	№ 10	№ 20
1	0	0,04	0,017	0
2	0,024	0,029	0,026	0,02
3	0,028	0,028	0,02	0,011
4	0,024	0,025	0,026	0,001
5	0,021	0,023	0,021	0,022
6	0,022	0,038	0,03	0,031
7	0,018	0,018	$8,122 \cdot 10^{-3}$	0,011
8	0,012	0,032	0,018	0,032
9	0,021	0,029	0,03	0,024
10	0,012	0,029	0,032	0,035
11	0,017	0,027	0,026	0,023
12	0,014	0,023	0,028	0,035
13	0,017	0,04	0,034	0,011
14	0,015	0,028	0,018	0,017
15	0	0,015	0,032	0

За експериментальними даними знайдені кутові зміщення фрези в площині ZOХ і ZOУ, які визначені як кути повороту фрези у відповідній площині. Для площини ZOХ маємо:

$$\theta_y = \frac{Z_4 - Z_{15}}{r_4 + r_{15}}, \quad (6.78)$$

де  $Z_4, Z_{15}$  – зміщення ножів № 4 та № 15 відповідно;

$r_4, r_{15}$  – радіуси розташування цих ножів відносно осі фрези.

Для площини ZOУ кутові зміщення фрези відповідають її повороту навколо осі Х і складають:

$$\theta_x = \frac{Z_{10} - Z_{20}}{r_{10} + r_{20}}, \quad (6.79)$$

де  $Z_{10}$ ,  $Z_{20}$  – вертикальні зміщення ножів № 10 та № 20;

$r_{10}$ ,  $r_{20}$  – радіуси розташування цих ножів відносно осі фрези.

За результатами вимірювань визначено також усереднене зміщення фрези за рахунок впливу вузла кріплення. Усереднене вертикальне зміщення визначене формулою:

$$\Delta Z_{\text{ВК}} = \frac{1}{4}(Z_4 + Z_{15} + Z_{10} + Z_{20}). \quad (6.80)$$

Усереднене значення зміщення та кутових розмірів для кожного виміру розраховане за допомогою математичного пакету MathCAD 2000.

Результати обчислень подані у фрагменті документа MathCAD, показаному на рис. 6.26. Кутіві зміщення фрези  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  подані в кутових секундах, а усереднене значення зміщення фрези  $\Delta z_{\text{BK}}$  – в мм.

$$\theta_y := \frac{(N4 - N15) \cdot \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi}}{131.06 + 136.7} \quad \theta_x := \frac{(N10 - N20) \cdot \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi}}{134.2 + 138.36} \quad \Delta z_{\text{BK}} := \frac{(N4 + N15 + N10 + N20)}{4}$$

$\theta_y =$

	1
1	-26.318
2	-3.988
3	-0.144
4	-0.746
5	-2.094
6	-12.441
7	-0.037
8	-16.612
9	-5.844
10	-13.596
11	-7.849
12	-7.396
13	-17.692
14	-9.96
15	-7.313

$\theta_x =$

	1
1	9.676
2	4.57
3	6.117
4	13.262
5	-0.097
6	-0.94
7	-2.101
8	-10.128
9	5.103
10	-1.864
11	1.987
12	-6.661
13	16.963
14	0.817
15	21.289

$\Delta z_{\text{BK}} =$

	1
1	0.017
2	0.024
3	0.022
4	0.021
5	0.022
6	0.03
7	0.014
8	0.023
9	0.026
10	0.027
11	0.023
12	0.025
13	0.026
14	0.019
15	0.014

Рис. 6.26. Фрагмент документа MathCAD, в якому визначено кутові положення і вертикальне зміщення фрези за експериментальними даними, наведеними в табл. 6.3

Одержані кутові положення та вертикальні зміщення фрези (рис. 6.26) утворюють статистичні вибірки. За ними розраховані статичні характеристики геометричних параметрів точності встановлення фрези.

Результати розрахунків у вигляді графіків та відповідні оператори пакету MathCAD наведені на рис. 6.27.

Із аналізу одержаних результатів обробки експериментальних даних випливає, що зміна установки фрези призводить до виникнення похибок кутового положення і до вертикального зміщення фрези. Ці похибки обумовлені в основному контактними деформаціями вузла кріплення. Встановлено, що ці похибки мають закон розподілу близький до нормального (див. рис. 6.27, в). Деякі відхилення одержаних гістограм від нормального закону (див. рис. 6.27, д) не є суттєвими.

Середні значення відхилень кутового положення фрези є порівняно незначними і складають 4"...9". Загалом це призводить до зміни положення ножів на величину порядку 10 мкм і є суттєвим для аналізу процесу чистової обробки.

Виконані дослідження визначили основні причини і закономірності кінематичних похибок системи "шпиндель – інструмент". Ці похибки обумовлені неточностями встановлення фрези на шпиндель верстата та биттям підшпинникових опор. Похибки проявляються в зміщенні осі обертання фрези при обертанні шпинделя верстата та в зміні кутового положення фрези. Кутове положення має початкове значення, яке, як випливає із рис. 6.27, залежить від конкретного встановлення фрези на шпинделі та додаткові зміни кута, обумовлені биттям опор. Схеми виникнення похибок наведені на рис. 6.28.

Із аналізу рисунка випливає, що за рахунок неточностей вузла кріплення фрези має місце ексцентриситет осі фрези та осі шпинделя. Величина ексцентриситету позначена як  $e$ , а його орієнтація відносно абсолютної системи координат шпинделя XYZ характеризується кутом  $\varphi_e$ . Фреза має похибки кутового положення, які характеризуються визначеними раніше кутами  $\theta_x$  та  $\theta_y$ . Всі вищеперераховані параметри є похибками геометрії і не залежать від обертання шпинделя. Наявність даних похибок призводить до змін координат кожного з ножів. Ексцентриситет  $e$  обумовлює зміни радіальних координат осей ножів. Враховуючи, що значення ексцентриситету набагато менше радіусів розташування ножів, зміни полярних кутів розташування ножів  $\varphi_i$  будуть незначними і їх можна не враховувати.

Суттєвих змін зазнає взаємне вертикальне положення ножів. Перекоси фрези, які характеризуються кутами  $\theta_x$  та  $\theta_y$ , призведуть до суттєвої зміни відносної висоти ножів. Постійні складові перекосу  $\theta_x$  та  $\theta_y$  позначимо як  $\theta_{x0}$  та  $\theta_{y0}$ . Ці складові є сумою похибок виготовлення фрези та розглянутих раніше (див. рис. 6.26 та 6.27) закріплення фрези.

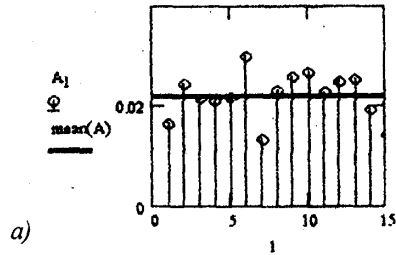
Постійні складові призводять до появи постійних відхилень осьового положення кожного ножа, які одержані при складанні фрези і значення яких ( $\Delta L_{Ai}$ ) наведені в третій колонці табл. 3.5.

$n_i := 8 \quad A := \Delta z_{bk} \quad \text{mean}(A) = 0.022$

$\text{Var}(A) = 2.165 \times 10^{-5}$

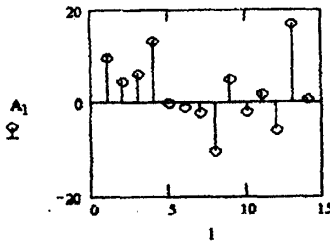
$\sigma := \text{Stdev}(A)$

$\text{Stdev}(A) = 4.653 \times 10^{-3}$



$A := \theta_x$

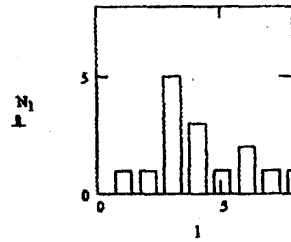
$\text{mean}(A) = 3.939 \quad \sigma := \text{Stdev}(A) \quad \text{Stdev}(A) = 8.489 \quad \text{Var}(A) = 72.065 \quad N := \text{hist}(n_i, A)$



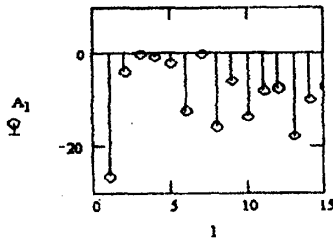
б)

$A := \theta_y$

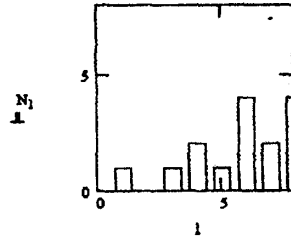
$\text{mean}(A) = -8.735 \quad \sigma := \text{Stdev}(A) \quad \text{Stdev}(A) = 7.409 \quad \text{Var}(A) = 54.889 \quad N := \text{hist}(n_i, A)$



в)



г)



д)

Рис. 6.27. Результати визначення статистичних характеристик точності вузла кріплення фрези за експериментально визначеними значеннями положення окремих ножів після 15 окремих встановлень фрези: а – точковий графік вертикального положення фрези; б – зміна кутового положення фрези (поворот навколо осі X) та гістограма цих кутових положень (в); г – зміни кутового положення фрези (поворот навколо осі OY та гістограма частот розподілу цих значень (д))

Визначимо зміни осьового положення кожного із 22 ножів фрези.

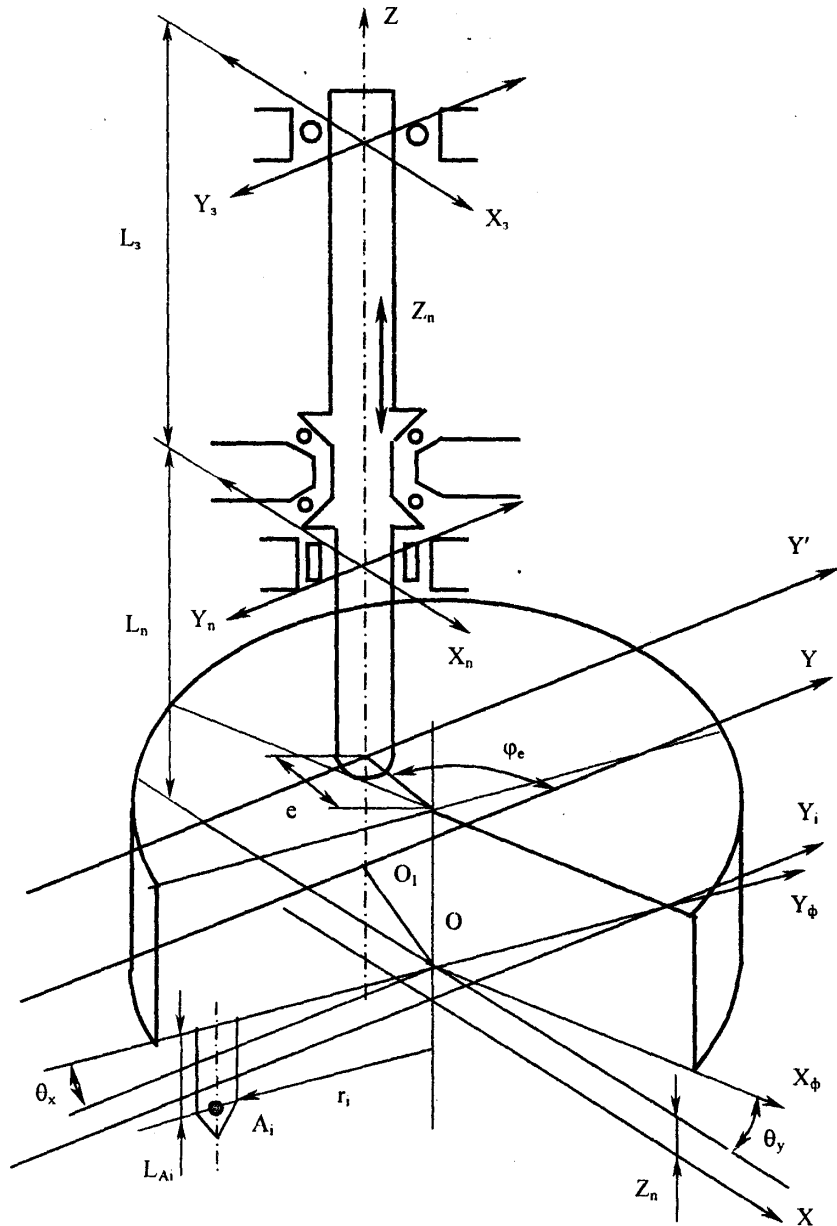


Рис. 6.28. Геометричні та кінематичні похибки, обумовлені биттям шпиндельних опор, неточностями геометрії фрези та похибками її встановлення на шпинделі

Розглянемо кутове відхилення фрези у вигляді її повороту навколо осі  $OY$  (див. рис. 6.28). Зміна осьового положення ножа буде залежати від

відстані ножа до осі ОУ. Ця відстань для кожного ножа буде складати:

$$X_i = r_i \cdot \sin \varphi_i, \quad (6.81)$$

де  $r_i$  – радіус розташування ножа;

$\varphi_i$  – кутове розташування ножа в системі координат, зв'язаній із фрезою (положення ножа № 22 прийняте за положення з нульовим кутом  $\varphi_i$ ).

Значення кутів визначені раніше і відповідають S-моделі, наведеній на рис. 5.9, 5.10 та 5.11.

Зміна осьового положення і-го ножа при наявності кутового відхилення фрези  $\theta_{x0}$  буде складати:

$$\Delta Z_{ix} = \theta_{x0} \cdot r_i \cdot \sin \varphi_i. \quad (6.82)$$

Аналогічно визначається зміна осьового положення кожного ножа при наявності кутового відхилення фрези  $\theta_{y0}$  (поворот навколо осі Y). Остаточню:

$$\Delta Z_{iy} = \theta_{y0} \cdot r_i \cdot \cos \varphi_i. \quad (6.83)$$

Враховуючи малі значення кутів відхилень фрези, загальне зміщення ножа знайдемо як суперпозицію зміщень, обумовлених поворотом навколо осей ОХ та ОУ. Об'єднуючи формули (6.82) та (6.83), одержимо:

$$\Delta Z_i = \Delta Z_{ix} + \Delta Z_{iy} = r_i \cdot (\theta_{x0} \cdot \sin \varphi_i + \theta_{y0} \cdot \cos \varphi_i). \quad (6.84)$$

В дану формулу входить фактичне значення радіуса розташування і-го ножа. Воно залежить від геометричних розмірів фрези і відповідає S-моделі, наведеній на рис. 5.8, 5.10 та 5.11. Для врахування впливу похибок розташування фрези (ексцентриситету) розглянемо геометричну схему зміщення ножа при наявності ексцентриситету фрези відносно геометричної осі шпинделя (рис. 6.29).

Із трикутника  $ОАО_1$  знайдемо фактичний радіус розташування ножа відносно геометричної осі шпинделя. Застосовуючи теорему косинусів, одержимо:

$$r_i = \sqrt{e^2 + r_{ин}^2 - 2 \cdot e \cdot r_{ин} \cdot \cos(\varphi_e + \varphi_i)}, \quad (6.85)$$

де  $e$  – ексцентриситет фрези відносно геометричної осі шпинделя;

$r_{ин}$  – радіус розташування і-го ножа в системі координат, зв'язаній із фрезою;

$\varphi_e$  – кут, який визначає зміщення фрези відносно геометричної осі шпинделя верстата.

Аналitичні залежності (6.84), (6.85) лягли в основу розробки S-моделі, яка визначає положення кожного із ножів у системі координат з центром на геометричній осі шпинделя.

Структурна модель (рис. 6.30, б) має ряд блоків. Зокрема, блок Subsystem здійснює формування полярних координат розташування осей ножів в системі координат, зв'язаній із фрезою. Структура даного блока (рис. 6.30, а) відрізняється від описаної раніше S-моделі (див. рис. 5.11) лише відсутністю виведення результатів моделювання.

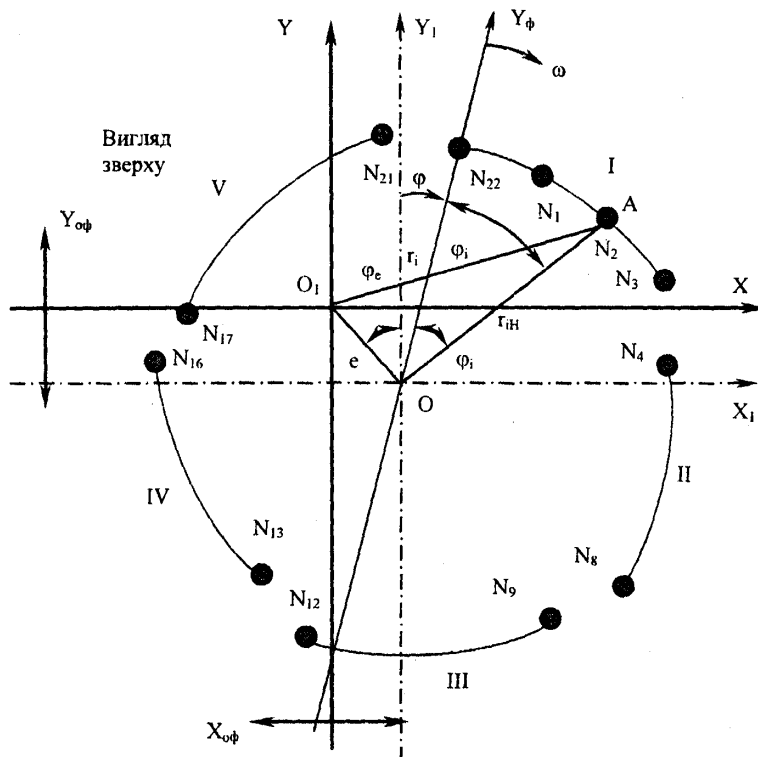
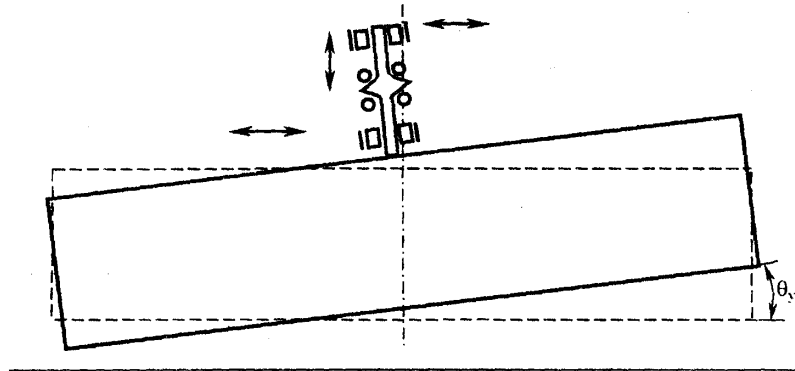


Рис. 6.29. Схема зміщення центра  $i$ -го ножа при наявності ексцентриситету фрези відносно геометричної осі шпинделя: точка  $O$  – центр фрези; точка  $O_1$  – геометрична вісь шпинделя

Сформовані в блоках Subsystem та LiSystem значення координат ножів обробляються в S-моделі (див. рис. 6.30, б) у відповідності із формулами (6.84) та (6.85).

Інший блок моделі LiSystem (див. рис. 6.30, б) здійснює визначення номінальних осьових положень кожного із ножів у системі координат, зв'язаній із



фрезою. Даний блок формує вектор розмірності, 22 компоненти якого є осьовими координатами ножів, що відповідають даним, наведеним в третій колонці табл. 5.5. Блок LiSystem сформовано у вигляді окремої S-моделі, яка має векторний вихід ( $L_i$ ). Структура даної моделі формує осьові координати ножів по групах для кожної логарифмічної спіралі окремо (рис. 6.31). Ножі № 4 та № 17 є чистовими. Для них прийняті нульові значення осьових координат.

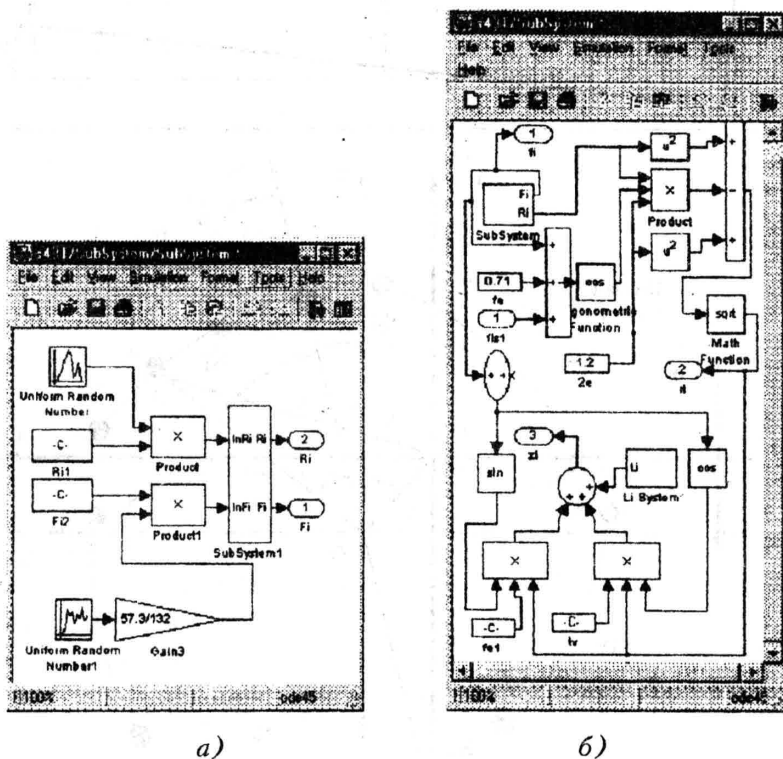


Рис. 6.30. Структурні математичні моделі (S-моделі) призначені для визначення положення ножів у циліндричній системі координат з центром на геометричній осі шпинделя верстата: а – S-модель, яка задає радіальні та кутові координати кожного ножа в системі рухомих координат, зв'язаній із фрезою; б – структурна модель, яка розраховує радіальні та осьові координати кожного ножа в нерухомій системі координат, вісь якої співпадає з геометричною віссю шпинделя верстата

З метою уніфікації S-моделі в ній використано додатковий вхід fis1, який прийнято нульовим. Для контролю результатів використана службова S-модель, призначена для виведення розрахованих значень координат ножів (рис. 6.32).

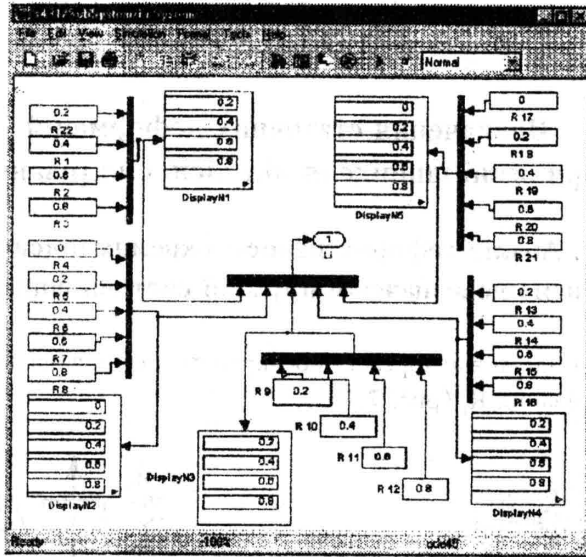


Рис. 6.31. Структурна математична модель, яка задає номінальне осьове розташування кожного ножа відносно площини, паралельної площині нижньої поверхні фрези. Осьові положення задаються відповідно числових даних наведених в третій колонці табл. 5.5

The screenshot shows a software interface with a table of numerical data. The table is organized into three columns and multiple rows. The first column contains labels such as 'R', 'C', and 'D' followed by numerical values. The second and third columns contain large numerical values, likely representing coordinates or dimensions. The interface includes a menu bar at the top with options like 'File', 'Edit', 'View', 'Messages', 'Format', 'Tools', and 'Help'. The status bar at the bottom indicates 'Ready' and '1:00:00'.

R 95628085504133	131.43703180407	2028.1308711e-005
C 23060003022386	133.88795440750	0.28733601044727
D 300000013300080	126.56408248283	0.34028287713805
C 8000001040228	150.05163701747	0.70141685640823
R 3680100103e-1005	131.16227890023	1.0801083813082
D 20000018218075	133.20844410707	1.2640888127732
C 40001324806835	133.77275190828	1.54810923038
D 60001084818702	176.77802864638	1.7681217600484
R 80001018787647	142.14880832738	2.0480727801111
C 20001872275144	132.58709146172	2.3018482582487
D 400010862903808	134.78760748077	2.5580002583118
C 60001780654154	137.38007858447	2.8043040828231
D 8000181813182	140.3074680008	3.0588314051103
C 20000371080715	132.08578807788	3.28538080704
D 30000813820121	134.0308006122	4.008812588862
C 50000813820425	136.2228030005	4.2802774078711
D 70000812820742	150.8090318021	4.5721225180833
R 90001058277e-0105	130.4411238485	4.8545423851408
C 10000248100585	132.44873090188	5.1380838834875
D 3000008060832	134.76041012808	5.4188418382358
C 50000081823751	137.74280938088	5.702079785077
D 70000228016810	140.04172807372	5.9830722498004

Рис. 6.32. Контроль результатів обчислень радіальних куткових та осьових координат ножів в системі циліндричних координат, вісь якої співпадає із геометричною віссю шпинделя

## РОЗДІЛ 7

### Визначення статичних деформацій при згині шпинделя під дією сил різання

#### 7.1. Аналіз деформативності окремих підсистем статично невизначеної пружної системи шпинделя

При обробці заготовки фрезою косокутного різання на кожен ніж фрези діє вектор сил різання  $R_i$  (рис. 7.1).

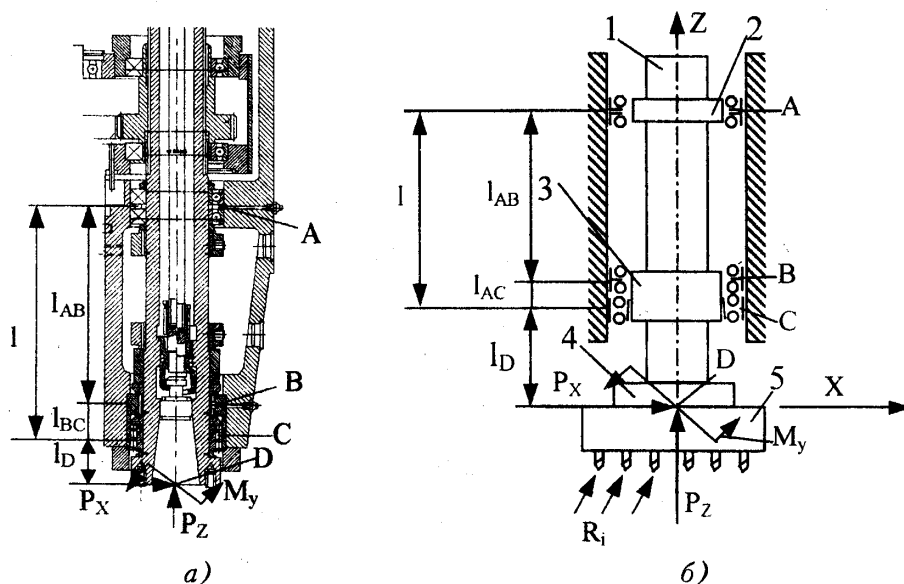


Рис. 7.1. Конструктивна (а) і геометрична (б) схеми шпинделя та схема дії силових факторів у площині XOZ:  $P_x$ ,  $P_z$  – проєкції головного вектора сил різання;  $M_y$  – крутний момент, який діє на шпиндель

Величина цього вектора визначається численними факторами випадкового характеру. Зокрема вона залежить від швидкості різання, подачі та припуску на обробку. Вектор сили різання залежить також від зміни взаємного положення фрези і заготовки, обумовленого змінами геометрії, деформацією пружної системи верстата і коливальними процесами в динамічній системі верстата.

Сукупність випадкових векторів  $R_i$  сил різання, що діють на всі ножі, які беруть участь в обробці, утворює просторову систему сил, що діють на ін-

струмент. Фреза косокутного різання конструктивно виконана у вигляді масивного тіла обертання і має високу жорсткість. Тому можна вважати фрезу абсолютно твердим тілом, на яке діє просторова система сил. Для абсолютно твердого тіла має місце теорема приведення сил.

Відповідно просторову систему сил можна привести до однієї точки, замінивши їх дію дією еквівалентних силових факторів: головного вектора  $P$  і головного моменту  $M$ . За точку приведення приймемо точку, розташовану на осі фрези в місці перетину осі із площиною нижнього торця шпинделя.

Головний вектор сил різання характеризується трьома своїми проекціями:  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$ . Головний момент має три складові, які відповідали моментам сили відносно осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , а саме:  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ .

Всі шість названих силових факторів мають випадковий характер. Проекції сил різання і крутні моменти представляють собою випадкові процеси.

Деформація системи "шпиндель – інструмент" обумовлена в основному складовими головного вектора сил різання, що діють в горизонтальній площині,  $P_x$ ,  $P_y$  і складовими головного моменту  $M_x$  та  $M_y$ . Дія цих силових факторів зосереджується у двох взаємно перпендикулярних площинах, що проходять через геометричну вісь шпинделя. На рис. 7.1, б наведено схему дії силових факторів у площині осей  $XYZ$ .

Шпиндель має складну систему опор у вигляді підшипників кочення. Опори утворюють статично невизначену деформативну систему шпинделя.

Опори мають нелінійні характеристики жорсткості. Всі геометричні характеристики опор та їх параметри жорсткості змінюються при обертанні шпинделя. Ці зміни мають випадковий характер.

Випадкові зміни геометричних параметрів шпинделя ілюструються конструктивною схемою, наведеною на рис 7.1, а. При обертанні шпинделя точки опори шпинделя в радіальному напрямку знаходяться в роликівому підшипнику передньої опори (точка Ц) і в двох підшипниках задньої опори (еквівалентна середня точка А). В залежності від різноманітних факторів ці точки зміщуються. Наприклад, якщо розміри тіл кочення верхнього підшипника задньої опори більші розмірів тіл кочення нижнього підшипника, то точка А зміститься вгору. Відстань по довжині шпинделя між осями підшипників задньої опори шпинделя складає приблизно 12 % від загальної відстані між передньою та задньою опорами. Тому зміщення точки А буде відбуватись в межах  $\pm 6$  %. Загалом ці зміщення набагато менші і не перевищують 1...2 %. Але це значення також є суттєвим і повинно враховуватись при оцінці деформативності шпинделя.

Аналогічним чином відбуваються випадкові зміни положення точки опори роликівого підшипника передньої опори шпинделя (див. рис. 7.1, а). Причиною зміщення точки опори (точка С) є різнорозмірність тіл кочення, похиб-

ки виготовлення кілець підшипника та контактні деформації в спряженнях кілець зі шпинделем та отвором шпиндельної бабки. Додатковою причиною зміщення точки опори є перерозподіл навантажень між роликівим і упорно-радіальним підшипником.

В цілому зміщення точки опори (точки С) не перевищує осьового розміру роликівого підшипника (8 % від загальної відстані між передньою та задньою опорами шпинделя). Максимальне зміщення точки С не буде перевищувати  $\pm 4$  %, а фактичне зміщення точки опори складає  $\pm 1...2$  %. Це зміщення має випадковий характер і є суттєвим при врахуванні деформативності шпинделя.

Ще більш суттєвим є зміщення точки дії реакції упорно-радіального підшипника. Із врахуванням конструктивних особливостей підшипника та умов створення попереднього натягу встановлено, що випадкові зміщення точки прикладення реакції упорно-радіального підшипника знаходяться у межах  $\pm 5$  %.

Врахування випадкових зміщень точок опирання шпинделя є надзвичайно складною задачею. Для рішення цієї задачі використані наближені методи теорій ймовірностей. Їх застосування правомірне враховуючи незначні (кілька відсотків) випадкові зміщення точок опирання шпинделя.

Згідно з даними методами, характеристики пружно деформативної системи шпинделя можна розглядати як деякі усереднені значення та випадкові відхилення від усереднених значень. Це стосується як геометричних розмірів, так і показників жорсткості опор.

Розглянемо статистично невизначену систему шпинделя і його деформації в площині XOZ (рис. 7.2).

Розглянемо рівняння статичної рівноваги шпинделя під дією випадкових сил різання із врахуванням його деформативності. При дії на шпиндель випадкової поперечної сили Р і випадкового крутного моменту М мають місце поперечні та поворотні переміщення шпинделя в опорах. Для визначення випадкових реакцій опор  $R_3$  і  $R_n$  маємо два рівняння статички:

$$\sum R_i = 0; \quad \sum M_i = 0.$$

Визначимо суму проєкцій всіх сил, що діють на шпиндель:

$$P - R_n + R_3 - P_B = 0, \quad (7.1)$$

де Р – проєкція головного вектора сил різання;  $R_n$  – загальна реакція передньої опори шпинделя;  $R_3$  – загальна реакція задньої опори шпинделя;  $P_B$  – зусилля, яке діє на шпиндель з боку упорно-радіального підшипника.

Сума моментів сил, що діють на шпиндель, враховує наявність крутних моментів, які обумовлені кутковими переміщеннями перерізів шпинделя на опорах. Для моментів відносно точки В одержимо:

$$M_B + M - R_n l_B + P(l_{BC} + l_D) + M_C + M_A - R_3 l_{AB} = 0, \quad (7.2)$$

де  $M_B$  – момент в упорно-радіальному підшипнику;

М – крутний момент, обумовлений дією сил різання на шпиндель;

$M_C$  – крутний момент, який виникає в підшипнику передньої опори внаслідок повороту перерізу шпинделя;

$M_A$  – крутний момент, обумовлений кутовим переміщенням перерізу шпинделя в задній опорі;

$l_{AB}$ ,  $l_{BC}$ ,  $l_D$  – геометричні розміри шпинделя.

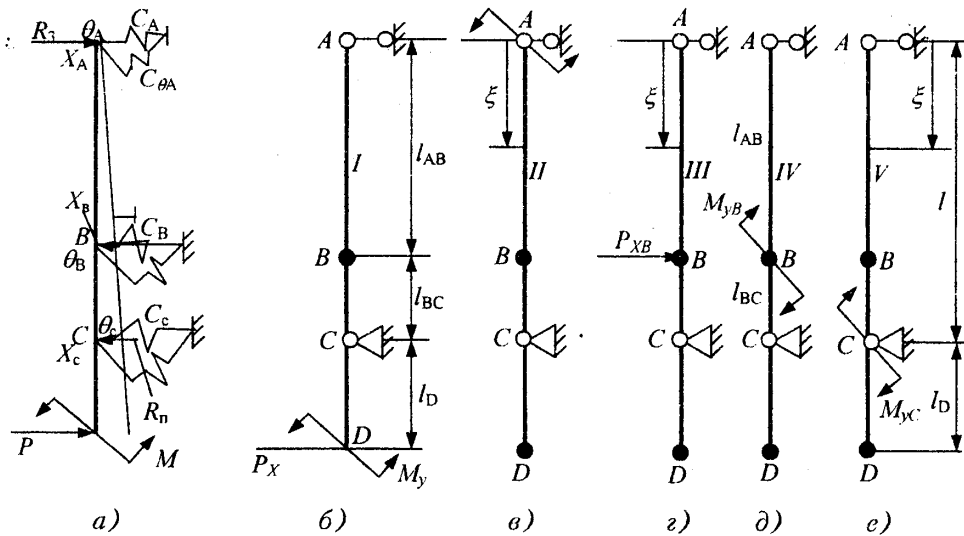


Рис. 7.2. Статично невизначена пружна система шпинделя (а), базова статично визначена пружна система (б) та додаткові пружні системи, які враховують: в – дію моменту в задній опорі шпинделя; г – дію поперечного зусилля в упорно-радіальному підшипнику; д – дію крутного моменту в упорно-радіальному підшипнику; е – дію крутного моменту в роликовому підшипнику передньої опори шпинделя

При обертанні шпинделя проявляються неточності виготовлення підшипникових опор. Тому точки прикладення реакцій змінюються відносно деяких середніх значень.

Зміщення точок, в яких діють опорні реакції, залежать від численних факторів і є незначними. Тому можна вважати, що геометричні розміри  $l_{AB}$ ,  $l_{BC}$  та  $l_D$  мають незначні зміни випадкового характеру.

Відповідно випадковим чином змінюються і силові фактори. Випадкові силові фактори, які входять в рівняння (7.1) і (7.2), залежать від деформативності опор шпинделя. Деформативність опор описується суттєво нелінійними характеристиками. Згідно з [43], залежність деформації опори від навантаження визначається формулою:

$$\delta = k \sqrt[3]{\frac{R^2}{d_{ш} Z^2}}, \quad (7.3)$$

де  $R$  – радіальне навантаження на підшипник;

$d_{ш}$  – діаметр тіл кочення;

$Z$  – число тіл кочення.

Формула (7.3) є наближеною і змінюється в залежності від типу підшипника та умов його експлуатації.

Загалом значення коефіцієнта  $k$ , який входить у формулу (7.3), залежить від багатьох факторів і є випадковою величиною. Тому статична характеристика опори шпинделя (7.3) включає в себе випадкові складові.

В загальному вигляді переміщення опори від навантаження запишемо у вигляді:

$$\delta = C_{\delta} f(R), \quad (7.4)$$

де  $f$  – деяка нелінійна функція навантаження на опору  $R$ ;

$C_{\delta}$  – коефіцієнт, який залежить від конструктивних параметрів опори.

Як функціональна залежність  $f$ , так і коефіцієнт  $C_{\delta}$  включають випадкові величини і змінюються випадковим чином при обертанні шпинделя.

Залежність (7.4) має місце і для поперечно кутових переміщень опори. При цьому кутова деформація опори шпинделя буде:

$$\theta = C_{\theta} \cdot \varphi(M), \quad (7.5)$$

де  $C_{\theta}$  – коефіцієнт, який залежить від конструктивних параметрів опори;

$\varphi$  – нелінійна функція, що визначає залежність куткової деформації  $\theta$  від крутного моменту в опорі.

Характеристика деформативності при поперечно-кутових переміщеннях шпинделя також включає випадкові складові.

Залежності (7.4) та (7.5) визначають взаємозв'язок відносно силових факторів у вигляді:

$$R = C_{\delta}^{-1} f^{-}(\delta); \quad (7.6)$$

$$M = C_{\theta}^{-1} \varphi^{-}(\theta), \quad (7.7)$$

де  $f^{-}$  та  $\varphi^{-}$  – функції, обернені до  $f$  і  $\varphi$ .

Залежності (7.6) та (7.7) також носять випадковий характер і змінюють в певних межах значення силових факторів відносно деяких середніх значень.

Визначимо переміщення опор шпинделя в радіально- і поперечно-кутовому напрямках. Переміщення задньої опори шпинделя (точка А на рис. 7.2) у радіальному напрямку складає:

$$\delta_A = C_{\delta A} f_A(R_A). \quad (7.8)$$

Відповідно поперечно-кутові переміщення задньої опори:

$$\theta_A = C_{\theta A} \varphi_A(M_A), \quad (7.9)$$

де  $C_{\delta A}$  і  $C_{\theta A}$  – коефіцієнти, які залежать від параметрів задньої опори;

$f_A$  – нелінійна характеристика жорсткості задньої опори шпинделя;

$\varphi_A$  – характеристика задньої опори по моменту, яка встановлює зв'язок кутових деформацій опори із реактивним моментом, який при цьому виникає.

Ці коефіцієнти і функції, як показано раніше, мають випадкові складові. Переміщення упорно-радіального підшипника, обумовлене його деформативністю, залежать від радіального навантаження та від крутного моменту і визначаються залежностями:

$$\delta_B = C_{\delta B} f_B(P_B); \quad (7.10)$$

$$\theta_B = C_{\theta B} \varphi_B(M_B), \quad (7.11)$$

де  $C_{\delta B}$ ,  $C_{\theta B}$  – коефіцієнти, які залежать від конструктивних параметрів упорно-радіального підшипника;

$P_B$  – радіальне зусилля в упорно-радіальному підшипнику;

$M_B$  – крутний момент, який виникає в упорно-радіальному підшипнику.

Переміщення шпинделя в області передньої опори визначається формулою:

$$\delta_C = C_{\delta C} f_C(R_n), \quad (7.12)$$

де  $C_{\delta C}$  – коефіцієнт, який залежить від конструктивних параметрів роликового підшипника;

$R_n$  – реакція передньої опори шпинделя;

$f_C$  – нелінійна статична характеристика жорсткості роликового підшипника.

Поперечно-кутові деформації роликового підшипника описується залежністю:

$$\theta_C = C_{\theta C} \varphi_C(M_C), \quad (7.13)$$

де  $C_{\theta C}$  – коефіцієнт, який залежить від конструктивних параметрів підшипника;

$M_C$  – крутний момент, який виникає при поперечно кутових переміщеннях шпинделя в роликовому підшипнику;

$\varphi_C$  – нелінійна статична характеристика підшипника при поперечно-кутових переміщеннях шпинделя.

Залежності (7.8)–(7.13) є характеристиками опор, які враховують випадкові зміни жорсткісних параметрів.

Визначимо деформації шпинделя як статично невизначеної деформативної системи.

При розгляді деформацій шпинделя перейдемо до нової системи відліку, яка відповідає лінії, що проходить через точки А і С із врахуванням їх зміщення. При цьому радіальні деформації передньої та задньої опор шпинделя виключаються з розгляду при оцінці деформативності шпинделя. Дані деформації враховуються як додатковий силовий фактор в упорно-радіальному підшипнику.

В даній системі відліку радіальна деформація шпинделя в області упорно-



радіального підшипника складає:

$$\Delta_B = \delta_B - \delta_A - \delta_C \frac{l_{AB}}{l} \quad (7.14)$$

Підставимо значення радіальних деформацій опор із залежностей (7.8)–(7.10), (7.12) і визначимо статичну характеристику радіальної деформативності шпинделя в області упорно-радіального підшипника:

$$\Delta_B = C_{\delta B} f_B(P_B) - C_{\delta A} f_A(R_A) - C_{\delta C} \frac{l_{AB}}{l} f_C(R_C) - \text{включає випадкові складові.} \quad (7.15)$$

. Залежність (7.15) дає можливість визначити деформацію власне шпинделя в області упорно-радіального підшипника.

Введення нової системи відліку призводить до появи переміщення кінцевої частини шпинделя на величину:

$$\Delta_D = \delta_A + \delta_C \frac{1+l_D}{l} \quad (7.16)$$

При цьому виникає і кутове переміщення кінцевої частини шпинделя:

$$\theta_{oD} = \text{arctg} \left[ \frac{\delta_C - \delta_A}{l} \right] \cong \frac{\delta_C - \delta_A}{l} \quad (7.17)$$

Радіальне: кутове переміщення включає випадкові складові.

Розглянемо статично невизначену систему шпинделя у введений системі відліку.

Для визначення деформативності пружної системи шпинделя виділимо базову статично-визначену систему I (рис. 7.2, б). Вона представляє собою балку на двох опорах, навантажену силою і моментом на консолях. Виділимо також допоміжні статично визначені системи (див. рис. 7.2, в-е).

Розглянемо окремо деформації шпинделя в кожній із статично визначених систем.

Базова статично визначена система (див. рис. 7.2, в) відповідає балці на двох опорах, навантаженій зосередженою силою та моментом на консолях.

З метою спрощення будемо розглядати окремо дію зосередженої сили і дію зосередженого моменту.

Визначимо форму пружної лінії осі балки на двох опорах, навантаженої зосередженою силою на консолях (див. рис. 7.2, б).

Реакції опор для цієї балки визначимо із умов рівноваги:

$$\begin{cases} R_A - R_C + P_X = 0 \\ lR_A = l_D P_X \end{cases} \quad (7.18)$$

Розв'язавши систему (7.18), знайдемо:

$$R_A = \frac{P_X l_D}{l}; \quad R_C = P_X \left( \frac{1+l_D}{l} \right).$$

Таким чином, опорні реакції для даної балки будуть випадковими величинами, що залежать від випадкових змін проекції сили різання  $P_X$  та

випадкових змін геометричних розмірів, які характеризують точки опирання.

Рівняння пружної осі балки між точками А і С, згідно з [75]:

$$X_{\delta 1} = \frac{P_x l_D}{GEJ} (g^3 - l^2 g), \quad (7.19)$$

де  $g$  – поточна координата, яка вимірюється вздовж балки починаючи з точки А;

$X_{\delta 1}$  – деформація в напрямку осі X;

$E$  – модуль пружності матеріалу шпинделя;

$J$  – момент інерції перерізу шпинделя (еквівалентний).

В залежність (7.19) входять геометричні розміри пружної системи шпинделя ( $l$ ,  $l_D$ ). Ці розміри мають невеликі випадкові зміни. Тому переміщення перерізів шпинделя буде мати додаткову випадкову складову, обумовлену змінами геометричних розмірів. Ця додаткова складова буде визначати випадкові зміни коефіцієнта жорсткості шпинделя.

Кут повороту перерізу балки визначається диференціюванням даної залежності і складає:

$$\theta_{\delta 1} = \frac{dX_{\delta 1}}{dg} = \frac{P_x l_D}{GEJ} (3g^2 - l^2). \quad (7.20)$$

Враховуючи, що сила  $P_x$  має випадкову складову, а геометричні розміри, які характеризують відстань між опорами також мають випадкові флуктуації, формула (7.20) визначає кут повороту перерізу шпинделя із випадковою складовою.

Визначимо кути повороту перерізу (кут нахилу) для окремих точок шпинделя.

Для опори А кут нахилу складає:

$$\theta_{\delta A} = \frac{-P_x l_D l}{GEJ}. \quad (7.21)$$

Для опори С кут нахилу буде:

$$\theta_{\delta C} = \frac{P_A l_D l}{3EJ}. \quad (7.22)$$

Ці кути нахилу також будуть змінюватись випадковим чином в залежності від випадкових змін сили різання та від зміни положення точок опори шпинделя.

Положення фрези визначається радіальним зміщенням та кутом повороту кінця шпинделя, яке відповідає переміщенню консольного краю балки (точка D).

Згідно з [75], переміщення кінця балки (точка D) складає:

$$X_{\delta D} = \frac{P_x l_D^2 (1 + l_D)}{3EJ}. \quad (7.23)$$

Кут повороту перерізу балки на кінці:

$$\theta_{\delta D1} = \frac{P_X l_D (2l + 3l_D)}{GEJ} \quad (7.24)$$

Переміщення та кут повороту кінця балки також мають випадкові складові.

Розглянемо балку навантажену моментом  $M_y$  на кінці консолі (рис. 7.2, б). Реакції опор для цієї балки визначимо із умов рівноваги сил:

$$R_1 = R_2 = \frac{M_y}{l} \quad (7.25)$$

Рівняння пружної осі балки між опорами визначається залежністю [75]:

$$X_{\delta 2} = \frac{M_y}{GEJ} [g^3 - l^2 g] \quad (7.26)$$

Враховуючи, що момент сил різання є випадковою величиною, а розміри, що характеризують точки опори балки, мають випадкові флуктуації, формула (7.26) визначає випадкове зміщення перерізу шпинделя.

Кут повороту перерізів балки на проміжку між опорами А і С складає:

$$\theta_{\delta 2} = \frac{M_y}{GEJ} (3g^2 - l^2) \quad (7.27)$$

Дана формула також визначає випадкову величину поперечно-кутового зміщення перерізів балки під дією випадкового моменту при випадкових змінах точок опори балки.

Формули (7.26) і (7.27) дають поперечні та кутові деформації балки між опорами. Для консольної частини балки формули переміщень мають інший вигляд.

Переміщення консольної частини балки визначається залежністю:

$$X_{\delta 2} = \frac{M_y}{GEJ} [3(g-l)^2 + 2l(g-l)] \quad (7.28)$$

Для кінця балки переміщення складає:

$$X_{\delta D2} = \frac{M_y}{GEJ} [3l_D^2 + 2l \cdot l_D] \quad (7.29)$$

Дана формула в цілому аналогічна залежності (7.23) і визначає випадкові зміщення консольної частини балки під дією випадкового моменту сил різання із врахуванням випадкових змін точок опори балки.

Кут повороту перерізів консольної частини балки складає:

$$\theta_{\delta 2} = \frac{dX_{\delta}}{dg} = \frac{M_y}{EJ} \left[ g - \frac{2}{3}l \right] \quad (7.30)$$

Для кінця балки кут повороту перерізу буде випадковою величиною, яка визначається за формулою:

$$\theta_{\delta D2} = \frac{M_y}{EJ} \left( l_D + \frac{l}{3} \right). \quad (7.31)$$

Для опори С кут нахилу перерізу балки буде залежати від випадкового моменту згідно з формулою:

$$\theta_{\delta C2} = \frac{M_y \cdot l}{3EJ}. \quad (7.32)$$

Складаючи поперечні та кутові деформації балки, що виникають при дії зосередженої сили та зосередженого моменту, визначимо загальну деформативність балки яка відповідає базовій статично визначеній схемі, наведеній на рис. 7.2, б.

Для врахування наявності статичної невизначеності пружної системи шпинделя розглянемо замкнений ряд статично визначених систем у вигляді окремих елементарних балок (див. рис. 7.2, в-е).

Визначимо поперечні та кутові переміщення окремих випадків елементарних балок.

Для випадку балки, навантаженої на опорі А крутним моментом, (рис. 7.2, в) прогини балки між точками А і С будуть визначатися залежністю:

$$X_B = \frac{M_{yA}(1-g)l}{GEJ} \left[ 1 - \frac{(1-g)^2}{l^2} \right]. \quad (7.33)$$

Перетворимо дану залежність до виду:

$$X_B = \frac{M_{yA}}{GEJ} \left[ 2gl - 3g^2 + \frac{g^3}{l} \right]. \quad (7.34)$$

Кут повороту балки на ділянці АС складає:

$$\theta_B = \frac{dX_B}{dg} = \frac{M_{yA}}{3EJ} \left[ 1 - g + \frac{g^2 \cdot 3}{l} \right]. \quad (7.35)$$

Переміщення та кут повороту, які відповідають формулам (7.34) та (7.35), визначають випадкові деформації елементарної балки, навантаженої на опорі А крутним моментом.

Кут повороту балки в точці С можна одержати з формули (7.35) шляхом підстановки  $g = l$ . Він складає:

$$\theta_{BC} = -\frac{M_{yA}l}{GEJ}. \quad (7.36)$$

Для консольної частини балки (ділянка CD) пружна лінія буде прямою і буде визначатися рівнянням:

$$X_B = \theta_{BC} \cdot (g-l), \quad l \leq g \leq l+l_D. \quad (7.37)$$

Враховуючи наявні випадкові зміни моменту  $M_{yA}$  та міжопорної відстані

l, які входять у формули (7.36) та (7.37), пряма, яка визначає прогин консолі, буде мати випадковий кут нахилу.

Розглянемо наступну елементарну балку (рис. 7.2, з).

Для випадку балки навантаженої силою між опорами, рівняння пружної осі, згідно з [75, с. 128]:

$$X_{21} = \frac{P_{XB} \cdot l_{BC} \cdot g}{GIEJ} (l^2 - l_{BC}^2 - g^2) \quad \text{при } g \leq l_{AB}; \quad (7.38)$$

$$X_{21} = \frac{P_{XB} \cdot l_{BC} \cdot g}{GIEJ} (l^2 - l_{BC}^2 - g^2) + \frac{P_{XB} (g - l_{AB})^3}{GEJ} \quad \text{при } l_{AB} < g < l. \quad (7.39)$$

Кути повороту перерізів балки, навантаженої зусиллям між опорами, будуть різними для різних ділянок і складуть:

$$\theta_{21} = \frac{dX_{21}}{dg} = \frac{P_{XB} l_{BC}}{GIEJ} (l^2 - l_{BC}^2) - \frac{P_{XB} l_{BC}}{2IEJ} g^2 \quad \text{при } g \leq l_{AB}; \quad (7.40)$$

$$\theta_{22} = \frac{P_{XB} l_{BC}}{GIEJ} (l^2 - l_{BC}^2) - \frac{P_{XB} l_{BC}}{2IEJ} g^2 + \frac{P_{XB} (g - l_{AB})^2}{2EJ} \quad \text{при } l_{AB} < g < l. \quad (7.41)$$

Значення прогинів  $X_{21}$  та  $X_{22}$  і кутових переміщень  $\theta_{21}$  та  $\theta_{22}$  будуть мати випадкові складові, обумовлені випадковими змінами сил  $P_x$  і випадковими флуктуаціями геометричних розмірів балки.

Кутове переміщення балки в точці С складає:

$$\theta_C = P_{XB} \frac{1}{GEJl} \left[ l_{BC} (l^2 - l_{BC}^2) - 3l_{BC} l^2 + 3l (l - l_{AB})^2 \right]. \quad (7.41a)$$

Дане кутове переміщення зберігається для всієї консольної частини балки зокрема для точки D.

Поперечне переміщення точки D буде складати:

$$X = \theta_C l_D. \quad (7.416)$$

Розглянемо елементарну балку, що знаходиться під дією крутного моменту прикладеного в точці B.

Для випадку балки навантаженої моментом в середині (рис. 7.2, д) пружна лінія осі для ділянки АВ буде:

$$X_D = \frac{M_{yB} g}{2l^2 EJ} \left[ l_{AB}^2 \left( l_{BC} + \frac{l_{AB}}{3} \right) - \frac{2}{3} l_{BC}^3 \right] - \frac{M_{yB} g^3}{GIEJ}. \quad (7.42)$$

Як і раніше, ця залежність визначає випадкові прогини шпинделя, що відповідають даній елементарній балці.

Визначимо кут повороту перерізу балки для ділянки АВ шляхом диференціювання (7.42):

$$\theta_D = \frac{dX_D}{dg} = \frac{M_{yB}}{2l^2 EJ} \left[ l_{AB}^2 \left( l_{BC} + \frac{l_{AB}}{3} \right) - \frac{2}{3} l_{BC}^3 \right] - \frac{M_{yB} g^2}{2IEJ}. \quad (7.43)$$

Кути повороту перерізів балки для точки А і С складуть [ ]:

$$\theta_{ДА} = \frac{M_{yB}}{2l^2 EJ} \left[ l_{AB}^2 \left( l_{ABC} + \frac{l_{AB}}{3} \right) - \frac{2}{3} l_{BC}^3 \right]; \quad (7.44)$$

$$\theta_{ДС} = -\frac{M_{yB}}{2l EJ} \left( \frac{l^2}{3} - l_{AB}^2 \right). \quad (7.45)$$

Рівняння пружної осі балки на ділянці CD буде визначатися через кут повороту  $\theta_{ДС}$  і буде мати вигляд:

$$X_D = \theta_{ДС}(g-1), \quad l < g < l + l_D. \quad (7.46)$$

Всі деформаційні характеристики даної елементарної балки, визначені у вигляді залежностей (7.42)–(7.46), є випадковими величинами.

Розглянемо наступну елементарну балку, яка відповідає балці на двох опорах навантаженій зосередженим моментом на опорі С (див рис. 7.2, е).

Для випадку балки, наведеної на рис. 7.2, е, пружна лінія визначена у вигляді (для перерізів між точками А і С):

$$X_e = \frac{M_{yC} g l}{GEJ} \left( 1 - \frac{g^2}{l^2} \right). \quad (7.47)$$

Кут повороту балки в перерізах між опорами складає:

$$\theta_e = \frac{dX_e}{dg} = \frac{M_{yC} l}{GEJ} \left[ 1 - 3 \frac{g^2}{l^2} \right]. \quad (7.48)$$

Для опори С кут повороту перерізу балки відповідно одержимо із (7.2) за допомогою підстановки  $g = l$ :

$$\theta_{eC} = \frac{-M_{yC} l}{3EJ}. \quad (7.49)$$

Для консольної частини балки (ділянка CD  $g = l \dots l + l_D$ ) пружна лінія балки визначиться як:

$$X_e = \theta_{eC}(g-l), \quad l \leq g \leq l + l_D. \quad (7.50)$$

Формули (7.47)–(7.50), як і раніше, визначають випадкові прогини та випадкові поперечно-кутові переміщення елементарної балки.

## 7.2. Формування умов сумісності деформацій шпинделя із врахуванням випадкових змін його параметрів і нелінійних характеристик жорсткості підшипників

Загальні переміщення шпинделя будуть складені із переміщень окремих елементарних балок.

Визначимо сумарні поперечні переміщення в точці В та кутові переміщення перерізів шпинделя в точках А, В і С. Для цього використаємо принцип суперпозиції дії сил. Переміщення в точці ВС буде визначатися як:

$$X_B = X_{\delta 1B} + X_{\delta 2B} + X_{\delta VB} + X_{2B} + X_{\delta VB} + X_{\delta Be}, \quad (7.51)$$

де  $X_{\delta 1B}$ ,  $X_{\delta 2B}$  – переміщення точки В під дією сили  $P_x$  та моменту  $M_y$  на балку, зображену на рис. 7.2, б;

$X_{\delta VB}$  – переміщення точки В під дією моменту в опорі А, згідно зі схемою, наведеною на рис. 7.2, в;

$X_{2B}$  – переміщення точки В під дією поперечної сили в цій самій точці (див. рис. 7.2, г);

$X_{\delta VB}$  – переміщення точки В під дією моменту в цій точці, згідно зі схемою, наведеною на рис. 7.2, д;

$X_{\delta Be}$  – переміщення точки В під дією моменту, який виникає в передній опорі шпинделя (точка С на рис. 7.2, е).

Враховуючи, що окремі складові переміщень, які входять у формулу (7.51), є випадковими величинами, отримаємо загальне переміщення також у вигляді випадкового значення  $X_B$ .

Переміщення точок В залежить від всіх силових факторів.

Підставивши значення складових переміщень точки В із формул (7.19), (7.26), (7.34), (7.38), (7.42), (7.47) для  $g = l_{AB}$ , одержимо загальне переміщення точки В:

$$X_B = P_x \cdot K_{PXB} + M_y K_{MyB} + M_{yA} \cdot K_{MyAB} + P_{xB} \cdot K_{PXBV} + M_{yB} \cdot K_{MyVB} + M_{yC} \cdot K_{MyCB}, \quad (7.52)$$

де в правій частині знаходяться лінійні комбінації двох заданих  $P_x$  та  $M_y$  і чотирьох невідомих  $M_{yA}$ ,  $P_{xB}$ ,  $M_{yB}$ ,  $M_{yC}$  випадкових силових факторів. Коефіцієнти при силових факторах, що входять у формулу (7.52), також є випадковими величинами які визначаються змінами геометричних розмірів, що характеризують точки опирання шпинделя при його повороті.

Невідомі силові фактори визначимо як крутні моменти в опорах ( $M_{yA}$  – крутний момент в задній опорі шпинделя;  $M_{yC}$  – крутний момент в роликівому підшипнику шпинделя;  $M_{yB}$  – крутний момент в упорно-радіальному підшипнику, та  $P_{xB}$  – радіальне зусилля, яке виникає в

радіально-упорному підшипнику).

Коефіцієнти, які входять в залежність (7.52), визначаються із формул (7.19), (7.26), (7.34), (7.38), (7.42) та (7.47), в яких значення поточної координати  $g = l_{AB}$ . Остаточні значення коефіцієнтів, виражені через параметри шпинделя розраховуються за формулами:

$$K_{РХВ} = \frac{l_D}{GEJl} (l_{AB}^3 - l^2 l_{AB}); \quad (7.53)$$

$$K_{МуВ} = \frac{1}{GEJl} (l_{AB}^3 - l^2 l_{AB}); \quad (7.54)$$

$$K_{МуАВ} = \frac{1}{GEJ} (2l l_{AB} - 3l_{AB}^2 + l_{AB}^3 / l); \quad (7.55)$$

$$K_{РХВВ} = \frac{l_{BC} \cdot l_{AB}}{GEJl} (l^2 - l_{BC}^2 - l_{AB}^2); \quad (7.56)$$

$$K_{МуВВ} = \frac{l_{AB}}{2EJl^2} \left[ l_{AB}^2 \left( l_{BC} + \frac{l_{AB}}{3} \right) - \frac{2}{3} l_{BC}^3 \right] - \frac{l_{AB}^3}{GIEJ}; \quad (7.57)$$

$$K_{МуСВ} = \frac{l_{AB} \cdot l}{GEJ} (1 - l_{AB}^2 / l^2). \quad (7.58)$$

Як вказано раніше, розраховані значення коефіцієнтів включають випадкові складові.

Ці випадкові складові визначаються зміною геометричних розмірів  $l_D$ ,  $l_{AB}$ ,  $l_{BC}$ , та  $l$ . Ці геометричні розміри мають випадкові флуктуації в обсязі кількох відсотків від номінальної відстані шпинделя між передньою та задньою опорами.

Виконаємо оцінку випадкових змін коефіцієнтів. Коефіцієнти, що визначають залежність переміщення від сил (формули (7.53), (7.56)), мають порядок кубу геометричного розміру:

$$K_1 \approx l^3,$$

а коефіцієнти, які визначають залежність переміщення від моменту (формули (7.54), (7.57), (7.58)), мають порядок:

$$K_2 \approx l^2.$$

Відповідно відносні випадкові зміни цих груп коефіцієнтів складуть:

$$\Delta_{K1} = \frac{1}{K_1} \cdot dK_1 \approx \frac{dl}{l}; \quad \Delta_{K2} = \frac{1}{K_2} \cdot dK_2 \approx \frac{dl}{l}.$$

В даних формулах враховано, що диференціали коефіцієнтів:

$$dK_1 = \frac{\partial K_1}{\partial l} \cdot dl \cong 3l^2 \cdot dl;$$

$$dK_2 = \frac{\partial K_2}{\partial l} \cdot dl \cong 2l \cdot dl,$$



тобто порядок випадкових змін коефіцієнтів відповідає порядку відносних випадкових змін геометричних розмірів, які характеризують положення точок опори шпинделя, (1...2 %). Тому випадкові зміни коефіцієнтів відносно номінальних значень є невеликими і складають 1...2 % від номінальних значень.

Визначимо загальне кутове зміщення перерізу шпинделя в області задньої опори. Воно також залежить від всіх випадкових силових факторів.

Підставивши значення складових поперечного кутового переміщення точки А із формул (7.21), (7.27), (7.35), (7.40), (7.44) та (7.48), для значення поздовжньої координати  $g = 0$ , що відповідає точці А, одержимо загальне кутове переміщення перерізу шпинделя:

$$\begin{aligned} \theta_A = & P_X \cdot K_{PX\theta A} + M_Y \cdot K_{MY\theta A} + M_{YA} \cdot K_{MYA\theta A} + P_{XB} \cdot K_{PXB\theta A} + \\ & + M_{YB} \cdot K_{MYB\theta A} + M_{YC} \cdot K_{MYC\theta A}. \end{aligned} \quad (7.59)$$

В цій залежності, як і в (7.52), наявна лінійна комбінація заданих і невідомих силових факторів.

Оскільки силові фактори є випадковими, то і загальне переміщення  $\theta_A$  є випадковою величиною. Ця випадкова величина залежить, зокрема, від змін геометрії, які враховані коефіцієнтами.

Коефіцієнти при силових факторах визначаються із формул (7.21), (7.27), (7.35), (7.40), (7.44), (7.48) при  $g = 0$  і складають:

$$K_{PX\theta A} = -\frac{l_D l}{GEJ}; \quad (7.60)$$

$$K_{MY\theta A} = -\frac{l}{GEJ}; \quad (7.61)$$

$$K_{MYA\theta A} = \frac{l}{3EJ}; \quad (7.62)$$

$$K_{PXB\theta A} = \frac{l_{BC}(l^2 - l_{BC}^2)}{GEJ}; \quad (7.63)$$

$$K_{MYB\theta A} = \frac{1}{2l^2 EJ} \left[ l_{AB}^2 \left( l_{BC} + \frac{l_{AB}}{3} \right) - \frac{2}{3} l_{BC}^3 \right]; \quad (7.64)$$

$$K_{MYC\theta A} = \frac{l}{GEJ}. \quad (7.65)$$

Дані коефіцієнти включають геометричні параметри шпинделя, які є випадковими величинами. Коефіцієнти, визначені за формулами (7.60) та (7.63), пропорційні квадрату геометричного розміру, тобто:

$$K_i \approx l^2.$$

Останні коефіцієнти пропорційні першому степеню геометричного розміру, тобто:

Дані коефіцієнти включають геометричні параметри шпинделя, які є випадковими величинами. Коефіцієнти, визначені за формулами (7.60) та (7.63), пропорційні квадрату геометричного розміру, тобто:

$$K_1 \approx l^2.$$

Останні коефіцієнти пропорційні першому степеню геометричного розміру, тобто:

$$K_2 \approx l.$$

Відповідно диференціали коефіцієнтів будуть пропорційними:

$$dK_1 = \frac{\partial K_1}{\partial l} \cdot dl \approx 2l \cdot d \cdot l;$$

$$dK_2 = \frac{\partial K_2}{\partial l} \cdot dl \approx dl.$$

Відносні зміни коефіцієнтів будуть:

$$\Delta_{k1} = \frac{dK_1}{K_1} \approx \frac{dl}{l}; \quad \Delta_{k2} = \frac{dK_2}{K_2} \approx \frac{dl}{l}.$$

Таким чином, порядок відносних випадкових змін коефіцієнтів відповідає порядку відносних випадкових змін геометричних параметрів, що характеризують схему опирання шпинделя.

Визначимо загальне кутове переміщення перерізу шпинделя в області упорно-радіального підшипника.

Підставимо значення складових поперечно-кутового переміщення точки  $B$  із формул (7.20), (7.27), (7.35), (7.40), (7.43), (7.48) для значення поздовжньої координати  $g = l_{AB}$  і одержимо кутове переміщення перерізу шпинделя в точці  $B$ :

$$\theta_B = P_X \cdot K_{PX\theta B} + M_Y \cdot K_{MY\theta B} + M_{YA} \cdot K_{MYA\theta B} + P_{XB} \cdot K_{PXB\theta B} + M_{YB} \cdot K_{MYB\theta B} + M_{YC} \cdot K_{MYC\theta B}. \quad (7.66)$$

Дане кутове переміщення також є випадковою величиною.

Коефіцієнти лінійної комбінації силових факторів у правій частині даної залежності визначені з формул (7.20), (7.27), (7.35), (7.40), (7.43), (7.48):

$$K_{PX\theta B} = \frac{l_D}{GEJl} (3l_{AB}^2 - l^2); \quad (7.67)$$

$$K_{MY\theta B} = \frac{1}{GEJl} (3l_{AB}^2 - l^2); \quad (7.68)$$

$$K_{MYA\theta B} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{3} - l_{AB} + \frac{l_{AB}^2}{2l} \right); \quad (7.69)$$

$$K_{PXB\theta B} = \frac{l_{BC}(l^2 - l_{BC}^2)}{GEJ} - \frac{l_{BC}l_{AB}^2}{2lEJ}; \quad (7.70)$$

$$K_{MYB\theta B} = \frac{1}{2l^2EJ} \left[ l_{AB}^2 \left( l_{BC} + \frac{l_{AB}}{3} \right) - \frac{2}{3} l_{BC}^3 - l_{AB}^2 \right]; \quad (7.71)$$

$$K_{M_{yC8B}} = \frac{1}{GEJ} \left( 1 - 3 \frac{l_{AB}^2}{l^2} \right). \quad (7.72)$$

Аналогічним чином визначається кутове переміщення перерізу шпинделя в області роликів підшипника передньої опори шпинделя. Складові переміщення визначаються формулами (7.22), (7.32), (7.36), (7.41), (7.45), (7.49).

$$\begin{aligned} \theta_c = & P_x \cdot K_{P_{x8C}} + M_y \cdot K_{M_{y8C}} + M_{yA} \cdot K_{M_{yA8C}} + P_{xB} \cdot K_{P_{xB8C}} + \\ & + M_{yB} \cdot K_{M_{yB8C}} + M_{yc} \cdot K_{M_{yc8B}}. \end{aligned} \quad (7.73)$$

Коефіцієнти при силових факторах визначаються згідно з формулами (7.22), (7.32), (7.36), (7.41), (7.45), (7.49):

$$K_{P_{x8C}} = \frac{l_D l}{3EJ}; \quad (7.74)$$

$$K_{M_{y8C}} = \frac{1}{3EJ}; \quad (7.75)$$

$$K_{M_{yA8C}} = -\frac{1}{GEJ}; \quad (7.76)$$

$$K_{P_{xB8C}} = \frac{l_{BC}(l^2 - l_{BC}^2)}{GEJ} - \frac{l_{BC} l^2}{2EJ} + \frac{(l - l_{AB})^2}{2EJ}; \quad (7.77)$$

$$K_{M_{yB8C}} = \frac{1}{2EJ} \left( \frac{l^2}{3} - l_{AB}^2 \right); \quad (7.78)$$

$$K_{M_{yC8B}} = -\frac{1}{3EJ}. \quad (7.79)$$

Формули для визначення коефіцієнтів по групах (7.60)–(7.65); (7.67)–(7.72); (7.74)–(7.79) в цілому мають однаковий порядок залежності від геометричних розмірів ( $l$ ). Тому порядок зміни коефіцієнтів у групах формул (7.67)–(7.72) і (7.74)–(7.79) відповідає встановленому раніше порядку зміни коефіцієнтів у формулах (7.60)–(7.65). Відповідно порядок відносних випадкових змін коефіцієнтів у формулах (7.67)–(7.72) та (7.74)–(7.79) складає  $K \approx \frac{dl}{l}$  і відповідає порядку відносних випадкових змін геометричних параметрів шпинделя.

Визначені залежностями (7.52), (7.59) та (7.73) поперечні та кутові переміщення повинні відповідати деформаціям опор, що визначаються за формулами (7.15), (7.9), (7.11), (7.13). Останні залежності використовуються для проєкцій навантажень на вісь X і мають наступний вигляд.

Із формули (7.15) одержимо ( $X_B = \Delta_B$ ):

$$K_B = C_{8B} f_B(P_{xB}) - C_{8A} f_A(R_3) - C_{8C} \frac{l_{AB}}{l} f_C(R_{II}). \quad (7.80)$$

Із формули (7.9), (7.11), (7.13) знайдемо:

$$\begin{aligned}\theta_A &= C_{\theta A} \cdot \varphi_A(M_{yA}) & (M_A = M_{yA}); \\ \theta_B &= C_{\theta B} \cdot \varphi_B(M_{yB}) & (M_B = M_{yB}); \\ \theta_C &= C_{\theta C} \cdot \varphi_C(M_{yC}) & (M_C = M_{yC}).\end{aligned}$$

Три останні нелінійні залежності розкладемо в ряд Маклорена і одержимо значення кутів у вигляді суми лінійних складових і нелінійних випадкових складових, а саме:

$$\theta_A = Q_{\theta A} \cdot M_{yA} + R_{\theta A}; \quad (7.81)$$

$$\theta_B = Q_{\theta B} \cdot M_{yB} + R_{\theta B}; \quad (7.82)$$

$$\theta_C = Q_{\theta C} \cdot M_{yC} + R_{\theta C}. \quad (7.83)$$

В дані формули входять коефіцієнти, які визначаються згідно з залежностями:

$$\left. \begin{aligned} Q_{\theta A} &= C_{\theta A} \cdot \left. \frac{\partial \varphi_A}{\partial M_{yA}} \right|_{M_{yA}=0} \\ Q_{\theta B} &= C_{\theta B} \cdot \left. \frac{\partial \varphi_B}{\partial M_{yB}} \right|_{M_{yB}=0} \\ Q_{\theta C} &= C_{\theta C} \cdot \left. \frac{\partial \varphi_C}{\partial M_{yC}} \right|_{M_{yC}=0} \end{aligned} \right\} \quad (7.83a)$$

Дані коефіцієнти представляють собою лінеаризовані характеристики опор при їх кутовому переміщенні, обумовленому моментним навантаженням.

В залежності (7.81)–(7.83) входять нелінійні складові поперечно-кутових переміщень опор. Вони визначаються за формулами (7.81)–(7.83) із врахуванням залежності (7.3). Для кожної із опор одержимо:

$$\begin{aligned} R_{\theta A} &= -M_{yA} \left( Q_{\theta A} - \frac{K_{\theta A}}{\sqrt[3]{M_{yA}}} \right); \\ R_{\theta B} &= -M_{yB} \left( Q_{\theta B} - \frac{K_{\theta B}}{\sqrt[3]{M_{yB}}} \right); \\ R_{\theta C} &= -M_{yC} \left( Q_{\theta C} - \frac{K_{\theta C}}{\sqrt[3]{M_{yC}}} \right).\end{aligned} \quad (7.836)$$

Всі параметри, які входять в залежності (7.81)–(7.83), змінюються випадковим чином.

До отриманих залежностей (7.20)–(7.83) додаються рівняння статички (7.1) і (7.2), які для випадку плоскої системи сил, розташованих в площині  $XOZ$ , мають вигляд:

$$\begin{cases} P_X - R_{II} + R_3 - P_{XB} = 0 \\ M_y + M_{yB} + P_X(l_{BC} + l_D) - R_{II}l_{BC} + M_{yC} - R_3 \cdot l_{AB} + M_{yA} = 0 \end{cases} \quad (7.84)$$

Розв'яжемо систему рівнянь (7.84) відносно опорних реакцій  $R_{II}$  і  $R_3$ .  
Остаточно знайдемо:

$$R_3 = P_X \left( \frac{l_D}{l_{AB} + l_{BC}} \right) + P_{XB} \left[ 1 - \frac{l_{AB}}{l_{AB} + l_{BC}} \right] + \frac{1}{(l_{AB} + l_{BC})} \cdot [M_y + M_{yB} + M_{yC} + M_{yA}]; \quad (7.85)$$

$$R_{II} = P_X \left[ 1 + \frac{l_D}{l_{AB} + l_{BC}} \right] - \left[ \frac{l_{AB}}{l_{AB} + l_{BC}} \right] P_{XB} - \frac{1}{(l_{AB} + l_{BC})} \cdot [M_y + M_{yB} + M_{yC} + M_{yA}]. \quad (7.86)$$

Дані значення підставимо у формулу (7.80) і одержимо величину  $X_B$  в функції силових факторів:

$$\begin{aligned} X_B = & C_{\delta B} f_B(P_{XB}) - C_{\delta A} f_A \left\{ P_X \frac{l_D}{l} + P_{XB} \left[ 1 - \frac{l_D}{l} \right] + \frac{1}{l} (M_y + M_{yB} + M_{yC} + M_{yA}) \right\} - \\ & - C_{\delta C} \frac{l_{AB}}{l} f_C \left[ P_X \left( 1 + \frac{l_D}{l} \right) - P_{XB} \frac{l_{AB}}{l} + \frac{1}{l} (M_y + M_{yB} + M_{yC} + M_{yA}) \right]. \end{aligned} \quad (7.87)$$

В правій частині формули (7.87) знаходиться нелінійна функція випадкових параметрів. Подамо її у вигляді розкладу в ряд Тейлора, записавши як суму лінійної та додаткової нелінійної частин:

$$X_B = Q_{PXB} \cdot P_X + M_y \cdot Q_{MyB} + M_{yA} Q_{MyAB} + P_{XB} Q_{PXB} + M_{yB} Q_{MyBB} + M_{yC} Q_{MyCB} + R_{XB} \cdot \quad (7.88)$$

В дану залежність входять коефіцієнти, які є випадковими величинами і визначаються через геометричні та силові характеристики шпіндельного вузла згідно з залежностями:

$$Q_{PXB} = C_{\delta A} \left. \frac{\partial f_A}{\partial P_X} \right|_{P_X=0} + \left. \frac{\partial f_C}{\partial P_X} \right|_{P_X=0} = C_{\delta C} \frac{l_{AB}}{l}; \quad (7.89)$$

$$Q_{MyB} = C_{\delta A} \left. \frac{\partial f_A}{\partial M_y} \right|_{M_y=0} + C_{\delta C} \frac{l_{AB}}{l} \cdot \left. \frac{\partial f_C}{\partial M_y} \right|_{M_y=0}; \quad (7.90)$$

$$Q_{MyAB} = C_{\delta A} \frac{\partial f_A}{\partial M_{yA}} \left| \begin{array}{l} \\ M_{yA} = 0 \end{array} \right. + C_{\delta C} \frac{l_{AB}}{l} \cdot \frac{\partial f_C}{\partial M_{yA}} \left| \begin{array}{l} \\ M_{yA} = 0 \end{array} \right. ; \quad (7.91)$$

$$Q_{PXBB} = C_{\delta B} \frac{\partial f_B}{\partial P_{XB}} \left| \begin{array}{l} \\ P_{XB} = 0 \end{array} \right. + C_{\delta A} \cdot \frac{\partial f_A}{\partial P_{XB}} \left| \begin{array}{l} \\ P_{XB} = 0 \end{array} \right. + C_{\delta C} \frac{l_{AB}}{l} \cdot \frac{\partial f_C}{\partial P_{XB}} \left| \begin{array}{l} \\ P_{XB} = 0 \end{array} \right. ; \quad (7.92)$$

$$Q_{MyBB} = C_{\delta A} \frac{\partial f_A}{\partial M_{yB}} \left| \begin{array}{l} \\ M_{yB} = 0 \end{array} \right. + C_{\delta C} \frac{l_{AB}}{l} \cdot \frac{\partial f_C}{\partial M_{yB}} \left| \begin{array}{l} \\ M_{yB} = 0 \end{array} \right. ; \quad (7.93)$$

$$Q_{MyCB} = C_{\delta A} \frac{\partial f_A}{\partial M_{yC}} \left| \begin{array}{l} \\ M_{yC} = 0 \end{array} \right. + C_{\delta C} \frac{l_{AB}}{l} \cdot \frac{\partial f_C}{\partial M_{yC}} \left| \begin{array}{l} \\ M_{yC} = 0 \end{array} \right. \quad (7.94)$$

Частинні похідні, які знаходяться в правих частинах формул (7.89)–(7.94), знаходяться шляхом диференціювання силових характеристик опор, визначених за залежностями (7.8), (7.10) та (7.12).

У формулу (7.88) входить нелінійна випадкова складова змінних  $R_{XB}$ , яка залежить від всіх силових факторів. Нелінійна випадкова складова в цілому відповідає нелінійним складовим, які входять у формули (7.81)–(7.83), що є основою визначення кутових переміщень опор.

Вона визначається із формули (7.88) із врахуванням залежності (7.6):

$$R_{XB} = C_{\delta}^{-1} f^{-}(X_B) - Q_{PXB} \cdot P_X - Q_{MyB} \cdot M_y - Q_{MyAB} \cdot M_{yA} - P_{XB} \cdot Q_{PXBB} - M_{yB} \cdot Q_{MyBB} \quad (7.95)$$

В дану залежність входить нелінійна характеристика упорно-радіального підшипника, яка визначається як функція, обернена лінійній степеневій залежності (7.3).

Прирівнюємо праві частини залежностей (7.52) та (7.88), а також праві

частини (7.59), (7.66), (7.73) і запишемо систему рівнянь для знаходження невідомих силових факторів:

$$\begin{cases} a_{11} M_{yA} + a_{12} P_{XB} + a_{13} M_{yB} + a_{14} M_{yC} = e_{11} P_X + e_{12} M_y + R_{XB} & (7.96) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21} M_{yA} + a_{22} P_{XB} + a_{23} M_{yB} + a_{24} M_{yC} = e_{21} P_X + e_{22} M_y + R_{\theta A} & (7.97) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{31} M_{yA} + a_{32} P_{XB} + a_{33} M_{yB} + a_{34} M_{yC} = e_{31} P_X + e_{32} M_y + R_{\theta B} & (7.98) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{41} M_{yA} + a_{42} P_{XB} + a_{43} M_{yB} + a_{44} M_{yC} = e_{41} P_X + e_{42} M_y + R_{\theta C} & (7.99) \end{cases}$$

Коефіцієнти, які входять в систему рівнянь (7.95)–(7.98), зв'язані із раніше визначеними параметрами наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} a_{11} &= K_{MyAB} - Q_{MyAB}; \\ a_{12} &= K_{PXBB} - Q_{PXBB}; \\ a_{13} &= K_{MyBB} - Q_{MyBB}; \\ a_{14} &= K_{MyCB} - Q_{MyCB}; \\ e_{11} &= Q_{PXB} - K_{PXB}; \\ e_{12} &= Q_{MyB} - K_{MyB}; \\ a_{21} &= K_{My\theta A} - Q_{\theta A}; \\ a_{22} &= K_{PX\theta A}, \quad a_{23} = K_{My\theta A}; \\ a_{24} &= K_{My\theta A}; \quad e_{21} = -K_{PX\theta A}; \\ e_{22} &= -K_{My\theta A}; \\ a_{32} &= K_{My\theta B} - Q_{\theta B}; \quad a_{34} = K_{My\theta B}; \\ e_{31} &= -K_{PX\theta B}; \quad e_{32} = -K_{My\theta B}; \\ a_{41} &= K_{My\theta C}; \quad a_{42} = K_{PX\theta C}; \\ a_{43} &= K_{My\theta C}; \quad a_{44} = K_{My\theta C} - Q_{\theta C}; \\ e_{41} &= -K_{PX\theta C}; \quad e_{42} = -K_{My\theta C}. \end{aligned} \quad (7.100)$$

Значення коефіцієнтів, які входять в праві частини формул (7.100), визначені раніше залежностями (7.33)–(7.58), (7.60)–(7.65), (7.67)–(7.72), (7.89)–(7.94).

Всі параметри, які входять в систему (7.96)–(7.98), змінюються випадковим чином. Як показано раніше, порядок зміни коефіцієнтів не перевищує 10 %. Тому значення коефіцієнтів, які входять в систему рівнянь (7.96)–(7.99), можна подати у вигляді суми детермінованої та випадкової складових. Враховуючи незначні зміни коефіцієнтів, можна прийняти випадкові складові незалежними від зміни силових факторів. Визначимо коефіцієнти системи рівнянь у вигляді матриці:

$$A = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} + \delta a_{11} & \bar{a}_{12} + \delta a_{12} & \bar{a}_{13} + \delta a_{13} & \bar{a}_{14} + \delta a_{14} \\ \bar{a}_{21} + \delta a_{21} & \bar{a}_{22} + \delta a_{22} & \bar{a}_{23} + \delta a_{23} & \bar{a}_{24} + \delta a_{24} \\ \bar{a}_{31} + \delta a_{31} & \bar{a}_{32} + \delta a_{32} & \bar{a}_{33} + \delta a_{33} & \bar{a}_{34} + \delta a_{34} \\ \bar{a}_{41} + \delta a_{41} & \bar{a}_{42} + \delta a_{42} & \bar{a}_{43} + \delta a_{43} & \bar{a}_{44} + \delta a_{44} \end{bmatrix}, \quad (7.101)$$

де  $\bar{a}_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, 4$ ) – математичні сподівання значень коефіцієнтів;

$\delta a_{ij}$  – випадкові складові коефіцієнтів системи рівнянь.

Позначимо коефіцієнти, які входять у праві частини рівнянь, у векторному вигляді. Коефіцієнти дають праву частину у вигляді лінійної комбінації зовнішніх силових факторів та нелінійних складових:

$$B_1 = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11} + \delta \sigma_{11} \\ \bar{\sigma}_{21} + \delta \sigma_{21} \\ \bar{\sigma}_{31} + \delta \sigma_{31} \\ \bar{\sigma}_{41} + \delta \sigma_{41} \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{12} + \delta \sigma_{12} \\ \bar{\sigma}_{22} + \delta \sigma_{22} \\ \bar{\sigma}_{32} + \delta \sigma_{32} \\ \bar{\sigma}_{42} + \delta \sigma_{42} \end{bmatrix}. \quad (7.102)$$

де введені детерміновані та випадкові складові векторів  $\bar{\sigma}_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2$ ) представляють собою математичні сподівання коефіцієнтів;

$\delta \sigma_{ij}$  – випадкові складові коефіцієнтів правих частин рівнянь.

Вектор нелінійних складових системи рівнянь визначимо у вигляді:

$$R = \begin{bmatrix} R_{XB} \\ R_{\theta A} \\ R_{\theta B} \\ R_{\theta C} \end{bmatrix}. \quad (7.103)$$

В цілому нелінійні складові системи алгебраїчних рівнянь визначаються залежностями (7.38) та (7.95) і є функціями внутрішніх силових факторів.

Введемо вектор невідомих системи рівнянь (7.96)–(7.99), компоненти якого є внутрішніми силовими факторами:

$$Z = \begin{bmatrix} M_{yA} \\ P_{XB} \\ M_{yB} \\ M_{yC} \end{bmatrix}. \quad (7.104)$$

Враховуючи введені залежностями (7.101)–(7.104) матрично-векторні позначення, запишемо систему рівнянь (7.96)–(7.99) у компактному вигляді:

$$AZ = B_1 P + B_2 M + R. \quad (7.105)$$



Система чотирьох рівнянь з чотирма невідомими (7.105) є нелінійною системою алгебраїчних рівнянь з випадковими коефіцієнтами. Для розв'язку цієї системи розроблена спеціальна методика, яка базується на застосуванні системи візуального математичного моделювання SIMULINK математичного пакету MATLAB 6.0.

Методика базується на двоетаповому розв'язку нелінійної системи (7.105). Спочатку здійснюється розв'язок лінійної системи виду:

$$AZ_1 = V_1P + V_2M \quad (7.106)$$

Знаходиться перше наближення вектора невідомих  $Z_1$ . Це наближення використовується для знаходження нелінійних складових  $R$ , що входять в праву частину рівнянь (7.105). При цьому права частина одержує постійну додаткову складову  $R_1 = \text{const}$ .

Друге наближення розв'язку системи (7.105) знаходиться із розв'язку лінійної системи наступного виду:

$$AZ_2 = V_1P + V_2M + R_1 \quad (7.107)$$

Одержане друге наближення розв'язку  $Z_2$  порівнюється із першим наближенням  $Z_1$ . Якщо вони розрізняються несуттєво (5...10 %), то одержане друге наближення вважається розв'язком нелінійної системи (7.105).

У випадку значних відхилень компонент векторів  $Z_2$  і  $Z_1$  знаходиться третє наближення  $Z_3$ , що відповідає розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$AZ_3 = V_1P + V_2M + R_2 \quad (7.108)$$

де  $R_2$  – вектор нелінійних складових систем (7.105), в якому використані значення силових факторів, що відповідають другому наближенню  $Z_2$ .

### 7.3. Структурна математична модель для розрахунку деформацій, що виникають при згині шпинделя під дією сил різання

Наведена вище методика реалізована в структурній математичній моделі. Модель включає ряд окремих блоків для виконання певних функцій.

Зокрема наявні блоки для формування стохастичної матриці коефіцієнтів А системи та стохастичних векторів коефіцієнтів правих частин.

Матриця стохастичних коефіцієнтів системи рівнянь у вигляді (7.101) сформована у вигляді структурної математичної моделі (рис. 7.3).

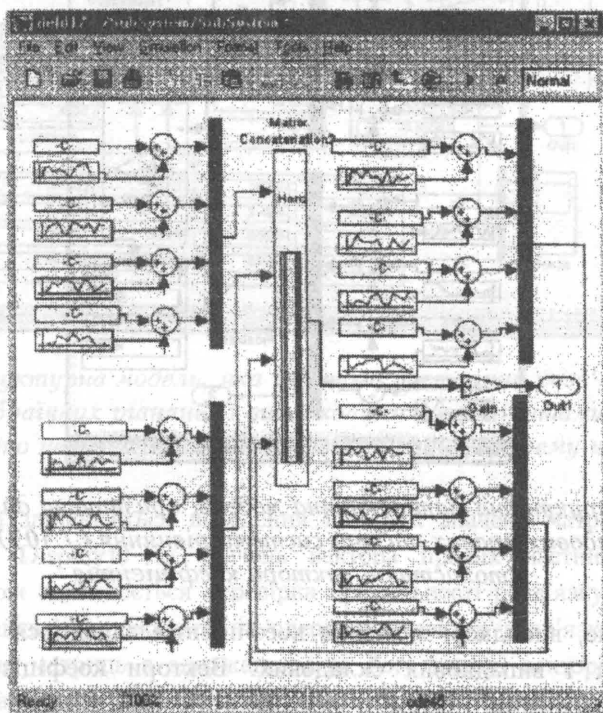


Рис. 7.3. Структурна математична модель, яка розраховує матрицю коефіцієнтів системи рівнянь, що містять випадкові складові

Математичні сподівання коефіцієнтів задаються блоками Constant (прямокутник з літерою C). До математичних сподівань коефіцієнтів додаються випадкові складові. Додавання здійснюється суматорами (показані у вигляді кругів із знаками). Коефіцієнти об'єднуються у векторні стовпці за допомогою блоків Max (показані чорними прямокутниками). Із чотирьох векторів-стовпців формується матриця коефіцієнтів. Це здійснюється за допомогою блока Matrix Concatenation2. Сформована матриця коефіцієнтів подається на вихід Out1.

Формування стохастичних векторів коефіцієнтів та розрахунок вектора лінійних складових правих частин системи рівнянь (7.105) здійснюється структурною математичною моделлю, наведеною на рис. 7.4.

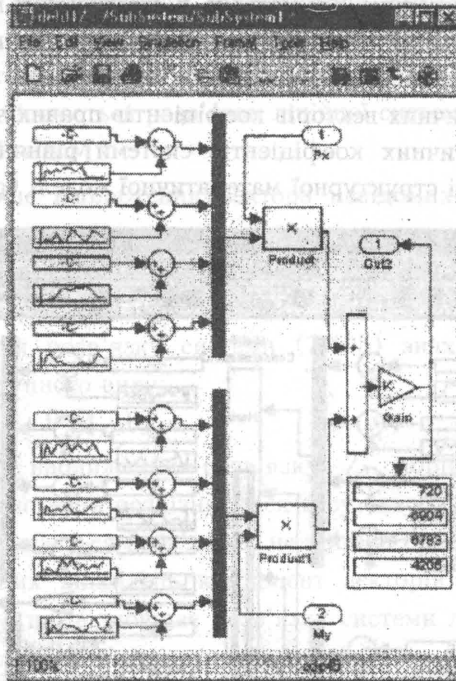


Рис. 7.4. Структурна математична модель, призначена для розрахунку лінійних складових правих частин системи рівняння (7.105), які містять стохастичні вектори коефіцієнтів

Як і раніше, випадкові значення коефіцієнтів задаються у вигляді суми детермінованих і випадкових складових. Вектори коефіцієнтів  $B_1$  та  $B_2$  формуються блоками  $Mat$ , показаними у вигляді затушованих прямокутників. Вектори коефіцієнтів множаться на складові фактори блоками  $Product$  (множить на значення моменту  $M$ ). Результати розрахунків з метою контролю показані в блоці  $Display$ .

Наведена вище методика поетапного розв'язку нелінійної системи рівнянь реалізована в структурній моделі, наведеній на рис. 7.5.

Дана структурна модель здійснює розв'язок нелінійної системи в два етапи згідно з формулами (7.106) та (7.107). Матриця випадкових коефіцієнтів формується блоком  $Subsystem$  (див. рис. 7.5). Вектор правих частин, що відповідає рівнянню (7.106), формується блоком  $Subsystem1$ . Розв'язок одержаної системи лінійних рівнянь, що відповідає першому наближенню, здійснюється блоком  $QRSolver$ . На виході даного блока

одержано вектор розв'язків лінійної системи рівнянь, числові значення компонент якого показані в оглядовому блоці Display2.

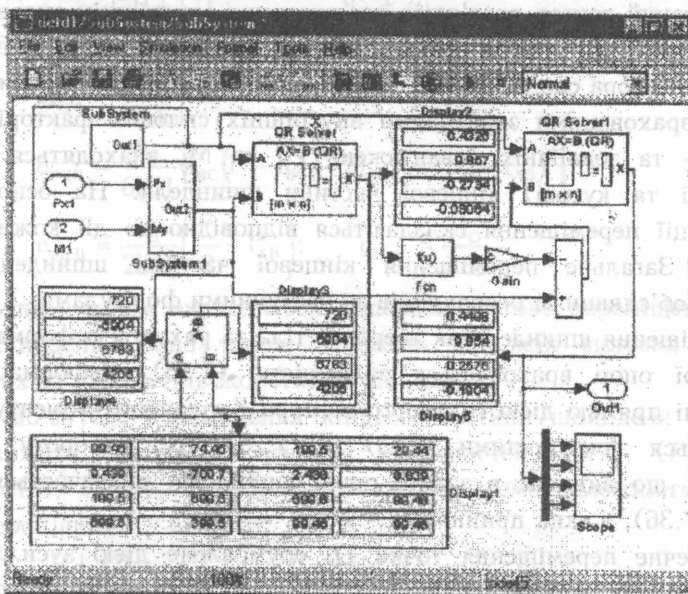


Рис. 7.5. Структурна модель, яка здійснює поетапний розв'язок нелінійної системи алгебраїчних рівнянь із випадковими коефіцієнтами, що описують статично невизначену пружно-деформовану систему шпинделя

Паралельно здійснюється виведення на друк значень матриці коефіцієнтів системи (блок Display1) та значень вектора правих частин рівнянь (блок Display4). Також здійснюється перевірка правильності розв'язку. Для перевірки матриця коефіцієнтів множиться на одержаний вектор розв'язків за допомогою блока множення матриць з одержанням на його виході вектора правих частин рівнянь (показані в блоці Display3). Співпадаючі результати, показані в блоках Display4 та Display3 підтверджують правильність розв'язку.

Перше наближення вектора нелінійної складової  $R_1$ , що входить в праву частину системи (7.107), обчислюється за допомогою блока Fcn. Воно складається із лінійною частиною в блоці-суматорі і подається на вихід блока для розв'язку системи лінійних рівнянь, яка відповідає другому наближенню (блок QR Solver1). На виході цього блока формується вектор розв'язків, який відповідає другому наближенню. Числові значення вектора розв'язків показані в блоці Display5. Вони мало відрізняються від вектора розв'язків по першому наближенню (блок Display4). Тому можна вважати, що друге наближення дає шуканий вектор розв'язків вихідної нелінійної системи рівнянь. Тому одержаний в результаті другого наближення вектор подається

на вихід моделі (блок Out1) та виводиться в графічному вигляді за допомогою блока Score.

Одержаний вектор розв'язків дає значення внутрішніх силових факторів, які виникають в опорах шпинделя під дією зовнішніх навантажень – головного вектора сил різання  $P$  та головного моменту сил різання  $M$ .

За розрахованими значеннями внутрішніх силових факторів  $M_{yA}$ ,  $P_{xB}$ ,  $M_{yB}$ ,  $M_{yC}$  та зовнішніх навантажень  $P_X$  та  $M_y$  знаходяться переміщення (поперечні та кутові) кінцевої частини шпинделя. На основі принципу суперпозиції переміщення складаються відповідно до дії кожного силового фактора. Загальне переміщення кінцевої частини шпинделя  $\chi$  можна одержати об'єднанням розрахунків за наступними формулами.

Переміщення шпинделя як твердого тіла за рахунок деформації передньої та задньої опор враховується залежністю (7.16). Деформації шпинделя обумовлені прямою дією головного вектора і головного моменту сил різання враховується залежностями (7.23) та (7.29). Кут повороту, обумовлений моментом, що виникає в задній опорі шпинделя, визначається формулами (7.37) і (7.36), в яких прийнято  $g = 1+l_D$ .

Поперечне переміщення точки  $D$ , обумовлене дією зусилля в упорно-радіальному підшипнику шпинделя, буде визначатися формулами (7.416) із врахуванням формул (7.41a). Переміщення кінцевої частини шпинделя обумовлене дією крутного моменту в упорно-радіальному підшипнику визначається залежністю (7.46) із врахуванням (7.45) при  $g = 1+l_D$ . Переміщення кінцевої частини шпинделя обумовлені крутним моментом в роликівому підшипнику передньої опори шпинделя, визначаються залежністю (7.50) для  $g = 1+l_D$  із врахуванням формули (7.49).

Об'єднавши залежності (7.16), (7.23), (7.37), (7.36), (7.41a), (7.416), (7.46), (7.45), (7.50), (7.49), одержимо загальне переміщення кінцевої частини шпинделя у вигляді:

$$\begin{aligned} X_D = & \delta_A + \delta_C \frac{1+l_D}{l} + P_X \frac{l_D^2(1+l_D)}{3EJ} + M_y \frac{(3l_D^2 + 2ll_D)}{6EJ} - M_{yA} \frac{l \cdot l_D}{6EJ} + \\ & + P_{xB} \frac{l_D}{l} \cdot \frac{1}{GEJ} \left[ l_{BC} (l^2 - l_{BC}^2) - 3l_{BC} l^2 + 3l(1 - l_{AB})^2 \right] - \\ & - M_{yB} \frac{l_D}{2lEJ} \left( \frac{l^2}{3} - l_{AB}^2 \right) - M_{yC} \frac{l \cdot l_D}{3EJ}. \end{aligned} \quad (7.109)$$

Дана формула визначає переміщення кінцевої частини шпинделя в поперечному напрямку в залежності від силових факторів.

Запишемо її у вигляді:

$$\begin{aligned} X_D = & \delta_A + \frac{1+l_D}{l} \delta_C + e_{PX} \cdot P_X + e_{My} \cdot M_y + e_{MyA} \cdot M_{yA} + e_{PXB} \cdot P_{xB} + \\ & + e_{MyB} \cdot M_{yB} + e_{MyC} \cdot M_{yC}. \end{aligned} \quad (7.110)$$

де значення випадкових коефіцієнтів деформативності шпинделя виражається через його параметри згідно формул:

$$e_{рх} = \frac{l_D^2(1+l_D)}{3EJ}; \quad e_{мy} = \frac{3l_D^2 + 2l_D}{6EJ}; \quad (7.111)$$

$$e_{мyA} = -\frac{l_D}{6EJ}; \quad (7.112)$$

$$e_{рхв} = \frac{l_D}{6lEJ} [l_{вс}(l^2 - l_{вс}^2) - 3l_{вс}l^2 + 3l(l - l_{AB})^2]; \quad (7.113)$$

$$e_{мyв} = \frac{l_D}{2lEJ} \left( \frac{l^2}{3} - l_{AB}^2 \right); \quad e_{мyс} = \frac{l_D}{3EJ}. \quad (7.114)$$

Аналогічним чином знаходиться поперечно-кутове переміщення кінцевої частини шпинделя. Воно також залежить від всіх силових факторів і геометричних та параметрів жорсткості шпинделя.

Поперечно-кутове переміщення кінцевої частини шпинделя (в точці D) можна одержати шляхом об'єднання залежностей (7.17), (7.24), (7.31), (7.36), (7.41a), (7.45), (7.49). Остаточню знайдемо залежність поперечно-кутового переміщення у вигляді:

$$\begin{aligned} \theta_D = & \frac{\delta_C - \delta_A}{l} + \frac{P_X l_D (2l + 3l_D)}{6EJ} + M_y \left( \frac{l_D + l/3}{EJ} \right) - M_{yA} \frac{1}{6EJ} + \\ & + P_{XB} \frac{1}{6EJ} [l_{вс}(l^2 - l_{вс}^2) - 3l_{вс}l^2 + 3l(l - l_{AB})^2] - M_{yB} \frac{(l^2/3 - l_{AB}^2)}{2lEJ} - M_{yC} \frac{1}{3EJ}. \end{aligned} \quad (7.115)$$

Подамо цю залежність у вигляді, аналогічній формулі (7.110). Тоді кутове переміщення кінцевої частини шпинделя знайдемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \theta_D = & \frac{1}{l} \delta_C - \frac{1}{l} \delta_A + \mu_{рх} \cdot P_X + \mu_{мy} M_y + \mu_{мyA} \cdot M_{yA} + \mu_{рхв} P_{XB} + \\ & + \mu_{мyв} M_{yB} + \mu_{мyс} M_{yC}, \end{aligned} \quad (7.116)$$

де значення випадкових коефіцієнтів кутової деформативності шпинделя визначені у вигляді:

$$\mu_{рх} = \frac{l_D(2l + 3l_D)}{GEJ}; \quad (7.117)$$

$$\mu_{мy} = \frac{l_D + l/3}{EJ}; \quad (7.118)$$

$$\mu_{мyA} = \frac{-1}{6EJ}; \quad (7.119)$$

$$\mu_{рхв} = \frac{1}{6lEJ} [l_{вс}(l^2 + l_{вс}^2) - 3l_{вс}l^2 + 3l(l + l_{AB})]; \quad (7.120)$$

$$\mu_{мyв} = -\frac{l^2/3 - l_{AB}^2}{2lEJ}; \quad (7.121)$$

$$\mu_{\text{MyC}} = -\frac{I}{3EJ} \quad (7.122)$$

Значення переміщень, що входять у формули (7.110) та (7.116),  $\delta_C$  і  $\delta_A$  знаходяться за формулами (7.8) і (7.12), в яких величини навантажень в передній та задній опорах шпинделя визначені за формулами (7.85) і (7.86).

Для обчислення поточних величин переміщень розроблена спеціальна структурна модель, входом якої є вектор значень зовнішніх і внутрішніх силових факторів:

$$P = \begin{bmatrix} P \\ M \\ M_{yA} \\ P_{xB} \\ M_{yB} \\ M_{yC} \end{bmatrix} \quad (7.123)$$

Вектор силових факторів подається на вхід FXM1 моделі (рис. 7.6)

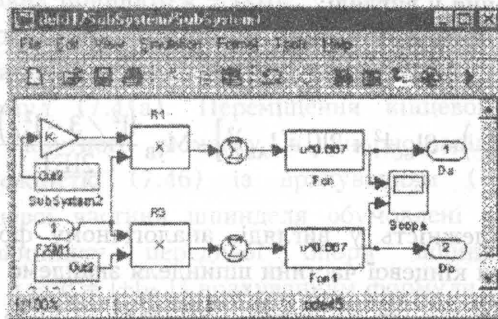


Рис. 7.6. Структурна математична модель, яка обчислює поперечні переміщення задньої (DA) та передньої (DC) опор шпинделя

Вектори коефіцієнтів при силових факторах, які входять у формули (7.85) і (7.86), задаються двома блоками Subsystem і Subsystem2. Структура моделей, яка відповідає даним блокам, є ідентичною і має вигляд, показаний на рис 7.7.

При обчисленні переміщень передньої та задньої опор шпинделя враховано нелінійну статичну характеристику жорсткості опор у вигляді залежності (7.3). Дана нелінійна залежність і реалізується в моделі блоками Fca і Fca1 (див. рис. 7.6).

Для контролю результатів розрахунків реакцій опор шпинделя служить блок Score.

На рис. 7.8 наведені результати розрахунків переміщень опор шпинделя при зміні головного вектора сил різання від 0 до 100 Н та зміні головного

моменту від 0 до 10 Н·м.

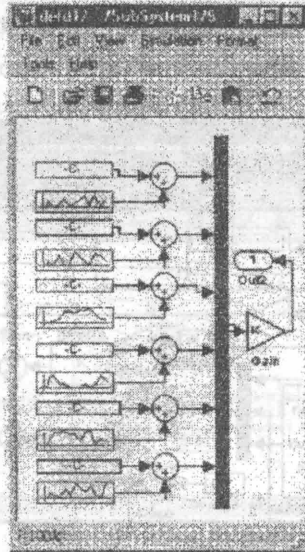


Рис. 7.7. Структурна математична модель, призначена для розрахунку випадкових коефіцієнтів, що визначають реакцію в передній опорі шпинделя

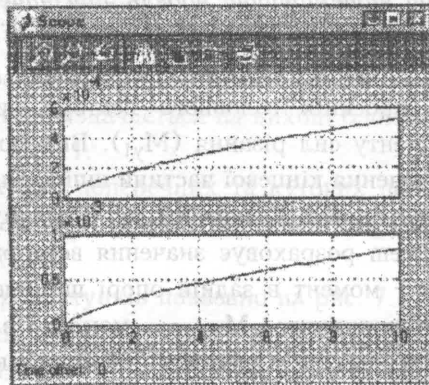


Рис. 7.8. Результати розрахунків переміщень задньої опори шпинделя (верхній графік) та передньої опори (нижній графік) при збільшеній проекції головного вектора різання від 0 до 100 Н при одночасному збільшенні головного моменту від 0 до 10 Н·м

Із аналізу залежностей випливає, що деформація опор шпинделя змінюється за нелінійним законом при наявності незначних флуктуацій характеристики обумовлених випадковими складовими параметрів шпинделя. Розраховані значення переміщень передньої та задньої опор шпинделя



використовуються для знаходження вихідних геометричних параметрів математичної моделі, а саме: для знаходження поперечного  $X_D$  та кутового  $\theta_D$  переміщення кінцевої частини шпинделя. Для цього розроблена структурна математична модель (рис. 7.9).

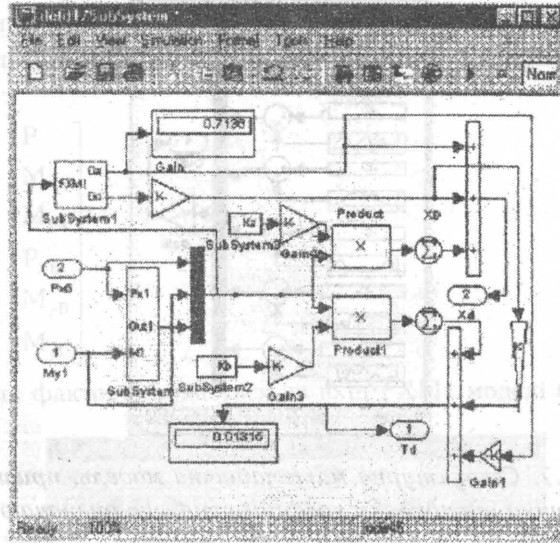


Рис. 7.9. Структурна математична модель, призначена для знаходження поперечного  $X_D$  та кутового  $T_d$  переміщень кінцевої частини шпинделя

Входом моделі є проєкція головного вектора сил різання ( $P_{X5}$ ) та проєкція головного моменту сил різання ( $M_{Y1}$ ). Виходом моделі є поперечне  $X_D$  та кутове  $T_d$  переміщення кінцевої частини шпинделя.

Моделі використовує окремі підсистеми, що розглянуті раніше.

Блок моделі Subsystem розраховує значення вектора внутрішніх силових факторів, а саме:  $M_{yA}$  – момент в задній опорі шпинделя;  $P_{xв}$  – зусилля в упорно-радіальному підшипнику;  $M_{yв}$  – момент в упорно-радіальному підшипнику;  $M_{yс}$  – момент в роликовому підшипнику. Структура даного блоку наведена раніше (див. рис. 7.5).

Блок Subsystem1 (див. рис. 7.9) розраховує поперечне переміщення задньої ( $D_a$ ) та передньої ( $D_c$ ) опор шпинделя. Структура даного блока розглянута раніше (див. рис. 7.6). В математичній моделі (див. рис. 7.9) реалізоване обчислення переміщень згідно з формулами (7.110) та (7.116).

Коефіцієнти формул, які виражаються через параметри шпинделя, згідно із залежностями (7.111)–(7.114) та (7.117)–(7.122), обчислюються в блоках Subsystem2 та Subsystem3. Контроль розрахунків здійснюється за допомогою ряду блоків Display.

Модель, наведена на рис. 7.9, дозволяє здійснити розрахунок поперечних і кутових деформацій шпинделя при фіксованих значеннях головного вектора і головного моменту сил різання.

Для побудови залежності переміщень при зміні сили різання використана допоміжна математична модель (рис. 7.10).

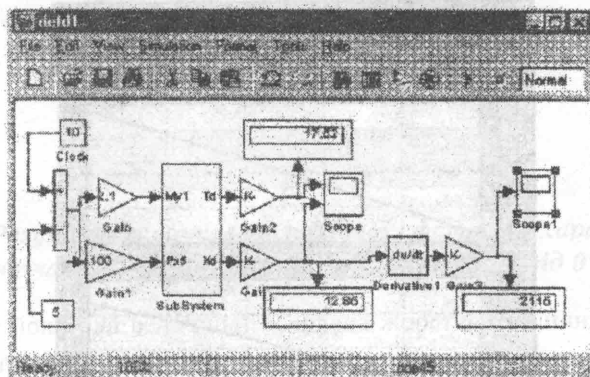


Рис. 7.10. Допоміжна математична модель, призначена для розрахунку статичної деформаційної характеристики шпинделя при дії сили різання

Модель має ряд блоків, які забезпечують формування лінійної часової залежності сили різання у вигляді:

$$P_x = (t - 5) \cdot 100, \text{ Н.}$$

Дана залежність реалізована ланцюжком блоків Clock–Gain1.

Момент сили різання визначається на виході блока Gain у вигляді:

$$M_y = (t - 5) \cdot 2.1.$$

Результати розрахунку поперечних та кутових переміщень виводяться на друк за допомогою блока Scope. Вони мають вигляд залежностей:

$$\theta_D(t) \text{ та } X_D(t).$$

Один із варіантів розрахунків показано на рис. 7.11.

Розраховані значення кутових переміщень в загальному вигляді близькі до лінійних, але в них наявні малосуттєві ділянки нелінійності та випадкові флуктуації. Для виявлення їх особливостей виконана деталізація графіка в області малих значень сил різання. Результати розрахунків переміщень кінцевої частини шпинделя при зміні сили різання в діапазоні [-5, +5 Н] наведені на рис. 7.12.

З аналізу графіка випливає, що в області нульових зусиль різання має місце нелінійність характеристики жорсткості.

Характеристики мають випадкові флуктуації значень. Ці флуктуації показані на графіках на рис. 7.11 та 7.12.

Для визначення особливостей високочастотних статичних характеристики

визначені поточні показники жорсткості шпиндельного вузла. Показники жорсткості знайдені шляхом диференціювання залежності переміщення за значеннями сили різання. Диференціювання здійснене блоком *Derivative1* (див. рис. 7.10). Результати обчислення похідної статичної характеристики наведені на рис. 7.13.

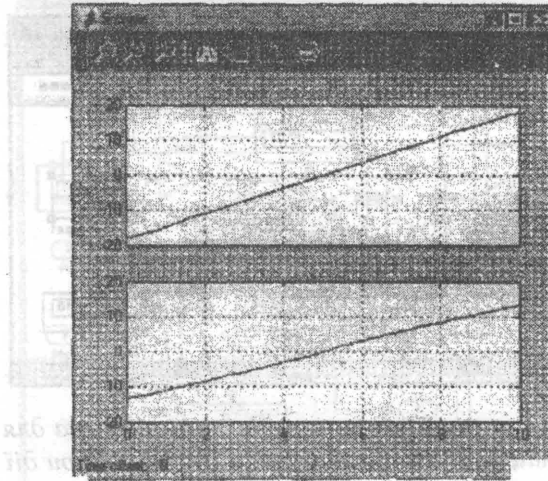


Рис. 7.11. Результати розрахунків залежності поперечно-кутових (верхній графік) та лінійних переміщень (нижній графік) кінцевої частини шпинделя від сили різання при зміні від  $-500$  Н до  $+500$  Н

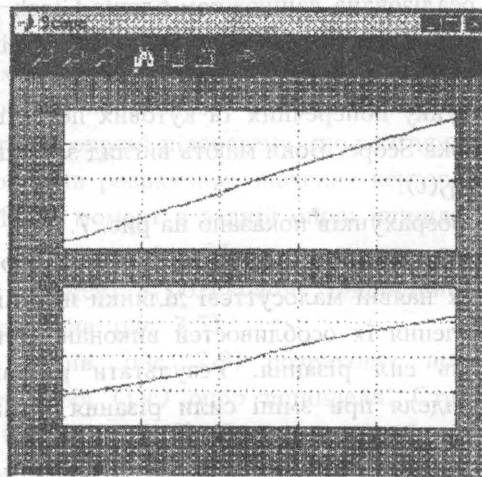


Рис. 7.12. Результати розрахунків кутового (верхній графік) і лінійного переміщень кінцевої частини шпинделя при зміні сили різання від  $-5$  Н до  $+5$  Н

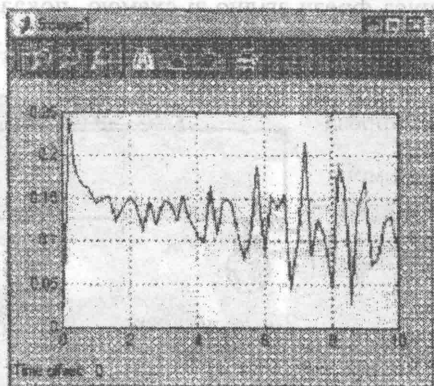


Рис. 7.13. Результати обчислень похідної статичної характеристики деформації шпинделя при зміні сили різання від 0 до H

На графіку показана величина, обернена жорсткості шпинделя.

З аналізу графіка випливає, що середнє значення параметра жорсткості шпинделя дещо змінюється при збільшенні сили різання. В той же час значно збільшуються зміни параметра жорсткості. Це викликано випадковими змінами характеристик жорсткості окремих елементів шпиндельного вузла, в основному підшипників та системи їх регулювання.

Для підтвердження адекватності розробленої математичної моделі проведено комплекс експериментальних вимірювань жорсткості шпиндельного вузла верстата із фрезою косокутного різання.

Експериментальні вимірювання статичної жорсткості вертикально-фрезерного верстату ГФ2171С6 проводилися наступним чином.

В процесі дослідження фіксувалися величини радіального пружного переміщення шпинделя при двосторонньому дискретному прикладенні сил в радіальному напрямку, що моделюють сили різання в процесі торцевого фрезерування.

В шпинделі верстата була встановлена торцева фреза  $\varnothing 320$  мм. В корпусі фрези жорстко закріплювався палець, що імітував різальний ніж. Палець відстояв на 150 мм від осі фрези і мав виліт відносно торця шпинделя.

В тисках верстата закріплюється динамометр із встановленим на ньому відтарованим індикатором, що дозволяє прикладати фіксоване навантаження до шпинделя (рис. 7.14). Переміщення стола спричиняє виникнення навантаження на фрезу, яке передається через різальний ніж. Переміщення фрези вимірювалось індикатором з ціною поділки 0,001 мм.

Для визначення переміщення шпинделя верстата під дією сил, що діють на оброблювану деталь, встановлюються індикатори (з ціною поділки 1 мкм). Індикатори кріпляться на стандартних магнітних стійках і встановлюються з

натягом відносно корпусу фрези згідно зі схемою, показаною на рис. 7.14.

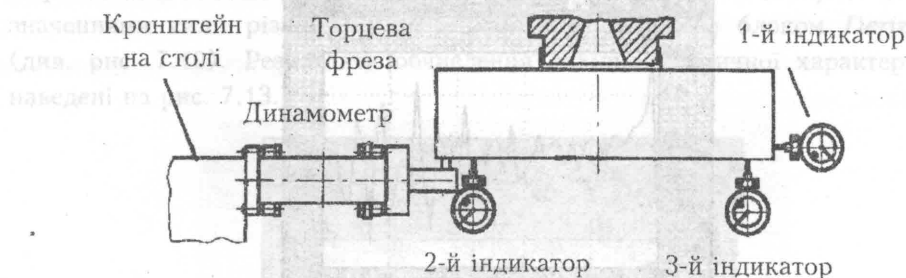


Рис. 7.14. Схема встановлення динамометра та індикаторів при вимірюваннях жорсткості шпиндельної групи верстата

Загальний вигляд динамометра і фрези при вимірюваннях показаний на рис. 7.15, 7.16.

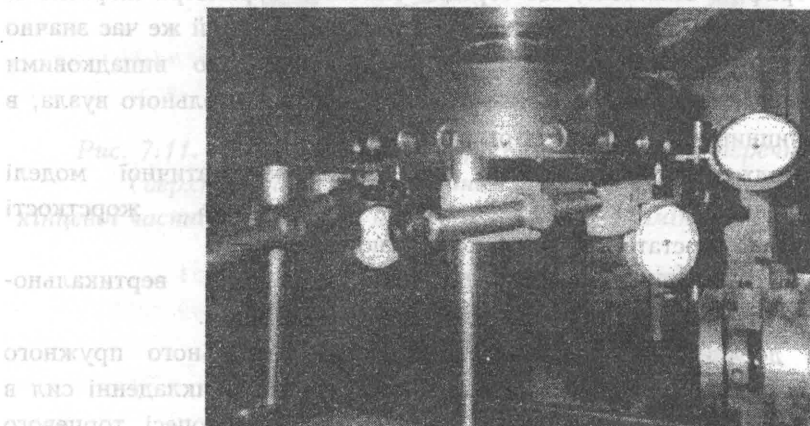


Рис. 7.15. Розміщення індикаторів при вимірюваннях деформативності шпиндельного вузла

Динамометр (рис. 7.17) має пружне кільце, яке розтягується або стискається захватами 1 і 4.

Динамометр призначений для вимірювань сили (однієї зі складових сил різання), прикладеної до фрези в двох протилежних напрямках, і складається з 5-ти основних елементів: 1 – державка; 2 – пружний елемент, що складається з кільця, в який вмонтовано індикатор 3 (з ціною поділки 0,01 мм), для визначення прикладеної сили; 4 – кронштейн, в якому закріплюється деталь.

Таровочний графік динамометра наведений на рис. 7.18.

При переміщенні стола верстата динамометр підводиться до моменту співпадання осей кільця кронштейна динамометра та пальця, що дозволяє

закріпити його в центрі кронштейна. Для забезпечення двостороннього прикладення навантаження динамометра палець фіксується гвинтом.

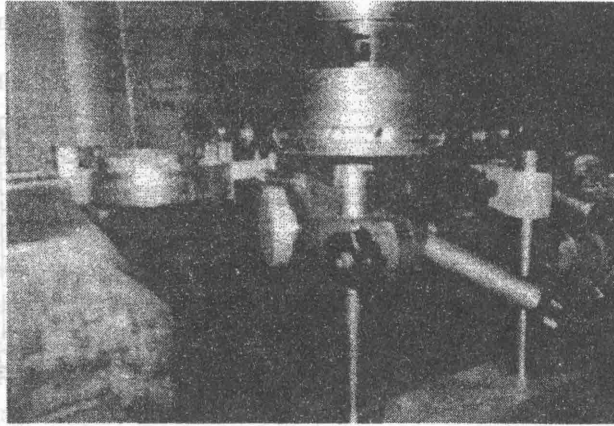


Рис. 7.16. Загальний вигляд динамометра, що використовувався при вимірюваннях радіальної жорсткості шпиндельного вузла верстата

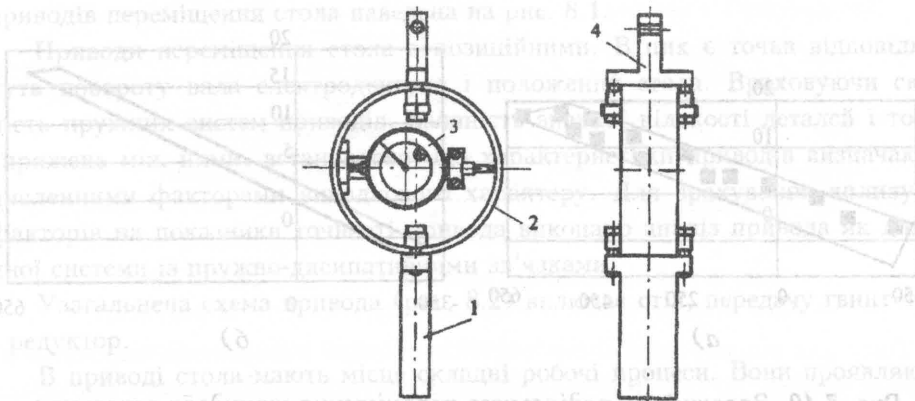


Рис. 7.17. Схема динамометра для вимірювання радіальної жорсткості

Згідно з даними [10, 16], радіальна складова сили різання при чистовому торцевому фрезеруванні не перевищує 600 Н.

Імітація складової сили різання здійснюється за рахунок переміщення стола верстата в горизонтальній площині в двох протилежних напрямках.

Переміщення стола, що відповідають зміні сили, складають: 1) 0,6 мм – 666 Н; 2) 0,3 мм – 333 Н.

Для проведення експериментальних досліджень запропоновані схеми навантаження:

- 1) симетричне навантаження (від 0 до -333 Н; від -333 до 333 Н; від 333

до 0 Н з кроком 55,5 Н);

2) асиметричне навантаження (від 0 до -333 Н; від -333 до 666 Н; від 666 до 0 Н з кроком 55,5 Н);

3) асиметричне навантаження (від 0 до -666 Н; від -666 до 333 Н; від 333 до 0 Н з кроком 55,5 Н).

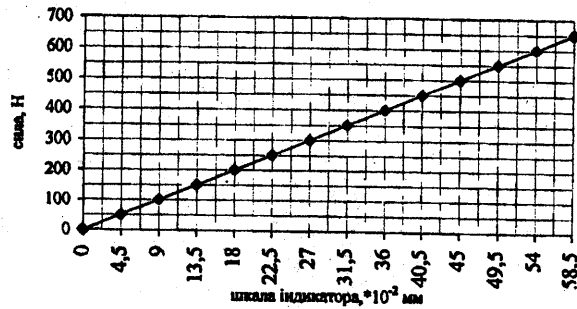


Рис. 7.18. Таровочний графік динамометра

Результати експериментальних вимірювань наведені на рис. 7.19.

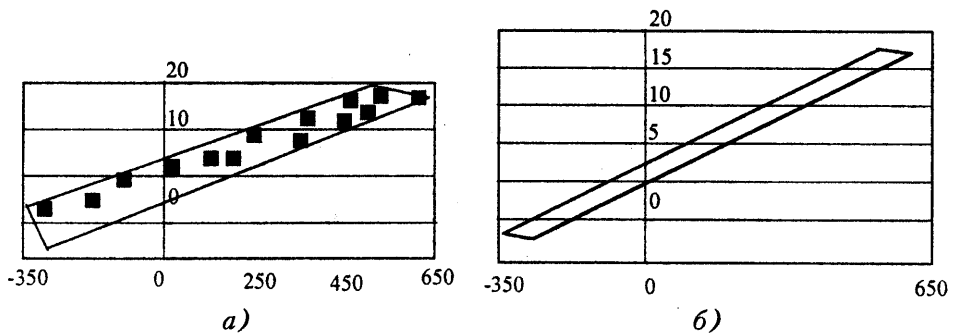


Рис. 7.19. Залежність радіального переміщення шпинделя верстата ГФ2171С6 під дією циклічного знакозмінного радіального навантаження: а – експериментальні дані; б – апроксимовані дані

Із порівняння експериментальних даних, наведених на рис. 7.19, з результатами математичного моделювання, показаними на рис. 7.11 та 7.12, випливає, що розрахунки відповідають одержаним експериментальним даним.

## **РОЗДІЛ 8**

### **Визначення зміни положення фрези і заготовки, яке має місце в процесі обробки**

#### **8.1. Алгоритмічне забезпечення процедури розрахунку статичних і динамічних переміщень стола верстата**

Під час обробки заготовки має місце відносне зміщення фрези і заготовки. Воно визначається деформаціями, що виникають в пружній системі верстата. Деформуються окремо пружна система шпинделя (див. розділ 5) та пружна система стола. Пружна система стола представляє собою складну просторову механічну систему з прецизійними приводами переміщень. Стіл має два автономних приводи поперечних переміщень, які забезпечують його зміщення у двох взаємно перпендикулярних напрямках  $X$  і  $Y$ . Приводи включають електродвигуни, редуктори і передачі гвинт-гайка кочення. Кінематична схема приводів переміщення стола наведена на рис. 8.1.

Приводи переміщення стола є позиційними. В них є точка відповідності кута повороту вала електродвигуна і положення стола. Враховуючи складність пружних систем приводів, наявність значної кількості деталей і точних спряжень між ними, встановлено, що характеристики приводів визначаються численними факторами випадкового характеру. Для врахування впливу цих факторів на показники точності привода виконано аналіз привода як динамічної системи із пружно-дисипативними зв'язками.

Узагальнена схема привода (рис. 8.2) включає стіл, передачу гвинт-гайка і редуктор.

В приводі стола мають місце складні робочі процеси. Вони проявляються в наявності суттєвих нелінійностей характеристик окремих вузлів привода. Основними нелінійностями є люфти і зазори між зубцями шестерень в редукторі, зазори між деталями підшипників.

В приводах переміщення стола використані зубчаті передачі з компенсацією зазору і беззазорні передачі гвинт-гайка. Тому люфти і зазори в елементах привода зведені до мінімуму і їх можна не враховувати при аналізі.

Всі сили опору мають нелінійні складові з гістерезисом. Це стосується напрямних стола, тертя в передачі гвинт-гайка та в підшипниках.

Застосуванням конструктивних заходів та спеціальними регулюваннями забезпечене зниження сил тертя та приведення їх характеристик до виду, близького до лінійного.



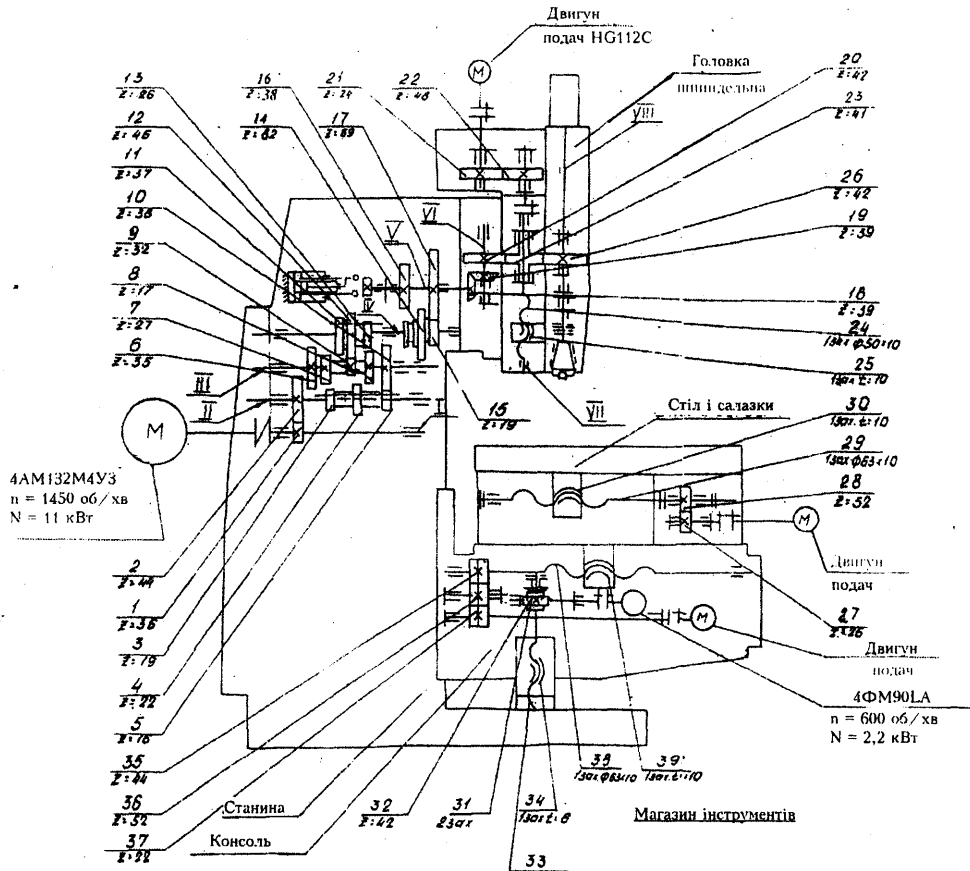


Рис. 8.1. Кінематична схема верстата ГФ2171С6

Тому для аналізу динамічної системи привода використана спрощена динамічна модель із квазілінійними характеристиками. Прийнято, що привод стола відповідає одномасовій динамічній системі з одним ступенем вільності (рис. 8.2, б).

Вплив вертикальної складової сили різання  $P_z$  на роботу даного привода буде проявлятися у зміні коефіцієнтів опору напрямних.

Цей вплив не є суттєвим, тому що вертикальна складова сили різання набагато менша гравітаційних сил, які визначають коефіцієнт опору при русі стола. Аналогічно впливає на рух привода момент  $M_y$  від дії сил різання. Зміна сили опору від дії моменту є несуттєвою.

В процесі обробки верстат вал електродвигуна привода обертається рівномірно, забезпечуючи рух подачі, тобто:

$$\varphi_0 = \omega_0 t, \quad (8.1)$$

де  $\omega_0$  – частота обертання вала електродвигуна;  
 $t$  – час.

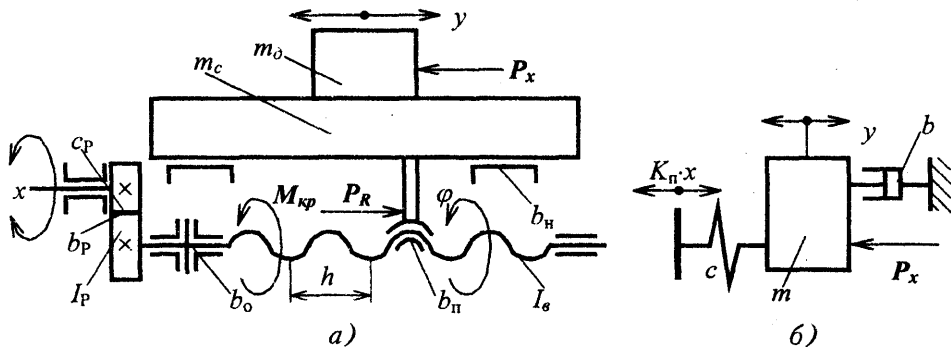


Рис. 8.2. Принципова схема (а) позиційного привода стола з передачею гвинт-гайка та його динамічна модель у вигляді еквівалентної одномасової системи (б):  $X_c$  – переміщення стола;  $P_x$  – головний вектор сил різання;  $m_d$ ,  $m_c$  – маса деталі та стола;  $I_B$  – момент інерції гвинта;  $I_P$  – момент інерції редуктора;  $b_H$ ,  $b_{II}$ ,  $b_o$ ,  $b_P$  – коефіцієнти опору напрямних стола відповідно пари гвинт-гайка, підшипників гвинта та редуктора;  $P_R$  – зусилля, яке діє з боку гвинта на стіл;  $M_{кр}$  – крутний момент в перерізі гвинта;  $\varphi$  – кут повороту гвинта;  $h$  – крок гвинта;  $\varphi_o$  – кут повороту приводного вала;  $M_y$  – головний момент сил різання

В приводі мають місце складні робочі процеси, які обумовлюють статичні деформації та динамічні переміщення його елементів. Тому рух стола буде нерівномірним.

Для визначення закономірностей переміщення деталі під час обробки здійснено аналіз динаміки привода переміщення стола.

Рівняння динамічної рівноваги привода складене із застосуванням рівняння Лагранжа 2-го роду [75], яке має вигляд:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{\partial \Pi}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial y} + Q, \quad (8.3)$$

де  $T$  – кінетична енергія системи;

$\Pi$  – потенціальна енергія системи;

$R$  – дисипативна функція Релея;

$Q$  – узагальнена зовнішня сила.

Кінетична енергія системи має складові, що відповідають кінетичній енергії стола і кінетичній енергії кінематичного ланцюга привода:

$$T = \frac{1}{2} (m_c + m_d) \cdot \dot{X}_c^2 + \frac{1}{2} (I_B + I_P) \cdot \dot{\varphi}^2. \quad (8.4)$$

В передачі гвинт-гайка наявні кінематичні співвідношення між поступальними переміщенням стола і поворотом гвинта. Вони мають вигляд:

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{X_C}{h}, \quad \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dX_C}{dt}. \quad (8.5)$$

Враховуючи кінематичні співвідношення (8.5), із (8.4) знайдемо кінетичну енергію системи:

$$T = \frac{1}{2} \left[ m_C + m_D + (I_b + I_p) \frac{4 \cdot \pi^2}{h^2} \right] \cdot \dot{X}_C^2.$$

Кінетична енергія не залежить від переміщення, тому:

$$\frac{\partial T}{\partial X_C} = 0.$$

Знайдемо частинну похідну кінетичної енергії по швидкості стола:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{X}_C} = \left[ m_C + m_D + (I_b + I_p) \frac{4 \cdot \pi^2}{h^2} \right] \cdot \dot{X}_C.$$

Похідна по часу кінетичної енергії буде визначатися залежністю:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{X}_C} = \left[ m_C + m_D + (I_b + I_p) \frac{4 \cdot \pi^2}{h^2} \right] \cdot \ddot{X}_C = m_x \cdot \ddot{X}_C, \quad (8.6)$$

де вираз в квадратних дужках представляє собою приведену масу привода:

$$m_x = m_C + m_D + (I_b + I_p) \frac{4 \cdot \pi^2}{h^2}.$$

Потенціальна енергія привода визначається залежністю:

$$П = \frac{1}{2} C_p \cdot (\varphi_o - \varphi)^2. \quad (8.7)$$

Використовуючи кінематичні співвідношення, знайдемо:

$$П = \frac{1}{2} C_p \cdot \left( \varphi_o - \frac{2 \cdot \pi}{h} X_C \right)^2.$$

Частинна похідна від потенціальної енергії дорівнює:

$$\frac{\partial П}{\partial X_C} = C_p \cdot \left( \varphi_o - \frac{2 \cdot \pi}{h} X_C \right) \cdot \left( -\frac{2 \cdot \pi}{h} \right) = -\frac{2 \cdot \pi}{h} C_p \cdot \varphi_o + \left( \frac{2 \cdot \pi}{h} \right)^2 \cdot C_p \cdot X_C. \quad (8.8)$$

Визначимо дисипативну функцію Релея для привода:

$$R = \frac{1}{2} \cdot b_H \cdot \dot{X}_C^2 + \frac{1}{2} \cdot (b_{II} + b_o + b_p) \cdot \dot{\varphi}^2.$$

Використовуючи кінематичне співвідношення, одержимо:

$$R = \frac{1}{2} \cdot \left[ b_H + \left( \frac{2 \cdot \pi}{h} \right)^2 \cdot (b_{II} + b_o + b_p) \right] \cdot \dot{X}_C^2.$$

Знайдемо частинну похідну дисипативної функції:

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{X}_C} = \left[ b_H + \left( \frac{2 \cdot \pi}{h} \right)^2 \cdot (b_{II} + b_o + b_p) \right] \cdot \dot{X}_C = v_x \dot{X}_C. \quad (8.9)$$

Узагальнена зовнішня сила для переміщення стола з точністю до знака співпадає із корисним навантаженням, що діє на стіл. Відповідно:

$$Q = -P_x. \quad (8.10)$$

Підставимо значення величин із (8.6)–(8.10) в рівняння Лангранжа другого роду (8.3) і одержимо звичайне диференціальне рівняння:

$$m_x \cdot \ddot{X}_C + b_x \cdot \dot{X}_C + C_p \cdot \left( \frac{2 \cdot \pi}{h} \right)^2 \cdot X_C = \frac{2 \cdot \pi}{h} \cdot C_p \cdot \varphi_o - P_x. \quad (8.11)$$

Враховуючи рівномірність обертання вала приводного двигуна і залежність (8.1), введемо нову змінну у вигляді відхилення положення стола від його номінального значення, яке обумовлене рухом подачі. Відхилення положення стола в напрямку осі X буде дорівнювати:

$$X = X_C - V_{ox} t, \quad (8.12)$$

де  $V_o$  – номінальна швидкість стола (подача).

Знайдемо похідні відхилення положення стола:

$$\frac{dX}{dt} = \dot{X}_C - V_{ox}; \quad \frac{d^2X}{dt^2} = \ddot{X}_C. \quad (8.13)$$

Підставимо значення похідних  $\dot{X}_C$  та  $\ddot{X}_C$  із (8.13) в диференціальне рівняння (8.11) і одержимо:

$$m_x \ddot{X} + v_x \dot{X} + C_p \left( \frac{2\pi}{h} \right)^2 X + C_p \left( \frac{2\pi}{h} \right)^2 V_o t = \frac{2\pi}{h} C_p \omega_o t - P_x. \quad (8.14)$$

Із кінематичного співвідношення (8.4) випливає:

$$h \omega_o = 2\pi V_o. \quad (8.15)$$

Враховуючи співвідношення (8.15), після скорочень із рівняння (8.14) одержимо:

$$m_x \ddot{X} + v_x \dot{X} + C_x X = -v_x V_{ox} - P_x, \quad (8.16)$$

де постійна величина  $C_x = C_p \left( \frac{2\pi}{h} \right)^2$ .

Рівняння (8.16) дає відхилення положення стола від номінального значення, обумовленого рухом подачі. Абсолютне переміщення стола складає:

$$X_C = V_{ox} t + X. \quad (8.17)$$

Рівняння виду (8.16) складені також для поперечного переміщення стола у напрямку осі Y. Переміщення стола буде залежати від швидкості подачі  $V_{oy}$  і дорівнювати:

$$Y_C = V_{oy} t + Y, \quad (8.18)$$

де  $Y$  – відхилення положення стола від його номінального значення при його русі в напрямку осі  $Y$ .

Для визначення відхилення маємо диференціальне рівняння, аналогічне рівнянню (8.16). Воно має вигляд:

$$m_y \ddot{Y} + v_y \dot{Y} + C_y Y = -v_y V_{oy} - P_y, \quad (8.19)$$

де  $m_y$  – маса рухомих частин стола, які рухаються в напрямку  $Y$ ;

$v_y$  – коефіцієнт, який враховує опір напрямних стола, передачі гвинт-гайка і редуктора;

$C_y$  – коефіцієнт жорсткості кінематичного ланцюга привода переміщення стола в напрямку осі  $Y$ ;

$P_y$  – проекція головного вектора сил різання на вісь  $Y$ .

Коефіцієнти, які входять в диференціальні рівняння (8.19) і (8.16), виражаються через параметри приводів, згідно з формулами (8.6)–(8.9).

Як зазначено раніше, коефіцієнти опору в напрямних стола залежать від вертикальної складової головного вектора сили різання і від головного моменту сили різання. Враховуючи, що ці залежності не є суттєвими, приймемо їх у вигляді лінійних функцій.

При роботі приводів мають місце зміни дисипативних параметрів, а саме: зміни коефіцієнтів опору напрямних, передачі гвинт-гайка та сил опору в зубчастих зчепленнях редуктора. Ці зміни залежать від багатьох факторів випадкового характеру. На зміни коефіцієнтів опору впливають умови змащування, мікропрофіль поверхні напрямних, забрудненість мастила твердими частинами, місцеві термічні деформації напрямних, а також випадкові зміни коефіцієнтів опору передачі гвинт-гайка і редуктора. Тому коефіцієнти опору мають випадкові складові, які впливають на положення стола.

Враховуючи вищенаведене, залежність еквівалентних коефіцієнтів опору визначається у вигляді:

$$v_x = v_{ox} + K_{vxp} P_z + K_{vxm} \cdot M_y + v_{xs}^*, \quad (8.20)$$

$$v_y = v_{oy} + K_{vyp} P_z + K_{vym} \cdot M_x + v_{ys}^*, \quad (8.21)$$

де  $v_{ox}$ ,  $v_{oy}$  – постійні детерміновані складові коефіцієнтів опору;

$K_{vxp}$ ,  $K_{vyp}$  – коефіцієнти, які визначають залежність коефіцієнтів опору від вертикальної складової головного вектора сил різання;

$K_{vxm}$ ,  $K_{vym}$  – постійні коефіцієнти, які визначають залежність коефіцієнтів опору від складових головного моменту сил різання;

$v_{xs}^*$ ,  $v_{ys}^*$  – випадкові складові коефіцієнтів опору при переміщенні стола в напрямках осей  $X$  і  $Y$  відповідно.

Підставивши значення коефіцієнтів із залежностей (8.20) та (8.21) в рівняння (8.16) та (8.19), одержимо нелінійні диференціальні рівняння для визначення відхилень стола від номінального положення в напрямках осей X і Y:

$$m_x \ddot{X} + (v_{ox} + K_{вxp} P_z + K_{вxM} M_y + v_{xs}^*) \cdot \dot{X} + C_x X = -P_x - (v_{ox} + K_{вxp} P_z + K_{вxM} M_y + v_{xs}^*) \cdot V_{ox}; \quad (8.22)$$

$$m_y \ddot{Y} + (v_{oy} + K_{вyp} P_z + K_{вyM} M_x + v_{ys}^*) \cdot \dot{Y} + C_y Y = -P_y - (v_{oy} + K_{вyp} P_z + K_{вyM} M_x + v_{ys}^*) \cdot V_{oy}. \quad (8.23)$$

Дані рівняння є основою для розрахунку зміни положення стола при різанні в напрямках X і Y.

В процесі обробки заготовки має місце зміна взаємного положення стола і фрези у вертикальному напрямку (рис. 8.3).

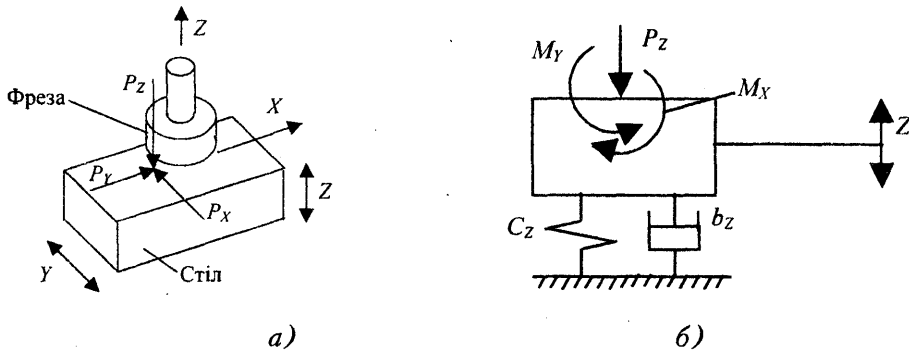


Рис. 8.3. Схема динамічних переміщень стола у горизонтальному X, та вертикальному напрямках (а) Y та динамічна модель для визначення вертикальних переміщень стола (б)

Переміщення відбуваються під дією вертикальної складової головного вектора сил різання  $P_z$ .

Вертикальні переміщення стола відносно фрези відбуваються в межах контактних деформацій опорних площин напрямних. Ці деформації мають порядок 1...5 мкм. Тому вони сумірні з параметрами обробленої поверхні і повинні враховуватись при аналізі переміщення стола.

Стіл має достатньо великі розміри, тому можна обмежитись розглядом вертикальних переміщень без врахування зміни кутового положення стола, обумовленого зміною точки прикладення сили різання.

Відповідно динамічна модель вертикальних переміщень стола набуде вигляду наведеного на рис. 8.3, б.

Для даної динамічної моделі диференціальне рівняння руху стола по вер-

тикалі буде мати вигляду:

$$m_z \ddot{Z} + v_z \dot{Z} + C_z Z = -P_z. \quad (8.24)$$

Дане рівняння описує динамічні переміщення стола відносно усталеного положення. Тому в нього не входять гравітаційні сили. В рівнянні (8.24) введені інерційні ( $m_z$ ), дисипативний ( $v_z$ ) та деформативний ( $C_z$ ) коефіцієнти. Ці коефіцієнти враховують зміну параметрів системи при коливаннях. Зокрема коефіцієнт контактної жорсткості напрямних і коефіцієнт опору залежать від точки прикладання сили різання, а отже, від складових головного моменту  $M_x$  та  $M_y$  сил різання.

Враховуючи незначні величини змін коефіцієнтів прийнята лінійна залежність коефіцієнтів від складових моменту. При розрахунках необхідно також ввести випадкову складову коефіцієнтів. Остаточні коефіцієнти рівняння визначаються у вигляді:

$$v_z = v_{oz} + K_{Myz} M_y + K_{Mxz} M_x + v_{sz}^* ; \quad (8.25)$$

$$C_z = C_{zo} + K_{MyC} M_y + K_{MxC} M_x + C_{sz}^* , \quad (8.26)$$

де  $v_{oz}$  – постійне детерміноване значення коефіцієнта опору;

$K_{Myz}$ ,  $K_{Mxz}$  – постійні, які враховують залежність коефіцієнта опору від складових головного моменту сил різання;

$v_{sz}^*$  – випадкова складова коефіцієнта опору;

$C_{zo}$  – середнє значення жорсткості напрямних;

$K_{MyC}$ ,  $K_{MxC}$  – коефіцієнти жорсткості напрямних по моменту;

$C_{sz}^*$  – випадкова складова контактної жорсткості напрямних.

Диференціальні рівняння (8.23) та (8.24), які описують переміщення стола, мають однакову структуру:

$$a\ddot{X} + v\dot{X} + CX = d + P. \quad (8.27)$$

Для розв'язку даного рівняння виконаємо його подвійне інтегрування в межах від  $t = 0$  до  $t$ . Після інтегрування (8.27) одержимо:

$$\alpha X = \int_0^+ \int_0^+ [d + P - CX - v\dot{X}] \cdot (dt)^2.$$

Звідси знайдемо значення невідомої  $X$ , а отже, і структурну модель для обчислення невідомої  $x$ , в функції часу.

$$X = \frac{1}{\alpha} \int_0^+ \int_0^+ [d + P - CX - v\dot{X}] \cdot (dt)^2. \quad (8.28)$$

Із формули (8.28) випливає, що для визначення переміщення стола необхідно виконати подвійне інтегрування в часі лінійної комбінації змінних, яка

включає зовнішні сили  $P$ , сили пружності  $CX$  та дисипативні сили  $v\dot{X}$ . Сили пружності та дисипативні сили залежать від невідомої  $X$  та її похідної в часі  $\dot{X}$ . Тому для обчислення цих сил необхідно використати зворотний зв'язок.

Враховуючи, що операції диференціювання і інтегрування є взаємно оберненими, похідну переміщення знайдемо із формули (8.28) у вигляді:

$$\dot{X} = \frac{dX}{dt} = \frac{1}{a} \int_0^t [d + P - CX - v\dot{X}] \cdot dt. \quad (8.29)$$

Тоді значення переміщення визначиться у вигляді:

$$X = \int_0^t \dot{X} \cdot dt. \quad (8.30)$$

Залежності (8.29), та (8.30) є основою для розробки алгоритму визначення динамічних переміщень стола для кожного з трьох ступенів вільності.

Входами блок-схеми алгоритму (рис. 8.4) є значення зовнішнього навантаження  $P$ , яке є довільною стохастичною функцією часу, та значення коефіцієнтів  $d$ ,  $c$ ,  $v$ , які враховують позиційні сили, сили пружності та дисипативні сили і можуть бути як константами, так і величинами, що змінюються в часі випадковим чином за кусково-постійним законом.

Значення сил і констант є різними для кожного із трьох переміщень стола, що відповідають ступеням його вільності.

Виходом алгоритму є переміщення стола у горизонтальному  $X$ ,  $Y$  або вертикальному напрямках.

Алгоритм побудовано за послідовною ланцюговою схемою із зворотними зв'язками. Послідовний ланцюг включає блок обчислення підінтегрального виразу, який входить у формулу (8.29), блок множення на постійний коефіцієнт  $1/a$  і блоки знаходження швидкості та переміщення стола. Обчислені значення швидкості та переміщення використовуються як входи зворотних зв'язків, призначених для знаходження дисипативних сил та сил пружності.

Алгоритм базується на покрокових в часі обчисленнях динамічних параметрів задачі. Вибирається деякий крок зміни часу і для кожного кроку здійснюються відповідні обчислення. При виборі достатньо малого значення кроку вплив зворотних зв'язків на результати розрахунку динамічних переміщень стола нівелюється і одержаний результат з високим ступенем точності відповідає розв'язку нелінійного диференціального рівняння з випадковими коефіцієнтами (8.28), яке описує переміщення стола в динаміці.



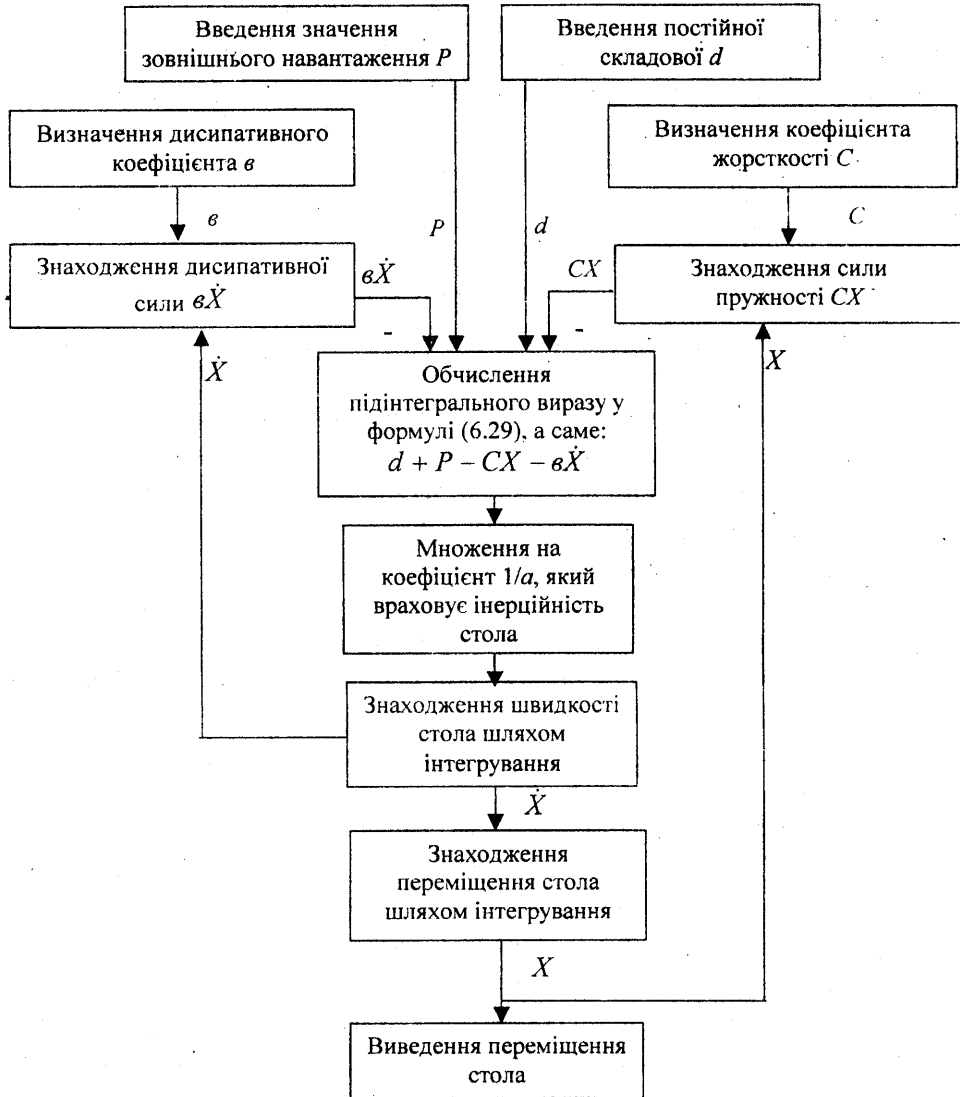


Рис. 8.4. Блок-схема алгоритму для визначення динамічних переміщень стола відповідно до одного із трьох ступенів вільності

## 8.2. Структурна математична модель для розрахунків динамічних переміщень стола верстата, результати моделювання та порівняння їх з експериментальними даними

Розроблений алгоритм знаходження переміщень стола в динаміці по трьох координатах X, Y, Z став основою для розробки структурних математичних моделей переміщення стола в кожному із трьох напрямків.

Структурні моделі охоплюють динамічні переміщення стола під дією узагальнених силових факторів процесу різання – головного вектора і головного моменту сил різання.

При визначенні переміщень стола враховуються всі три складові (проекції) головного вектора і дві складові моменту (крім моменту сил різання відносно осі обертання шпинделя).

Ядром загальної структурної моделі є структурна модель, що відповідає наведеному на рис. 8.4 алгоритму. Дана структурна модель реалізована в системі SIMULINK (рис. 8.5).

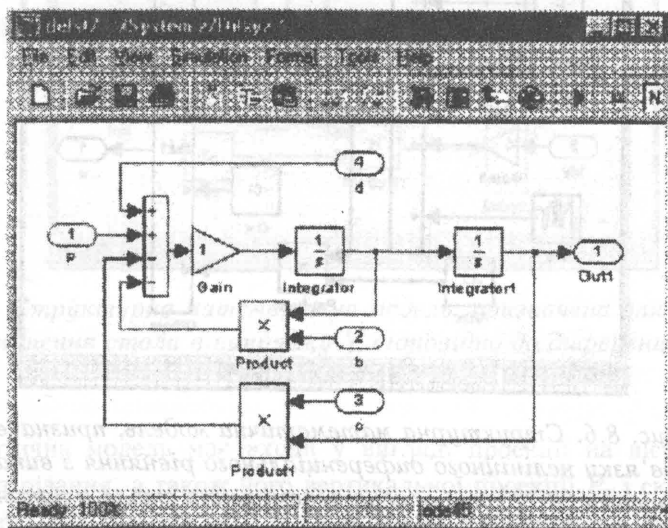


Рис. 8.5. Структурна математична модель для розв'язку нелінійного диференціального рівняння, яке в загальному вигляді визначає переміщення стола по трьох координатах у відхиленнях від його номінального положення

Дана математична модель має незалежний вхід P, що відповідає одній із проекцій головного вектора сил різання. Виходом моделі (Qut1) є значення

переміщення стола в одному із напрямків (X, Y чи Z). Модель має додаткові входи  $v$ ,  $c$ ,  $d$ , які служать для введення поточних значень коефіцієнтів, і включає два блоки інтегрування (Integrator та Integrator1), які разом реалізують операцію подвійного інтегрування відповідно до формули (8.28).

Множення сигналів здійснюється блоками Product і Product1, які формують відповідно дисипативну (залежну від швидкості) та деформативну (залежну від переміщення) складові диференціального рівняння.

Структурна модель, наведена на рис. 8.4, є основою для розв'язку всіх трьох диференціальних рівнянь (8.22)–(8.24), які описують переміщення стола у відхиленнях відповідно в напрямках координатних осей X, Y і Z.

Для розв'язку рівняння (8.22) розроблена структурна математична модель, наведена на рис 8.6.

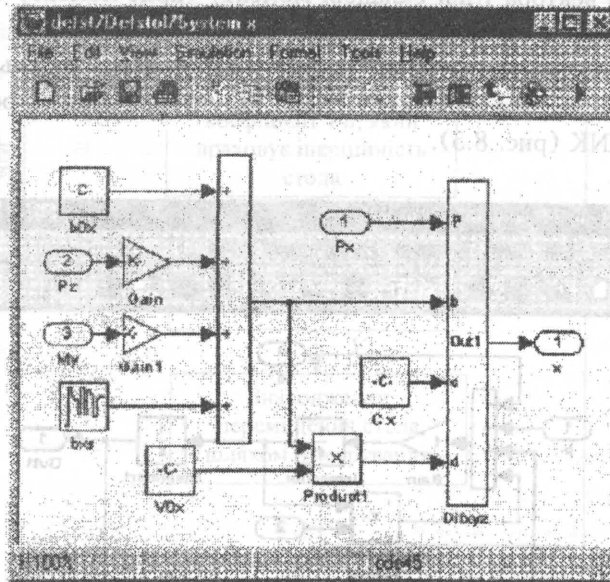


Рис. 8.6. Структурна математична модель, призначена для розв'язку нелінійного диференціального рівняння з випадковими коефіцієнтами (8.22), що описує переміщення стола в напрямку осі X у відхиленнях від його номінального положення

Основою моделі, наведеної на рис. 8.5, є блок для розв'язку нелінійного диференціального рівняння (блок Difxyz). На вхід цього блоку подається проекція головного вектора сили різання  $P_x$  та його постійне значення параметра жорсткості  $C_x$  (відповідає формулі (8.20)).

Дисипативний коефіцієнт  $v$  розраховується за допомогою суматора. На вхід суматора подається постійне значення коефіцієнта  $v_{0x}$ , а також його ви-

падкова складова  $v_{xs}$ . Випадкова складова визначається як широкополосний випадковий процес з постійним значенням спектральної щільності потужності. В даній моделі використаний блок ( $v_{xs}$ ) системи SIMULINK, що реалізує випадковий процес, характеристики якого відповідають “білому шуму” в обмеженому діапазоні частот. Модель має входи для введення значень вертикальної проекції  $P_z$  головного вектора сил різання та складової головного моменту сил різання  $M_y$ . В моделі задана швидкість подачі  $V_{ox}$ .

Структурна математична модель для розрахунку переміщення стола в напрямку осі Y (рис. 8.7) є загалом подібною розглянутій раніше.

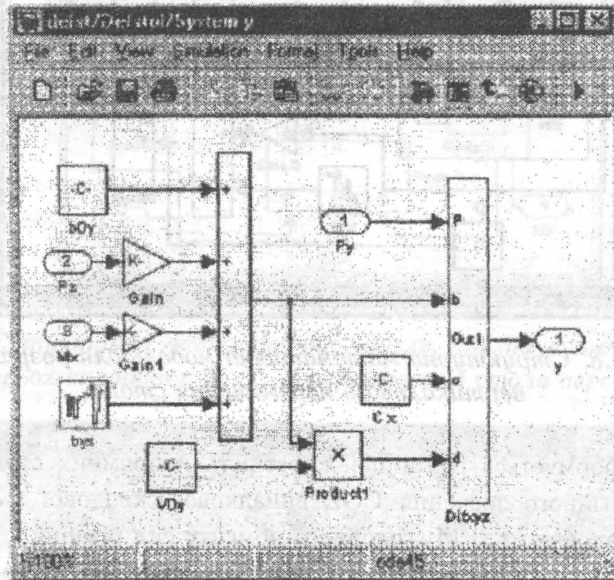


Рис. 8.7. Структурна математична модель, призначена для розрахунку переміщення стола в напрямку Y відповідно до диференціального рівняння (8.23)

Математична модель має входи у вигляді проекції на вісь Y головного вектора сил різання, а також його вертикальної проекції  $P_z$  і складової головного моменту сил різання  $M_x$ . Модель також використовує задане значення  $V_{oy}$  швидкості подачі в напрямку осі Y.

Структурна математична модель для визначення вертикального переміщення стола (рис. 8.8) дещо відрізняється від наведених раніше моделей. В даній моделі формуються не лише випадкові значення дисипативного коефіцієнта  $v$ , а й випадкові значення деформативного коефіцієнта (жорсткості)  $C$ . Складова диференціального рівняння  $d$  відсутня. Тому на вхід  $d$  блока Difuz подається постійне нульове значення.

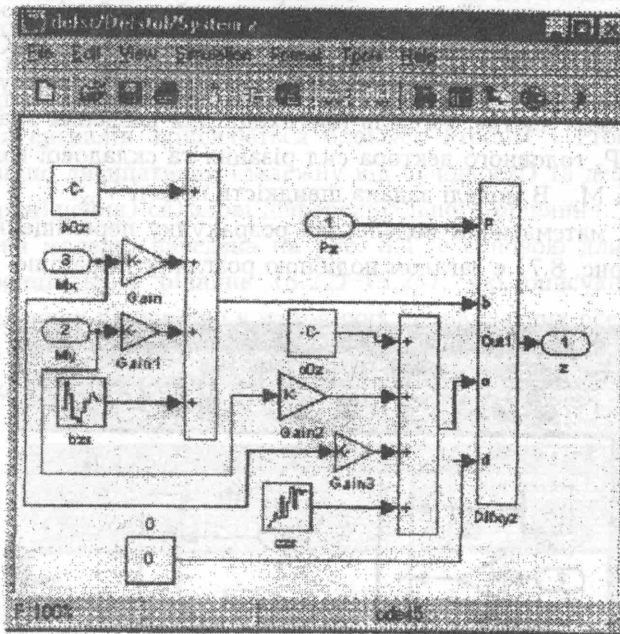


Рис. 8.8. Структурна математична модель для розрахунку вертикального переміщення стола

В моделі формується нелінійна жорсткість напрямних стола. Вона складається із постійного значення COZ випадкової складової CZS та лінійної комбінації складових  $M_x$  і  $M_y$  головного моменту сил різання.

Всі три структурні моделі, що визначають складові переміщення стола, об'єднані в одну цілісну модель (рис. 8.9).

Входом моделі є три складові головного вектора сил різання  $P_x$ ,  $P_y$  і  $P_z$  та складові головного моменту сил різання  $M_x$  і  $M_y$ . Модель дозволяє здійснити розрахунки як усталених, так і динамічних переміщень стола при дії різноманітних сил різання. З метою апробації моделі здійснені розрахунки переміщення стола при ступінчастій зміні складових  $P_x$  і  $P_y$  головного вектора сили різання. Для цього використана допоміжна структурна модель (рис. 8.10). В даній моделі значення вертикальної складової сили різання  $P_z$  і складових головного моменту  $M_x$  та  $M_y$  прийняті постійними (задані як константи).

Результати розрахунків переміщень стола виведені на друк за допомогою трьох блоків Score.

Одержане значення переміщень стола в напрямку Y показано на рис. 8.11.

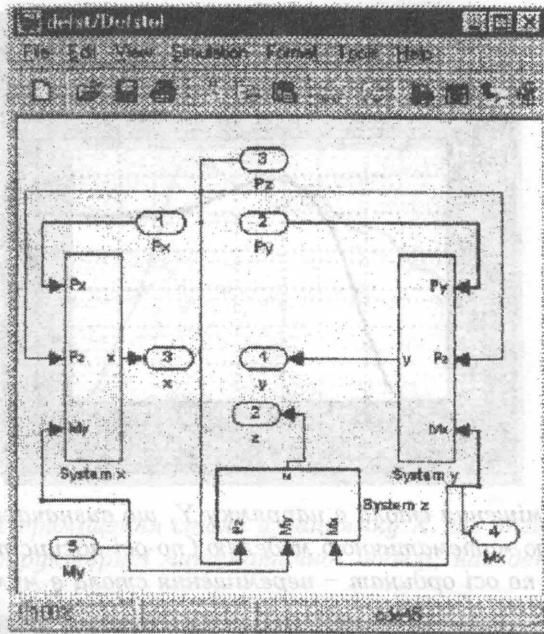


Рис. 8.9. Структурна математична модель, призначена для розрахунку трьох складових  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  переміщення стола верстата

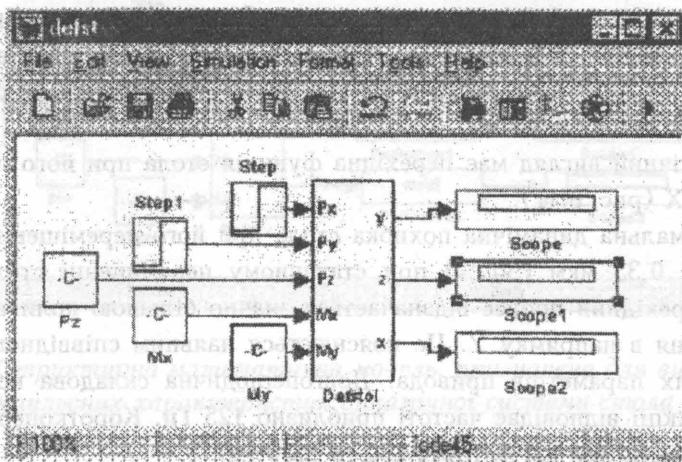


Рис. 8.10. Допоміжна математична модель для розрахунку динамічного переміщення стола під дією ступінчастої зміни проєкцій  $P_x$  і  $P_y$  сили різання

При ступінчастій силі різання стіл переміщується за законом, який відповідає перехідній функції верстата.

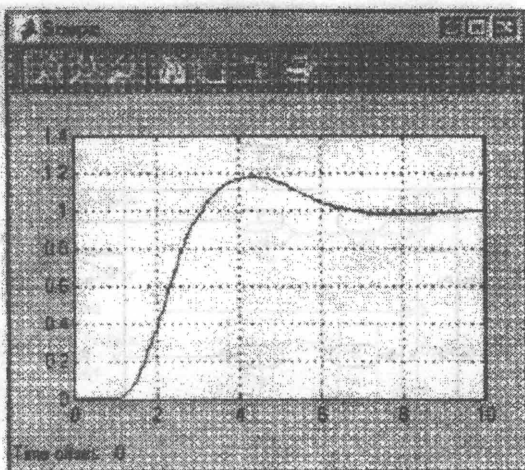


Рис. 8.11. *Переміщення стола в напрямку Y, що визначається розрахунком за структурною математичною моделлю (по осі абсцис показано час в мс, по осі ординат – переміщення стола в мкм)*

Перехідна функція відзначається незначною коливальністю. Динамічна похибка переміщення стола складає приблизно 0,2 мкм (20 %) при загальному статичному переміщенні – приблизно 1 мкм. Час перехідного процесу складає приблизно 5 мс. При цьому час досягнення максимального динамічного переміщення знаходиться в межах 3...4 мс. Із результатів розрахунків випливає, що динамічна система стола в горизонтальному напрямку відзначається високою швидкодією.

Аналогічний вигляд має перехідна функція стола при його переміщенні у напрямку X (рис. 8.12).

Максимальна динамічна похибка стола при його переміщенні в напрямку X складає 0,35 мкм (30 %) при статичному переміщенні стола приблизно 1 мкм. Перехідний процес відзначається значно більшою коливальністю, ніж переміщення в напрямку Y. Це пояснюється наявним співвідношенням масо-жорсткісних параметрів привода. Довгоперіодична складова коливань перехідної функції відповідає частоті приблизно 125 Гц. Короткоперіодичні складові простежуються на частотах 450 та 1150 Гц.

Для більш детального дослідження властивостей динамічної системи стола верстата виконано розрахунок імпульсних характеристик динамічної системи. Імпульсні характеристики знайдені як похідні перехідних функцій.

Імпульсні характеристики розраховані за допомогою структурної математичної моделі (рис. 8.13).

Обчислення похідних здійснено блоками Derivative.

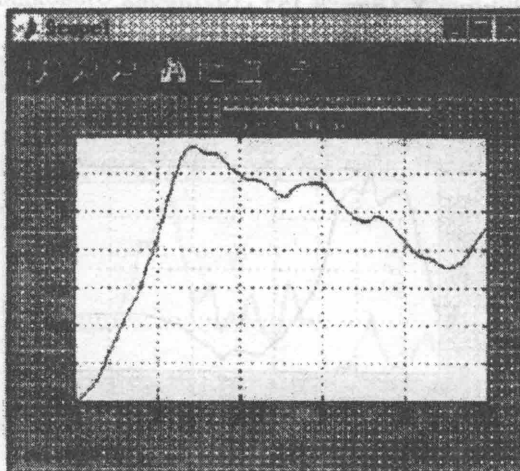


Рис. 8.12. Переміщення стола у напрямку X, що визначається за допомогою структурної математичної моделі, наведеної на рис. 8.9

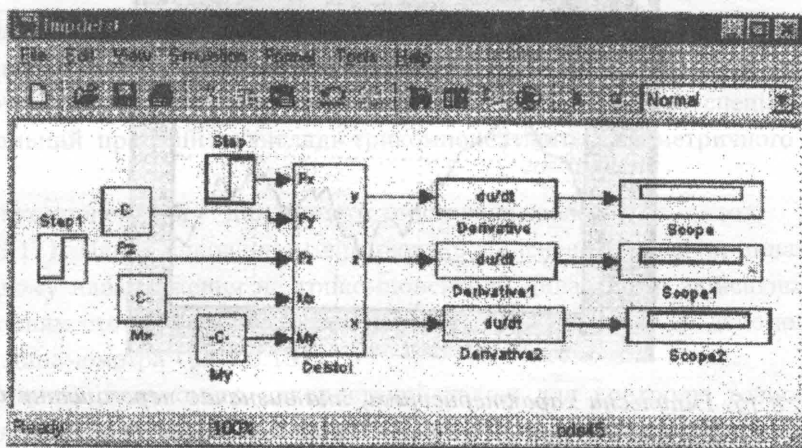


Рис. 8.13. Структурна математична модель, призначена для визначення імпульсних характеристик динамічної системи стола

Результати розрахунку горизонтальних переміщень стола у напрямку Y наведені на рис. 8.14.

Імпульсна характеристика відповідає коливальній системі із затуханням. На характеристиці простежується довгоперіодична складова, яка відповідає частоті приблизно 165 Гц. Коливання імпульсної характеристики швидко затухають.

Аналогічний вигляд має імпульсна характеристика, що відповідає перемі-



щенню стола в напрямку X (рис. 8.15).

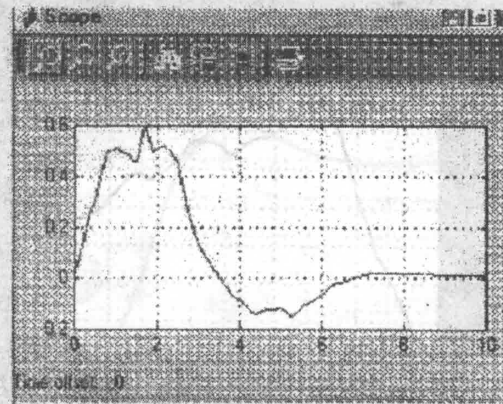


Рис. 8.14. Результати розрахунку імпульсної характеристики верстата, яка відповідає переміщенню стола в напрямку Y

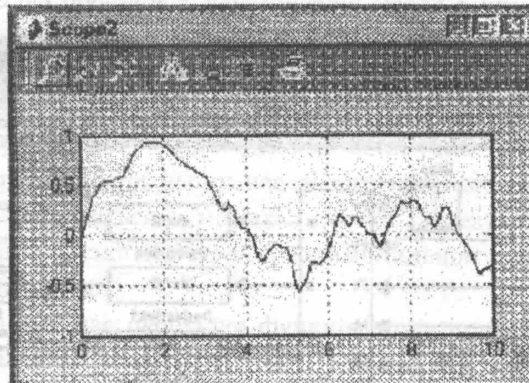


Рис. 8.15. Імпульсна характеристика, яка визначає переміщення стола в напрямку X при дії на стіл імпульсного навантаження

На характеристиці простежується довгоперіодична складова, яка відповідає частоті коливань стола приблизно 125 Гц. Короткоперіодичні складові відповідають частотам коливань приблизно 500 та 1000 Гц.

Вертикальні коливання стола під дією імпульсного навантаження мають суттєві короткоперіодичні складові (рис. 8.16). Амплітуда короткоперіодичних складових коливань має один порядок із максимальним значенням характеристики.

Частоти короткоперіодичних складових знаходяться в межах: 650..670; 1050..1100; 2100..2200 Гц.

Вигляд характеристики показує, що коливання стола викликаються на-

вантаженнями випадкового характеру, які мають місце в приводах стола.

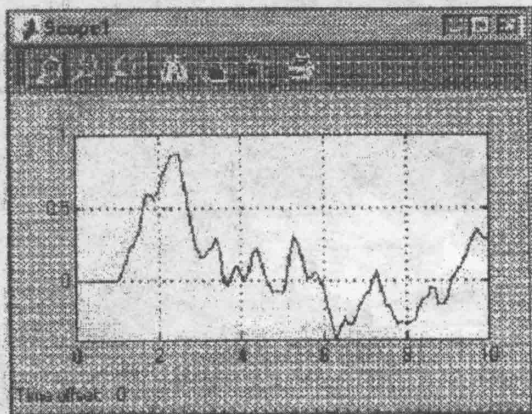


Рис. 8.16. Розрахункові значення імпульсної характеристики, що відповідає коливанням стола у вертикальному напрямку

Для перевірки адекватності розробленої математичної моделі динамічних переміщень стола результати математичного моделювання порівнювались з експериментальними даними. В експериментах використано спеціальний вимірювальний пристрій у вигляді трикомпонентного тензометричного динамометра.

Трикомпонентний динамометр встановлювався на столі верстата (рис. 8.17). Перед виконанням вимірювань здійснене тарування динамометра. При цьому навантаження на трикомпонентний динамометр здійснювалось переміщенням стола, а вимірювання навантаження виконане за допомогою пружного динамометра (рис. 8.18).

Пружний динамометр використаний також для контролю точності вимірювань та для юстирування тензометричного динамометра. Загалом точність вимірювань навантаження тензометричним динамометром знаходилася в межах 3..4 %.

Вихід тензометричного динамометра через аналого-цифровий перетворювач підключався до вхідного порту ПЕОМ. При цьому на екрані монітора в графічному вигляді виводились записи переміщення стола (рис. 8.19).

Переміщення стола верстата визначене непрямим методом шляхом обробки результатів вимірювань тензодатчиків динамометра.

Динамометр має дві зв'язані пружними стійками маси. Одна з цих мас ( $m_0$ ) утворена рухомою обоймою динамометра, на якій встановлені заготовка і вантаж. Ця маса є рухомою відносно стола верстата. Другою масою є корпус динамометра, який жорстко закріплений на столі верстата.

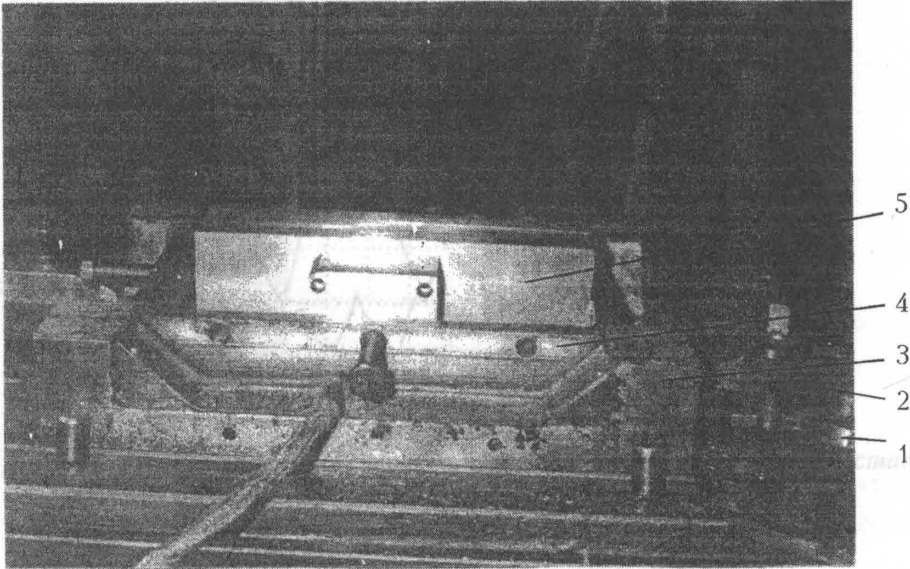


Рис. 8.17. Установка трикомпонентного тензометричного динамометра на столі фрезерного верстата: 1 – стіл верстата; 2 – прихоплювач; 3 – корпус динамометра; 4 – рухома обойма динамометра; 5 – деталь, встановлена в рухомій обоймі

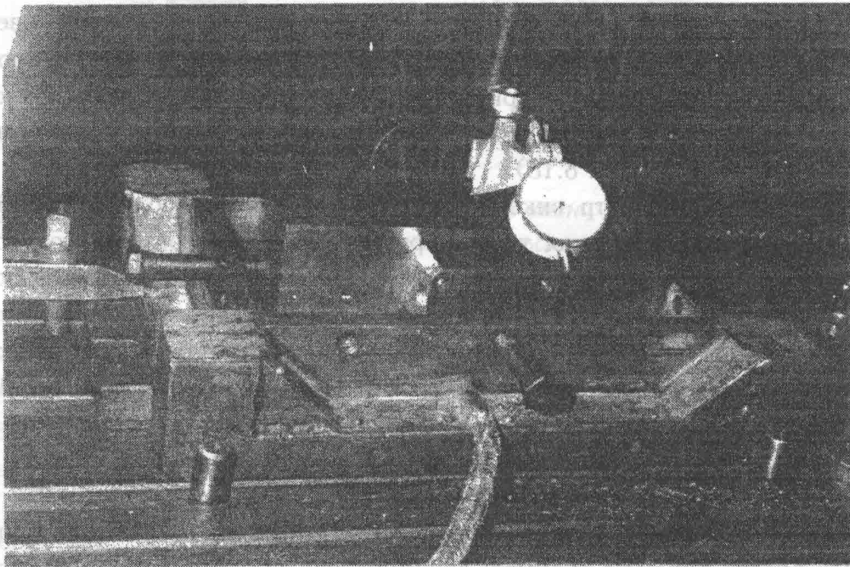


Рис. 8.18. Пружинний динамометр, використаний для тарування трикомпонентного тензометричного динамометра

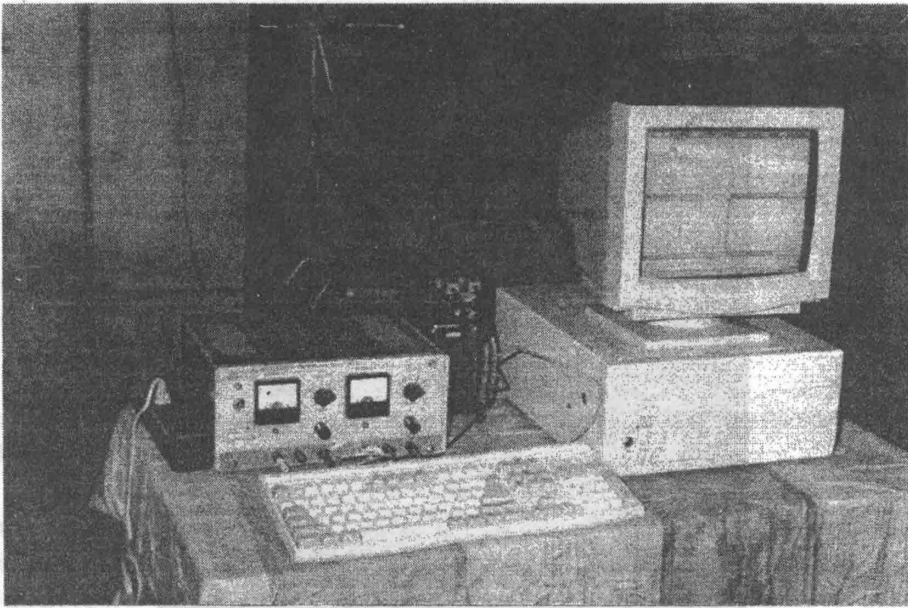


Рис. 8.19. Апаратура для реєстрації результатів вимірювань навантаження трикомпонентним тензометричним динамометром

Враховуючи, що маса корпусу набагато менша маси стола, при визначенні переміщень масою корпусу динамометра можна знехтувати.

Відповідно еквівалентна динамічна модель стола і рухомої обойми динамометра набуде вигляду, наведеного на рис. 8.20, б.

Рівняння динамічної рівноваги обойми динамометра має вигляд:

$$m_o \ddot{Z}_o = C_g (Z_c - Z_o) + v_g (\dot{Z}_c - \dot{Z}_o), \quad (8.31)$$

де  $Z_o$  – абсолютне переміщення маси  $m_o$ ;

$Z_c$  – переміщення стола;

$C_g$  – жорсткість пружних елементів динамометра;

$v_g$  – еквівалентний коефіцієнт опору пружних елементів динамометра.

Сигнал  $V$ , який вимірюється динамометром, в першому наближенні пропорційний відносному зміщенню обойми динамометра відносно корпусу, тобто:

$$V(t) = K_g (Z_c - Z_o), \quad (8.32)$$

де  $K_g$  – коефіцієнт підсилення динамометра і апаратури.

Похідна сигналу в першому наближенні може бути знайдена диференціюванням залежності (8.32). Відповідно:

$$\frac{dV}{dt} = \dot{V}(t) = K_g (\dot{Z}_c - \dot{Z}_o). \quad (8.33)$$

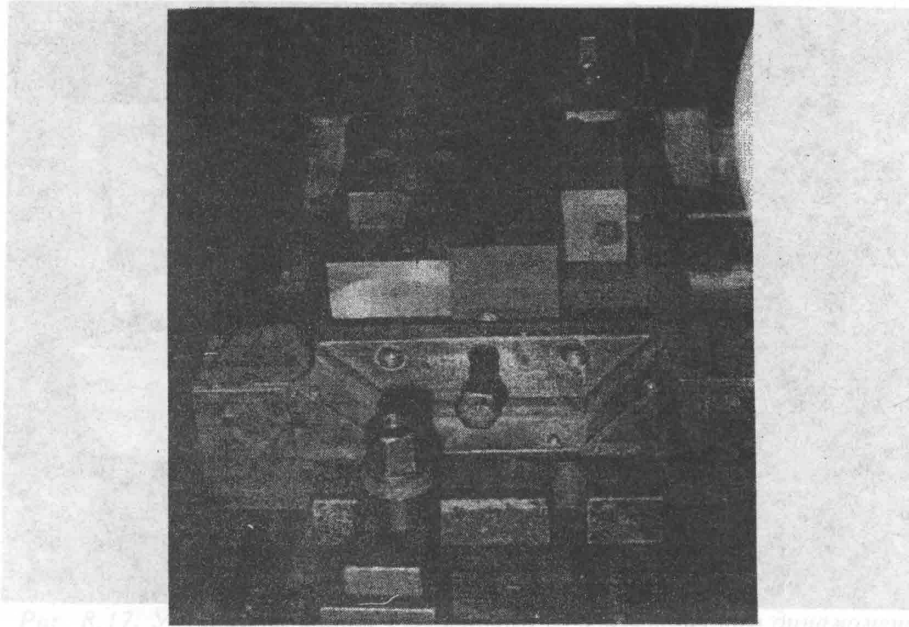
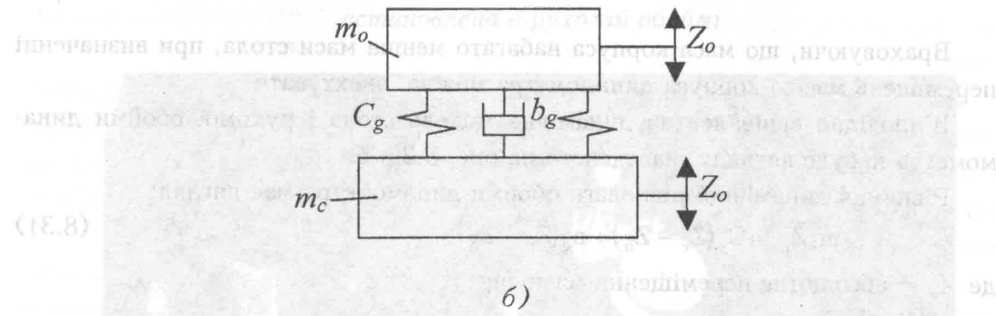


Рис. 8.17. Закріплення заготовки і вантажів на рухомій обоймі динамометра (а)



(8.31)

Рис. 8.20. Закріплення заготовки і вантажів на рухомій обоймі динамометра (а) та еквівалентна динамічна модель стола і рухомої обойми динамометра (б): 1 – стіл верстата; 2 – корпус динамометра; 3 – рухома обойма динамометра; 4 – заготовка; 5 – вантаж

Підставивши значення величин із (8.32) та (8.33) в рівняння (8.31), одержимо:

$$m_o \ddot{Z}_o = V \cdot \frac{C_g}{K_g} + \dot{V} \frac{B_g}{K_g} \quad (8.34)$$

Виконаємо інтегрування рівняння (8.34) в часі і одержимо:

$$\dot{Z}_o = \frac{C_g}{K_g m_o} \int_0^t V(t) dt + \frac{B_g}{K_g m_o} V(t). \quad (8.35)$$

Шляхом інтегрування залежності (8.35) одержимо переміщення маси  $m_o$  у вигляді:

$$Z_o = \frac{C_g}{K_g m_o} \int_0^t \int_0^t V(t) dt^2 + \frac{B_g}{K_g m_o} \int_0^t V(t) dt. \quad (8.36)$$

Підставимо переміщення  $Z_o$  із формули (8.36) в рівняння (8.32) і визначимо з нього переміщення стола:

$$Z_c = \frac{1}{K_g} V(t) - \frac{C_g}{K_g m_o} \int_0^t \int_0^t V(t) dt^2 - \frac{B_g}{K_g m_o} \int_0^t V(t) dt. \quad (8.37)$$

Залежність (8.37) дозволяє знайти переміщення стола за вимірним експериментальним сигналом динамометра  $V(t)$ .

Обробка експериментальних даних здійснена на ЕОМ. Для цього розроблене програмне забезпечення з використанням математичного пакету MathCAD. Масив експериментальних даних, який включав результати аналого-цифрового перетворення сигналу тензорезисторів, формувався у вигляді файлу і вводився в документ MathCAD. Потім масив експериментальних даних приводився до вигляду лінійного вектора. Фрагмент документа MathCAD, призначений для обчислення переміщення стола верстата, наведений на рис. 8.21.

Точкові значення, виміряні тензорезистором і подані у вигляді вектора  $V_y$  (див. рис. 8.21), згладжувались шляхом інтерполяції кубічними сплайнами. Для цього використані стандартні вбудовані функції пакету MathCAD `cspline` та `interp`. Одержані інтерпольовані значення дають згладжену аналогову залежність вихідного сигналу трикомпонентного динамометра в функції часу (рис. 8.22).

Знайдена функціональна залежність  $V(t)$  використана для обчислень переміщень стола верстата згідно з формулою (8.37). Результати розрахунків показані на рис. 8.23.

Із порівняння результатів експериментальних вимірювань переміщення стола (див. рис. 8.23) із результатами математичного моделювання (див. рис. 8.16) впливає їх кількісна та якісна подібність. Розходження значень обчислень максимальних амплітуд кривих не перевищує 0,7 мкм і складає для додатних амплітуд 0,8 та 1,4 мкм (перше число одержане в результаті математичного моделювання, друге – за допомогою експериментальних вимірювань).

Для від'ємних максимальних амплітуд при моделюванні одержано 0,5 мкм (див. рис. 8.16), а в експерименті – 0,85 мкм (див. рис. 8.23).

```

i := 0..120
k1 := 10    k2 := 100    k3 := 3
vx_i := i    vy_i := 20 * e-0.1 * i * sin(1 + rnd(i))

```

	0
0	0
1	17.292
2	-11.001
3	-6.488
4	-13.134
5	10.705
6	-1.348
7	-6.834
8	2.962
9	-8.105
10	-5.659
11	-3.793
12	3.471
13	-5.051
14	4.173
15	-1.851

```
vs := spline(vx,vy)
```

```
U(t) := interp(vs,vx,vy,t)
```

$$zc(t) := k1 \cdot U(t) - k2 \cdot \int_0^t U(t) dt - k3 \cdot \int_0^t \int_0^t U(t) dt dt$$

Рис. 8.21. Фрагмент документа MathCAD, призначений для розрахунку вертикального переміщення стола верстата за експериментально визначеними точковими значеннями показів трикомпонентного динамометра

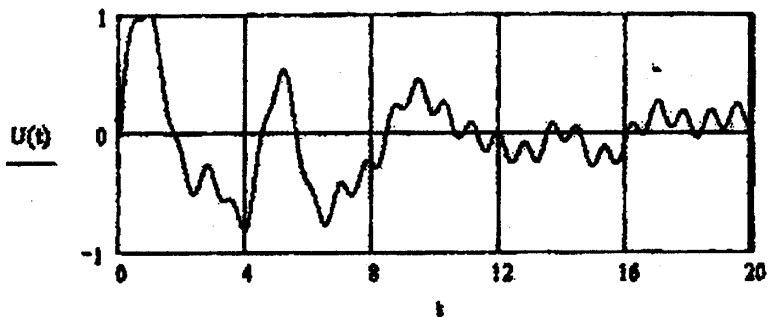


Рис. 8.22. Згладжена шляхом інтерполяції кубічними сплайнами експериментально визначена залежність показів динамометра від часу

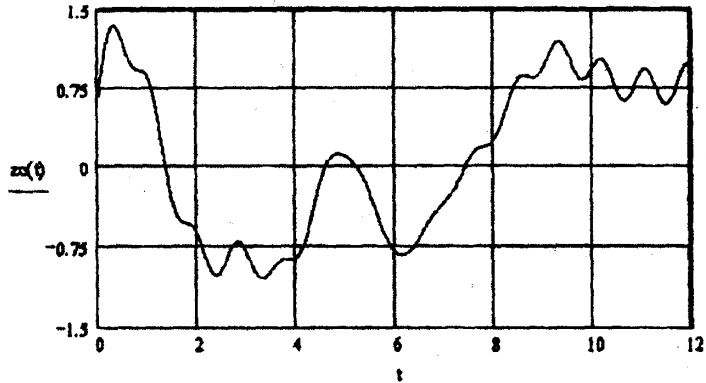


Рис. 8.23. Переміщення стола верстата знайдене обробкою масиву експериментальних даних, здійснених за допомогою трикомпонентного динамометра

Довгоперіодичні складові коливань складають 7,5 мс (моделювання) і 9 мс (експеримент). Середньоперіодичні складові, одержані при моделюванні, складають приблизно 2,4 мс, а експериментальні дані дають значення складової приблизно 3,0 мс.

Короткоперіодичні складові, одержані розрахунком, складають приблизно 0,7 мс, а експериментальні дані дають приблизно 0,9 мс.

Таким чином, розходження абсолютних значень визначення періодів складових коливань не перевищує 0,2..1,5 мс, що є задовільним при моделюванні складних динамічних систем.

Порівняння результатів розрахунків із експериментальними даними підтверджує адекватність математичної моделі динамічних процесів, що мають місце в системі стола і можливість її практичного використання.



### 8.3. Визначення динамічних переміщень фрези під дією сил різання загального виду

Динамічні переміщення фрези обумовлені взаємодією сил інерції пружних та дисипативних сил в динамічній системі шпинделя. Фреза представляє собою масивне тіло обертання.

Маса фрези є сумірною із масою шпинделя. Тому для аналізу динамічних переміщень фрези вибрана статично невизначена пружна система шпинделя із зосередженою масою на кінцевій частині шпинделя.

Динамічні переміщення шпинделя, які є суттєвими для аналізу переміщень фрези, характеризуються числом ступенів вільності (шість).

На процес обробки впливають поперечні переміщення фрези  $X_d$ ,  $Y_d$  в напрямку осей  $X$ ,  $Y$ , вертикальні переміщення фрези  $Z_d$ , поперечні кутові переміщення фрези  $\theta_y$ ,  $\theta_x$  та крутильні переміщення фрези  $\theta_z$  (рис. 8.24).

Загалом сили інерції в динамічній системі шпиндель – інструмент є значно меншими за сили пружності та дисипативні сили. Тому для їх аналізу використані методи теоретичної механіки, що базуються на заміні динамічних сил їх статичними аналогами (методи квазістатистики). При цьому враховуються особливості статично невизначеної пружної системи шпинделя, зокрема випадкових змін її жорсткісних параметрів (див. розділ 7).

Особливості побудови математичної моделі динамічних переміщень шпинделя розглянемо для розрахункової схеми поперечних і поперечно-кутових коливань фрези в площині  $XOZ$  (рис. 8.24, *a*).

Зосереджена маса  $m_x$  розміщена на кінцевій частині шпинделя (точка  $D$ ).

Зосереджена маса представляє собою масу фрези, приведену до точки  $D$ , і масу шпинделя, також приведену до точки  $D$ .

При коливаннях шпинделя виникають сили інерції, які залежать від прискорення точки  $D$ . В динаміці виникають динамічні сили опору, які враховуються коефіцієнтом  $v_x$ .

Згідно з принципом Даламбера, система шпиндель – інструмент буде перебувати в рівновазі, якщо до статичних сил додати сили інерції. Для реалізації принципу Даламбера стосовно коливань в площині  $XOZ$  розроблено відповідний алгоритм (рис. 8.25).

Основою алгоритму є блок розрахунку поперечних та кутових переміщень шпинделя як статично невизначеної системи. Даний блок розраховує переміщення шпинделя в залежності від зусилля і крутного моменту, що діють на кінцеву частину шпинделя. Структура блоку і його математична модель розроблені вище (див. рис. 8.9).

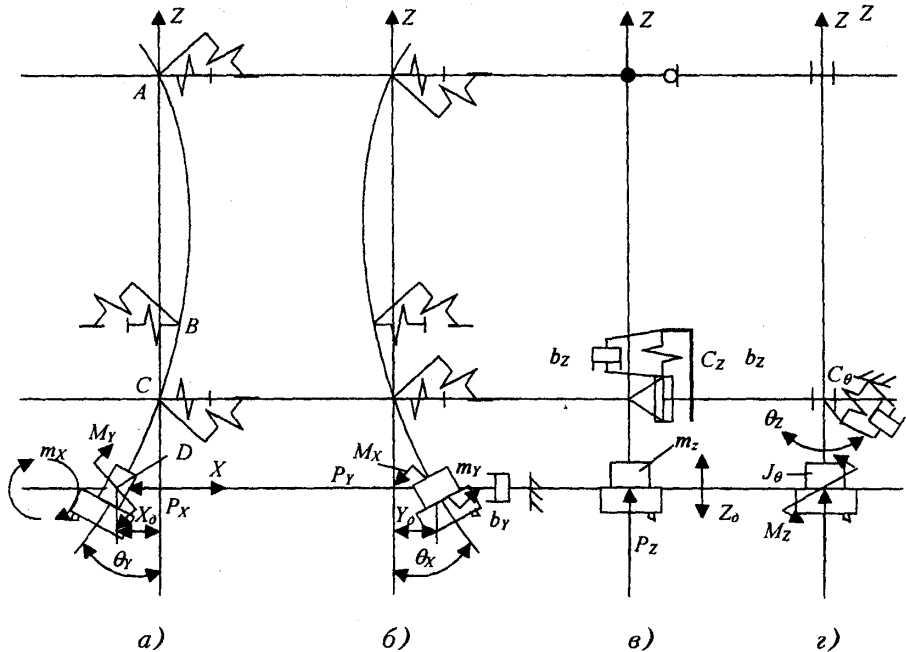


Рис. 8.24. Суттєві ступені вільності фрези, які враховуються при аналізі її динамічних переміщень під дією нестационарних сил різання: а – поперечні та поперечно-кутові переміщення шпинделя як статично невизначеної системи в площині осей  $XOZ$ ; б – поперечні та кутові переміщення фрези в площині осей  $YOZ$ ; в – вертикальні переміщення фрези; г – крутильні переміщення фрези відносно усталеного обертального руху відносно осі шпинделя

На виході блока обчислюється значення переміщення  $X_d$  кінцевої частини шпинделя.

За даним переміщенням як функції часу шляхом диференціювання знаходиться швидкість поперечного переміщення  $\dot{X}_d$  кінцевої частини шпинделя. Дисипативна сила, приведена до кінцевої частини шпинделя, буде одержана в блоці множення на дисипативний коефіцієнт  $v_x$ .

Для одержання величини прискорення кінцевої частини шпинделя використовується блок, який здійснює знаходження похідної швидкості. Одержання значення прискорення використовується для розрахунку поточної сили інерції. Це здійснюється блоком множення на приведену масу  $m_x$ .

Поперечна сила, що діє на шпиндель, знаходиться за допомогою блока суматора як результуюча сил різання, дисипативної та інерційної.

Для відпрацювання алгоритму і розробки структурної моделі динамічних переміщень шпинделя розроблена спрощена математична модель (рис. 8.26), яка

не враховує дисипативних сил, а враховує лише сили інерції. Розрахунки, одержані для даної моделі, порівнюються із розрахунками статичних переміщень кінцевої частини шпинделя. Основою спрощеної математичної моделі є блок Subsystem.

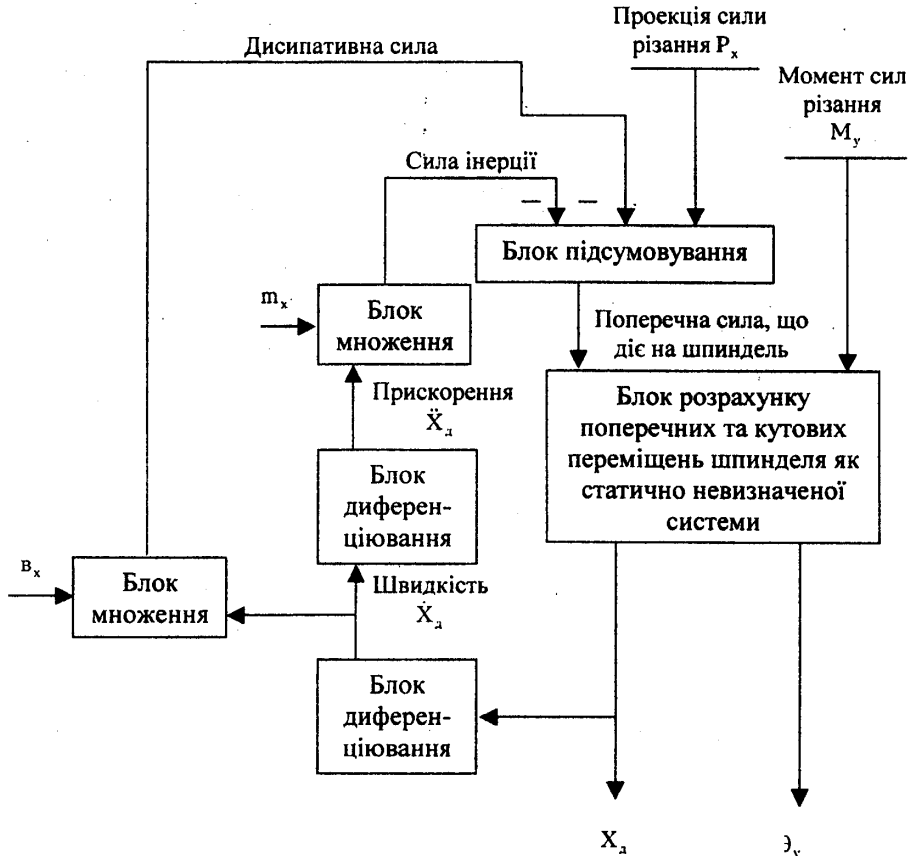


Рис. 8.25. Блок-схема алгоритму розрахунку динамічних переміщень шпинделя в площині XOZ

Він здійснює розрахунок поперечних і поперечно-кутових переміщень кінцевої частини шпинделя.

Спрощена математична модель (рис. 8.26) здійснює розрахунки переміщень при ступінчастій зміні зусилля різання, яке задається блоком Step. Блоки диференціювання Derivative здійснюють розрахунок прискорення кінцевої частини шпинделя.

Результати розрахунків статичних і динамічних переміщень шпинделя за спрощеною моделлю наведені на рис. 8.27 та 8.28.

Статичні поперечні переміщення шпинделя відповідають ступінчастій зміні сили різання (рис. 8.27, а). На графіку статичного переміщення просте-

жуються випадкові зміни положення шпинделя, обумовлені випадковими змінами параметрів шпиндельних опор.

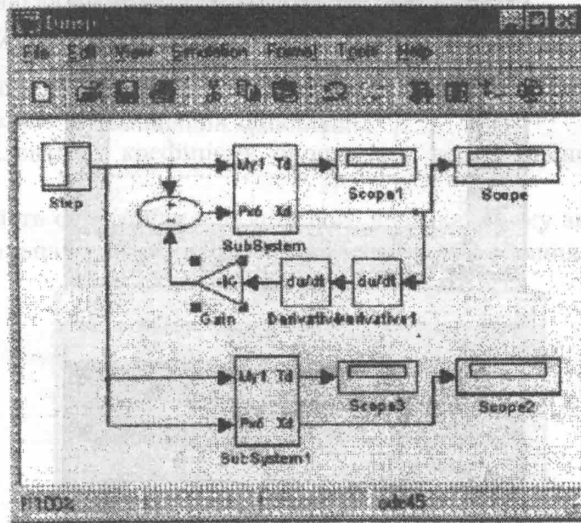


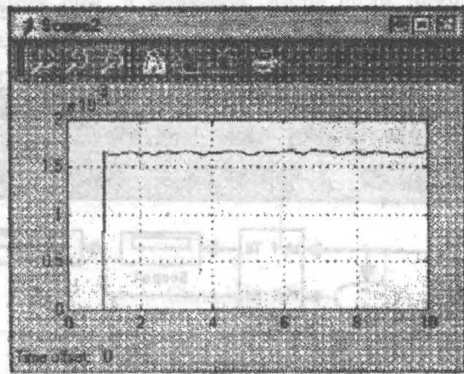
Рис. 8.26. Спрощена порівняльна математична модель, яка здійснює розрахунки статичних переміщень кінцевої частини шпинделя і переміщень із врахуванням сил інерції

Наявність сил інерції призводить до якісних змін закону переміщення шпинделя. На графіку переміщень (рис. 8.27, б), простежується коливальний процес незначної амплітуди, що складає 15 %. Період коливань складає приблизно 1 мс. Коливання швидко згасають, що пояснюється значними втратами у статично невизначеній пружній системі шпинделя. Аналогічний вигляд мають розрахункові залежності поперечно-кутових переміщень кінцевої частини шпинделя (рис. 8.28). Статичні переміщення відповідають ступінчастому закону із незначними випадковими функціями (див. рис. 8.28, а).

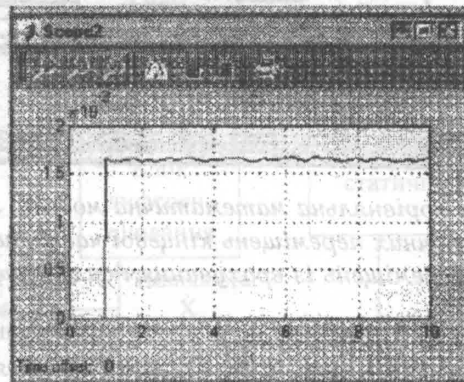
Динамічні поперечно-кутові переміщення мають коливальну складову значної амплітуди (до 50 %).

Поперечно-кутові коливання фрези, обумовлені силами інерції, є короткоперіодичними і затухають протягом 1..2 мс.

Наявність дисипації енергії призводить до згладжування коливальних процесів у динамічній системі верстата. Врахування дисипативних сил реалізоване в математичній моделі поперечних переміщень шпинделя (рис. 8.29, б). Дана модель включає дві лінії зворотного зв'язку у відповідності з алгоритмом, наведеним на рис. 8.29. Для перевірки роботи моделі проведений розрахунок перехідного процесу шпинделя. При цьому на вхід моделі подається вхідний сигнал у вигляді ступінчастої зміни сили різання (рис. 8.29, а).



a)



б)

Рис. 8.27. Розрахунок статичних (а) і динамічних (б) поперечних переміщень кінцевої частини шпинделя за спрощеною моделлю, що враховує лише сили інерції при ступінчастій зміні проекції сили різання

Результати розрахунку перехідних характеристик переміщення шпинделя наведені на рис. 8.30.

Із порівняння характеристик, одержаних із врахуванням дисипації енергії, (рис. 8.29) та характеристик без врахування втрат енергії (рис. 8.30) впливає, що дисипація енергії призводить до суттєвого згладжування амплітуд коливальних процесів.

Одержана математична модель дає змогу визначити динамічні поперечні та поперечно-кутові переміщення шпинделя при його коливаннях в площинах XOZ та YOZ (див. рис. 8.24, а, б).

Динамічні переміщення шпинделя у вертикальному напрямку (див. рис. 8.24, в) та його поперечно-кутові коливання відносно осі обертання (див. рис. 8.24, з) розраховані за одномасовою динамічною моделлю. Одно-

масова динамічна модель співпадає і моделює переміщення стола (див. рис. 6,2 б). Відповідно до даної моделі, рівняння вертикальних переміщень шпинделя має вигляд:

$$m_z \ddot{Z}_d + v_z \dot{Z}_d + C_z Z_d = P_z, \quad (8.38)$$

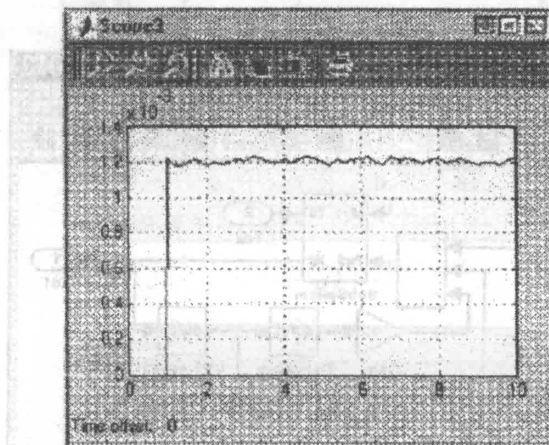
де  $m_z$  – маса шпинделя і фрези;

$Z_d$  – вертикальне переміщення шпинделя;

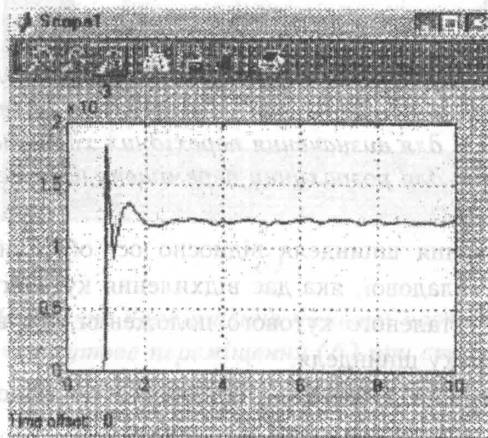
$v_z$  – еквівалентний коефіцієнт опору при вертикальних переміщеннях шпинделя;

$C_z$  – жорсткість опор шпинделя при його вертикальному зміщенні;

$P_z$  – вертикальна складова головного вектора сили різання.

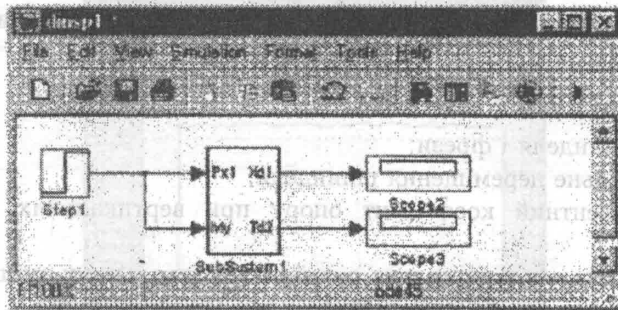


a)

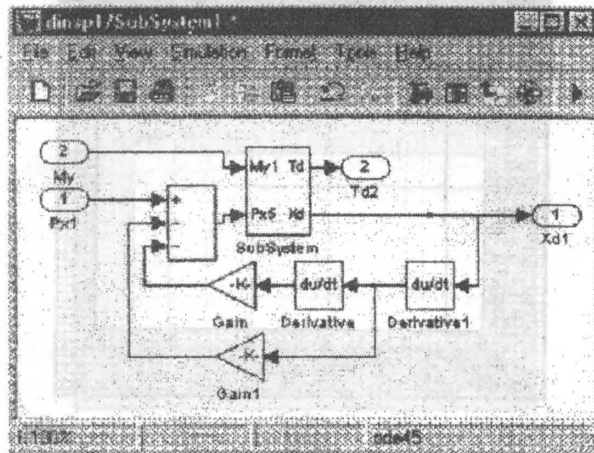


б)

Рис. 8.28. Розрахунок статичних (а) та динамічних (б) поперечно-кутових переміщень кінцевої частини шпинделя за спрощеною математичною моделлю



a)



б)

Рис. 8.29. Математична модель для розрахунку переміщень кінцевої частини шпинделя у відповідності з алгоритмом, наведеним на рис. 6: 3.25  
 а – блок-схема моделі для визначення перехідних характеристик шпинделя;  
 б – структура блока для розрахунку переміщень шпинделя в площині XOZ

Крутильні коливання шпинделя відносно осі обертання визначені у вигляді їх динамічної складової, яка дає відхилення кутового положення шпинделя відносно його усталеного кутового положення, що відповідає рівномірному обертальному руху шпинделя.

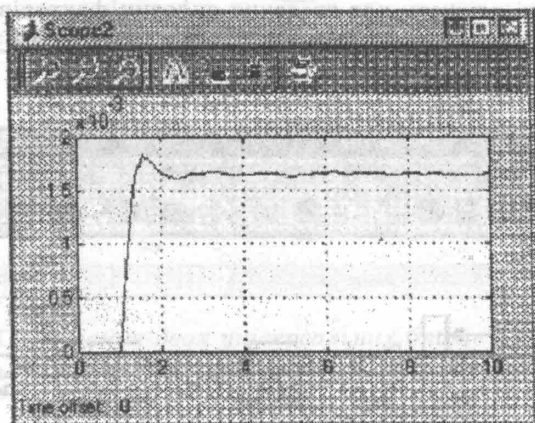
Крутильні коливання шпинделя, відповідно до одномасової динамічної моделі, описуються диференціальним рівнянням:

$$J_{\theta} \ddot{\theta}_z + v_{\theta} \dot{\theta}_z + C_{\theta} \theta_z = M_z, \quad (8.39)$$

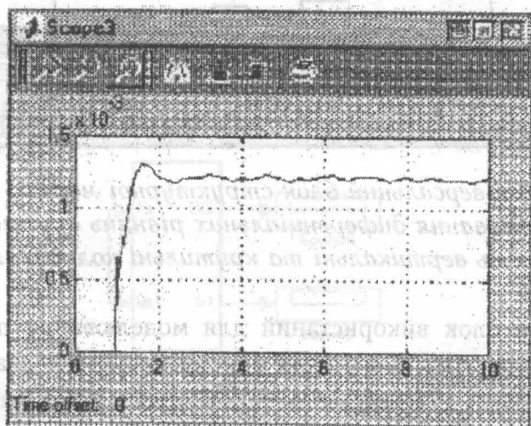
де  $J_{\theta}$  – момент інерції шпинделя відносно осі обертання;

$\theta_z$  – динамічна складова кута повороту шпинделя;

$B_0$  – коефіцієнт опору при крутильних коливаннях шпинделя;  
 $C_0$  – еквівалентна крутильна жорсткість привода головного руху;  
 $M_z$  – складова головного моменту сил різання, яка відповідає проекції головного моменту на вісь Z.



a)



б)

Рис. 8.30. Поперечне переміщення кінцевої частини шпинделя (а) та поперечно-кутове переміщення (б) при ступінчастій зміні навантаження на шпиндель

Рівняння (8.38) та (8.39) є однотиповими рівняннями другого порядку, які співпадають із визначеним раніше загальним рівнянням переміщення стола у вигляді (8.27), якщо в ньому покласти  $d = 0$ .

Відповідно, для розв'язку рівнянь (8.38) та (8.39) використане перетво-



рення рівняння (8.27) у вигляді залежностей (8.28)–(8.30) та розроблений алгоритм розв'язку (див. рис. 8.4). Відповідно до даного алгоритму, використана розроблена структурна математична модель, наведена на рис. 8.5. В цій моделі ліквідовано вхід, який відповідає параметру  $d$  ( $d = 0$ ), і вона приведена до вигляду універсального блока (рис. 8.31). Універсальний блок має входи  $P$ ,  $v$  і  $c$ , які служать для введення силових факторів та задання дисипативних і жорсткісних коефіцієнтів рівнянь (8.38) та (8.39). Інерційні коефіцієнти задаються блоком-підсилювачем Gain.

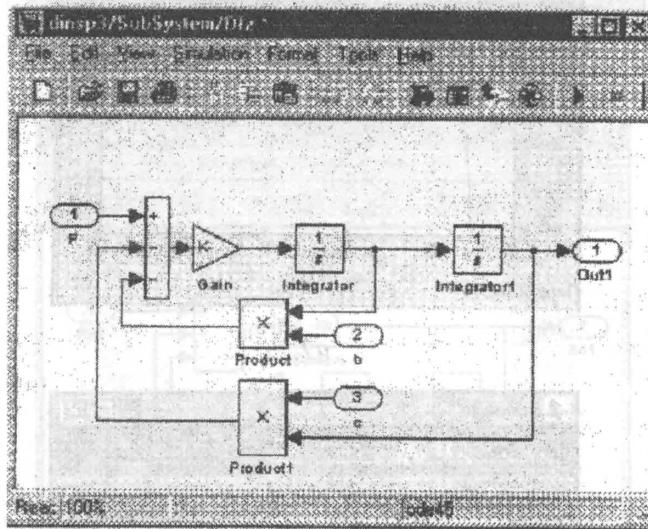


Рис. 8.31. Універсальний блок структурної моделі, призначений для інтегрування диференціальних рівнянь другого порядку, які описують вертикальні та крутильні коливання шпинделя

Універсальний блок використаний для моделювання двох складових переміщень шпинделя. Для цього блок використовується два рази в підсистемі (рис. 8.32). Входами підсистеми є силові фактори у вигляді вертикальної складової головного вектора сил різання та складової головного моменту сил різання. Виходом підсистеми є вертикальні та кутові (крутильні) переміщення шпинделя.

Входом підсистеми є розраховані значення вертикальних і крутильних переміщень шпинделя в динаміці.

Для перевірки роботи підсистеми знайдені її перехідні характеристики. Для цього на вхід підсистеми поданий ступінчатий вхідний сигнал, який відповідає ступінчастій зміні сили різання та ступінчастій зміні крутного моменту сил різання.

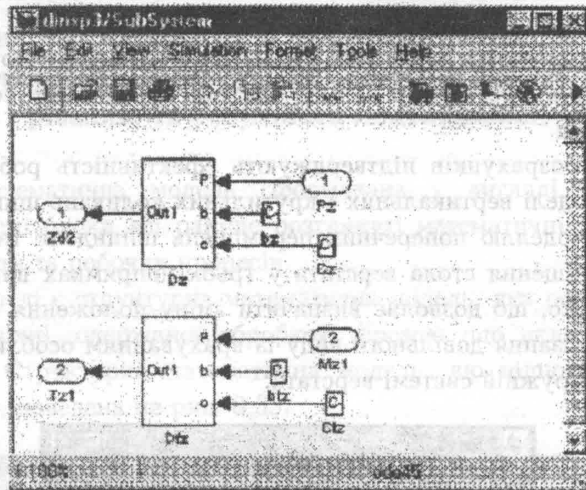


Рис. 8.32. Об'єднання двох універсальних блоків для розрахунку вертикальних ( $Zd2$ ) та крутильних коливань шпинделя ( $Tz1$ )

Сформована допоміжна математична модель для розрахунку перехідних характеристик (рис. 8.33).

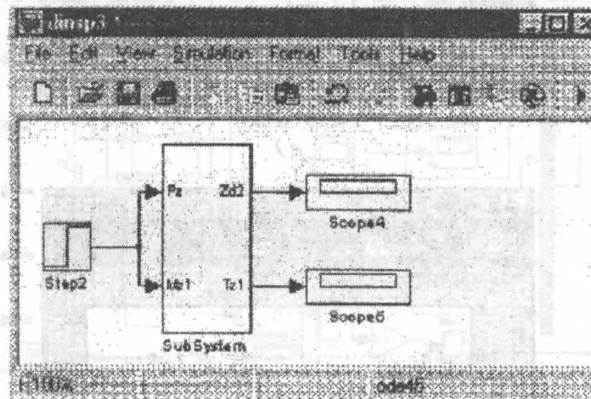


Рис. 8.33. Допоміжна математична модель для розрахунку перехідних характеристик шпинделя, які відповідають його вертикальним і крутильним коливанням під дією ступінчастої зміни сили різання і ступінчатого моменту сили різання

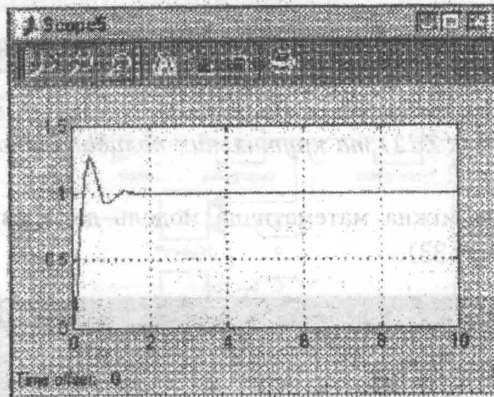
Використання допоміжної моделі дало можливість розрахувати вертикальні та крутильні коливання шпинделя під дією ступінчастої зміни сили різання і крутного моменту (рис. 8.34).

Із аналізу результатів розрахунків випливає, що переміщення шпинделя у вертикальному напрямку затухали приблизно за 1 мс. Частота коливань

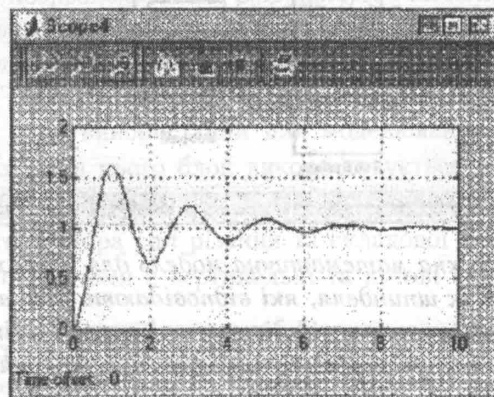
складала приблизно 1200 Гц.

Крутильні коливання шпинделя характеризуються значно більшою тривалістю і затухають протягом 6...8 мс. Частота крутильних коливань складає приблизно 560 Гц.

Результати розрахунків підтверджують ефективність роботи розробленої математичної моделі вертикальних і крутильних коливань шпинделя. Разом із математичною моделлю поперечних переміщень шпинделя та математичними моделями переміщення стола верстата у трьох напрямках вона утворює програмний комплекс, що дозволяє визначити зміну положення фрези і заготовки при дії сил різання довільного виду із врахуванням особливостей динамічних процесів у пружній системі верстата.



a)



б)

Рис. 8.34. Результати розрахунків вертикальних (а) і крутильних (б) переміщень шпинделя під дією ступінчастої зміни сили різання та ступінчастої зміни крутного моменту

### 8.4. Загальна математична модель процесу механічної обробки поверхні на фрезерному верстаті, оснащеному фрезою косокутного різання, та результати моделювання

Загальна математична модель сформована у вигляді структури, що включає як окремі блоки всі раніше розглянуті математичні моделі окремих підсистем верстата та робочих процесів.

Основою моделі є структурна математична модель, яка розраховує форму обробленої поверхні, одержаної обробкою фрезою, що включає лише один різальний ніж. Структурна математична модель, що відповідає чорновому ножу (ніж № 8), наведена на рис. 8.35.

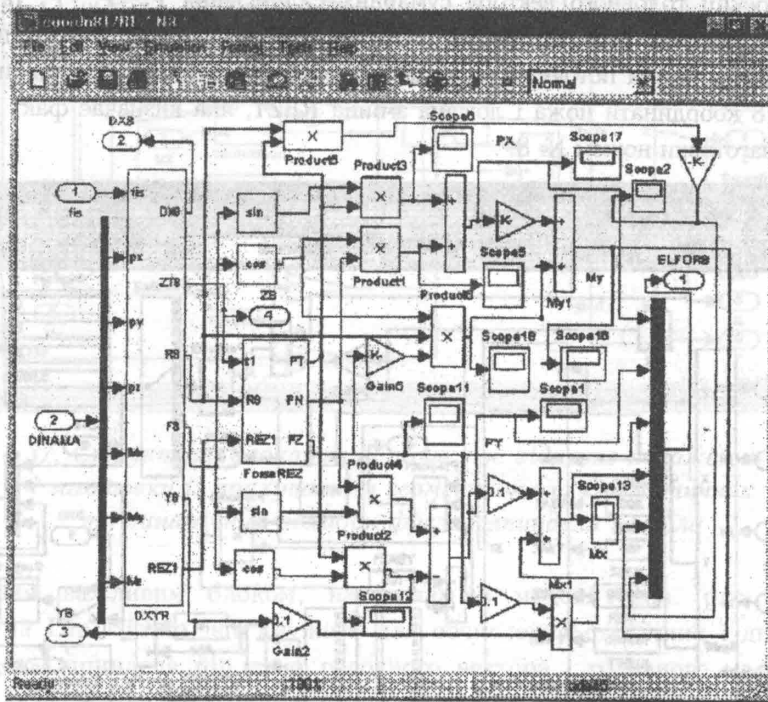


Рис. 8.35. Структурна математична модель, призначена для моделювання процесу обробки заготовки фрезою, що має лише один чорновий ніж (ніж № 8)

Входом моделі є шестивимірний вектор (DINAMA), який об'єднує три проекції головного вектора сил різання, що діють на шпиндель,  $P_x, P_y, P_z$  та три складові головного моменту сил різання  $M_x, M_y, M_z$ .

Додатковим входом моделі є кут повороту шпинделя (fis).

Виходами моделі є шестивимірний вектор силових факторів (ELFORS), які

діють на шпindel і стіл з причини дії сил різання, що виникають на робочій поверхні ножа № 8. Додатковими виходами моделі є розраховані значення координат відносного положення ножа і заготовки. Одержані зокрема поточні значення врізання ножа в заготовку в напрямку подачі (вхід DX8), глибина різання (Z8) та поперечне переміщення ножа відносно заготовки (Y8). Система координат відповідає координатним осям, показаним раніше (див. рис. 7.32).

Модель (див. рис. 8.35) має два основних блоки. Блок ForseREZ визначає три складові сили різання, що виникають на різальних поверхнях ножа № 8. Даний блок описаний раніше (див. рис. 5.35). Другий основний блок моделі (DXYR) призначений для обчислення взаємного положення різального ножа № 8 і заготовки. Структура даного блока показана на рис. 8.36. На вхід блока подаються поточні значення змінних. Зокрема вводиться кут повороту шпинделя (fis), проєкції головного вектора сумарних сил різання  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$  та проєкції головного моменту сил різання  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ . На вихід блока DXYR подаються обчислені значення поточних координат ножа DX8, Y8 та ZT8, радіальна R8 та кутова F8 координати ножа і логічна змінна REZ1, яка визначає факт наявності різання заготовки ножом № 8.

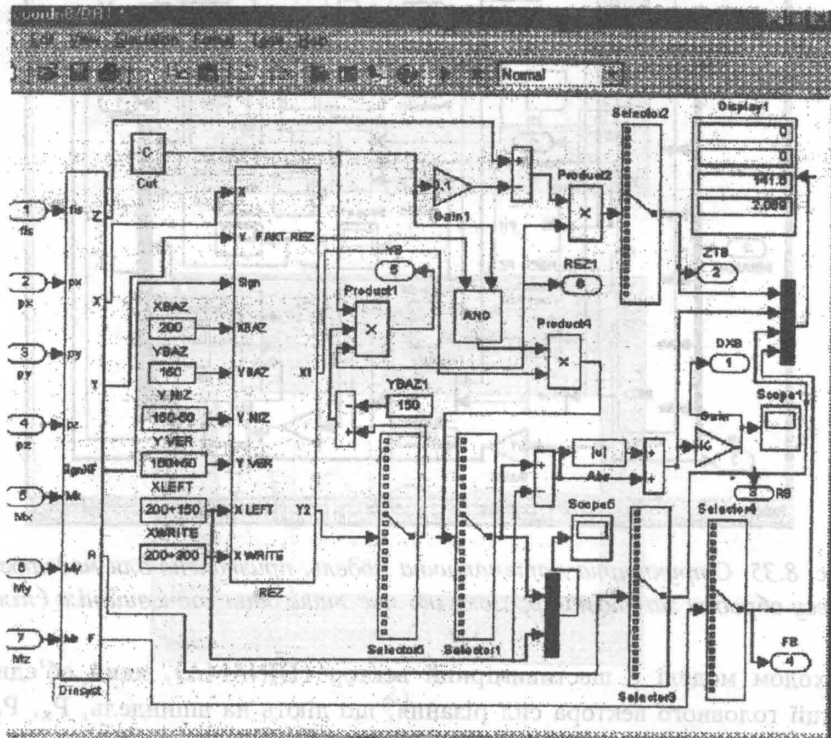


Рис. 8.36. Структура блока DXYR, призначеного для обчислення взаємного положення різального ножа № 8 і заготовки

В даному блоці наявна основна підсистема (Dinsyst), яка обчислює відносне положення фрези і заготовки та визначає ті ножі, які знаходяться з боку заготовки і можуть прийняти участь у різанні.

Структура блока SubSystem розкрита на рис. 8.37. Він включає підсистему (DinDefStol) для обчислення абсолютного положення стола верстата із врахуванням динамічних переміщень стола. Дана підсистема розглянута раніше (див. рис. 6.9 та 6.10).

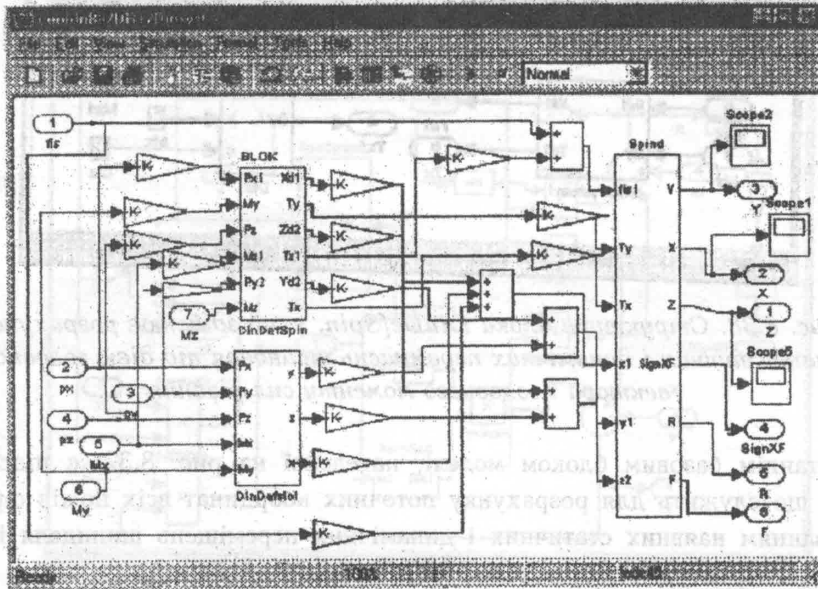


Рис. 8.37. Структура блока, який обчислює відносне положення фрези і заготовки із врахуванням геометричних, кінематичних та динамічних похибок фрези, шпинделя і стола

Другим важливим блоком, наведеним в моделі (див. рис. 8.37), є підсистема DinDefSpin, що служить для обчислення статичних і динамічних переміщень шпинделя під дією головного вектора і головного моменту сил різання. Структура блока показана на рис. 8.38. Вона включає чотири підсистеми. Підсистеми Dz та Dtz обчислюють поточні вертикальні Zd2 та крутильні Tz1 переміщення шпинделя в динаміці. Ці блоки точно відповідають розглянутим раніше структурним моделям підсистеми шпинделя (див. рис. 6.32). Блоки SubSystem і SubSystem1 є однаковими і здійснюють обчислення поперечних і поперечно-кутових переміщень шпинделя в площинах XOZ та YOZ відповідно. Дані блоки точно відповідають розглянутій раніше математичній моделі деформацій шпинделя в динаміці, показаній на рис. 8.29.

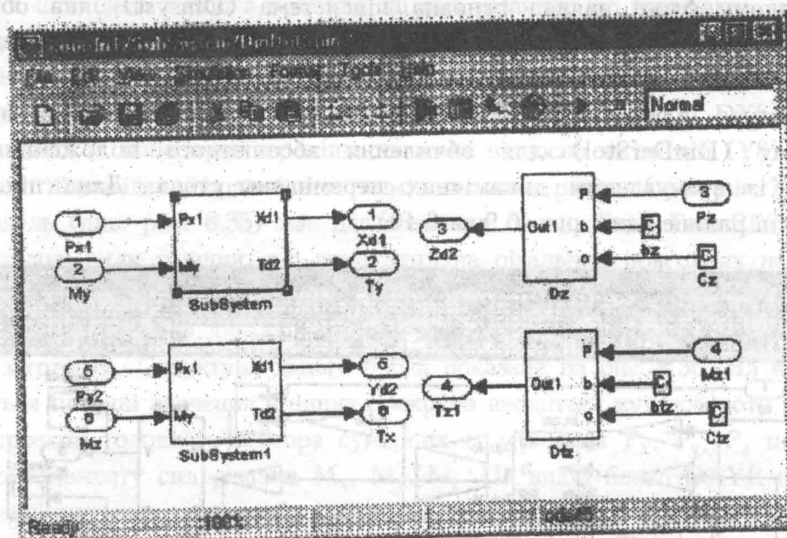


Рис. 8.38. Структура блока *DinDefSpin*, який здійснює розрахунок статистичних і динамічних переміщень шпинделя під дією головного вектора і головного моменту сил різання

Останнім базовим блоком моделі, наведеної на рис. 8.37, є підсистема Spind, що служить для розрахунку поточних координат всіх ножів фрези із врахуванням наявних статичних і динамічних переміщень шпинделя і стола верстата. Структура даного блока показана на рис. 8.39.

В моделі, наведеній на рис. 8.39, основною обчислювальною процедурою є блок SubSystem, який здійснює обчислення точних координат ножів із врахуванням наявних похибок геометрії розташування ножів фрези відносно осі шпинделя. Структура даного блока відповідає розглянутій раніше (див. рис. 6.30) математичній моделі.

Розрахунок поточних координат кожного ножа, який виконується за допомогою блока, наведеного на рис. 8.39, враховує радіальне биття передньої та задньої опор шпинделя. Для цього служить блок SpinRad, який задає радіальне биття шпинделя в функції кута його повороту. Блок SpinRad відповідає розробленій раніше математичній моделі биття шпинделя (див. рис. 6.22).

Одержане розрахунком значення радіального биття із виходу Out1 блока SpinRad (див. рис. 8.39), помножене на  $\cos \varphi$  та  $\sin \varphi$  ( $\varphi$  – кут повороту шпинделя), дає складові переміщення осі шпинделя в напрямку осей X і Y. Інші складові, обумовлені поточним кутовим положенням кожного ножа, розраховуються модулями Product і Product1. Таким чином, на виході

суматорів одержуються поточні координати  $X$  і  $Y$  кожного з ножів фрези. Вертикальні переміщення  $Z$  кожного з ножів формуються суматором із чотирьох складових. Зокрема  $z_1$  та  $z_2$  враховують висоту розташування ножа відносно базової поверхні фрези та зміщення по вертикалі шпинделя відносно стола. Дві інші складові одержані в блоках множення Product2 і Product3 як зміни висоти ножа при повороті фрези відносно осей  $X$  і  $Y$  на кути  $T_x$  та  $T_y$ .

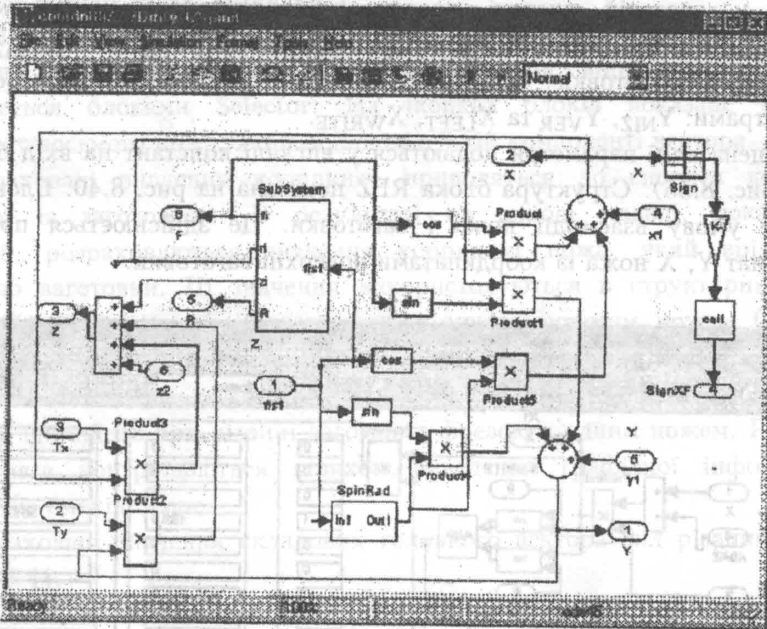


Рис. 8.39. Структура моделі, призначена для розрахунку поточних координат кожного із 22 ножів фрези із врахуванням наявного статичного і динамічного переміщення шпинделя та стола

Модель, наведена на рис. 8.39, також включає ланцюжок для визначення логічної змінної (SignXF), яка визначає ножі фрези, що знаходяться з боку заготовки. Якщо якийсь з ножів знаходиться між віссю шпинделя та заготовкою, то змінна SignXF дорівнює 1. Якщо ніж знаходиться з протилежної сторони, значення змінної дорівнює нулю.

Як показано раніше, блоки, наведені на рис. 8.39 та 8.38, об'єднані в одну структурну модель (див. рис. 8.37). В цій моделі також наявні блоки-підсилювачі (показані трикутниками), які служать для узгодження розмірних параметрів різних блоків. Крім того, дана модель включає ряд блоків Score, що служать для проміжного контролю при відпрацюванні моделі.

Блок, показаний на рис. 8.37, входить в структурну модель, призначену для обчислення взаємного положення різального ножа і заготовки (див.



рис. 8.36). Дана модель включає також блок REZ, який призначений для розрахунку координат ножа на поверхні заготовки.

Система координат, зв'язана із заготовкою, показана раніше (див. рис. 5.33). Система координат в плані має дві осі  $Y$ ,  $X$  із центром в точці  $O_A$ . Введення такої системи координат дозволяє виключити від'ємні значення координат ножів і спростити логічні умови розрахунку. Центр обертання фрези у введеної системі координат характеризується переміщеннями шпинделя  $X_P$ ,  $Y_P$  і наявністю адитивних складових координат  $X_{BAZ}$  та  $Y_{BAZ}$ . Положення заготовки в даній системі координат характеризується параметрами:  $Y_{NIZ}$ ,  $Y_{VER}$  та  $X_{LEFT}$ ,  $X_{WRITE}$ .

Вищеназвані параметри подаються у вигляді констант на вхід блока REZ (див. рис. 8.36). Структура блока REZ показана на рис. 8.40. Блок визначає логічну умову взаємодії ножа і заготовки. Це здійснюється порівнянням координат  $Y$ ,  $X$  ножа із координатами поверхні заготовки.

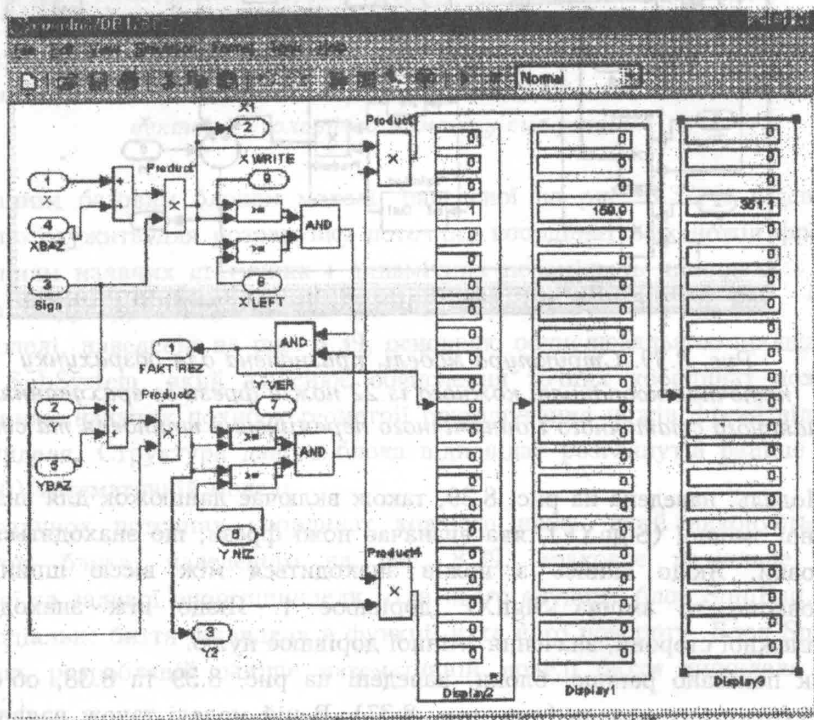


Рис. 8.40. Структура блока REZ, призначеного для визначення координат ножів, які безпосередньо взаємодіють із заготовкою

Логічна умова подана у вигляді змінної ФАКТРЕЗ, яка дорівнює одиниці при наявності різання і нулю – при відсутності різання. Згідно цієї умови,

визначені координати ножів  $X$  і  $Y$ , які показані в оглядових вікнах блоків Display1 та Display2.

Логічна умова визначена для всіх 22 ножів. Для встановлення одного конкретного ножа служить додаткова векторна змінна, яка визначає номер ножа. Ця змінна реалізована у вигляді векторної константи, всі складові якої, крім складової, що відповідає номеру ножа, дорівнюють нулю. Складова, що відповідає номеру ножа, дорівнює 1.

Дана константа задана в блоці Cut (див. рис. 8.36). Виділення із векторних значень координат  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  ножів відповідних компонент здійснюється блоками Selector. На іконках блоків показане виділення координат восьмого ножа, який відповідає 9-тій компоненті вектора.

Розраховані значення координат приводяться до системи координат, зв'язаної із заготовкою. В результаті на виході моделі, показаної на рис. 8.36, розраховуються значення координат ножа, який врізається в поверхню заготовки. Ці значення використовуються в структурній моделі, яка моделює процес обробки заготовки одним окремим ножом (в даному випадку ножом № 8) (див. рис. 8.35).

Модель обчислює складові головного вектора і головного моменту, що діють на шпиндель при різанні заготовки фрезою з одним ножом. Результати розрахунків контролюються шляхом виведення графічної інформації за допомогою блоків Score.

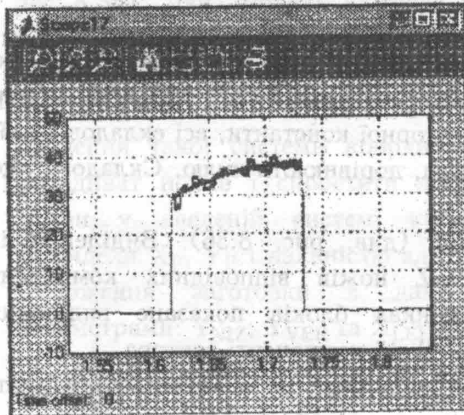
Розраховані значення складових головного вектора сил різання наведені на рис. 8.41.

Складові головного моменту сил різання, одержані при математичному моделюванні, показані на рис. 8.42.

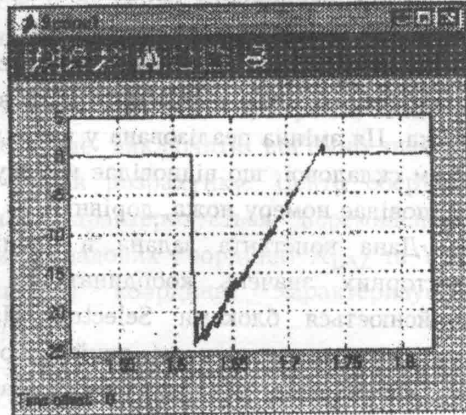
Результати математичного моделювання складових сил різання, одержаних при обробці заготовки фрезою, що має один ніж, порівнювалися з експериментальними даними. Встановлена адекватність моделі результатам експериментів.

Математичні моделі, призначені для розрахунку процесу обробки фрезою з одним ножом, узагальнені на випадок наявності комплектною фрези зі всіма ножами. Математична модель, наведена на рис. 8.35, трансформована до виду, який враховує змінність площі зрізуваного шару (рис. 8.43).

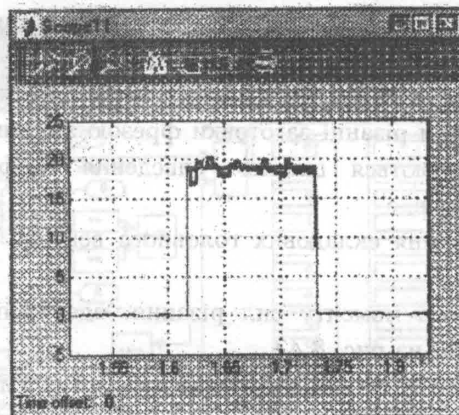
Зміна площі зрізуваного шару враховується двома параметрами: параметр TNOG задає товщину зрізуваного шару, а параметр SNOG – ширину зрізуваного шару, що відповідає поточній подачі на даний ніж фрези. Ці величини є змінними в часі і подаються на вхід моделі, наведеної на рис. 8.43, а потім використовуються в блоці ForseREZ, де безпосередньо обчислюються складові сили різання, що діє на даний ніж. Використовується модифікований у порівнянні з рис. 7.36 блок ForseREZ для обчислення проєкцій сили різання в системі координат, зв'язаній з рухомих ножом (рис. 8.44).



а)



б)

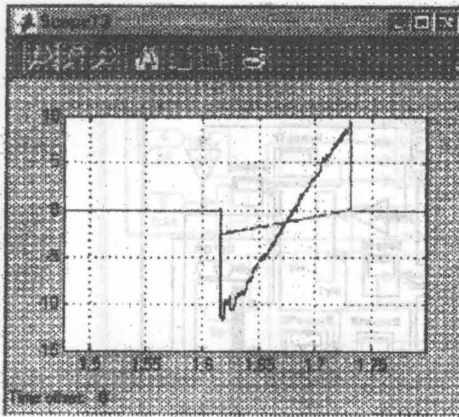


в)

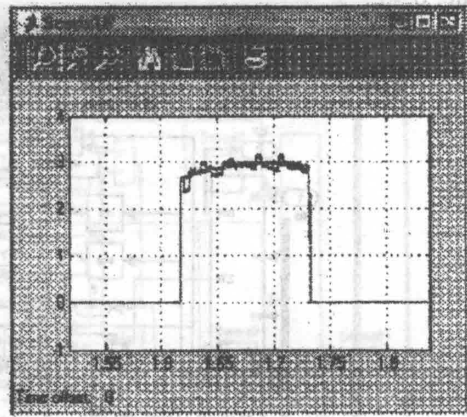
Рис. 8.41. Розраховані значення складових  $P_x$  (а),  $P_y$  (б),  $P_z$  (в) головного вектора сил різання, одержаних обробкою заготовки, що має один чорновий ніж (ніж № 8)

Модель, наведена на рис. 8.44, має змінні складові товщини TNOG і ширини (подачі на зуб) SNOG. В моделі, наведеній раніше (див. рис. 7.36), ці параметри прийняті постійними.

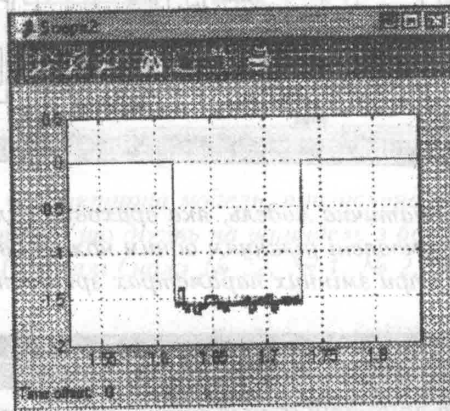
Структурні моделі типу наведеної на рис. 8.43 розроблені для кожного із 22 ножів фрези. Вони об'єднані в групи, що відповідають окремим логарифмічним спіралям, вказаним в табл. 3.2. Структурна модель, що визначає параметри різання чотирьох ножів (№ 22, № 1, № 2, № 3), об'єднаних у спіраль I, наведені на рис. 8.45.



а)



б)



в)

Рис. 8.42. Розраховані за допомогою моделі, зображеної на рис. 8.35, значення складових головного моменту сил різання при обробці фрезою, що має лише один чорновий ніж (ніж № 8)

Входами структурної моделі (рис. 8.45) є кут повороту шпинделя  $Spin$  та загальний вектор силових факторів  $DINAMA$ . Додатково в модель вводяться координати попереднього перед даною спіраллю ножа. Це – висота розташування ножа  $N4$  ( $Z4$ ) та його положення в напрямку  $X$  ( $DX4$ ). Виходом моделі є вектор силових факторів, які спричинені ножами даної спіралі  $DINAM I$  і координатами положення останнього ножа в спіралі  $Z22$  та  $DX22$ . Модель має чотири блоки  $REZN3$ ,  $REZN2$ ,  $REZN1$ ,  $REZN22$ , які обчислюють складові навантаження на шпиндель, що діють на нього з боку ножів № 3, № 2, № 1 та № 22 відповідно. Структура цих блоків аналогічна структурі, наведеної на

рис. 8.43.

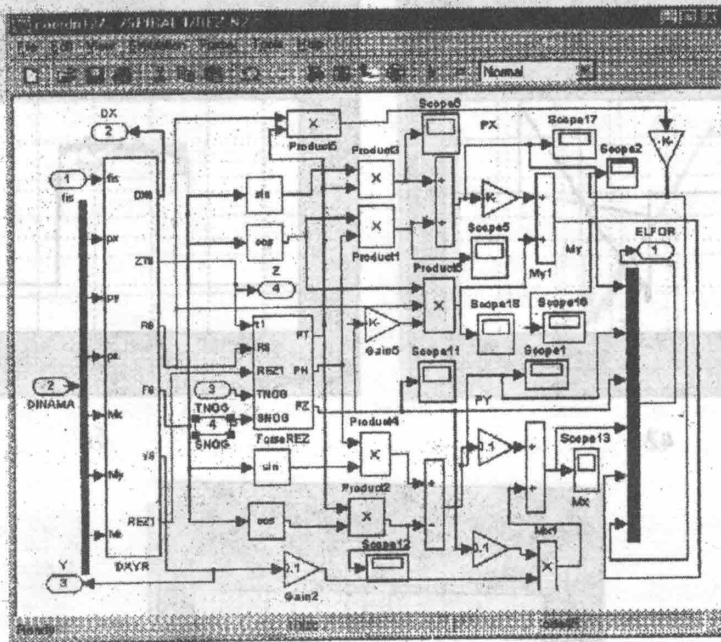


Рис. 8.43. Математична модель, яка враховує силові фактори процесу різання, обумовлені різанням одним ножом (в даному випадку ножом № 8) при змінних параметрах зрізуваного шару

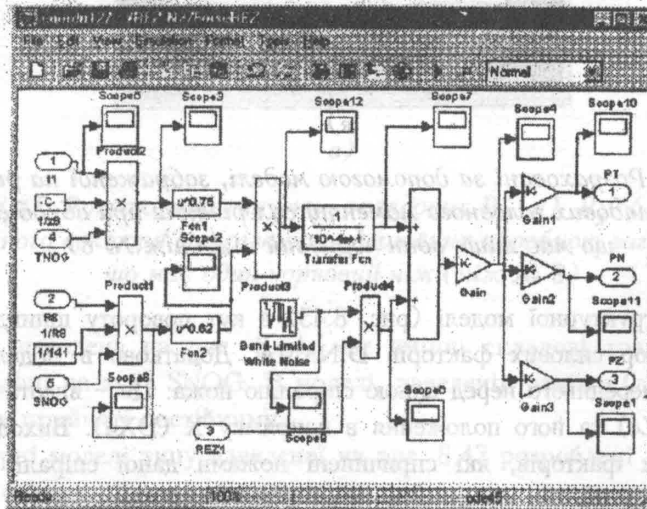


Рис. 8.44. Модифікована математична модель, призначена для розрахунку складових вектора сили різання, що діє на один ніж фрези при врахуванні зміни товщини зрізуваного шару і подачі

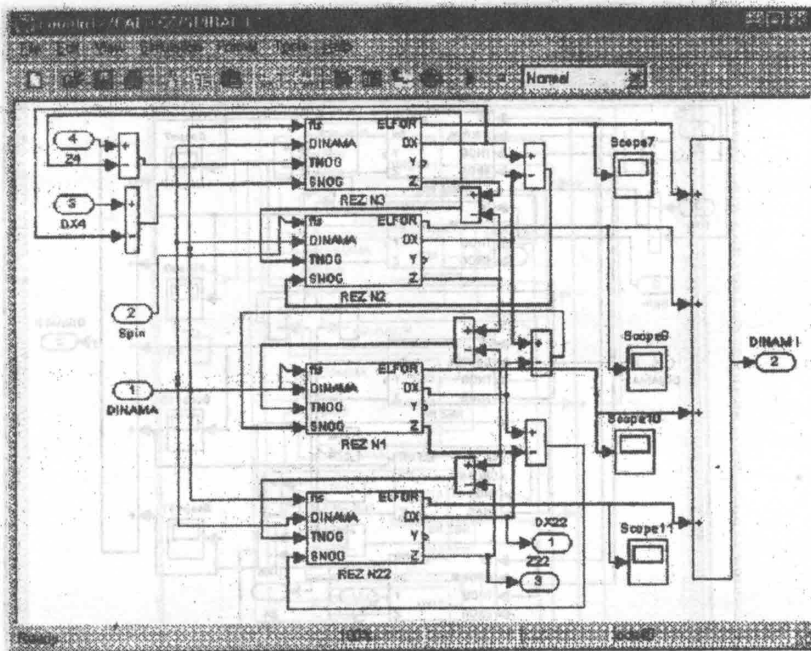


Рис. 8.45. Структурна модель, призначена для обчислення силових факторів, що діють на шпиндель з боку чотирьох ножів I спіралі (ножі № 22, № 1, № 2, № 3)

В моделі, наведеній на рис. 8.45, наявні суматори, що обчислюють різницю координат сусідніх ножів по горизонталі та по вертикалі. Ці різниці координат визначають глибину зрізаного шару і подачу на зуб для кожного окремого зуба, що об'єднані в спіраль I.

Аналогічний склад мають структурні моделі для визначення силових факторів інших спіралей.

Структурна модель спіралі II (рис. 8.46) включає п'ять блоків, які відповідають ножам № 4–8. Структура блока REZN8 точно співпадає із наведеною раніше моделлю (див. рис. 8.43).

Виходом моделі є силові фактори DINAM II, які діють на шпиндель з боку ножів, об'єднаних в спіраль II, а також переміщення чистового ножа (ніж № 4).

Всі п'ять структурних моделей, що відповідають п'яти групам ножів, об'єднані в загальну структурну математичну модель технологічної системи верстата (рис. 8.47). В даній моделі зображена сума силових факторів, що спричинені різанням кожного із 22 ножів. Одержане загальне значення складових головного вектора і головного моменту сил різання, що діють на шпиндель, подані по лінії зворотного зв'язку на вихід кожного блока моделі.

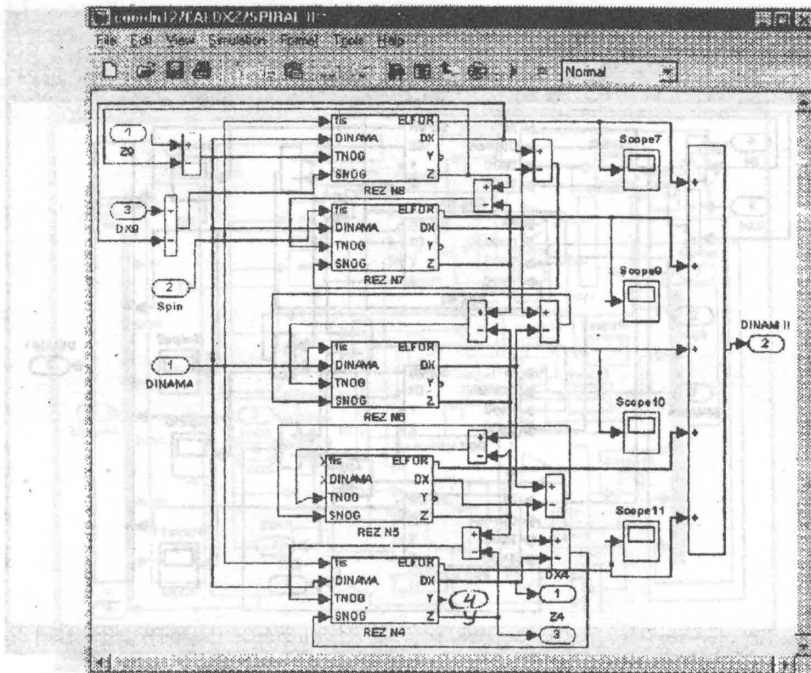


Рис. 8.46. Структурна модель для розрахунку складових силових факторів, що діють на шпиндель з боку ножів, об'єднаних в спіраль II

Для виконання математичного моделювання модель включена в блок, на виході якого поміщені засоби обробки, реєстрації та виведення результатів моделювання (рис. 8.48). Як засоби обробки і виведення результатів моделювання використані блоки виведення графічної інформації по трьох координатах X, Y, Z положення чистового ножа та стандартні засоби пакету MATLAB, призначені для обробки випадкових процесів.

Зокрема використано блоки для знаходження кореляційної функції випадкового процесу вертикального переміщення чистового ножа (AutoCorrelator). Знайдені також спектральна щільність потужності вертикального переміщення чистового ножа в часі та усереднене значення спектральної щільності потужності. Для цього використовуються спеціальні блоки Power Spectral Density та Averaging Power Spectral Density.

Процедура математичного моделювання здійснена за спеціальним планом, який моделює процес обробки заготовки в реальному масштабі часу. Послідовно моделюється періодичне врізання кожного з ножів у поверхню заготовки. Результати розрахунку переміщення чистового ножа відносно заготовки показані на рис. 8.49.

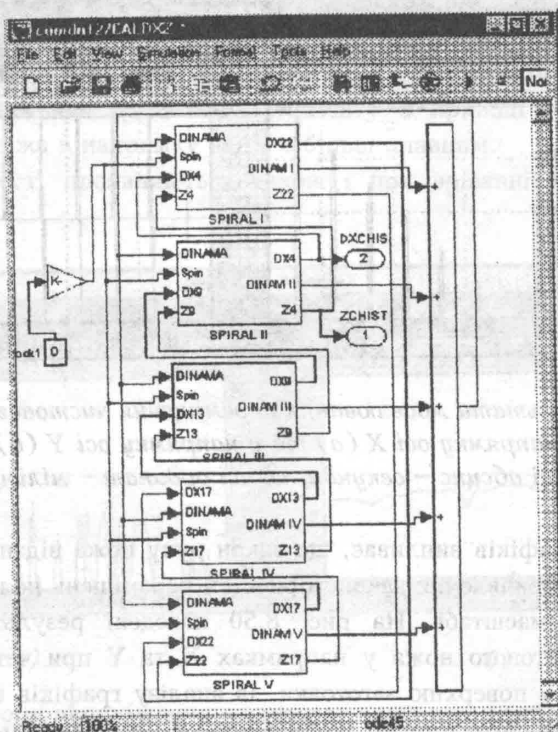


Рис. 8.47. Загальна структурна математична модель, призначена для розрахунку параметрів якості обробленої поверхні, технологічної системи верстата ГФ2171С6, оснащеного фрезою косокутного різання

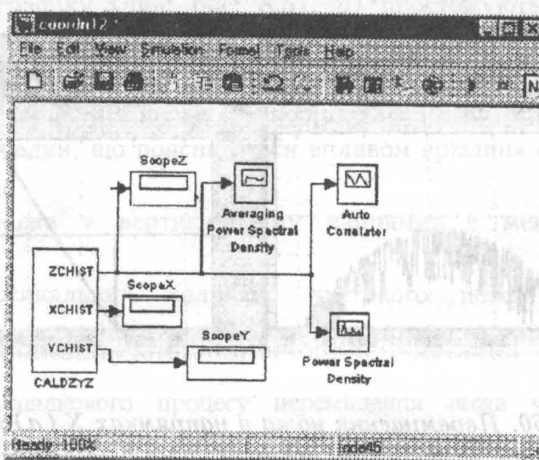


Рис. 8.48. Засоби обробки і виведення результатів математичного моделювання загальної математичної моделі технологічної системи верстата



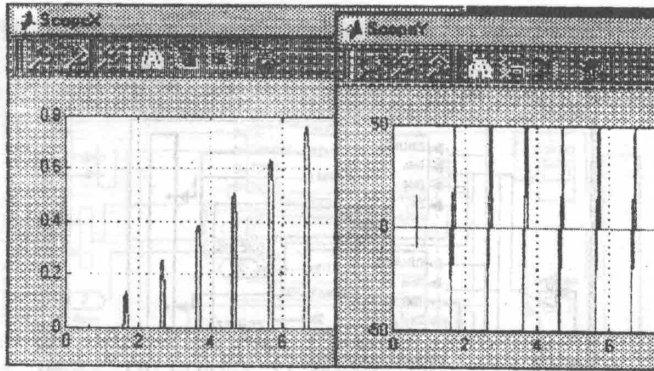


Рис. 8.49. Результати моделювання переміщення чистового ножа відносно заготовки у напрямку осі X (а) та у напрямку осі Y (б). Розмірність по осі абсцис – секунди, по осі ординат – міліметри

Із аналізу графіків випливає, що закон руху ножа відзначається значною складністю. Для виявлення закономірностей переміщень ножа графіки подані у збільшеному масштабі. На рис. 8.50 наведені результати розрахунків переміщення чистового ножа у напрямках X та Y при четвертому врізанні чистового ножа у поверхню заготовки. Із аналізу графіків випливає, що ніж має постійні високочастотні коливання в горизонтальному напрямку. Амплітуда цих коливань досягає 3 мкм, а період коливань знаходиться в межах 0,2...5 мс. Коливання мають чітко виражений випадковий характер. Наявність коливань такого виду пояснюється відсутністю орієнтованого навантаження на шпиндель у радіальному напрямку.

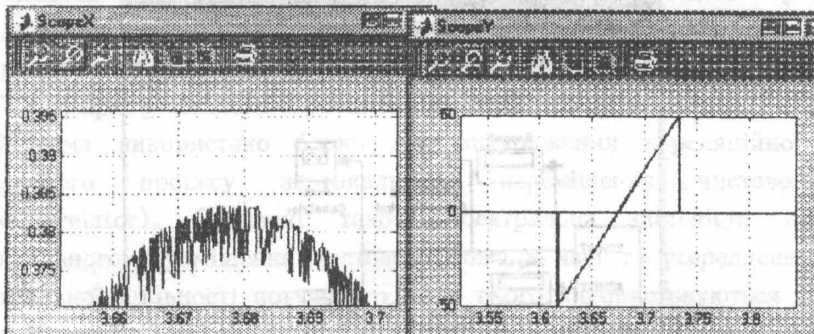
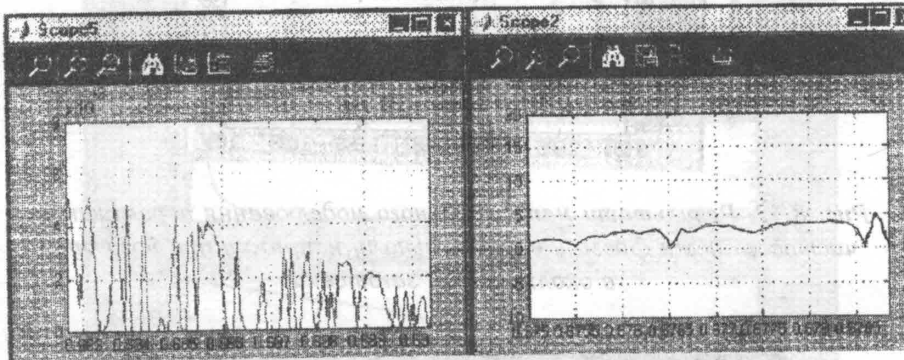


Рис. 8.50. Переміщення ножа у напрямках X (а) та Y (б) при четвертому врізанні ножа у заготовку

Коливання у напрямку осі Y є менш характерними. Вони включають

тільки довгоперіодичні складові. Це пояснюється значним моментним навантаженням шпинделя з боку приводу головного руху. Тангенціальні сили різання, які діють на шпиндель, є набагато меншими від аналогічних сил, які виникають при передачі крутильного моменту в приводі головного руху. Тому закон руху ножа в напрямку осі  $Y$  є більш плавним.

Ці закономірності проявляються також і при врізанні та виході ножа (рис. 8.51).



а)

б)

Рис. 8.51. Закони переміщення чистового ножа при першому врізанні його в поверхню заготовки: а – переміщення ножа в напрямку  $X$ ; б – переміщення ножа в напрямку  $Y$

При врізанні ножа також наявні інтенсивні випадкові коливання ножа у напрямку  $X$ . На графіку (див. рис. 8.51, а) простежуються коливання з періодами 0,2...1 мс.

Високочастотних коливань ножа в напрямку  $Y$  не простежується (див. рис. 8.51, б). На графіку залежності координати ножа  $Y$  від часу наявні деякі ізольовані випадки, що пояснюються впливом врізання сусідніх ножів у поверхню заготовки.

Переміщення ножа у вертикальному напрямку є менш інтенсивним (рис. 8.52).

Амплітуда вертикальних коливань чистового ножа не перевищує 0,12 мкм. На кривій переміщення ножа простежуються гармоніки з періодами 0,4...0,8 мс.

Для аналізу випадкового процесу переміщення ножа у вертикальному напрямку використані машинні методи обробки випадкового процесу, наявні в бібліотеці MATLAB. На рис. 8.53 наведена розрахована кореляційна функція процесу випадкового переміщення чистового ножа у вертикальному напрямку, а на рис. 8.54 показана обчислена спектральна щільність потужності процесу.

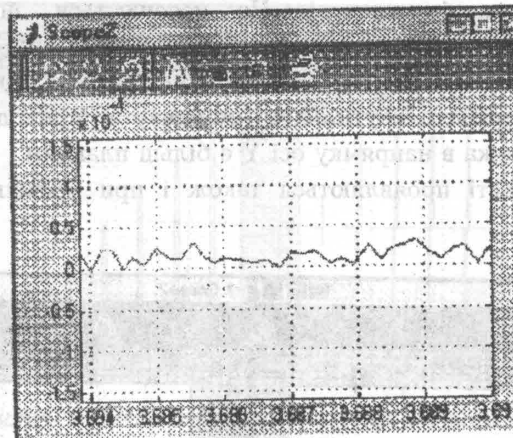


Рис. 8.52. Результати математичного моделювання переміщення чистового ножа фрези у вертикальному напрямку при його русі в околі центра заготовки

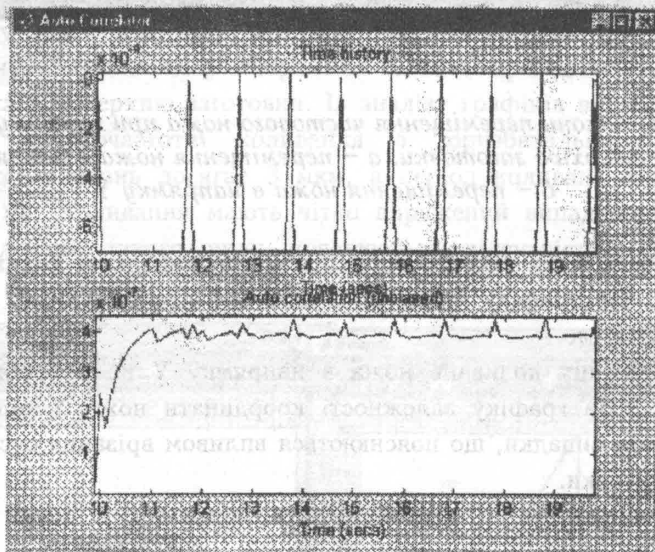


Рис. 8.53. Результати розрахунку кореляційної функції випадкового процесу вертикального переміщення чистового ножа

Із аналізу кореляційної функції та спектральної щільності процесу вертикального переміщення чистового ножа випливає, що цей процес має незначну кореляцію і ряд резонансних піків спектральної щільності у високочастотній області.

Результати математичного моделювання у вигляді поточних значень

координат чистового ножа дали можливість виконати моделювання форми обробленої поверхні. Зокрема знайдена профілограма обробленої поверхні в перерізі  $Y = 0$ . Для цього знайдені точкові значення координат  $D_X$  і  $D_Z$  чистового ножа при  $Y = 0$ . Ці значення для десяти точок наведені в табл. 8.1.

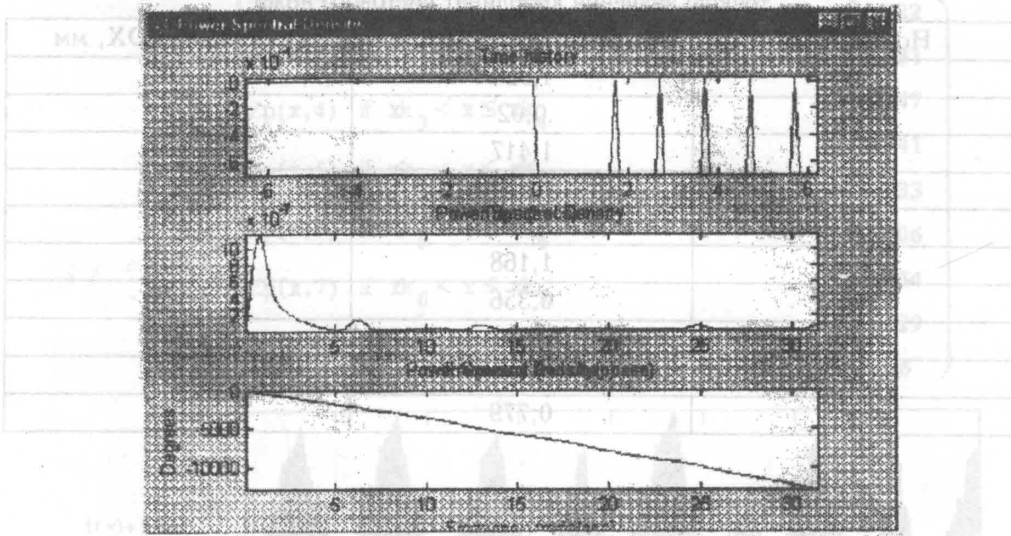


Рис. 8.54. Результати знаходження спектральної щільності потужності (середній графік) процесу переміщення чистового ножа у вертикальному напрямку

Координати точок еліпса, який описує різальну кромку, подані у вигляді залежності (5.44) із врахуванням залежностей (5.46) та (5.47), що визначають детерміновані відхилення форми ножа від еліптичної залежності (5.47), що враховує випадкові відхилення мікропрофілю різальної кромки. Відповідно одержимо переріз обробленої поверхні. Фрагмент документа MathCAD з результатами розрахунків наведений на рис. 8.55.

На рис. 8.55 показані розрахункові значення зрізаного шару для кожного конкретного проходу чистового ножа. За графіком знаходяться точки (ХК), в яких спряжуються криві елементарних контурів і будується одна символна залежність для розрахунку контуру обробленої поверхні (рис. 8.56).

Розрахунковий випадковий процес центрується шляхом визначення його середнього значення. Для центрованого процесу  $ZO(X)$  визначається його параметр шорсткості  $Ra$  (рис. 8.57).

Профіль обробленої поверхні, розрахований шляхом математичного моделювання, порівнювався з експериментально визначеними

профілограмами. На рис. 8.58 наведені типова профілограма обробленої поверхні та її параметр шорсткості.

Таблиця 8.1

Розраховані за допомогою математичної моделі, наведеної на рис. 8.48, точкові значення координат чистового ножа

Номер точки	Координата $DZ \times 10^{-4}$ , мм	Координата $DX$ , мм
0	1,924	0,009
1	0,02	0,222
2	1,417	0,441
3	1,031	0,652
4	0,049	0,821
5	1,168	1,042
6	0,356	1,159
7	1,932	1,352
8	1,584	1,502
9	0,779	1,951

$$Z_p(x, i) = DZ_i - b \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{(x - DX_i)^2}{a^2}} \right] + DI_z(x - DX_i) + ds(x - DX_i).$$

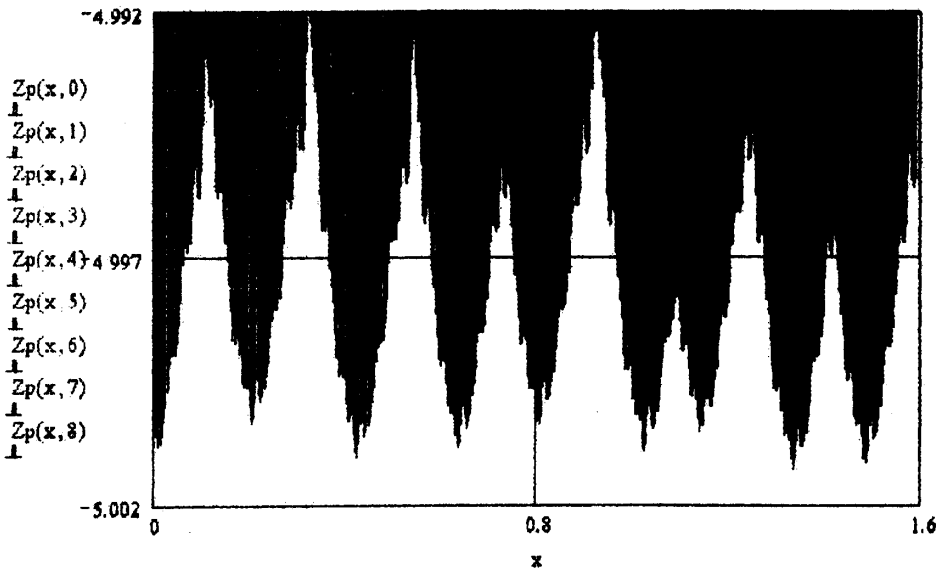


Рис. 8.55. Фрагмент документа MathCAD, в якому зроблені обчислення зрізуючого шару металу при обробці заготовки

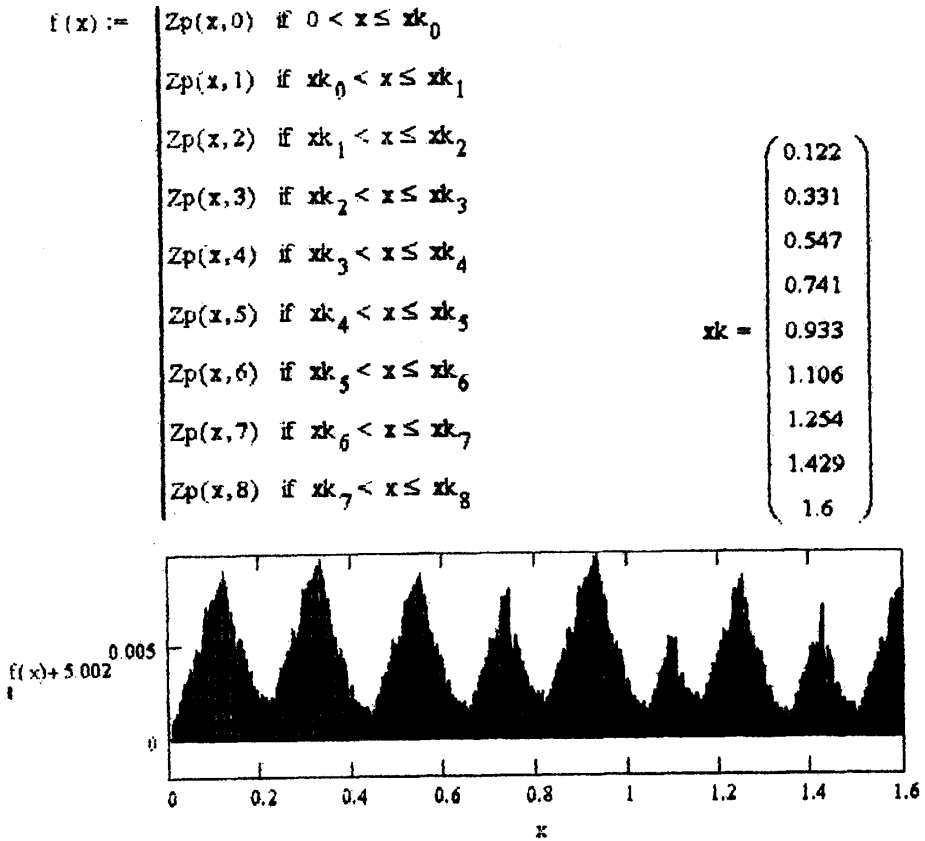


Рис. 8.56. Фрагмент документа MathCAD, в якому сформовано символну залежність  $f(x)$  для розрахунку профілю обробленої поверхні, та результати розрахунків

Із порівняння розрахункових і експериментальних даних впливає їх значна кількісна та якісна подібність. Період розрахованих за допомогою математичної моделі хвиль відрізняється від експериментально визначених в 1,06 раза. Розмах хвиль відрізняється в 1,18 раза. Розрахункове значення параметра шорсткості  $Ra = 1,986$  мкм відрізняється від визначеного експериментально  $Ra = 2,57$  мкм на 22 %, що може вважатися задовільним, враховуючи складність системи, що моделюється.

Деякі відмінності між розрахунковим і експериментальним мікропрофілями спостерігається в наявності високочастотних хвиль на обробленій поверхні. Інтенсивність високочастотних хвиль, визначених експериментально, є суттєвішою ніж розрахункових. Це пояснюється погіршенням якості кромки різального ножа.

$$Ra := \frac{1 \cdot \int_0^{1.6} |z0(x)| dx}{1.6}$$

$$Ra = 1.986 \times 10^{-3}$$

$$z(x) := 5.002 + f(x)$$

$$mz := \frac{1 \cdot \int_0^{1.6} z(x) dx}{1.6}$$

$$mz = 4.249 \times 10^{-3}$$

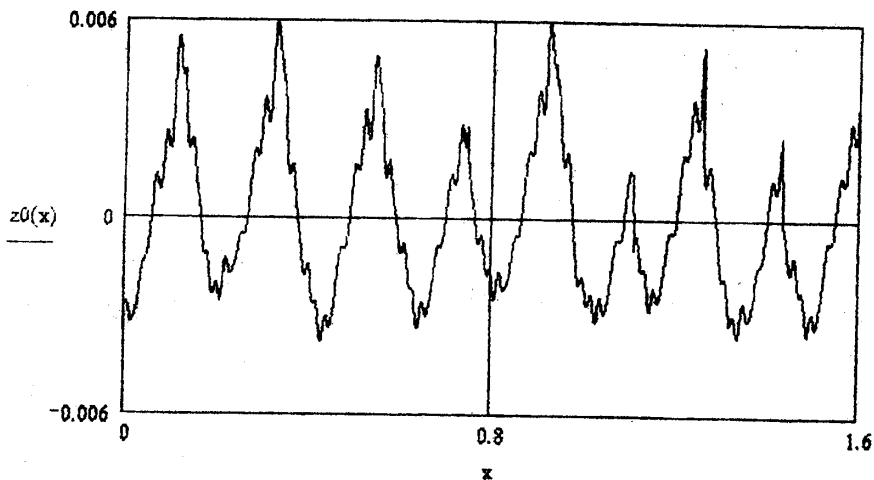


Рис. 8.57. Фрагмент документа MathCAD, в якому визначений центрований профіль обробленої поверхні, та знайдений його параметр шорсткості Ra

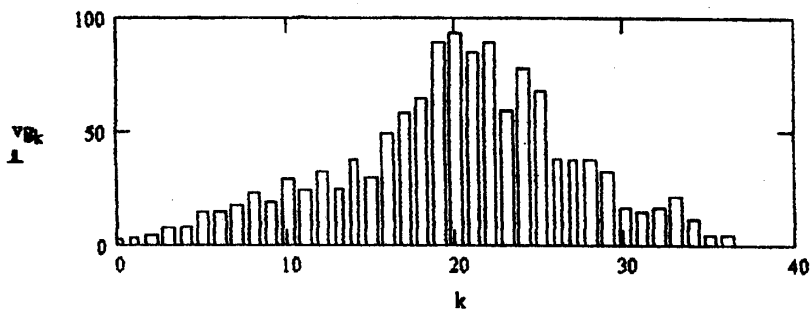


Рис. 8.58. Експериментально визначена профілограма обробленої поверхні, яка відповідає результатам математичного моделювання, наведеного на рис. 8.23

Прийнятий при розрахунках параметр шорсткості  $Ra = 0,3...0,4$  мкм для різальної кромки ножа різко збільшується під час обробки, що призводить до збільшення високочастотних складових у хвилястості мікропрофілю обробленої поверхні.

Загалом можна вважати, що результати математичного моделювання відповідають експериментальним даним. Це підтверджує адекватність моделі та можливість її використання для дослідження процесу обробки.

Розроблена математична модель використана для здійснення чисельних експериментів, метою яких було встановлення впливу основних параметрів верстата та інструмента і режимів обробки на якість обробленої поверхні. Зокрема досліджено вплив значення подачі на зуб на параметр шорсткості обробленої поверхні.

При математичному моделюванні задавалися дискретні значення подачі (подачі на зуб) і проводилися розрахунки за розробленою математичною моделлю. Розраховані значення середньоарифметичних значень висоти профілю при різних значеннях подачі на зуб наведені в табл. 8.2.

Таблиця 8.2

Результати математичного моделювання впливу подачі на зуб на шорсткість обробленої поверхні

Подача на зуб, мм	0,01	0,025	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
$Ra$ , мкм	0,302	0,270	0,320	0,411	0,762	1,327	1,986	2,115	2,151	2,187	2,210	2,317

Із результатів розрахунків випливає, що в деякому діапазоні подач на зуб (0,01...0,05 мм) параметр шорсткості  $Ra$  є мінімальним і зберігає майже постійне значення.

Шорсткість обробленої поверхні залежить від швидкості різання. В табл. 8.3 наведені розрахункові значення параметра шорсткості від швидкості різання.

Таблиця 8.3

Результати математичного моделювання впливу швидкості різання на шорсткість обробленої поверхні

Швидкість різання, м/с	1	2	3	4	5	6
$Ra$ , мкм	1,817	1,12	1,340	1,725	2,548	4,627

Із аналізу результатів моделювання випливає, що шорсткість обробленої поверхні спочатку знижується, а потім зростає при збільшенні швидкості різання.

Розроблена математична модель дає можливість визначити вплив всіх



параметрів верстата на точність обробки поверхні. Одним із таких параметрів є биття шпindelних опор. В табл. 8.4 наведені результати розрахунків параметра шорсткості в залежності від загального биття передньої опори шпindelя.

Таблиця 8.4

Вплив биття передньої опори шпindelя  
на параметр шорсткості обробленої поверхні

$\Delta r_{\text{п}}$ , мкм	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$R_a$ , мкм	1,612	1,577	1,105	1,314	1,680	2,541

Як впливає з аналізу таблиці, наявність биття в межах 1,4...1,6 мкм призводить навіть до деякого підвищення якості обробки.

На параметр шорсткості впливають деформативність шпindelя та шорсткість вузла опори підшипників. В табл. 8.5 наведені розрахункові значення параметра шорсткості в залежності від змін еквівалентної жорсткості шпindelя.

Таблиця 8.5

Вплив відносної жорсткості шпindelя  
на параметр шорсткості обробленої поверхні

$EI/EI_0$	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
$R_a$ , мкм	2,581	2,101	2,212	1,986	1,756	1,612	1,587

Таким чином, структурна математична модель динамічної системи верстата дала можливість виконати математичне моделювання процесів, що мають місце при обробці поверхні фрезою косокутного різання. Модель зручна в користуванні. Вона дозволяє здійснювати оцінку впливу окремих параметрів динамічної системи верстата і процесу різання на показники якості обробленої поверхні.

## ЧАСТИНА III

# МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ У МЕТАЛОРІЗАЛЬНИХ ВЕРСТАТАХ

## РОЗДІЛ 9

### Загальні символічні математичні моделі динамічних систем верстатів

#### 9.1. Математичні моделі детермінованих динамічних систем

Всі технічні пристрої складаються з різноманітних систем, що виконують певні функції. В системах мають місце динамічні процеси, які відповідають послідовній зміні стану системи. Характеристики процесів визначаються складною взаємодією різноманітних факторів і характеризуються, як правило, закономірностями випадкового характеру.

З розвитком обчислювальної техніки все більшого значення набувають універсальні символічні математичні моделі, придатні для опису різноманітних технічних систем та процесів.

Універсальна комплексна математична модель побудована на базі методів теорії автоматичного керування, що застосовуються для технічних систем з лінійними чи квазілінійними характеристиками [54]. При цьому структура моделі визначається взаємодією ряду операторів, які трансформують параметри системи в загальному випадку стохастичним чином.

Вхідні параметри системи

$$X_1(t), \dots, X_n(t),$$

що є незалежними функціями часу  $t$ , трансформуються операторами входу системи  $V_j$  за схемою:

$$V_j X_j(t).$$

Дана схема означає дію оператора  $V_j$  на вхідний параметр  $X_j$ .

Для кожного вхідного параметра  $X_j(t)$  відповідний оператор входу  $V_j$  визначається сукупністю  $m$  коефіцієнтів

$$b_{j0}, b_{j1}, \dots, b_{jm}$$

та оператором диференціювання

$$D = d/dt.$$

У більшості практично важливих випадків оператори входу лінійної чи квазілінійної моделі технічної системи можуть бути зведені до поліноміальних залежностей наступного виду:

$$B_j(b_j, D) = b_{j0} + b_{j1}D + \dots + b_{jm}D^m, \quad j = 1, \dots, \mu, \quad (9.1)$$

причому  $m$  має конкретне цілочисельне значення для кожного  $j$ -го вхідного параметра, а  $\mu$  є цілим числом, яке визначає число входів системи.

Вихідні параметри системи

$$Y_1(t), \dots, Y_i(t), \dots, Y_v(t)$$

є результатом дії на них власних операторів системи за адитивною схемою:

$$A_i Y_i(t) = \sum_{j=1}^{\mu} B_j X_j(t), \quad i = 1, \dots, v, \quad (9.2)$$

де  $v$  – ціле число, що відповідає числу виходів системи, які підлягають математичному моделюванню і є виходом моделі.

Для кожного вихідного параметра  $Y_i(t)$  відповідний власний оператор моделі  $A_i$  визначається сукупністю  $n$  коефіцієнтів

$$a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{in}$$

та оператором диференціювання

$$D = d/dt.$$

Власні оператори математичної моделі системи з лінійними чи квазілінійними характеристиками звичайно мають вигляд поліномів:

$$A_i(a_{in}, D) = a_{in}D^n + \dots + a_{i1}D + a_{i0}, \quad i = 1, \dots, v, \quad (9.3)$$

а  $n$  є деяким цілим числом, заданим для номера вихідного параметра  $i$ .

Операторний комплекс (9.2) із врахуванням залежностей (9.1) та (9.3) визначає зв'язок вихідних та вхідних параметрів системи у вигляді сукупності лінійних диференціальних рівнянь:

$$a_{in} \frac{d^n Y_i}{dt^n} + \dots + a_{i1} \frac{dY_i}{dt} + a_{i0} Y_i = \sum_{j=1}^{\mu} \left( b_{j0} X_j + b_{j1} \frac{dX_j}{dt} + \dots + b_{jm} \frac{d^m X_j}{dt^m} \right), \quad (9.4)$$

$$i = 1, 2, \dots, v.$$

Вираз (9.4) дає в аналітичному вигляді комплексну математичну модель технічної системи, яка включає вектори зовнішніх

$$\text{вхідних } \{X_j(t)\}_{\mu} \text{ та вихідних } \{Y_i(t)\}_v$$

параметрів та сукупність внутрішніх параметрів системи:

$$a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{in}, \quad i = 1, 2, \dots, v; \quad b_{j0}, b_{j1}, \dots, b_{jm}, \quad j = 1, 2, \dots, \mu.$$

Математична модель зображена графічно у вигляді блок-схеми на рис. 9.1.

Не знижуючи ступеня узагальнення математичної моделі, приймемо як **перший варіант**, що диференціальне рівняння (9.4), яке описує процеси в системі, має нульові початкові умови.

Диференціальне рівняння (9.4) допускає перетворення по Лапласу. За нульових початкових умов для вхідних і вихідних параметрів перетворення по Лапласу рівняння (9.4) має вигляд:

$$(a_{in} S^n + \dots + a_{i1} S + a_{i0}) Y_i(S) = \sum_{j=1}^{\mu} (b_{j0} + b_{j1} S + \dots + b_{jm} S^m) X_j(S), \quad (9.5)$$

$$i = 1, 2, \dots, v,$$

де  $S$  – оператор Лапласа;

$Y_i(S)$  – зображення по Лапласу вихідного параметра  $Y_i(t)$ ;

$X_j(S)$  – зображення по Лапласу вхідного параметра  $X_j(t)$ .

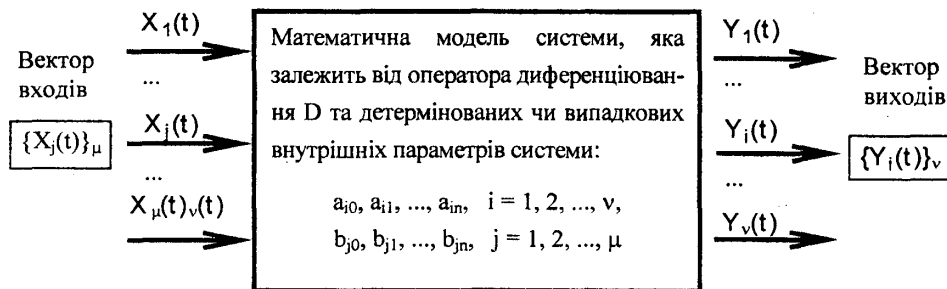


Рис. 9.1. Блок-схема комплексної символічної математичної моделі детермінованих та стохастичних динамічних процесів у технічних системах

Вираз (9.5) представляє собою алгебраїчний аналог диференціального рівняння (9.4) і співпадає з операторною формою запису математичної моделі у вигляді (9.2), якщо покласти, що оператор диференціювання  $D = d/dt$  відповідає оператору Лапласа  $S$ .

Комплексна математична модель технічної системи (9.5) може бути подана у вигляді матрично-векторної залежності:

$$\{Y_i(S)\}_\nu = [W_{ij}(S)]_{\mu\nu} \times \{X_j(S)\}_\mu, \quad (9.6)$$

де  $\{X_j(S)\}_\mu$  – вектор зображень по Лапласу незалежних вхідних параметрів технічної системи, що моделюються;

$\{Y_i(S)\}_\nu$  – вектор вихідних (залежних) параметрів системи, поданий у вигляді своїх зображень по Лапласу;

$W_{ij}(S) = W_{ij}(b_j, a_i, S)$  – компонента прямокутної матриці трансформуючих (передавальних) функцій технічної системи, яка залежить від параметрів  $a_i, b_j$  та від оператора Лапласа  $S$ .

Диференціальне рівняння (9.4), як правило, має **початкові умови, відмінні від нульових**. Цей варіант задачі є загальним.

В такому випадку математична модель буде мати вигляд системи диференціальних рівнянь (9.4) та сукупності початкових умов.

Початкові умови задачі визначаються для деякого моменту часу  $t = +0$

і складають для кожного вихідного параметра  $Y_i(t)$  набір констант:

$$Y_i(t) \Big|_{t=0} = Y_i(0); \quad \frac{dY_i(t)}{dt} \Big|_{t=0} = Y_i'(0); \quad \dots; \quad \frac{d^{n-1}Y_i(t)}{dt^{n-1}} \Big|_{t=0} = Y_i^{(n-1)}(0).$$

Аналогічно для вхідного параметра технічної системи  $X_j(t)$  початкові

умови мають вигляд набору постійних величин:

$$X_j(t)|_{t=0} = X_j(0); \left. \frac{dX_j(t)}{dt} \right|_{t=0} = X_j'(0); \dots; \left. \frac{d^{m-1}X_j(t)}{dt^{m-1}} \right|_{t=0} = X_j^{(m-1)}(0).$$

Перетворимо диференціальне рівняння (9.4) по Лапласу із врахуванням наявності ненульових початкових умов. Розглянемо ліву частину рівняння.

Перетворення її по Лапласу, згідно з [4], має вигляд:

$$a_{in} [S^n \cdot Y_i(S) - S^{n-1} \cdot Y_i(0) - S^{n-2} \cdot Y_i'(0) - \dots - S \cdot Y_i^{(n-2)}(0) - Y_i^{(n-1)}(0)] + \\ + a_{in-1} [S^{n-1} \cdot Y_i(S) - S^{n-2} \cdot Y_i(0) - \dots - S \cdot Y_i^{(n-3)}(0) - Y_i^{(n-2)}(0)] + \dots + \\ + a_{i2} [S^2 \cdot Y_i(S) - S \cdot Y_i(0) - \dots - Y_i'(0)] + a_{i1} [S \cdot Y_i(S) - Y_i(0)] + a_{i0} [Y_i(S)].$$

Після групування одержимо ліву частину рівняння (9.4) у вигляді:

$$(a_{in}S^n + \dots + a_{i1}S + a_{i0})Y_i(s) - \alpha_{in-1}S^{n-1} - \alpha_{in-2}S^{n-2} - \dots - \alpha_{i2}S^2 - \alpha_{i1}S - \alpha_{i0}.$$

В цьому виразі коефіцієнти  $\alpha_{in-1}, \dots, \alpha_{i0}$  залежать від початкових умов і зв'язані з ними співвідношеннями:

$$\alpha_{in-1} = a_{in} \cdot Y_i(0); \quad \alpha_{in-2} = a_{in} \cdot Y_i'(0) + a_{in-1} \cdot Y_i(0); \quad \dots; \\ \alpha_{i0} = a_{in} \cdot Y_i^{(n-1)}(0) + a_{in-1} \cdot Y_i^{(n-2)}(0) + \dots + a_{i1} \cdot Y_i(0).$$

Розглянемо один із виразів під знаком суми в правій частині рівняння (9.4). Перетворення його по Лапласу має вигляд:

$$b_{jm} [S^m \cdot X_j(S) - S^{m-1} \cdot X_j(0) - S^{m-2} \cdot X_j'(0) - \dots - X_j^{(m-1)}(0)] + \\ + b_{jm-1} [S^{m-1} \cdot X_j(S) - \dots - X_j^{(m-2)}(0)] + \dots + b_{j0} X_j(0).$$

Після групування праву частину перетвореного по Лапласу рівняння (9.4) запишемо у вигляді:

$$\sum_{j=1}^{\mu} (b_{j0} + b_{j1}S + \dots + b_{jm}S^m) X_j(S) + \beta_{i0} + \beta_{i1}S + \dots + \beta_{iM-1}S^{M-1},$$

де  $M$  – найбільший із порядків похідних всіх ненульових початкових умов вхідних параметрів, які входять в праву частину рівняння (9.4).

З метою спрощення одержаних виразів об'єднаємо значення коефіцієнтів:

$$\beta_{i0} + \alpha_{i0} = b_{i0}; \quad \beta_{i1} + \alpha_{i1} = b_{i1}; \quad \dots; \quad \beta_{iM} + \alpha_{iM} = b_{iM}; \\ b_{in} = \alpha_{in} \quad \text{при } n > M.$$

Перетворене по Лапласу диференціальне рівняння (9.4) з врахуванням ненульових початкових умов вхідних і вихідних параметрів запишеться у вигляді:

$$(a_{in}S^n + \dots + a_{i1}S + a_{i0})Y_i(S) = \sum_{j=1}^{\mu} (b_{j0} + b_{j1}S + \dots + b_{jm}S^m)X_j(S) + \\ + b_{in-1}S^{n-1} + b_{in-2}S^{n-2} + \dots + b_{i1}S + b_{i0}.$$

Із аналізу цього алгебраїчного рівняння можна зробити висновок, що початкові умови рівнозначні існуванню деякого додаткового (фіктивного)

вхідного параметра  $X_0(t)$ . Його дія може бути визначена із операторного рівняння:

$$(a_{in}S^n + \dots + a_{i1}S + a_{i0})Y_{i0}(S) = (b_{in}S^{n-1} + b_{in-2}S^{n-2} + \dots + b_{i1}S + b_{i0})\frac{X_0(S)}{X_0(S)},$$

де  $X_0(S)$  – зображення по Лапласу додаткового вхідного параметра  $X_0(t)$ .

Визначимо трансформуючу функцію, яка відповідає даному рівнянню:

$$\frac{Y_{i0}(S)}{X_0(S)} = W_{i0}(S) = \frac{b_{in-1}S^{n-1} + \dots + b_{i1}S + b_{i0}}{(a_{in}S^n + \dots + a_{i1}S + a_{i0})X_0(S)}.$$

Додатковий вхідний параметр  $X_0(t)$  може бути вибраний у вигляді деякої довільної функції часу. Доцільно вибирати його в найпростішій формі, зручній для аналізу. Прийнемо, що додатковий вхідний параметр має вигляд одиничної ступінчастої функції:

$$X_0(t) = 1(t).$$

Тоді перетворення по Лапласу додаткового вхідного параметра буде:

$$X_0(S) = \frac{1}{S}.$$

Враховуючи назване перетворення, одержимо трансформуючу функцію:

$$W_{i0}(S) = \frac{(b_{in-1}S^{n-1} + \dots + b_{i1}S + b_{i0})S}{(a_{in}S^n + \dots + a_{i1}S + a_{i0})},$$

яка звичайно має місце тільки для вхідного параметру  $X_0(t)$ , що представляє собою одиничну ступінчасту функцію.

Компоненти матриці трансформуючих функцій, що входить в залежність (9.6), виражаються через оператори математичної моделі:

$$W_{ij}(S) = \frac{B_j(b_j, S)}{A_i(b_i, S)}.$$

Для операторів поліноміального виду (9.1) і (9.3) одержимо трансформуючу функцію у вигляді дробово-раціональної функції:

$$W_{ij}(S) = \frac{b_{j0} + b_{j1}S + \dots + b_{jm}S^m}{a_{in}S^n + \dots + a_{i1}S + a_{i0}}. \quad (9.7)$$

Комплексна математична модель технічної системи (9.6) із врахуванням (9.7) допускає графічну інтерпретацію у вигляді структурних блок-схем. На рис. 9.2 наведені схеми, що відповідають математичним моделям, які визначають різні вихідні параметри системи.

Структура математичних моделей є однотипною і включає базовий блок (рис. 9.2, з), який трансформує вхідний параметр  $X_j$  у відповідну складову вихідного параметра  $Y_i$ . Базовий блок відповідає базовій підсистемі модельованої технічної системи.

Математична модель (9.5) (9.6) має властивості адитивності по всіх

вхідних параметрах для кожного виходу та суперпозиції вхідних параметрів, тобто незалежності моделювання впливу окремого вхідного параметра на вхідний параметр. Це дає можливість при математичному моделюванні розглядати окремо кожну пару параметрів вхід-вихід, що обумовлює розгляд сукупності окремих ( $\mu \times \nu$ ) математичних моделей системи виду:

$$Y_i(s) = W_{ij}(S)X_j(S), \quad i = 1, 2, \dots, \nu, \quad j = 1, 2, \dots, \mu, \quad (9.8)$$

де  $W_{ij}(S)$  – трансформуюча функція від  $j$ -го вхідного параметра до  $i$ -го вихідного параметра.

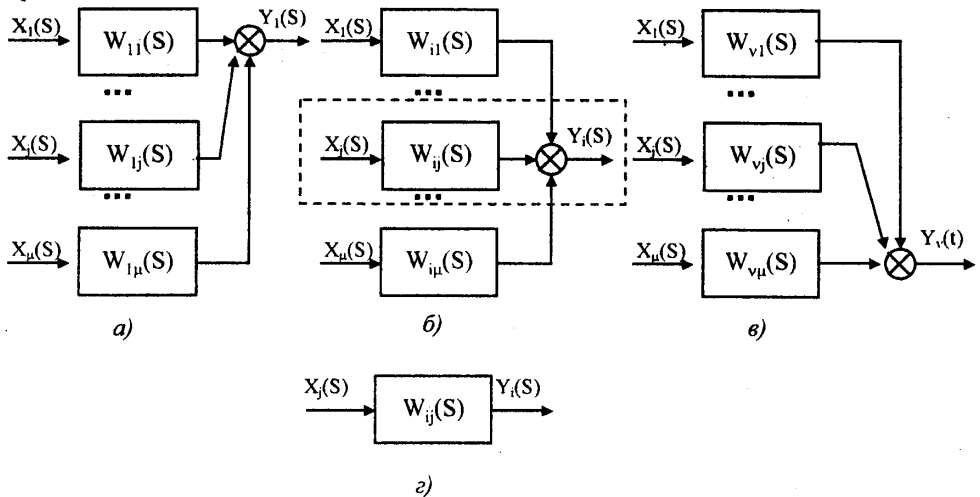


Рис. 9.2. Інтерпретація комплексної математичної моделі динамічних процесів технічних систем у вигляді набору структурних блок-схем (а-в) та базовий блок в структурі математичної моделі (г)

Математична модель у вигляді (9.8) відповідає базовому блоку структури (див. рис. 9.2, г).

Кожна математична модель із сукупності (9.8) може застосовуватись при довільних вхідних параметрах-функціях часу, як детермінованих, так і випадкових. Модель встановлює однозначну залежність вихідного параметра від вхідного. Модель залежить тільки від набору постійних коефіцієнтів  $b_j$ ,  $a_i$ , які представляють собою детерміновані або випадкові величини.

Для аналізу математичної моделі виду (9.8) доцільно застосовувати частотні методи. При цьому використовуються частотні характеристики системи, що відповідають її трансформуючій функції. Всі необхідні частотні характеристики знаходяться наступним чином.

Трансформуюча функція  $W_{ij}(S)$  шляхом формальної підстановки  $S \rightarrow j\omega$  ( $\omega$  – частота,  $j = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця) переводиться у форму частотної трансформуючої функції  $W_{ij}(j\omega)$ , що є комплексно-значною

функцією дійсного аргументу  $\omega$ . Використовуючи (9.7), після підстановки частоти одержимо:

$$W_{ij}(j\omega) = \frac{b_{j0} + jb_{j1}\omega + \dots + j^m b_{jm}\omega^m}{j^n a_{in}\omega^n + \dots + ja_{i1}\omega + a_{i0}}. \quad (9.9)$$

За значенням частотної трансформуючої функції (9.9) знаходяться її модуль та аргумент. Модуль представляє собою значення амплітудно-частотної характеристики базового блоку математичної моделі:

$$W_{ij}(\omega) = \text{mod}[W_{ij}(j\omega)]. \quad (9.10)$$

Аргумент у своєму головному значенні відповідає фазово-частотній характеристиці:

$$\psi_{ij}(\omega) = \text{Arg}[W_{ij}(j\omega)]. \quad (9.11)$$

Відповідно частотна трансформуюча функція як комплексна величина запишеться в показниковій формі:

$$W_{ij}(j\omega) = [W_{ij}(\omega)] \cdot \exp[j\psi_{ij}(\omega)]. \quad (9.12)$$

За значенням частотної трансформуючої функції (9.9) знаходяться її дійсна та уявна частини. Дійсна частина визначає собою дійсну амплітудно-частотну характеристику базового блоку моделі:

$$U_{ij}(\omega) = \text{Real}[W_{ij}(j\omega)]. \quad (9.13)$$

Уявна частина частотної трансформуючої функції відповідає уявній амплітудно-частотній характеристиці:

$$V_{ij}(\omega) = \text{Im}[W_{ij}(j\omega)]. \quad (9.14)$$

Відповідно частотна трансформуюча функція як комплексна величина запишеться в алгебраїчній формі:

$$W_{ij}(j\omega) = U_{ij}(\omega) + j \cdot V_{ij}(\omega). \quad (9.15)$$

Між частотними характеристиками існують залежності, що впливають із означення форм запису комплексних величин.

Модуль та аргумент комплексного числа виражаються через дійсну та уявну його частину наступними залежностями:

$$W_{ij}(j\omega) = \sqrt{[U_{ij}(\omega)]^2 + [V_{ij}(\omega)]^2}; \quad (9.16)$$

$$\psi_{ij}(\omega) = \arctg [V_{ij}(\omega) / U_{ij}(\omega)].$$

Дійсна та уявна частини комплексного числа виражаються через його модуль та аргумент відповідно наступним залежностям:

$$\begin{aligned} U_{ij}(\omega) &= W_{ij}(\omega) \cdot \cos[\psi_{ij}(\omega)]; \\ V_{ij}(\omega) &= W_{ij}(\omega) \cdot \sin[\psi_{ij}(\omega)]. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Таким чином, комплексна математична модель розглядається як система функціональних залежностей (частотних характеристик), що одержані із трансформуючих функцій. Модель доцільно подати у графоаналітичній формі. Для базової підсистеми, що відповідає блоку (рис. 9.2, з) і співвідношенню (9.8) графоаналітична форма математичної моделі зображена на рис. 9.3.



Одержані залежності та співвідношення є основою для математичного моделювання як детермінованих, так і стохастичних динамічних процесів, що мають місце у технічних системах, зокрема системах механіки.

Процес моделювання технічної системи полягає у знаходженні вихідних параметрів системи по заданих вхідних параметрах.

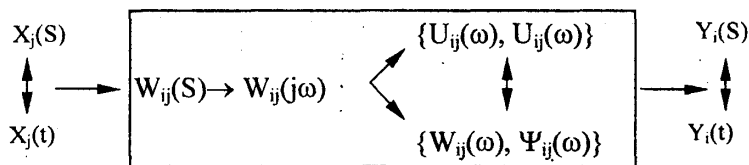


Рис. 9.3. Графоаналітична форма математичної моделі базової підсистеми

Моделювання детермінованих динамічних процесів здійснюється з використанням детермінованих функціональних залежностей. У цьому випадку всі величини, що входять у формули (9.4)–(9.17), є детермінованими і представляють собою константи чи функції часу. В технічних системах мають місце різноманітні вхідні параметри-функції часу.

Детерміновані вхідні параметри утворюють дві різні групи. Перша це ustalені вхідні параметри, а друга – це параметри, які різко змінюються в часі. Моделювання систем при дії даних груп параметрів здійснюється двома принципово різними способами.

Розглянемо ustalені детерміновані вхідні параметри технічних систем. Типовим ustalеним вхідним параметром є гармонічна функція:

$$X_j(t) = x_a \cdot \sin(\omega t),$$

де  $x_a$  – амплітудне значення параметра, що не залежить від часу;

$\omega$  – кругова частота гармонічної функції;

$\omega t$  – фаза ustalеного гармонічного процесу.

Для базового блока моделі (див. рис. 9.3) з вхідним параметром у вигляді гармонічної функції вихідний параметр також є гармонічною функцією і визначається функціональною залежністю:

$$Y_i(t) = x_a \cdot W_{ij}(\omega) \cdot \sin[\omega t + \psi_{ij}(\omega)]. \quad (9.18)$$

Враховуючи співвідношення (9.16) та (9.17), залежність (9.18) може бути також записана у вигляді:

$$Y_i(t) = x_a \cdot [U_{ij}(\omega) \cdot \cos \omega t + V_{ij}(\omega) \cdot \sin \omega t]. \quad (9.19)$$

Узагальненням ustalеного вхідного параметру є функціональна залежність, у вигляді полі гармонічної функції, що описана гармонічним рядом:

$$X_i(t) = \sum_{k=1}^K x_{ak} \cdot \sin(k\omega_0 t + \phi_{ok}), \quad (9.20)$$

де  $K$  – число членів ряду (простих гармонік);

$\omega_0$  – базове значення частоти;

$x_{ak}$  - амплітуда  $k$ -ї гармоніки;

$\psi_{0k}$  - початкова фаза  $k$ -ї гармоніки.

Залежність (9.20) представляє собою відрізок ряду Фур'є з постійною складовою, що дорівнює нулю. Такою залежністю можуть бути описані різноманітні періодичні та неперіодичні вхідні параметри.

Вхідні параметри, що мають особливості типу стрибка (сходінки) не можуть бути точно описані рядом (9.20) в силу явища Гібса. Тому для таких вхідних параметрів застосовується інша методика моделювання.

Узагальнений усталений детермінований вхідний параметр, який відповідає гармонічному ряду (9.20), може бути поданий у більш компактному вигляді:

$$X_i(t) = \sum_{k=1}^K x_{ak} \cdot \sin(\omega_k t_k), \quad (9.21)$$

де введені нові значення частоти та часу згідно формул:

$$\omega_k = k\omega_0; \quad t_k = t + \psi_{0k}/(k\omega_0). \quad (9.22)$$

Для кожного доданка суми (9.21) справедлива залежність (9.19). Тому вихідний параметр, що відповідає входу у вигляді (9.21), визначиться рядом:

$$Y_i(t) = \sum_{k=1}^K x_{ak} \cdot [U_{ij}(\omega_k) \cdot \cos(\omega_k t_k) + V_{ij}(\omega_k) \cdot \sin(\omega_k t_k)].$$

Підставивши значення частоти та часу із (9.22) у дану формулу, одержимо залежність вихідного параметру від часу у вигляді:

$$Y_i(t) = \sum_{k=1}^K x_{ak} \cdot \{ [U_{ij}(k\omega_0)] \cdot \cos(k\omega_0 t + \psi_{0k}) + [V_{ij}(k\omega_0)] \cdot \sin(k\omega_0 t + \psi_{0k}) \}. \quad (9.23)$$

Враховуючи співвідношення (9.16) та (9.17), залежність (9.23) може бути записана у формі:

$$Y_i(t) = \sum_{k=1}^K x_{ak} \cdot W_{ij}(k\omega_0) \cdot \sin[k\omega_0 t + \psi_{0k} + \psi_{ij}(k\omega_0)]. \quad (9.24)$$

Формули (9.23) і (9.24) дозволяють виконати розрахунок вихідного параметра системи при довільних усталених вхідних параметрах.

Розглянемо моделювання детермінованих систем, вхідні параметри яких **різко змінюються в часі**. Такі вхідні параметри представляють собою розривні функції. Дані вхідні параметри системи допускають ідеалізацію та зведення до одиничної ступінчастої функції. Використаємо асиметричну одиничну ступінчасту функцію:

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$

Разом з одиничною ступінчастою функцією використовується її символічна похідна у вигляді одиничної імпульсної функції (дельта-функції Дірака):

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0 \\ 0 \dots \infty \dots 0 & \text{при } t = 0 \end{cases}$$

причому для дельта-функції виконується інтегральна норма:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Розглянемо моделювання системи, вхідний параметр якої виражається через одиничну ступінчасту функцію, тобто

$$X_j(t) = x_a \cdot 1(t), \quad (9.25)$$

де  $x_a$  – постійне (амплітудне) значення вхідного параметра.

В цьому випадку вихідний параметр представляє собою перехідну функцію системи  $H(t)$  [6].

Зображення по Лапласу ступінчастої функції (9.25) має вигляд:

$$X_j(S) = x_a / S.$$

Відповідно до математичної моделі системи у вигляді (9.8) знаходиться зображення по Лапласу перехідної функції:

$$H(S) = Y_i(S) = x_a \cdot W_{ij}(S) / S. \quad (9.26)$$

Значення перехідної функції може бути знайдене як обернене перетворення Лапласа виразу (9.26), тобто

$$H(t) = L^{-1}[x_a \cdot W_{ij}(S) / S].$$

Іноді більш доцільно знаходити перехідну функцію за дійсною амплітудно-частотною характеристикою [3]. При цьому знаходження перехідної функції зводиться до обчислення інтегралу:

$$H(t) = \frac{2x_a}{\pi} \int_0^{\infty} U_{ij}(\omega) \cdot \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (9.27)$$

Розглянемо моделювання системи при вхідному параметрі у вигляді одиничної імпульсної функції:

$$X_j(t) = x_a \cdot \delta(t).$$

В цьому випадку вихідний параметр представляє собою імпульсну характеристику динамічної системи (вагову функцію)  $w(t)$ .

Зображення по Лапласу імпульсної характеристики [4] з точністю до множника співпадає з трансформуючою функцією системи, тобто

$$w(S) = Y_i(S) = x_a \cdot W_{ij}(S). \quad (9.28)$$

У відповідності з (9.28) значення імпульсної характеристики може бути знайдене як обернене перетворення Лапласа трансформуючої функції:

$$w(t) = L^{-1}[x_a \cdot W_{ij}(S)].$$

Імпульсну характеристику також можна знайти за дійсною амплітудно-частотною характеристикою шляхом інтегрування:

$$w(t) = \left( \frac{2x_a}{\pi} \right) \int_0^{\infty} U_{ij}(\omega) \cdot \cos(\omega t) d\omega. \quad (9.29)$$

Інтеграли, що входять в праві частини формул (9.28) та (9.29), звичайно знаходяться чисельними методами з використанням засобів математичних пакетів, причому верхня межа інтегрування вибирається дещо більшою за смугу пропускання частот системи.

## 9.2. Узагальнені математичні моделі стохастичних процесів та систем

**Математичне моделювання стохастичних динамічних процесів у технічних системах** здійснюється в залежності від характеру випадкових змін параметрів чи коефіцієнтів математичної моделі.

Ці процеси виникають під дією зовнішніх і внутрішніх факторів випадкового характеру. Їх моделювання може здійснюватись різними методами в залежності від місця дії випадкового фактора. Якщо суттєвою є дія випадкових вхідних параметрів системи, то математичне моделювання здійснюється з використанням детермінованої математичної моделі з випадковими вхідними параметрами. Коли превалюючими випадковими чинниками є зміна внутрішніх параметрів системи, то моделювання здійснюється за допомогою стохастичної математичної моделі із змінними випадковим чином коефіцієнтами та детермінованими вхідними параметрами.

Загальним випадком є моделювання динамічних процесів у технічній системі при одночасному врахуванні випадковості зміни внутрішніх параметрів системи при випадкових вхідних параметрах.

Розглянемо **математичне моделювання технічної системи при детермінованих внутрішніх і випадкових зовнішніх вхідних параметрах.**

В даному випадку вхідні та вихідні параметри системи представляють собою стохастичні функції часу. Математичне моделювання таких систем полягає у знаходженні статистичних характеристик випадкових вихідних параметрів. Моделювання здійснюється з використанням детермінованих математичних моделей.

Із загальної математичної моделі (9.6) впливає матрично-векторне співвідношення, що зв'язує зображення по Лапласу випадкових функцій часу, які описують вхідні та вихідні параметри технічної системи:

$$X_j^*(t) \text{ та } Y_i^*(t).$$

Це співвідношення системи з детермінованими внутрішніми параметрами має вигляд матрично-векторної рівності і є загальною математичною моделлю, призначеною для моделювання випадкових процесів:

$$\{Y_i^*(S)\}_v = [W_{ij}(S)]_{v\mu} \times \{X_j^*(S)\}_\mu, \quad (9.30)$$

де знаком "\*" позначені випадкові величини, що представляють собою компоненти векторів вихідних і вхідних параметрів.

Дана математична модель, як і співвідношення (9.6), має властивості адитивності. Тому моделювання технічної системи полягає в розгляді сукупності стохастичних математичних моделей, що зв'язують пари випадкових процесів вхід-вихід, а саме:

$$Y_i^*(S) = W_{ij}(S) \cdot X_j^*(S), \quad i = 1, 2, \dots, \nu, \quad j = 1, 2, \dots, \mu. \quad (9.31)$$

Стохастичні вхідні параметри системи  $X_j^*(t)$  представляють собою випадкові процеси і можуть мати різні статистичні характеристики. Розглянемо, як приклад практично важливий вид вхідного параметра системи у вигляді гаусівського стаціонарного ергодичного випадкового процесу [46]. Такі процеси характеризуються своїми статистичними характеристиками, зокрема кореляційною функцією:

$$R_{x_j}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(T - \tau)} \int_0^{T-\tau} x_{0j}(t) x_{0j}(t + \tau) dt, \quad (9.32)$$

де  $x_{0j}(t)$  – конкретне значення (реалізація) випадкового вхідного параметра  $X_j^*(t)$ , подане у вигляді центрованої випадкової функції часу з достатньо протяжною областю визначення в часі.

Кореляційна функція (9.32) може мати різний вигляд в залежності від особливостей випадкового процесу [4]. Для вхідного процесу у вигляді “білого” шуму кореляційна функція відповідає дельта-функції:

$$R_{x_j}(\tau) = \sigma_x^2 \cdot \delta(\tau), \quad (9.33)$$

де  $\sigma_x^2$  – дисперсія випадкового вхідного параметра  $X_j^*(t)$ .

Для випадкового процесу у вигляді кусково-лінійної ламаної лінії [4] кореляційна функція має вигляд:

$$R_{x_j}(\tau) = \sigma_x^2 \cdot e^{-\alpha|\tau|}, \quad (9.34)$$

де  $\alpha$  – деяка постійна величина.

Для опису випадкових вхідних параметрів використовують також кореляційні функції виду:

$$\begin{aligned} R_{x_j}(\tau) &= \sigma_x^2 \cdot e^{-\alpha|\tau|} \cdot \cos\beta\tau \quad \text{або} \\ R_{x_j}(\tau) &= \sigma_x^2 \cdot e^{-\alpha|\tau|} \cdot \left( \cos(\beta\tau) + \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta|\tau|) \right), \end{aligned} \quad (9.35)$$

де  $\alpha, \beta$  – постійні величини.

Для вхідного параметра у вигляді центрованого гаусівського ергодичного процесу закон розподілу густини ймовірності  $P(X_j)$  значень вхідного параметра є нормальним:

$$P(X_j) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-X_j^2}{2\sigma_x^2}\right). \quad (9.36)$$

Іншою статистичною характеристикою випадкового вхідного параметра є спектральна щільність процесу  $S_{x_j}(\omega)$ , яка зв'язана з кореляційною функцією перетворенням Фур'є. Кожній кореляційній функції відповідає спектральна щільність (спектр) вхідного параметра:

$$S_{x_j}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_{x_j}(\tau) \cdot \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (9.37)$$

Спектр випадкового вхідного параметра може бути неперервним або лінійчатим. Для неперервного спектра формула (9.37) визначає неперервну парну функцію з нескінченною областю визначення.

Лінійчатий спектр відповідає наявності у спектральній щільності особливостей типу дельта-функції.

Наприклад, процес у вигляді "білого" шуму (9.33) має спектральну щільність, постійну у всьому діапазоні частот:

$$S_x(\omega) = \text{Const.}$$

Спектральні щільності, що відповідають кореляційним функціям (9.34), (9.35) мають вигляд відповідно:

$$S_{x_j}(\omega) = \frac{2\alpha \cdot \sigma_x^2}{\alpha^2 + \omega^2};$$

$$S_{x_j}(\omega) = \alpha \cdot \sigma_x^2 \cdot \left[ \frac{1}{\alpha^2 + (\beta - \omega)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\beta + \omega)^2} \right]; \quad (9.38)$$

$$S_{x_j}(\omega) = \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) \cdot \sigma_x^2 \cdot \left[ \frac{2\beta - \omega}{\alpha^2 + (\beta - \omega)^2} + \frac{2\beta + \omega}{\alpha^2 + (\beta + \omega)^2} \right].$$

Всі спектральні щільності, які визначені за допомогою виразів (9.38), є дробово-раціональними функціями квадрата частоти.

Кореляційні функції та спектральні щільності визначаються звичайно за результатами експериментів. Тому вони відомі приблизно. Враховуючи наближений характер масиву значень спектральної щільності, практично кожен спектральну щільність можна апроксимувати дробово-раціональною функцією виду:

$$S_{x_j}(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)},$$

де  $P(\omega)$  і  $Q(\omega)$  – поліноми відносно частоти  $\omega$ .

Оскільки спектральна щільність є парною затухаючою функцією при  $\omega \rightarrow \infty$ , то поліноми включають в себе тільки парні степені частоти, при цьому степінь полінома чисельника завжди менший степеня полінома знаменника.

Коефіцієнти поліномів є дійсними числами. Відповідно всі корені чисельника і знаменника спектральної щільності завжди розташовані симетрично відносно дійсної та уявної осей на площині комплексної змінної.

Враховуючи вищесказане, спектральну щільність можна розкласти на прості дроби [44]. Тоді спектральна щільність довільного процесу:

$$S_{x_j}(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} = \sum_{D, \alpha, \gamma, \omega_0} \frac{D}{2\pi} \left[ \frac{\alpha - \gamma(\omega - \omega_0)}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{\alpha + \gamma(\omega + \omega_0)}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right] + \sum_{D, \alpha_1} \frac{2D}{\pi} \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \omega^2},$$

де перша сума відповідає четвірці комплексно спряжених коренів знаменника  $Q(\omega)$ , а друга сума – парі чисто уявних коренів знаменника.

Приводячи дроби під знаком першої суми до спільного знаменника,

одержимо:

$$S_{x_j}(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} = \sum_{D, \alpha, \beta, \gamma, \omega_0} \frac{D(\alpha + \gamma\omega_0)\beta^2 + (\alpha - \gamma\omega_0)\omega^2}{\beta^4 + 2(\alpha^2 - \omega_0^2)\omega^2 + \omega^4} + \sum_{D, \alpha_1} \frac{2D}{\pi} \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \omega^2},$$

де константи зв'язані між собою співвідношенням:  $\beta^2 = \alpha^2 + \omega_0^2$ .

В залежності від значення параметра  $\gamma$  вид дробу в першій сумі може бути різним. Підставивши у формулу два характерні значення:  $\gamma = 0$  та  $\gamma = \alpha/\omega_0$ , будемо мати суму:

$$S_{x_j}(\omega) = \sum_{D, \alpha, \beta, \omega_0} \frac{D\alpha}{\pi} \cdot \frac{\beta^2 + \omega^2}{\beta^4 + 2(\alpha^2 - \omega_0^2)\omega^2 + \omega^4} + \\ + \sum_{D, \alpha, \beta, \omega_0} \frac{D}{\pi} \cdot \frac{2\beta^2\alpha}{(\beta^4 + 2(\alpha^2 - \omega_0^2)\omega^2 + \omega^4)} + \sum_{D, \alpha_1} \frac{2D}{\pi} \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \omega^2}.$$

При цьому друга сума даної формули відповідає спектральним щільностям диференційованих випадкових функцій, які мають похідні з обмеженою дисперсією.

Враховуючи, що кореляційна функція зв'язана зі спектральною щільністю співвідношенням [1]:

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega,$$

в загальному випадку одержимо значення кореляційної функції:

$$R_{x_j}(\tau) = \sum_{D, \alpha} D e^{-\alpha|\tau|} + \sum_{D, \alpha, \omega_0} D e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau + \sum_{D, \alpha, \omega_0} D e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right).$$

Це означає, що кореляційну функцію кожного стаціонарного випадкового процесу можна представити у вигляді лінійної комбінації кореляційних функцій трьох типових випадкових процесів, причому один з них відповідає випадковому процесу, похідна якого має обмежену дисперсію.

Запишемо формулу для суми спектральних щільностей у вигляді:

$$S_{x_j}(\omega) = \sum_{D, \alpha, \omega_0} \frac{\alpha D}{\pi} \left[ \frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right] + \\ + \sum_{D, \alpha, \omega_0} \frac{\alpha D}{\omega_0} \left[ \frac{2\omega_0 - \omega}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{2\omega_0 + \omega}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right] + \sum_{D, \alpha_1} \frac{2D}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Цю формулу можна інтерпретувати як суперпозицію дії вхідних сигналів у вигляді білого шуму зі спектральною щільністю

$$S_0(\omega) = \text{Const} = 2\pi$$

на динамічні системи з відповідними трансформуючими функціями.

Доданкам першої суми відповідають динамічні системи, які мають трансформуючі функції наступного виду:

$$W_1(S) = \frac{\sqrt{2D\alpha}}{\beta} \cdot \frac{(T_1 S + 1)}{T_1^2 S^2 + \frac{2\alpha}{\beta^2} S + 1},$$

де  $T_1 = 1/\beta$  – постійна часу трансформуючої функції ( $\beta = \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}$ ).

Доданкам другої суми відповідають коливальні ланки динамічних систем, що мають трансформуючі функції наступного виду:

$$W_2(S) = \frac{\sqrt{2D\alpha}}{\beta} \cdot \frac{1}{T_2^2 S^2 + \frac{2\alpha}{\beta^2} S + 1}.$$

Доданкам третьої суми відповідають аперіодичні ланки динамічних систем з трансформуючими функціями виду:

$$W_3(S) = \sqrt{\frac{D}{\pi\beta}} \cdot \frac{1}{T_3 S + 1}.$$

Таким чином, довільний стаціонарний випадковий вхідний параметр технічної системи може бути представлений як результат дії широкополосного випадкового процесу з постійним значенням спектральної щільності ("білого" шуму) на деяку динамічну підсистему.

Детермінована технічна система, на вхід якої подається стаціонарний ергодичний вхідний параметр зі спектральною щільністю  $S_{x_j}(\omega)$ , на своєму виході має також стаціонарний ергодичний випадковий параметр зі спектральною щільністю [3]:

$$S_{y_i}(\omega) = |W_{ij}(j\omega)|^2 \cdot S_{x_j}(\omega), \quad (9.39)$$

де  $|W_{ij}(j\omega)|^2$  – квадрат модуля частотної трансформуючої функції.

Ця залежність має місце при всіх  $i = 1, 2, \dots, v$ ,  $j = 1, 2, \dots, \mu$ .

Кореляційна функція, що відповідає спектральній щільності (9.39), визначається інтегралом:

$$R_{y_i}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{y_i}(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (9.40)$$

Окремо знаходиться дисперсія випадкового вихідного параметра:

$$\sigma_{y_i}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{y_i}(\omega) d\omega. \quad (9.41)$$

Вона представляє собою постійну величину і є інтегральною статистичною характеристикою випадкового вихідного параметра.

**Розглянемо математичне моделювання технічної системи при детермінованих вхідних параметрах і випадкових змінах внутрішніх параметрів.**

В більшості практично важливих задач можна вважати, що внутрішні параметри системи мають незначні випадкові флуктуації (відхилення) відносно деяких середніх значень. Для їх визначення використаємо набір



випадкових чисел. Схема математичного моделювання при цьому відповідає методу Монте-Карло [35].

Згідно з методом Монте-Карло, прийемо, що флуктуації коефіцієнтів математичної моделі є функціями сукупності  $k$  незалежних випадкових величин з певними законами розподілу:

$$g_1^*, g_2^*, \dots, g_k^* \quad (9.42)$$

В більшості практично важливих задач математичного моделювання ці величини можна вважати незалежними від часу. Тоді розрахункові випадкові внутрішні параметри математичної моделі визначаються функціональними залежностями, що включають випадкові величини:

$$\begin{aligned} a_{i0}^* &= a_{i0}(g_1^*, g_2^*, \dots, g_k^*), & b_{j0}^* &= b_{j0}(g_1^*, g_2^*, \dots, g_k^*), \\ &\dots & &\dots \\ a_{in}^* &= a_{in}(g_1^*, g_2^*, \dots, g_k^*), & b_{jm}^* &= b_{jm}(g_1^*, g_2^*, \dots, g_k^*). \end{aligned} \quad (9.43)$$

Враховуючи, що формули (9.43) визначають нескінченну кількість ( $l = 1, 2, \dots, L \rightarrow \infty$ )

можливих значень коефіцієнтів, диференціальне співвідношення між вхідним і вихідним параметрами (9.4) набуде вигляду:

$$a_{inl} \frac{d^n Y_{il}}{dt^n} + \dots + a_{i1l} \frac{dY_{il}}{dt} + a_{i0l} Y_{il} = \sum_{j=1}^{\mu} b_{j0l} X_j + b_{j1l} \frac{d^n X_j}{dt} + \dots + b_{jml} \frac{d^m X_j}{dt^m}, \quad (9.44)$$

$$i = 1, 2, \dots, v, \quad l = 1, 2, \dots, L \rightarrow \infty.$$

В рівнянні (9.44) індексом  $l$  позначена  $l$ -та реалізація набору випадкових величин, що визначають коефіцієнти математичної моделі. Причому значення коефіцієнтів рівняння не залежать від часу, а реалізація вихідного параметра  $Y_{il}$  є звичайною детермінованою функцією часу.

Диференціальне рівняння (9.44) є узагальненням формули (9.4) і визначає сукупність детермінованих  $Y_{il}(t)$  функцій, що є окремими реалізаціями випадкового вихідного параметра. Для рівняння (9.44) мають місце всі положення, встановлені для детермінованих моделей, зокрема формули (9.18)–(9.31), якщо їх розглядати для кожної окремої реалізації випадкових внутрішніх параметрів системи.

Із співвідношення (9.6) з урахуванням (9.44) випливає справедлива для кожної реалізації внутрішніх параметрів детермінована математична модель системи у вигляді матрично-векторної залежності:

$$\{Y_{il}(s)\}_v = [W_{ijl}(s)]_{\mu v} \times \{X_j(s)\}_\mu, \quad l = 1, 2, \dots, L \rightarrow \infty, \quad (9.45)$$

де вираз у квадратних дужках представляє собою матрицю трансформуючих функцій, що відповідає  $l$ -й реалізації коефіцієнтів математичної моделі.

Математична модель (9.45) має властивості адитивності, як і загальна модель (9.6). Тому при моделюванні достатньо розглянути одну пару параметрів вхід-вихід.

Якщо вхідний параметр системи представляє собою детерміновану

гармонічну функцію часу виду (9.18), то згідно (9.19), реалізація відповідного вихідного параметра в функції часу має вигляд:

$$Y_{ij}(t) = X_a \cdot [U_{ij}(\omega) \cdot \cos(\omega t) + V_{ij}(\omega) \cdot \sin(\omega t)], \quad (9.46)$$

де  $U_{ij}(\omega)$ ,  $V_{ij}(\omega)$  – значення дійсної та уявної характеристик, що відповідають 1-й реалізації випадкових коефіцієнтів моделі.

Залежність (9.46) визначає вихідний параметр як лінійну функцію двох випадкових величин  $U_{ij}$  та  $V_{ij}$ .

Згідно з [4], математичне сподівання  $\bar{Y}_{ij}(t)$  та дисперсія  $\sigma_{y_{ij}}^2(t)$  даної лінійної функції визначаються формулами:

$$\bar{Y}_{ij}(t) = X_a \cdot [\bar{U}_{ij}(\omega) \cdot \cos(\omega t) + \bar{V}_{ij}(\omega) \cdot \sin(\omega t)]; \quad (9.47)$$

$$\sigma_{y_{ij}}^2(t) = X_a^2 \cdot [\sigma_{U_{ij}}^2(\omega) \cdot \cos^2(\omega t) + \sigma_{V_{ij}}^2(\omega) \cdot \sin^2(\omega t) + 2 \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t) \cdot \text{cov}\{U_{ij}, V_{ij}\}], \quad (9.48)$$

де  $\bar{U}_{ij}$ ,  $\bar{V}_{ij}$  – математичні сподівання значень дійсної та уявної амплітудно-частотних характеристик;

$\sigma_{U_{ij}}^2(\omega)$ ,  $\sigma_{V_{ij}}^2(\omega)$  – дисперсії значень дійсної та уявної амплітудно-частотних характеристик при частоті  $\omega$ ;

$\text{cov}\{U_{ij}, V_{ij}\}$  – кореляційний момент (коваріація) випадкових значень дійсної та уявної частотних характеристик.

Ці величини знаходяться шляхом обробки статистичних вибірок, складених із значень частотних характеристик, що відповідають окремим реалізаціям сукупності коефіцієнтів математичної моделі. Відповідно вибіркові значення математичних сподівань дисперсій та кореляційного моменту дійсної та уявної характеристик:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{ij}(\omega) &= \frac{1}{L} \cdot \sum_{l=1}^L U_{ijl}(\omega); & \bar{V}_{ij}(\omega) &= \frac{1}{L} \cdot \sum_{l=1}^L V_{ijl}(\omega); \\ \sigma_{U_{ij}}^2 &= \frac{1}{(L-1)} \cdot \sum_{l=1}^L (U_{ijl} - \bar{U}_{ij})^2; & \sigma_{V_{ij}}^2 &= \frac{1}{(L-1)} \cdot \sum_{l=1}^L (V_{ijl} - \bar{V}_{ij})^2; \\ \text{cov}\{U_{ij}, V_{ij}\} &= \frac{1}{(L-1)} \cdot \sum_{l=1}^L (U_{ijl} - \bar{U}_{ij})(V_{ijl} - \bar{V}_{ij}). \end{aligned} \quad (9.49)$$

Кореляційний момент (коваріація), що визначений останньою формулою (9.49), може бути виражений через коефіцієнт кореляції:

$$\rho_{UV} = \text{cov}\{U_{ij}, V_{ij}\} / (\sigma_{U_{ij}} \cdot \sigma_{V_{ij}}).$$

Випадкові дійсна та уявна амплітудно-частотні характеристики утворюють у своїй комбінації комплексну випадкову функцію, що відповідає частотній трансформуючій функції системи. Відповідно 1-та реалізація частотної трансформуючої функції буде:

$$W_{ijl}(j\omega) = U_{ijl}(\omega) + j V_{ijl}(\omega). \quad (9.50)$$

Математичним сподіванням значень цієї випадкової функції є

комплексно-значна детермінована функція дійсного аргументу  $\omega$ :

$$\bar{W}_{ij}(j\omega) = \bar{U}_{ij}(\omega) + j\bar{V}_{ij}(\omega). \quad (9.51)$$

Формула (9.50) визначає систему двох взаємозалежних випадкових величин. Ці величини мають певний закон розподілу. Для складних технічних систем значення випадкових величин залежить від великої кількості параметрів. Тому закон розподілу, як правило, відповідає нормальному. При цьому густина ймовірності значень частотної трансформуючої функції:

$$P[W_{ijl}(j\omega)] = \frac{\exp\left\{-\left[\frac{(U_{ijl} - \bar{U}_{ij})^2}{\sigma_{U_{ij}}^2} - \frac{2\rho_{UV}(U_{ijl} - \bar{U}_{ij}) \cdot (V_{ijl} - \bar{V}_{ij})}{\sigma_{U_{ij}} \cdot \sigma_{V_{ij}}} + \frac{(V_{ijl} - \bar{V}_{ij})^2}{\sigma_{V_{ij}}^2}\right] / 2(1 - \rho_{UV}^2)\right\}}{2\pi\sigma_{U_{ij}} \cdot \sigma_{V_{ij}} \cdot \sqrt{1 - \rho_{UV}^2}}$$

На рис. 9.3 наведено графічну інтерпретацію двовірного закону розподілу випадкових значень частотної трансформуючої функції.

Закон розподілу характеризується еліпсами рівної ймовірності, рівняння яких визначаються залежностями:

$$\lambda_m = \frac{1}{(1 - \rho_{UV}^2)} \left[ \frac{(U_{ijl} - \bar{U}_{ij})^2}{\sigma_{U_{ij}}^2} - \frac{2\rho_{UV}(U_{ijl} - \bar{U}_{ij}) \cdot (V_{ijl} - \bar{V}_{ij})}{\sigma_{U_{ij}} \cdot \sigma_{V_{ij}}} + \frac{(V_{ijl} - \bar{V}_{ij})^2}{\sigma_{V_{ij}}^2} \right] = \text{Const.}$$

Еліпси рівної ймовірності також наведені на рис. 9.3. Вони відображають розсіяння значень частотної трансформуючої функції відносно її математичного сподівання.

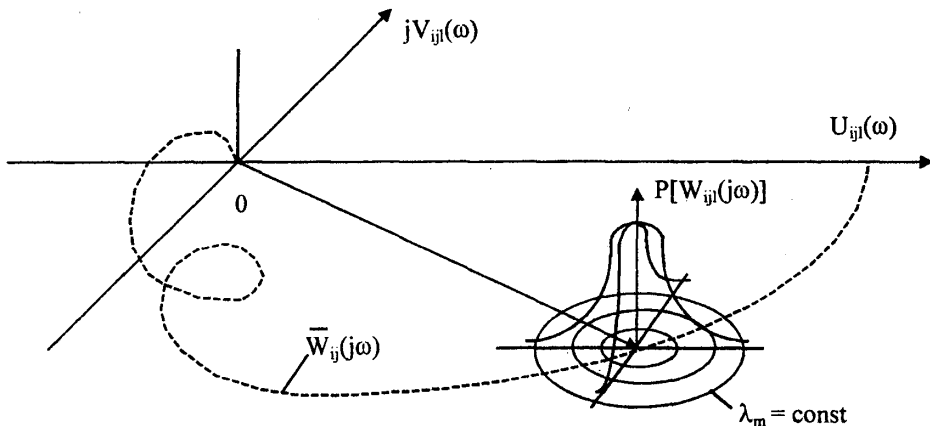


Рис. 9.3. Густина ймовірності розподілу значень частотної трансформуючої функції

Півосі еліпса розташовані під кутом  $\alpha$  до дійсної осі:

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg \left[ \frac{2\rho_{UV} \cdot \sigma_{U_{ij}} \cdot \sigma_{V_{ij}}}{\sigma_{U_{ij}}^2 - \sigma_{V_{ij}}^2} \right].$$

Визначимо випадковий вихідний параметр технічної системи при дії детермінованого вхідного параметра загального виду (9.20), (9.21).

Окрему реалізацію вихідного параметра одержимо узагальненням формули (9.24), в якій значення характеристик  $U_{ij}$  та  $V_{ij}$  є реалізаціями відповідних випадкових величин:

$$Y_{il}(t) = \sum_{k=1}^K x_{ak} \cdot [U_{ijl}(k\omega_0) \cdot \cos(k\omega_0 t + \psi_{ok}) + V_{ijk}(k\omega_0) \cdot \sin(k\omega_0 t + \psi_{ok})]. \quad (9.52)$$

Залежність (9.52) є лінійною функцією випадкових величин  $U_{ijl}$  та  $V_{ijk}$ . Її математичне сподівання буде визначатися формулою:

$$\bar{Y}_{il}(t) = \sum_{k=1}^K x_{ak} \cdot [\bar{U}_{ijl}(k\omega_0) \cdot \cos(k\omega_0 t + \psi_{ok}) + \bar{V}_{ijk}(k\omega_0) \cdot \sin(k\omega_0 t + \psi_{ok})]. \quad (9.53)$$

Для знаходження дисперсії функціональної залежності (9.54) будемо вважати значення характеристик на різних частотах некорельованими. Тоді

$$\sigma_{yi}^2(t) = \sum_{k=1}^K [\sigma_{U_{ijl}}^2(k\omega_0) \cdot \cos^2(k\omega_0 t + \psi_{ok}) + \sigma_{V_{ijk}}^2(k\omega_0) \cdot \sin^2(k\omega_0 t + \psi_{ok}) + \frac{1}{2} \sin[2(k\omega_0 t + \psi_{ok})] \cdot \text{cov}\{U_{ijl}, V_{ijk}\}]. \quad (9.54)$$

Формули (9.53) і (9.54) визначають статистичні характеристики випадкових вихідних параметрів при детермінованих вхідних параметрах і випадкових змінах внутрішніх параметрів системи.

**Розглянемо математичне моделювання технічної системи при одночасних випадкових вхідних параметрах і випадковій зміні внутрішніх параметрів системи.**

Як і раніше, внутрішні параметри (коефіцієнти) математичної моделі будуть визначені залежностями (9.43).

Диференціальне співвідношення між випадковими вхідним і вихідним параметрами розглядається для всіх  $l$  реалізацій внутрішніх параметрів і буде мати вигляд аналогічний (9.44), а саме:

$$a_{nl} \frac{d^n Y_{il}^*}{dt^n} + \dots + a_{1l} \frac{dY_{il}^*}{dt} + a_{0l} Y_{il}^* = \sum_{j=1}^{\mu} b_{j0l} X_j^* + b_{j1l} \frac{dX_j^*}{dt} + \dots + b_{jml} \frac{d^m X_j^*}{dt^m}, \quad (9.55)$$

$$i = 1, 2, \dots, v, \quad j = 1, \quad l = 1, 2, \dots, L \rightarrow \infty,$$

де  $X_j^* = X_j^*(t)$  – випадковий вхідний параметр у вигляді стохастичної функції часу;

$Y_{il}^* = Y_{il}^*(t)$  – випадкова функція, що визначає вихідний параметр, для  $l$ -тої реалізації випадкових внутрішніх параметрів системи.

Диференціальне співвідношення (9.55) є подальшим узагальненням формул (9.4) та (9.44). Воно визначає сукупність стохастичних функцій часу  $Y_{il}^*(t)$ , які відповідають випадковому вихідному параметру для конкретної реалізації набору внутрішніх параметрів.

Для рівняння (9.55) мають місце всі положення, встановлені для моделей з детермінованими внутрішніми параметрами при випадкових вхідних параметрах, а саме: залежності (9.30)–(9.41), якщо їх визначити для кожної окремої реалізації випадкових внутрішніх параметрів системи.

Із співвідношення (9.30) випливає математична модель системи у вигляді матрично-векторної залежності, що зв'язує зображення по Лапласу стохастичних функцій часу  $Y_{il}^*(t)$  та  $X_j^*(t)$ :

$$\{Y_{il}^*(S)\}_v = [W_{ijl}(S)]_{v\mu} \{X_j^*(S)\}_\mu, \quad l = 1, 2, \dots, L \rightarrow \infty, \quad (9.56)$$

де матриця трансформуючих функцій відповідає залежності (9.45).

Відповідно до даної моделі (9.56), встановлюється зв'язок між спектральними щільностями стохастичних вхідного та вихідного параметрів.

Математична модель у вигляді (9.56) є узагальненням моделі (9.45) в тому, що (9.56) визначає не один вектор вихідних параметрів, а нескінченну сукупність ( $L \rightarrow \infty$ ) векторів випадкових вихідних параметрів.

Враховуючи адитивність моделі можна в (9.56) розглядати лише одну пару компонент векторів входу і виходу, а саме:

$$Y_{il}^*(S) = W_{ijl}(S) \cdot X_j^*(S), \quad (9.57)$$

$$i = 1, 2, \dots, v; \quad j = 1, 2, \dots, \mu; \quad l = 1, 2, \dots, L \rightarrow \infty.$$

Розглянемо знаходження стохастичного вихідного параметра для практично важливого випадку, коли вхідний параметр є стаціонарним ергодичним випадковим процесом. Тоді для вхідного параметра, як показано раніше, мають місце залежності (9.32)–(9.38), що визначають кореляційну функцію, закон розподілу густини ймовірностей та спектральну щільність вхідного параметра.

Будемо вважати, що спектральна щільність вхідного параметра  $X_j^*(t)$  визначається функціями  $S_{xj}(\omega)$ .

Тоді згідно з (9.57), спектральні щільності для всіх  $L$  реалізацій вихідного параметра визначаються залежністю [6]:

$$S_{yil}(\omega) = |W_{ijl}(j\omega)|^2 \cdot S_{xj}(\omega), \quad (9.58)$$

$$i = 1, 2, \dots, v; \quad l = 1, 2, \dots, L \rightarrow \infty,$$

яка включає  $|W_{ijl}(j\omega)|^2$  – значення квадрата модуля частотної трансформуючої функції для  $l$ -ої реалізації.

Залежність (9.58) є узагальненням формули (9.39) в тому, що вона визначає не одну спектральну щільність як (9.39), а нескінченну сукупність спектральних щільностей, що відповідає нескінченній сукупності реалізацій вихідних параметрів – випадкових функцій часу.

За значеннями сукупності спектральних щільностей вихідного параметра знаходиться сукупність кореляційних функцій:

$$R_{yil}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_{yil}(\omega) \cdot \cos(\omega\tau) \cdot d\omega, \quad (9.59)$$

а також дисперсій окремих реалізацій вихідного параметра:

$$\sigma_{yil}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{yil}(\omega) d\omega. \quad (9.60)$$

Підставивши в (9.60) значення (9.58) спектральної щільності окремої реалізації вихідного параметра, знайдемо:

$$\sigma_{yil}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [W_{ijl}(j\omega)]^2 \cdot S_{xj}(\omega) \cdot d\omega, \quad l = 1, 2, \dots, L \rightarrow \infty. \quad (9.61)$$

Значення дисперсій, що визначаються для окремих реалізацій формулами (9.60) та (9.61), утворюють статистичну вибірку при

$$l = 1, 2, \dots, L,$$

де  $L$  – число розглянутих реалізацій.

Із цієї статистичної вибірки знаходиться математичне середнє значення дисперсії для всіх  $L$  реалізацій:

$$\overline{\sigma_{yil}^2} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \sigma_{yil}^2. \quad (9.62)$$

Об'єднуючи (9.61) та (9.62) і змінюючи черговість операцій, одержимо:

$$\overline{\sigma_{yil}^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L |W_{ijl}(j\omega)|^2 S_{xj}(\omega) \right\} d\omega. \quad (9.63)$$

Вираз у фігурних дужках при  $L \rightarrow \infty$  являє собою математичне сподівання квадрата модуля частотної трансформуючої функції для частоти  $\omega$  і визначається формулою:

$$\overline{|W_{ij}(j\omega)|^2} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L |W_{ijl}(j\omega)|^2. \quad (9.64)$$

Тоді математичне середнє значення дисперсії:

$$\overline{\sigma_{yi}^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \overline{|W_{ij}(j\omega)|^2} \cdot S_{xj}(\omega) \cdot d\omega.$$

Визначимо розсіяння дисперсії (дисперсію дисперсії) вихідного параметра. Згідно із статистикою (9.61), після центрування значення дисперсії як випадкової величини розсіяння значень дисперсії знайдено у вигляді:

$$\sigma_{\sigma_i}^4 = \frac{1}{(L-1)} \sum_{l=1}^L \left( \sigma_{yi}^2 - \overline{\sigma_{yi}^2} \right)^2. \quad (9.65)$$

Підставивши в формулу (9.65) значення величини із (9.61), (9.63) та (9.64), після перетворень знайдемо:

$$\sigma_{\sigma_i}^4 = \frac{1}{(L-1)} \sum_{j=1}^L \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \left\{ \left[ |W_{ijl}(j\omega)|^2 - \overline{|W_{ij}(j\omega)|^2} \right]^2 \right\} \cdot S_{xj}(\omega) \cdot d\omega.$$

Вираз в фігурних дужках даної формули являє собою дисперсію виходу математичної моделі, квадрат модуля частотної трансформуючої функції якої представляє собою різницю дійсного квадрата модуля для  $l$ -ї реалізації та

математичного сподівання квадрата модуля, визначеного залежністю (9.64), а саме:

$$|W_{\Delta ij}(j\omega)|^2 = |W_{ij}(j\omega)|^2 - \overline{|W_{ij}(j\omega)|^2}. \quad (9.67)$$

Об'єднуючи залежності (9.66) та (9.67), знайдемо розсіяння дисперсії вихідного параметра у вигляді:

$$\sigma_{\Delta i}^4 = \frac{1}{(L-1)} \sum_{j=1}^L (\sigma_{\Delta ij}^2)^2,$$

де дисперсія для  $l$ -ї реалізації визначена формулою:

$$\sigma_{\Delta ij}^2 = \sigma_{Yil}^2 - \overline{\sigma_{Yil}^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |W_{\Delta ij}(j\omega)|^2 \cdot S_{xj}(\omega) \cdot d\omega.$$

Формули (9.62)–(9.68) визначають інтегральні статистичні характеристики вихідного параметра.

З метою розширення аналізу ці характеристики доповнені сукупністю інтегральних спектральних характеристик вихідного параметра. Ансамбль реалізацій спектральних щільностей вихідного параметра визначено залежністю (9.58). Відповідно математичне середнє спектральної щільності при частоті  $\omega$  складає:

$$\overline{S_{Yil}}(\omega) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L |W_{ijl}(j\omega)|^2 S_{xj}(\omega).$$

Із врахуванням залежності (9.64), що визначає математичне сподівання квадрата модуля частотної трансформуючої функції, одержимо математичне середнє спектральної щільності у вигляді:

$$\overline{S_{Yil}}(\omega) = \overline{|W_{ij}(j\omega)|^2} \cdot S_{xj}(\omega).$$

Аналогічно визначиться дисперсія спектральної щільності вихідного параметра при фіксованій частоті:

$$D_{S_{Yil}}(\omega) = \left\{ \frac{1}{L-1} \sum_{l=1}^L \left[ |W_{ijl}(j\omega)|^2 - \overline{|W_{ij}(j\omega)|^2} \right]^2 \right\} \cdot S_{xj}^2(\omega),$$

де у фігурних дужках знаходиться дисперсія квадрата модуля частотної трансформуючої функції:

$$D_{Q_{W_{j\omega}}}(\omega) = \frac{1}{L-1} \sum_{l=1}^L \left[ |W_{ijl}(j\omega)|^2 - \overline{|W_{ij}(j\omega)|^2} \right]^2.$$

Таким чином, дисперсія спектральної щільності вихідного параметра технічної системи в функції частоти буде:

$$D_{S_{Yil}}(\omega) = D_{Q_{W_{j\omega}}}(\omega) \cdot S_{xj}^2(\omega).$$

Останні залежності дозволяють визначити спектральну щільність вихідного параметра технічної системи як випадкову функцію частоти з відповідними статистичними характеристиками, а саме: математичним середнім спектральної щільності та дисперсією спектральної щільності,

причому ці величини є функціями частоти. Спектральна щільність вихідного параметра залежить як від статистичних характеристик вхідного параметра, так і від статистичних характеристик частотної трансформуючої функції системи, тобто від зміни випадкових внутрішніх параметрів.

З метою апробації комплексної стохастичної математичної моделі виконано розрахунок спектральної щільності вихідного параметра динамічної системи металорізального верстата при випадкових вхідних параметрах і випадкових змінах внутрішніх параметрів токарного верстата [58–61].

Вхідним параметром системи є флуктуація сили різання, що має вигляд широкополосного випадкового процесу, вихідним – динамічна похибка обробки. На рис. 9.4 наведено результати розрахунків у порівнянні з експериментальними даними.

Встановлено, що закон розподілу значень спектральної щільності при фіксованій частоті, близький до нормального:

$$P_{S_{VI}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot D_{S_{VI}}(\omega)} \exp \left\{ -\frac{[S_{VI}(\omega) - \overline{S_{VI}}(\omega)]^2}{2D_{S_{VI}}(\omega)} \right\}.$$

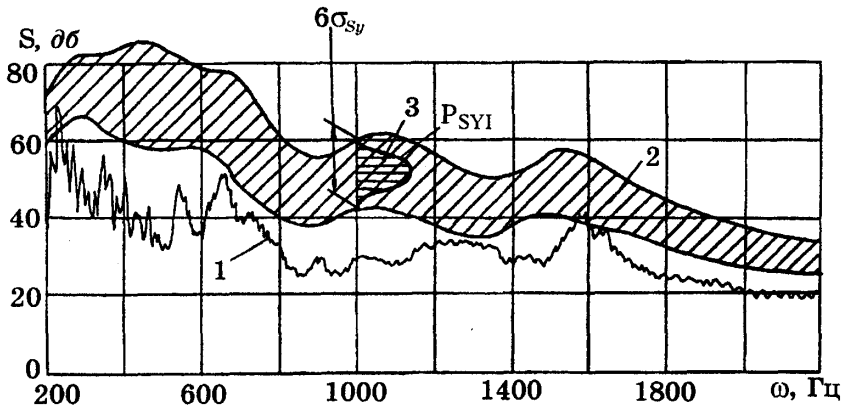


Рис. 9.4. Порівняння розрахунку спектральної щільності прискорень стохастичного коливального процесу з результатами експерименту: 1 – експеримент; 2 – діапазон розрахункових значень спектральних щільностей; 3 – закон розподілу значень спектральної щільності

Із порівняння розрахункових та експериментальних значень спектральних щільностей впливає їх кількісна та якісна відповідність. Деяке зміщення розрахункового спектра над експериментальною кривою пояснюється неврахованими при розрахунках нелінійними дисипативними властивостями динамічної системи верстата.



### 9.3. Математичне моделювання позиційних приводів металорізальних верстатів з використанням символічної математичної моделі

В технологічних машинах різного призначення використовуються позиційні механічні приводи. В таких приводах між положеннями вхідного і вихідного елементів є взаємно однозначний зв'язок (позиційний зв'язок).

Характеристики точності позиційних приводів визначаються численними факторами як детермінованого, так і випадкового характеру. Врахування цих факторів доцільно здійснити методами математичного моделювання.

Розглянемо ряд практично важливих конструкцій позиційних приводів.

На рис. 9.5 наведена схема привода з механічною передачею у вигляді кулісно-важільного механізму і основні параметри привода.

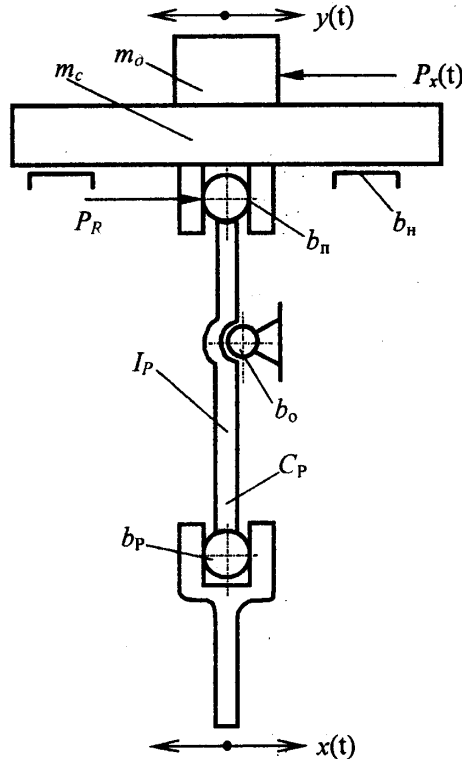


Рис. 9.5. Схема позиційного привода з кулісним механізмом переміщення:  $y(t)$  – переміщення стола (вихідна координата);  $P_x(t)$  – корисне навантаження;  $m_c$ ,  $m_d$  – маси стола і деталі відповідно;  $I_P$  – момент інерції важеля;  $C_P$  – еківалентна жорсткість важеля;  $b_n$ ,  $b_n$ ,  $b_o$ ,  $b_p$  – коефіцієнти опору відповідно напрямних стола, кулісного механізму, опори важеля та вузла переміщення важеля;  $x(t)$  – вхідна координата



столом характеризуються дисипативними коефіцієнтами, які визначають втрати енергії в напрямних стола, підшипниках і передачах привода.

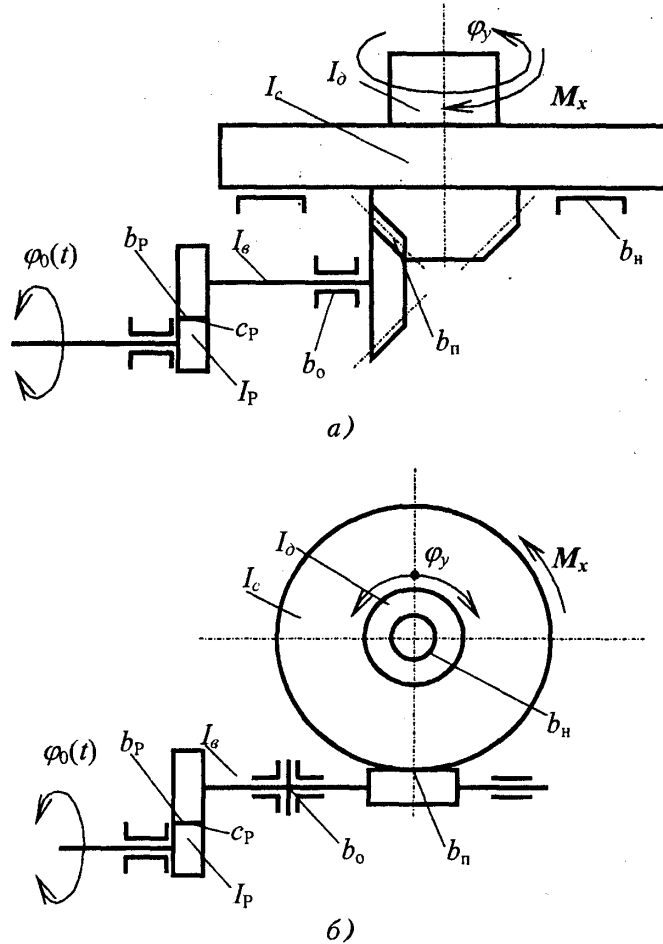


Рис. 9.7. Схеми позиційних приводів із поворотним столом:  
 а – із зубчастою конічною передачею; б – із черв'ячною передачею;  
 $b_n$  – коефіцієнт опору в напрямних стола;  $b_n$  – коефіцієнт опору  
 в конічній чи черв'ячній передачі;  $b_o$  – коефіцієнт опору підшипників;  
 $c_p$  – еквівалентна жорсткість кінематичного ланцюга привода

Позиційні приводи часто мають гідравлічні чи пневматичні механізми переміщення. На рис. 9.8 наведена схема позиційного привода з пневматичним механізмом руху столу у вигляді мембранного пневмоциліндра.

На схемі показано вхідний сигнал привода у вигляді тиску  $p_0 = x$ . Основними нелінійностями привода є нелінійні залежності сил опору. Для пневматичного мембранного привода нелінійності сил опору не є суттєвими. Але при використанні поршневого пневмоциліндра сили опору мають суттєву

нелінійність, що відповідає силі змішаного тертя в парі поршень-гільза.

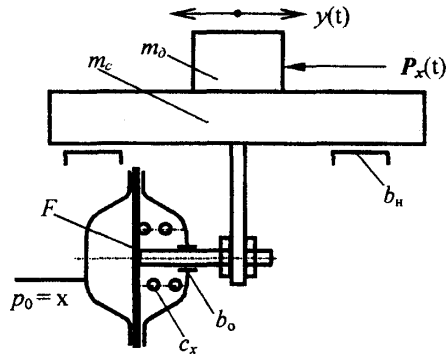


Рис. 9.8. Схема стола із одностороннім пневматичним приводом

На рис. 9.9 наведено схему поширеного в технологічному обладнанні прецизійного позиційного привода з передачею гвинт-гайка [86-89, 93, 95].

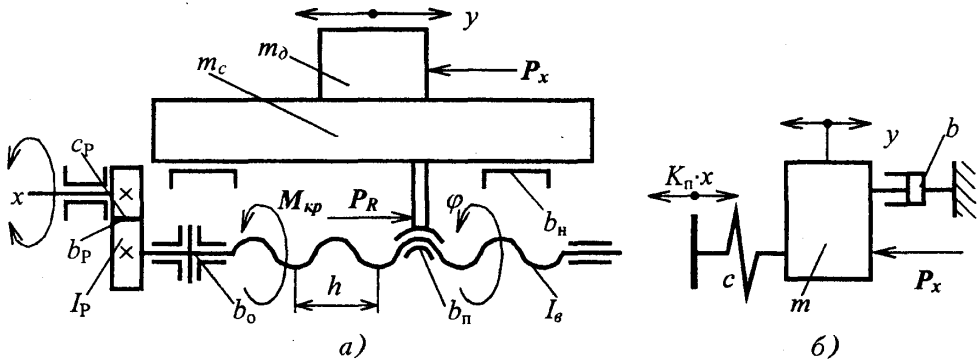


Рис. 9.9. Принципова схема (а) позиційного механічного привода з передачею гвинт-гайка та його динамічна модель (б):  $y$  – переміщення стола;  $P_x$  – корисне навантаження;  $m_d$ ,  $m_c$  – маси деталі та стола відповідно;  $I_g$  – момент інерції гвинта;  $I_p$  – момент інерції редуктора;  $b_w$ ,  $b_n$ ,  $b_o$ ,  $b_p$  – коефіцієнти опору відповідно напрямних стола, пари гвинт-гайка, підшипників гвинта та редуктора;  $c_p$  – еквівалентна крутильна жорсткість редуктора;  $P_R$  – зусилля, яке діє з боку гвинта на стіл;  $M_{kp}$  – крутний момент в перерізі гвинта;  $\varphi$  – кут повороту гвинта;  $h$  – крок гвинта;  $x$  – кут повороту приводного вала

В даному позиційному приводі мають місце складні робочі процеси. Вони проявляються в наявності суттєвих нелінійностей характеристик окремих вузлів привода. Основними нелінійностями є сили сухого та змішаного тертя, люфти і зазори в кінематичних парах. Це, зокрема, люфт в передачі гвинт-гайка, зазори між зубцями шестерень в редукторі, зазори в підшипниках. В прецизійних приводах ці люфти і зазори зведені до мінімуму

або ліквідовані зовсім.

Всі сили опору мають нелінійні складові з гістерезисом. Це стосується напрямних стола, тертя в передачі гвинт-гайка та у підшипниках. В прецизійних приводах сили тертя мають характеристики, близькі до лінійних. Цього досягнуто використанням спеціальної системи змащування, застосуванням передачі гвинт-гайка кочення.

Всі вищенаведені позиційні приводи відповідають механічній динамічній системі із одним ступенем вільності. Для розробки математичних моделей таких систем застосовують різні методи.

Звичайно складають рівняння рівноваги сил в динаміці, використовуючи **загальне рівняння динаміки** або із застосуванням **принципу Даламбера**. Більш загальним методом є використання рівняння Лагранжа 2-го роду.

Розглянемо **застосування рівняння Лагранжа 2-го роду** для розробки спрощеної математичної моделі практично важливого прецизійного механічного позиційного привода з передачею гвинт-гайка (рис. 9.9).

При розробці математичної моделі характеристики всіх окремих елементів привода приймаються лінійними. Вважається, що всі залежності є однозначними, люфти і зазори в кінематичних парах відсутні.

Диференціальне рівняння руху стола знайдемо використовуючи рівняння Лагранжа другого роду, яке має вигляд [74; 75]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{\partial \Pi}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial \dot{y}} + Q, \quad (9.69)$$

де  $T$  – кінетична енергія механічної системи позиційного привода;

$\Pi$  – потенціальна енергія системи, яка визначає консервативну складову узагальненої сили;

$R$  – дисипативна функція Релея, яка враховує дисипативну складову узагальненої сили;

$Q$  – узагальнена сила, що діє на привод ззовні.

**Кінетична енергія системи** має складові, що відповідають кінетичній енергії стола і кінетичній енергії кінематичного ланцюга привода:

$$T = \frac{1}{2} (m_c + m_d) \cdot \dot{y}^2 + \frac{1}{2} (I_b + I_p) \cdot \dot{\varphi}^2. \quad (9.70)$$

В передачі гвинт-гайка наявні кінематичні співвідношення між поступальним переміщенням стола і поворотом гвинта. Вони мають вигляд:

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{y}{h}; \quad \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dy}{dt}. \quad (9.71)$$

Враховуючи кінематичні співвідношення (9.71), із (9.70) знайдемо загальну кінетичну енергію динамічної системи привода:

$$T = \frac{1}{2} \left[ m_c + m_d + (I_b + I_p) \cdot \frac{4\pi^2}{h^2} \right] \cdot \dot{y}^2.$$

Кінетична енергія не залежить від переміщення у. Тому її частинна похідна:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0.$$

Знайдемо частинну похідну кінетичної енергії по швидкості стола:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \left[ m_c + m_e + (I_b + I_p) \cdot \frac{4\pi^2}{h^2} \right] \cdot \dot{y}.$$

Похідна по часу частинної похідної кінетичної енергії визначається шляхом диференціювання і відповідає залежності:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = \left[ m_c + m_e + (I_b + I_p) \cdot \frac{4\pi^2}{h^2} \right] \cdot \ddot{y} = m \cdot \ddot{y}, \quad (9.72)$$

де вираз в квадратних дужках є приведеною масою привода:

$$m = m_c + m_e + (I_b + I_p) \frac{4\pi^2}{h^2}.$$

**Потенціальна енергія привода** залежить від пружності кінематичного ланцюга (редуктора) і складає:

$$\Pi = \frac{1}{2} c_p \cdot (x - \varphi)^2. \quad (9.73)$$

де  $c_p$  – еквівалентна крутильна жорсткість редуктора.

Використовуючи кінематичні співвідношення (9.71), знайдемо:

$$\Pi = \frac{1}{2} c_p \cdot \left( x - \frac{2\pi}{h} y \right)^2.$$

Частинна похідна від потенціальної енергії по переміщенню стола:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = c_p \cdot \left( x - \frac{2\pi}{h} y \right) \cdot \left( -\frac{2\pi}{h} \right) = -\frac{2\pi}{h} \cdot c_p \cdot x + \left( \frac{2\pi}{h} \right)^2 \cdot c_p \cdot y. \quad (9.74)$$

Дисипативна функція Релея для динамічної системи привода:

$$R = \frac{1}{2} b_n \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \cdot (b_n + b_o + b_p) \cdot \dot{\varphi}^2.$$

Використовуючи кінематичне співвідношення (9.71), одержимо:

$$R = \frac{1}{2} \cdot \left[ b_n + \left( \frac{2\pi}{h} \right)^2 \cdot (b_n + b_o + b_p) \right] \cdot \dot{y}^2.$$

Знайдемо частинну похідну дисипативної функції:

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{y}} = \left[ b_n + \left( \frac{2\pi}{h} \right)^2 \cdot (b_n + b_o + b_p) \right] \cdot \dot{y} = b \cdot \dot{y}, \quad (9.75)$$

де постійна величина в квадратних дужках рівна:

$$b = b_n + \left( \frac{2\pi}{h} \right)^2 \cdot (b_n + b_o + b_p)$$

представляє собою еквівалентний коефіцієнт опору позиційного привода.

**Узагальнена сила**  $Q$ , що діє на привод ззовні, з точністю до знака співпадає із корисним навантаженням на деталь. Відповідно

$$Q = -P_x. \quad (9.76)$$

Підставимо значення величин із (9.72), (9.74), (9.75), (9.76) в рівняння Лагранжа другого роду (9.69) і одержимо звичайне диференціальне рівняння:

$$m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + c_p \cdot \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \cdot y = \frac{2\pi}{h} \cdot c_p \cdot x - P_x. \quad (9.77)$$

Таке ж рівняння можна одержати і для інших конструкцій приводів, наведених на рис. 9.5–9.8. Відмінність рівнянь, складених для інших приводів, полягає лише в значеннях коефіцієнтів.

Виконаємо аналіз математичної моделі привода у вигляді рівняння (9.77).

Розглянемо рух стола в окремому випадку, що відповідає усталеному рівномірному обертанню гвинта. При цьому:

$$x = \omega_0 t, \quad (9.78)$$

де  $\omega_0$  – постійна кутова швидкість обертання гвинта.

Введемо нову змінну у вигляді відносного зміщення стола:

$$y_\Delta = y - v_0 \cdot t, \quad (9.79)$$

де  $v_0$  – постійне значення швидкості стола.

Ця змінна визначає відхилення положення стола від його номінального значення.

Знайдемо похідні змінної  $y_\Delta$ :

$$\dot{y}_\Delta = \dot{y} - v_0; \quad \ddot{y}_\Delta = \ddot{y}. \quad (9.80)$$

Із залежностей (9.79) та (9.80) знайдемо:

$$y = y_\Delta + v_0 \cdot t; \quad \dot{y} = \dot{y}_\Delta + v_0. \quad (9.81)$$

Підставимо величини із (9.80) та (9.81) у диференціальне рівняння (9.77) і одержимо

$$m\ddot{y}_\Delta + b\dot{y}_\Delta + bv_0 + c_p \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 y_\Delta + c_p \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 v_0 t = \frac{2\pi}{h} c_p \cdot \omega_0 t - P_x. \quad (9.82)$$

Із кінематичного співвідношення (9.71) випливає:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{h} v_0. \quad (9.83)$$

Враховуючи дану залежність із (9.82) одержимо рівняння руху стола у відхиленнях відносно номінального значення положення стола:

$$m\ddot{y}_\Delta + b\dot{y}_\Delta + c_p \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 y_\Delta = -bv_0 - P_x. \quad (9.84)$$

В правій частині рівняння з'явилася постійна складова, яка відповідає постійній (квазістатичній) силі опору, що має місце при русі стола. Ця складова не впливає на динамічну точність позиціювання привода.

Перейдемо до нової змінної в диференціальному рівнянні (9.84):

$$Y = y_{\Delta} + \frac{bv_0}{c_p} \cdot \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2. \quad (9.85)$$

Введемо нові коефіцієнти, які зв'язані з параметрами привода:

$$T = \frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{c_p}}; \quad \xi = \frac{h}{4\pi} \cdot \frac{b}{\sqrt{mc_p}}; \quad K = \frac{h^2}{4\pi^2 c_p}. \quad (9.86)$$

При цьому диференціальне рівняння (9.84) набуде вигляду:

$$T^2 \frac{d^2 Y}{dt^2} + 2\xi T \frac{dY}{dt} + Y = K P_x. \quad (9.87)$$

Це рівняння є математичною моделлю привода, поданий у нормалізованому (стандартному) вигляді.

Для аналізу динамічних процесів у приводі використаємо динамічну характеристику системи у вигляді перехідної функції. Перехідна функція привода визначає відхилення положення стола від номінального значення при ступінчастій зміні нормованого корисного навантаження на стіл у вигляді:

$$P_x = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}. \quad (9.88)$$

Рівняння (9.87), в якому сила визначена одиничною ступінчастою функцією (9.88), описує динаміку процесу позиціювання привода.

Дане рівняння є звичайним диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами і ненульовими початковими умовами:

$$T^2 \frac{d^2 Y}{dt^2} + 2\xi T \frac{dY}{dt} + Y = K \cdot 1(t). \quad (9.89)$$

Початкові умови для цього рівняння визначаються положенням і швидкістю стола в деякий (нульовий) момент часу:

$$\text{при } t = 0 \quad Y = Y_0, \quad \frac{dY}{dt} = V_0.$$

Для розв'язку диференціального рівняння (9.89) складемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$T^2 \cdot r^2 + 2\xi T \cdot r + 1 = 0,$$

де  $r$  – деяка змінна, визначена в полі комплексних чисел.

Корені характеристичного рівняння є комплексними спряженими:

$$r_{1,2} = -\frac{\xi}{T} \pm \frac{j \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}{T}.$$

Розв'язок диференціального рівняння, який відповідає парі комплексних спряжених коренів характеристичного рівняння, має вигляд:

$$Y = K + C_1 e^{-\frac{\xi}{T} t} \cdot \sin \left[ \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} \cdot t + C_2 \right], \quad (9.90)$$

де перший доданок в правій частині (9.90) відповідає окремому розв'язку неоднорідного рівняння (9.89), а другий доданок – загальному розв'язку



однорідного рівняння. Постійні інтегрування  $C_1$  та  $C_2$  визначаються із початкових умов.

Для визначення постійних знайдемо похідну розв'язку:

$$\frac{dY}{dt} = C_1 \left\{ -\frac{\xi}{T} \cdot e^{-\frac{\xi}{T}t} \cdot \sin \left[ \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \cdot t + C_2 \right] + e^{-\frac{\xi}{T}t} \cdot \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \cdot \cos \left[ \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \cdot t + C_2 \right] \right\}. \quad (9.91)$$

Для знаходження постійних інтегрування з початкових умов та залежності (9.90) впливає система рівнянь (при  $t = 0$ ):

$$\begin{cases} Y(t)|_{t=0} = Y_0 = K + C_1 \cdot \sin C_2 \\ \left. \frac{dY}{dt} \right|_{t=0} = V_0 = C_1 \left\{ \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \cdot \cos C_2 - \frac{\xi}{T} \cdot \sin C_2 \right\} \end{cases}. \quad (9.92)$$

З першого рівняння системи (9.92) знайдемо співвідношення між постійними інтегрування:

$$C_1 \cdot \sin(C_2) = Y_0 - K.$$

Використавши дане співвідношення виразимо константу  $C_1$  через  $C_2$ .

Підставимо значення величини  $C_1$  в друге рівняння системи (9.92), одержимо трансцендентне рівняння для знаходження невідомого  $C_2$ :

$$V_0 = (Y_0 - K) \left\{ \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \frac{1}{\operatorname{tg} C_2} - \frac{\xi}{T} \right\}.$$

Звідси знайдемо значення постійної  $C_2$  в функції початкових умов і всіх параметрів привода:

$$C_2 = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\frac{T \cdot V_0}{Y_0 - K} + \xi} \right\}.$$

Враховуючи зв'язок між тригонометричними функціями, знайдемо:

$$\sin(C_2) = \frac{\operatorname{tg}(C_2)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(C_2)}}.$$

Відповідно одержимо співвідношення між постійними інтегрування:

$$C_1 = \frac{(Y_0 - K) \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(C_2)}}{\operatorname{tg} C_2}.$$

Підставивши значення постійної  $C_2$ , знайдемо постійну  $C_1$  в функції початкових умов і параметрів привода:

$$C_1 = \frac{(Y_0 - K)}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sqrt{\left( \frac{TV_0}{Y_0 - K} \right)^2 + 2\xi \cdot \frac{TV_0}{Y_0 - K} + 1}.$$

Таким чином, розв'язок рівняння (9.89) для ненульових початкових умов:

$$Y(t) = K + \frac{\sqrt{\Gamma^2 V_0^2 + 2\xi \Gamma V_0 (Y_0 - K) + (Y_0 - K)^2}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{-\frac{\xi}{T} \cdot t} \times \\ \times \sin \left[ \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} \cdot t + \arctg \left( \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi + \frac{\Gamma V_0}{Y_0 - K}} \right) \right]. \quad (9.94)$$

Для нульових початкових умов  $Y_0 = V_0 = 0$  розв'язок рівняння (9.89):

$$Y(t) = K \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{-\frac{\xi}{T} \cdot t} \cdot \sin \left[ \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} \cdot t + \arctg \sqrt{\frac{1}{\xi^2} - 1} \right] \right\}. \quad (9.95)$$

Розв'язок (9.94) визначає відхилення положення стола від номінального значення. Це відхилення являє собою основну складову динамічної похибки позиціонування привода. **Динамічна похибка залежить від випадкових параметрів** привода, які враховуються в значеннях постійних величин  $K$ ,  $\xi$ ,  $T$  та випадкових початкових умов  $Y_0$ ,  $V_0$ .

Функціональна залежність (9.94) представляє собою символічну математичну модель, яка визначає динаміку позиційного привода верстата.

Для визначення впливу випадкових параметрів на динамічну похибку привода виконані розрахунки перехідних процесів. Розрахунки проведені в програмному середовищі MathCAD. Нижче наведено приклад аналізу процесу позиціонування конкретного привода металорізального верстата. На рис. 9.10 наведено розрахований ансамбль реалізацій випадкового процесу зміни положення стола при ступінчастій зміні сили різання.

Залежності одержані розрахунком за формулою (9.94). Початкові значення положення стола  $Y_0$  та його швидкості  $V_0$  були задані як випадкові числа з рівномірним законом розподілу, параметри  $\xi$  і  $T$  прийняті постійними. Значення коефіцієнта  $K$  задавалось генератором випадкових чисел з нормальним законом розподілу.

Із аналізу результатів розрахунків випливає, що динамічна похибка змінюється за затухаючим гармонічним законом з періодом 6...8 мс. Амплітуда динамічної похибки досягає 80 % від статичного значення похибки, що має місце після затухання перехідного процесу.

На рис. 9.11 показано вплив випадкової зміни коефіцієнтів опору привода на динамічну похибку позиціонування.

Зміна сил опору мало впливає на період коливань стола при його виході в позицію. Зміна періоду коливань не перевищує 10 % від середнього значення. В той же час випадкові зміни сил опору суттєво впливають на амплітуду коливань та швидкість затухання перехідного процесу. Зменшення сил опору

на 20 % в 2 рази зменшує максимальну похибку привода та скорочує час перехідного процесу в 5 і більше разів.

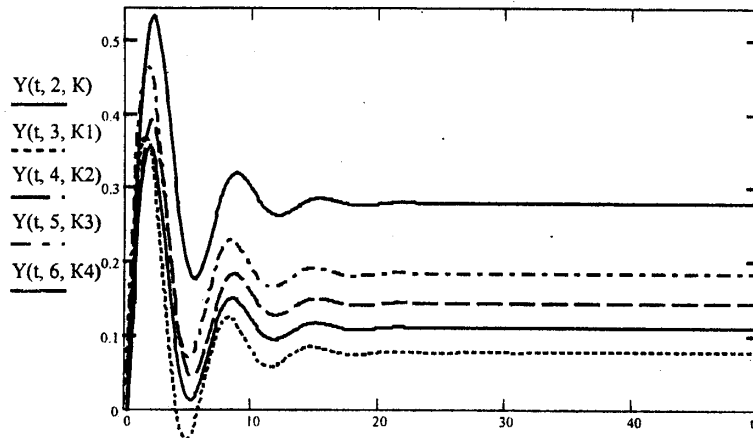


Рис. 9.10. Вплив випадкового значення  $K$  на динамічну похибку процесу позиціонування стола

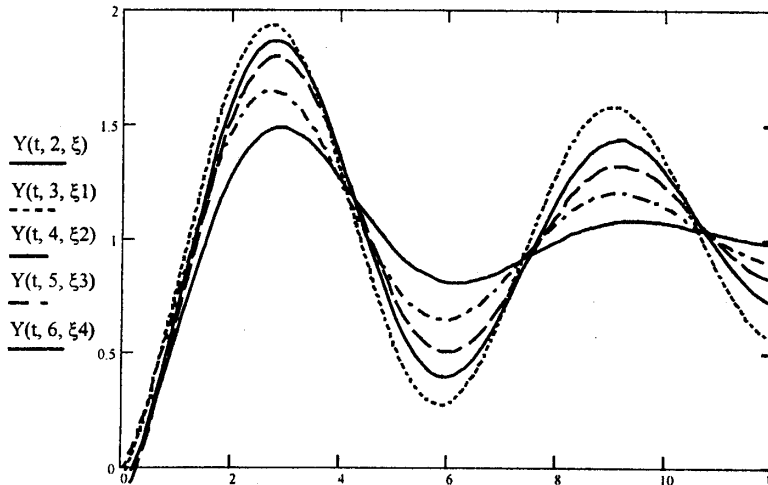


Рис. 9.11. Вплив випадкового значення сил опору, що задається коефіцієнтом  $\xi$  на динамічну похибку процесу позиціонування стола

На рис. 9.12 наведено ансамбль реалізацій перехідного процесу в приводі при випадкових змінах постійної часу привода (параметра  $T$ ).

Зміни параметра  $T$  майже не впливають на значення максимальної динамічної похибки, але суттєво впливають на період (частоту) коливань. Зміни періоду визначаються в основному жорсткісними параметрами привода.

Звичайно випадкові параметри привода змінюються в обмеженому діапазоні

( $\pm 5\%$ ). При цьому суттєвих змін перехідного процесу не спостерігається. Ансамбль реалізацій перехідного процесу займає обмежену вузьку смугу.

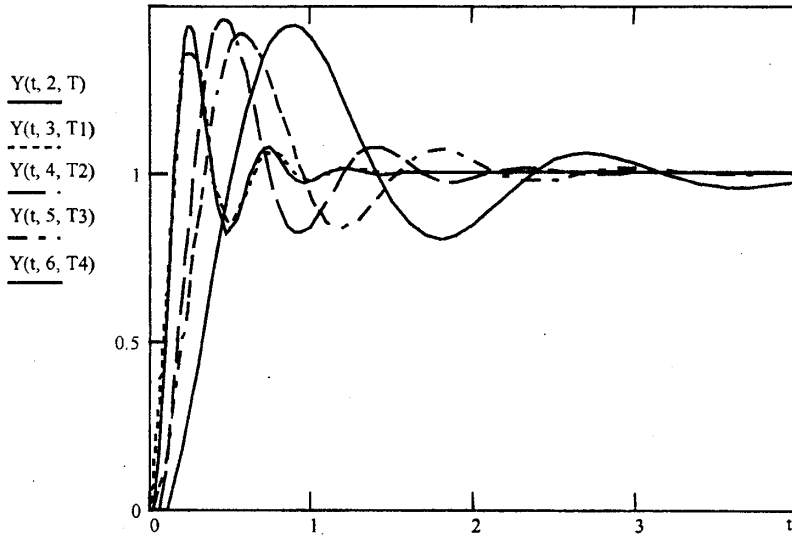


Рис. 9.12. Вплив випадкового значення параметра  $T$  на динамічну похибку процесу позиювання стола

На рис. 9.13 наведено ансамбль реалізацій перехідного процесу привода при випадкових змінах як параметрів привода, так і початкових умов перехідного процесу. Загалом значення перехідних функцій, що відповідають різним реалізаціям, розрізняються на  $1\ldots 3\%$ .

Для знаходження статистичних характеристик перехідного процесу виконана статистична обробка ансамблю реалізацій і знайдені математичне сподівання та розсіяння перехідної функції. Для цього використані формули усереднення. Перехідна функція є суттєво нестационарним випадковим процесом. Математичне сподівання перехідної функції залежить від часу і знаходиться за формулою:

$$\bar{Y}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i(t),$$

де  $Y_i(t)$  –  $i$ -та реалізація перехідної функції, яка визначається залежністю (9.94) для деякого набору випадкових параметрів привода і випадкових початкових умов.

Середнє значення відносної швидкості переміщення привода знаходиться як

$$\bar{V}(t) = \frac{d\bar{Y}(t)}{dt},$$

а дисперсія перехідної функції обчислюється за формулою:

$$\sigma_y^2(t) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [Y_i(t) - \bar{Y}(t)]^2.$$

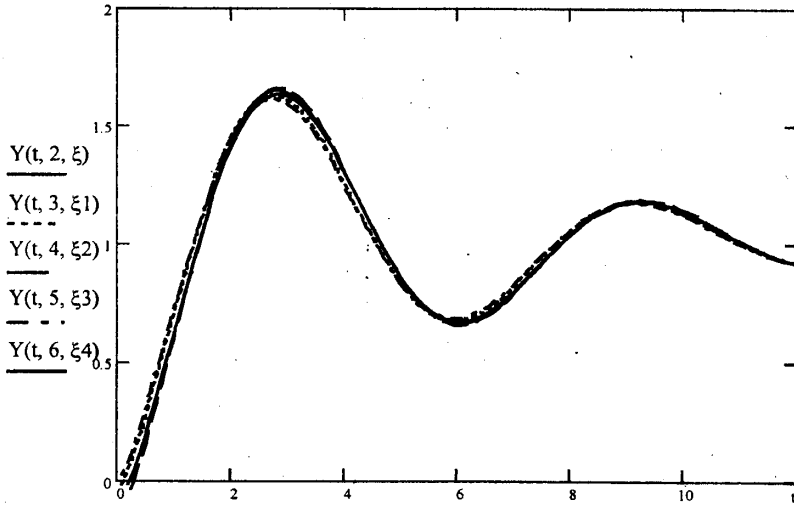


Рис. 9.13. Масив реалізацій перехідного процесу при випадкових змінах всіх параметрів привода та початкових умов

Розрахункові значення математичного сподівання перехідної функції та середнього значення швидкості наведені рис. 9.14.

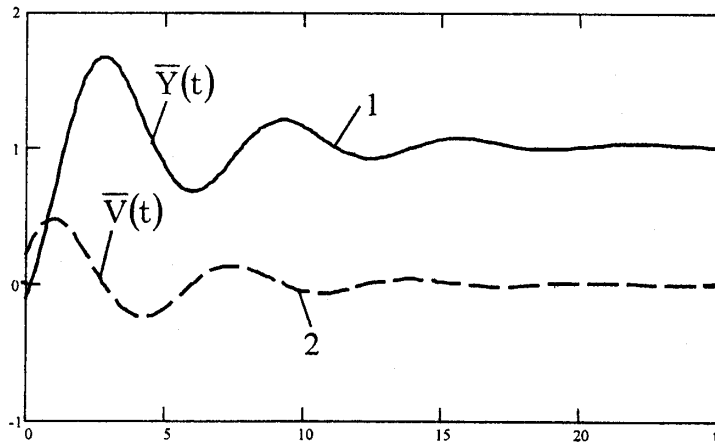


Рис. 9.14. Математичні сподівання переміщення стола (крива 1) та його швидкості (крива 2) при ступінчастій зміні зусилля різання

В результаті проведених досліджень виконано теоретичне узагальнення впливу різноманітних параметрів, які змінюються випадковим чином, на показники динамічної якості привода. Результати досліджень послужили основою для вдосконалення гами прецизійних позиційних приводів металорізальних верстатів [28, 31, 33, 35, 39]. Розроблена математична модель є простим і ефективним засобом дослідження стохастичних процесів позиціонування привода металорізального верстата.



Шпиндель, на якому знаходиться зубчасте колесо приводної передачі, встановлений на підшипниках кочення у корпусі передньої бабки. При обробці заготовки на шпиндель будуть діяти зусилля з боку приводної передачі, а на заготовку – динамічна сила різання. Дані силові фактори змінюються під час обробки. Тому при аналізі динаміки розглянуто вплив динамічних складових цих силових факторів на коливання шпинделя [57].

Під дією динамічної складової  $p_n$  в приводній передачі та динамічної складової  $p$  сили різання шпиндель буде зміщуватись в підшипникових опорах і деформуватись (згинатись), що показано викривленою пружною лінією осі шпинделя (див. рис. 10.1, б).

Математична модель шпиндельної групи включає в себе систему рівнянь, які описують коливання пружної системи при відповідних припущеннях. В рівняння входять параметри системи, які показані на конструктивній схемі шпиндельної групи верстата (див. рис. 10.1, б):  $\phi_0, \dot{\phi}_0, \ddot{\phi}_0$  – динамічна складового кута повороту приводного вала та її похідні;  $c_{\phi n}, h_{\phi n}$  – еквівалентна крутильна жорсткість та еквівалентний коефіцієнт опору приводу головного руху;  $\phi, \phi_n$  – динамічні складові кута повороту шпинделя та вала приводної передачі відповідно;  $h_{\phi ш}$  – еквівалентний коефіцієнт опору підшипників;  $p, p_n$  – динамічна складова відповідно сили різання та зусилля в приводній передачі;  $J$  – приведений момент інерції шпинделя;  $u_{ш}$  – переміщення заготовки в зоні різання;  $\beta_k, \alpha$  – кутові розміри;  $x, y, z$ , – осі координат.

Розглянемо переміщення шпинделя в горизонтальній площині ( $xy$ ). Переміщення у вертикальній площині мало впливають на точність обробки деталі і тому в першому наближенні їх можна не враховувати.

На рис. 10.2 показана схема зміщення та деформації шпинделя в горизонтальній площині, а також – вигляд та переріз шпинделя, які пояснюють дію на шпиндель навантажень від динамічної складової  $p_n$  зусилля в приводній передачі.

В процесі поперечних коливань шпинделя він деформується, що проявляється в зміні форми пружної лінії шпинделя (рис. 10.2, а). Додатково шпиндель переміщується за рахунок деформативності опор. Деформативність опор обумовлена: по-перше, відносним переміщенням деталей підшипників; по-друге, переміщенням в контактах між внутрішніми кільцями підшипників і шпинделем; по-третє, переміщенням в контактах між зовнішніми кільцями підшипників та обоймами, встановленими в корпусі передньої бабки; по-четверте, деформаціями корпусних деталей, в яких встановлені обойми підшипників, відносно корпусу. На розрахунковій схемі деформативність опор показана еквівалентними жорсткостями опор  $c_{1ш}, c_{2ш}$  та еквівалентними дисипативними коефіцієнтами опор  $h_{1ш}$  і  $h_{2ш}$ .

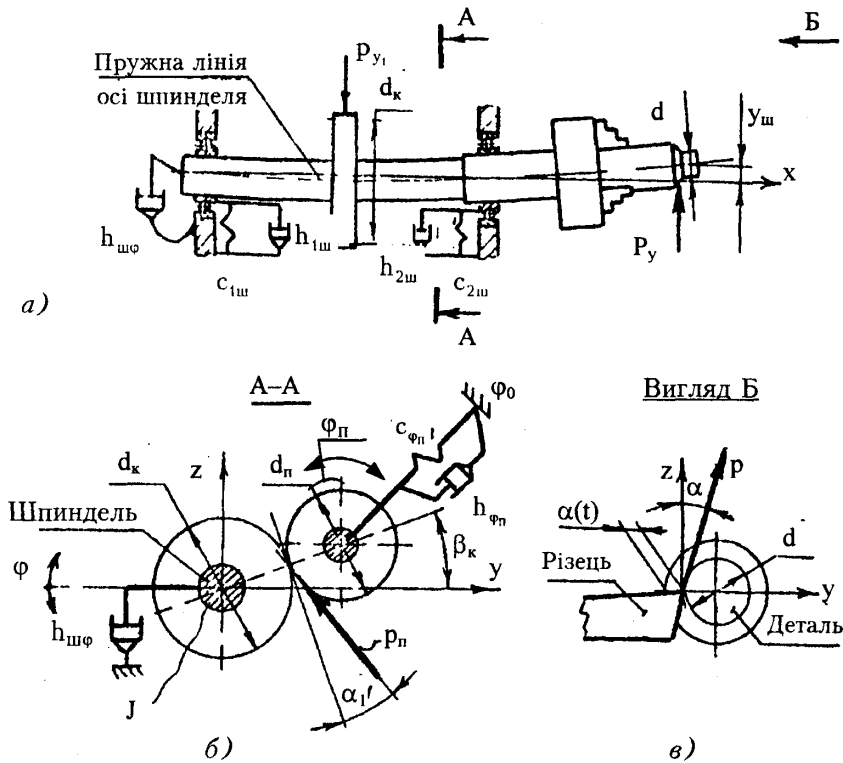


Рис. 10.2. Схема переміщення та деформації шпинделя при його поперечних коливаннях (а), динамічна модель крутильних коливань шпинделя (б) і схема дії сили різання на заготовку (в):  $h_{шф}$  – еквівалентний коефіцієнт опору підшипників;  $c_{1ш}$ ,  $c_{2ш}$  – еквівалентні жорсткості відповідно задньої та передньої опор шпинделя;  $h_{1ш}$ ,  $h_{2ш}$  – еквівалентні коефіцієнти опору відповідно задньої та передньої опор шпинделя;  $p_y$ ,  $p_{y1}$  – проекції на вісь  $y$  динамічних складових відповідно сили різання та зусилля в приводній передачі;  $d_n$ ,  $d_k$  – діаметри ділильного кола відповідно шестерні та зубчастого колеса приводної передачі;  $d$  – номінальний діаметр обробленої поверхні заготовки в зоні різання;  $y_{ш}$  – переміщення шпинделя разом із заготовкою в зоні різання;  $p$ ,  $p_n$  – динамічна складова відповідно сили різання та зусилля в приводній передачі;  $\alpha_1$  – кут зачеплення приводної передачі;  $c_{\varphi n}$ ,  $h_{\varphi n}$  – відповідно еквівалентна крутильна жорсткість та еквівалентний коефіцієнт опору приводної зубчастої передачі;  $\varphi$ ,  $\varphi_n$  – динамічна складового кута повороту відповідно шпинделя та вала приводної передачі;  $a(t)$  – зміна припуску оброблюваної деталі в функції часу;  $\alpha$ ,  $\beta_k$  – кутові розміри;  $J$  – приведений момент інерції шпинделя



Пружна система шпинделя, яка здійснює поперечні коливання, у спрощеному вигляді представлена еквівалентною одномасовою динамічною моделлю, приведеною до точки дії сили різання [13]. На рис. 10.3 показана еквівалентна і приведена одно масові динамічні моделі шпинделя.

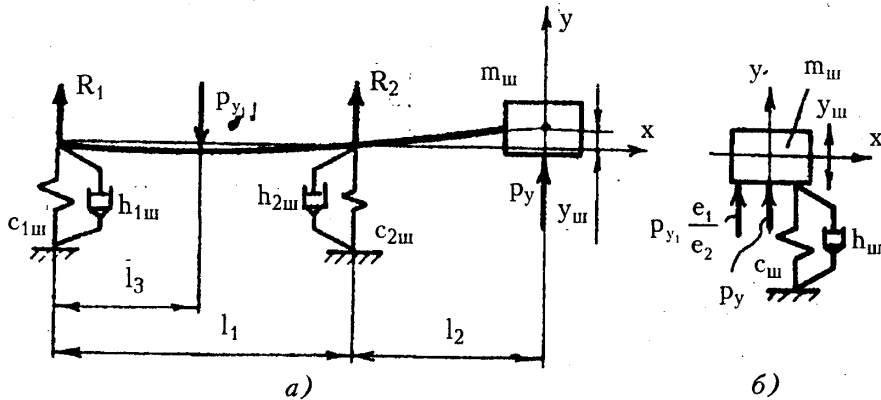


Рис. 10.3. Еквівалентна одномасова динамічна модель поперечних коливань шпинделя (а) і приведена одномасова динамічна модель шпинделя (б):  $c_{1ш}$  – еквівалентна жорсткість задньої опори шпинделя;  $c_{2ш}$  – еквівалентна жорсткість передньої опори шпинделя;  $h_{1ш}$ ,  $h_{2ш}$  – коефіцієнти опору відповідно задньої та передньої опор шпинделя;  $R_1$ ,  $R_2$  – динамічні складові реакцій відповідно задньої та передньої опор шпинделя;  $p_y$ ,  $p_{y1}$  – проекції на вісь  $y$  динамічної складової відповідно сили різання і зусилля в приводній передачі;  $m_{ш}$  – приведена до зони різання маса шпинделя;  $y_{ш}$  – поперечні переміщення шпинделя разом із заготовкою в зоні різання;  $c_{ш}$  – еквівалентна жорсткість шпинделя;  $h_{ш}$  – еквівалентний коефіцієнт опору при поперечних коливаннях шпинделя;  $e_1$  – деформативність шпинделя в зоні різання;  $e_2$  – деформативність шпинделя в зоні різання при дії зусилля в приводній передачі  $p_{y1}$ ;  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  – осеві геометричні розміри шпинделя

Розрахункова схема еквівалентної одномасової системи шпинделя (рис. 10.3, а), що здійснює поперечні коливання, включає в себе приведену масу шпинделя  $m_{ш}$  та пружну систему шпинделя, яка представлена у вигляді невагомої пружної балки, розміщеної на пружних опорах з демпфуванням. Маса шпинделя  $m_{ш}$  приведена до зони різання та розміщена в точці прикладення сили різання  $p$ .

Приведена одномасова система шпинделя (рис. 10.3, б) включає в себе масу  $m_{ш}$ , розташовану на пружній опорі, яка характеризується еквівалентною жорсткістю  $c_{ш}$  та еквівалентним коефіцієнтом опору  $h_{ш}$ . До маси  $m_{ш}$

прикладені:  $p_y$  – проекція на вісь сили різання  $p$  та  $p_{y_1}$  – проекція на вісь  $y$  динамічної складової  $p_n$  зусилля в приводній передачі. При цьому проекція динамічної складової  $p_{y_1}$  зусилля в приводній передачі міняє свій напрямок дії відповідно з умовами приведення.

Рівняння поперечних коливань шпинделя, складене для приведеної одно масової динамічної моделі шпинделя (рис. 10.13, б), має вигляд:

$$m_{ш} \ddot{y}_{ш} + h_{ш} \dot{y}_{ш} + \frac{1}{e_1} y_{ш} = p \cdot \sin \alpha + \frac{e_2}{e_1} p_n \cdot \sin(\alpha_1 + \beta_k), \quad (10.1)$$

де  $e_1 = \partial y_{ш} / \partial p_y = \text{const} = 1/c_{ш}$  – деформативність шпинделя разом із заготовкою в зоні різання при прикладенні сили в зоні різання;

$e_2 = \partial y_{ш} / \partial p_{y_1}$  – деформативність шпинделя разом із заготовкою в зоні різання при прикладенні сили в приводній передачі;

$m_{ш}$  – приведена до зони різання маса шпинделя;

$h_{ш}$  – еквівалентний коефіцієнт опору шпинделя;

$y_{ш}$  – переміщення шпинделя разом із заготовкою в зоні різання в напрямку осі  $y$ ;

$p$  – динамічна складова сили різання;

$p_n$  – динамічна складова зусилля в приводній передачі;

$\alpha$  – кут між динамічною складовою  $p$  сили різання та віссю  $z$ ;

$\alpha_1$  – кут зачеплення в приводній передачі;

$\beta_k$  – кут розміщення шестерні приводної передачі відносно осі  $y$ .

Перетворимо рівняння поперечних коливань шпинделя (10.1) по Лапласу при нульових початкових умовах [6]:

$$\left( m_{ш} s^2 + h_{ш} s + \frac{1}{e_1} \right) \cdot y_{ш}(s) = p(s) \cdot \sin \alpha + p_n(s) \cdot \frac{e_2}{e_1} \cdot \sin(\alpha_1 + \beta_k), \quad (10.2)$$

де  $s$  – оператор Лапласа;

$y_{ш}(s)$  – зображення по Лапласу переміщення шпинделя разом із заготовкою в зоні різання;

$p(s)$  – зображення по Лапласу динамічної складової сили різання;

$p_n(s)$  – зображення по Лапласу динамічної складової зусилля в приводній передачі шпинделя.

Введемо позначення для комплексів параметрів, що називаються постійними часу:

$$T_1 = \sqrt{m_{ш} e_1}, \quad T_2 = h_{ш} e_1. \quad (10.3)$$

Перетворимо рівняння (12.119) з урахуванням позначень (12.120):

$$(T_1^2 s^2 + T_2 s + 1) \cdot y_{ш}(s) = e_1 \cdot \sin \alpha \cdot p(s) + e_2 \cdot \sin(\alpha_1 + \beta_k) \cdot p_n(s). \quad (10.4)$$

Це рівняння в операторній формі описує поперечні коливання шпинделя у горизонтальній площині.

Розглянемо поперечно-кутові (крутильні) коливання шпинделя навколо осі обертання (див. рис. 10.2, б). При складанні рівнянь, які визначають крутильні коливання шпинделя, він розглядається як абсолютно тверде тіло, встановлене на підшипниках. Підшипники мають певний опір, який враховано введенням еквівалентного коефіцієнта опору (в'язкого тертя)  $h_{ш\phi}$ .

Рівняння крутильних коливань шпинделя:

$$J\ddot{\phi} = p \frac{d}{2} \cos \alpha - p_n \frac{d_k}{2} \cos \alpha_1 - h_{ш\phi} \dot{\phi}, \quad (10.5)$$

де  $J$  – приведений момент інерції шпинделя та приводної передачі;

$h_{ш\phi}$  – еквівалентний коефіцієнт опору підшипників шпинделя;

$d$  – номінальний діаметр обробленої поверхні заготовки в зоні різання;

$d_k$  – діаметр дільного кола зубчастого колеса приводної передачі;

$\phi$  – динамічна складова кута повороту шпинделя, що представляє собою відхилення кута повороту шпинделя від номінального (усталеного) значення, яке визначено обертанням шпинделя зі сталою частотою.

Будемо вважати, що приведений момент інерції привода головного руху набагато більший моменту інерції шпинделя. Це означає, що крутильні коливання шпинделя загалом мало впливають на коливання валів привода. З врахуванням цього, рівняння, що описують вплив привода головного руху на динамічні параметри шпинделя, має вигляд:

$$p_n \frac{d_n}{2} \cos \alpha_1 = c_{\phi n} (\phi_n - \phi_0) + h_{\phi n} (\dot{\phi}_n - \dot{\phi}_0), \quad (10.6)$$

де  $d_n$  – діаметр дільного кола шестерні приводної передачі;

$c_{\phi n}$  – еквівалентна крутильна жорсткість приводної передачі;

$h_{\phi n}$  – еквівалентний коефіцієнт опору приводної передачі;

$\phi_0$  – динамічна складова кута повороту приводного вала, визначена як відхилення кута повороту вала від номінального (усталеного) значення;

$\phi_n$  – динамічна складова кута повороту шестерні приводної передачі.

Зв'язок між динамічними складовими кутів повороту шпинделя та шестерні приводної передачі одержимо у спрощеному вигляді як кінематичне співвідношення:

$$\phi = i_{ш} \phi_n, \quad (10.7)$$

де  $i_{ш}$  – передавальне відношення приводної передачі.

Підставимо значення кута повороту шестерні із залежності (10.7) в рівняння привода (10.6). Після перетворення одержимо:

$$p_n \frac{d_n}{2} \cos \alpha_1 = \frac{c_{\phi n}}{i_{ш}} \phi + \frac{h_{\phi n}}{i_{ш}} \dot{\phi} - c_{\phi n} \phi_0 - h_{\phi n} \dot{\phi}_0. \quad (10.8)$$

Перетворимо рівняння крутильних коливань шпинделя (10.5) по Лапласу при нульових початкових умовах:

$$(Js^2 + h_{\omega\varphi}s) \cdot \varphi(s) + p_n(s) \cdot \frac{d_k}{2} \cdot \cos \alpha_1 = p(s) \cdot \frac{d}{2} \cdot \cos \alpha, \quad (10.9)$$

де  $s$  – оператор Лапласа;

$\varphi(s)$ ,  $p_n(s)$ ,  $p(s)$  – зображення по Лапласу динамічних складових відповідно кута повороту шпинделя, зусилля в приводній передачі та сили різання.

Перетворимо рівняння привода (10.8) по Лапласу:

$$p_n(s) \cdot \frac{d_n}{2} \cdot \cos \alpha_1 = \left[ \frac{c_{\varphi n}}{i_w} + \frac{h_{\varphi n}}{i_w} s \right] \cdot \varphi(s) - (c_{\varphi n} + h_{\varphi n} s) \cdot \varphi_0(s), \quad (10.10)$$

де  $\varphi_0(s)$  – зображення по Лапласу динамічної складової кута повороту приводного вала.

З рівняння (10.10) знайдемо значення динамічної складової кута повороту шпинделя в функції оператора Лапласа та зображень по Лапласу динамічних складових зусилля в приводній передачі  $p_n$  та кута повороту приводного вала  $\varphi_0$ :

$$\varphi(s) = p_n(s) \cdot \frac{\frac{d_n}{2} \cos \alpha_1}{\left[ \frac{c_{\varphi n}}{i_w} + \frac{h_{\varphi n}}{i_w} s \right]} + \frac{(c_{\varphi n} + h_{\varphi n} s)}{\left[ \frac{c_{\varphi n}}{i_w} + \frac{h_{\varphi n}}{i_w} s \right]} \cdot \varphi_0(s). \quad (10.11)$$

Спростимо дане рівняння шляхом перетворення та скорочення:

$$\varphi(s) = p_n(s) \cdot \frac{i_w \frac{d_n}{2} \cos \alpha_1}{c_{\varphi n} + h_{\varphi n} s} + i_w \cdot \varphi_0(s). \quad (10.12)$$

Підставимо значення динамічної складової кута повороту шпинделя з формули (10.12) в (10.9):

$$\left[ (Js^2 + h_{\omega\varphi}s) \frac{i_w \frac{d_n}{2} \cos \alpha_1}{c_{\varphi n} + h_{\varphi n} s} + \frac{d_k}{2} \cos \alpha_1 \right] \cdot p_n(s) = p(s) \cdot \frac{d}{2} \cos \alpha - i_w (Js^2 + h_{\omega\varphi}s) \cdot \varphi_0(s). \quad (10.13)$$

Перетворимо рівняння (12.130) з метою його спрощення:

$$\begin{aligned} & [Ji_w \frac{d_n}{2} \cos \alpha_1 s^2 + (h_{\omega\varphi} i_w \frac{d_n}{2} \cos \alpha_1 + h_{\varphi n} \frac{d_k}{2} \cos \alpha_1) s + \\ & + c_{\varphi n} \frac{d_k}{2} \cos \alpha_1] \cdot p_n(s) = (c_{\varphi n} + h_{\varphi n} s) \cdot p(s) \cdot \frac{d}{2} \cos \alpha - \\ & - i_w s (Js + h_{\omega\varphi}) \cdot (c_{\varphi n} + h_{\varphi n} s) \cdot \varphi_0(s). \end{aligned} \quad (10.14)$$

Приведемо рівняння (10.14) до стандартного вигляду, прийнятому в теорії автоматичного керування [6]. Для цього кожний доданок поділимо на вираз  $c_{\varphi n} \frac{d_k}{2} \cos \alpha_1$ . Відповідно одержимо:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{J i_{ш} d_n}{c_{\text{фоп}} d_k} s^2 + \frac{h_{ш\text{ф}} i_{ш} d_n + d_k h_{\text{фоп}}}{c_{\text{фоп}}} s + 1 \right] \cdot p_n(s) = \\ & = \left[ 1 + \frac{h_{\text{фоп}}}{c_{\text{фоп}}} s \right] \cdot \frac{d \cos \alpha}{d_k \cos \alpha_1} \cdot p(s) - \frac{2i_{ш} h_{ш\text{ф}}}{d_k \cos \alpha_1} \cdot \left( 1 + \frac{h_{\text{фоп}}}{c_{\text{фоп}}} s \right) \cdot \left( \frac{J}{h_{\text{фоп}}} s + 1 \right) \cdot s \cdot \varphi_0(s). \end{aligned} \quad (10.15)$$

Введемо позначення для постійних часу та коефіцієнтів передачі, які визначають крутильні коливання шпинделя:

$$\begin{aligned} T_{k1} &= \frac{J i_{ш} d_n}{c_{\text{фоп}} d_k}; & T_{k2} &= \frac{h_{ш\text{ф}} i_{ш} d_n + d_k h_{\text{фоп}}}{c_{\text{фоп}}}; & T_n &= \frac{h_{\text{фоп}}}{c_{\text{фоп}}}; \\ T_j &= \frac{J}{h_{ш\text{ф}}}; & K_{\text{рпн}} &= \frac{d \cos \alpha}{d_k \cos \alpha_1}; & K_{\text{он}} &= \frac{2i_{ш} h_{ш\text{ф}}}{d_k \cos \alpha_1}. \end{aligned}$$

С урахуванням введених позначень величин, рівняння (10.15) прийме вигляд:

$$(T_{k1}^2 s^2 + T_{k2} s + 1) \cdot p_n(s) = K_{\text{рпн}} (1 + T_n s) \cdot p(s) - K_{\text{он}} (1 + T_n s) (1 + T_j s) s \cdot \varphi_0(s). \quad (10.16)$$

Звідси визначається значення зображення по Лапласу динамічної складової  $p_n(s)$  зусилля у приводній передачі:

$$p_n(s) = K_{\text{рпн}}(s) \frac{(1 + T_n s)}{(T_{k1}^2 s^2 + T_{k2} s + 1)} \cdot p(s) - K_{\text{он}} \frac{(1 + T_n s)(1 + T_j s)}{(T_{k1}^2 s^2 + T_{k2} s + 1)} s \cdot \varphi_0(s). \quad (10.17)$$

Підставимо в рівняння поперечних коливань шпинделя (10.4) значення динамічної складової зусилля в приводній передачі  $p_n$  з формули (10.17):

$$\begin{aligned} (T_1^2 s^2 + T_2 s + 1) y_{ш}(s) &= e_1 \sin \alpha p(s) + \\ &+ e_2 \sin(\alpha_1 + \beta_k) K_{\text{рпн}} \frac{(1 + T_n s)}{(T_{k1}^2 s^2 + T_{k2} s + 1)} p(s) - \\ &- e_2 \sin(\alpha_1 + \beta_k) K_{\text{он}} \frac{(1 + T_n s)(1 + T_j s)}{(T_{k1}^2 s^2 + T_{k2} s + 1)} s \varphi_0(s). \end{aligned} \quad (10.18)$$

Із рівняння (10.18) після перетворень знаходимо переміщення шпинделя разом із заготовкою у зоні різання. Подамо його у вигляді залежності від динамічної складової  $p$  сили різання і від динамічної складової  $\varphi_0$  кута повороту приводного вала. Одержимо символічну математичну модель шпиндельної групи токарного верстата у вигляді:

$$y_{ш}(s) = W_{ш1} \cdot p(s) - W_{ш2} \cdot \varphi_0(s), \quad (10.19)$$

де  $W_{ш1}$ ,  $W_{ш2}$  – трансформуючі функції шпинделя відповідно по силі різання і по куту повороту приводного вала. Вони знаходяться із (10.18):

$$W_{ш1} = \frac{K_{ш1}}{(T_1^2 s^2 + T_2 s + 1)} + \frac{K_{ш2} (1 + T_n s)}{(T_1^2 s^2 + T_2 s + 1)(T_{k1}^2 s^2 + T_{k2} s + 1)}; \quad (10.20)$$

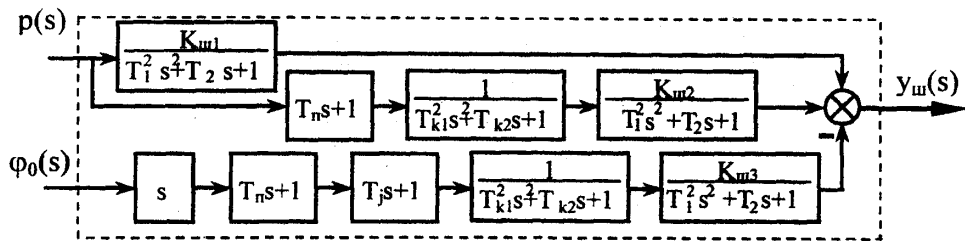
$$W_{ш2} = K_{ш3} \frac{(1 + T_n s)(1 + T_j s) s}{(T_1^2 s^2 + T_2 s + 1)(T_{k1}^2 s^2 + T_{k2} s + 1)}. \quad (10.21)$$

В формулах (10.20), (10.21) позначені коефіцієнти передачі:

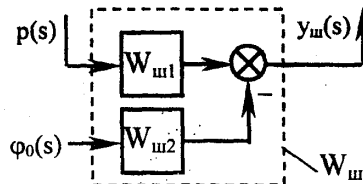
$$K_{ш1} = e_1 \sin \alpha; \quad K_{ш2} = e_2 K_{pn} \sin(\alpha_1 + \beta_k);$$

$$K_{ш3} = e_2 K_{on} \sin(\alpha_1 + \beta_k).$$

Символьна залежність (10.19) із врахуванням (10.20) та (10.21) в операторному вигляді описує динамічні коливальні процеси, які протікають у шпindelній групі верстата при різанні. Відповідно до символічної математичної моделі побудована структурна математична модель (структурна схема) динамічної системи шпindelної групи верстата (рис. 10.4).



а)



б)

Рис. 10.4. Базова структурна схема (а) і блок-схема (б) динамічної системи шпindelної групи верстата. На схемі в зображеннях по Лапласу вказані:  $p(s)$  – динамічна складова сили різання;  $\varphi_0(s)$  – динамічна складова кута повороту приводного вала;  $y_{ш}(s)$  – переміщення шпindelя разом із заготовкою в зоні різання;  $W_{ш1}$ ,  $W_{ш2}$  – трансформуючі функції шпindelя відповідно по силі різання та куту повороту приводного вала

Окремі блоки математичної моделі відповідають складовим трансформуючих функцій (10.20) та (10.21).

Входами структурної математичної моделі шпindelної групи служать динамічна складова  $p(s)$  сили різання (зображення по Лапласу динамічної складової сили різання) та динамічна складова  $\varphi_0(s)$  кута повороту вала приводної подачі (зображення по Лапласу динамічної складової кута повороту вала).

Виходом структурної схеми шпindelної групи є горизонтальне переміщення  $y_{ш}(s)$  шпindelя разом із заготовкою в зоні різання (зображення по Лапласу переміщення шпindelя разом із заготовкою в зоні різання).

## 10.2. Модель супортної групи та процесу різання

Математична модель супортної групи верстата розроблена для плоского руху різця в площині, перпендикулярній осі шпинделя [57, 63].

Супортна група токарного верстата (рис. 10.5) являє собою складну просторову систему, яка включає десятки деталей, між якими наявні прецизійні рухомі та нерухомі з'єднання.

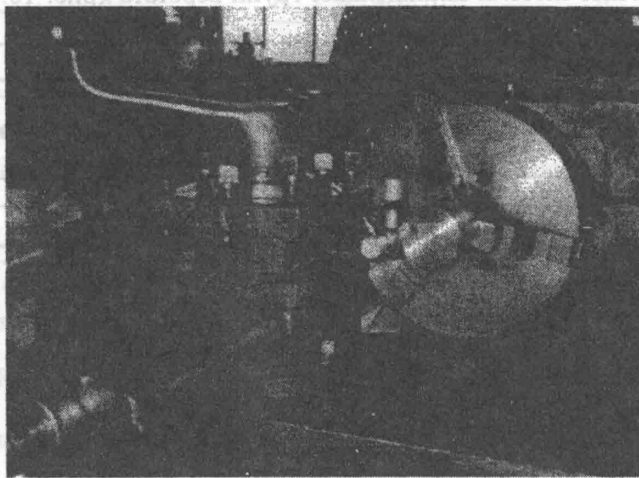


Рис. 10.5. Загальний вигляд супортної групи верстата

Деталі супорта мають значні масу та жорсткість. При дії сил різання пружна система супорта деформується. Деформації в основному виникають в контактах між деталями і мають суттєво нелінійний характер.

В першому наближенні прийнято, що пружна система супорта є однорідною та ізотропною і допускає зосередження своїх інерційних, дисипативних та деформативних параметрів в деякій точці, рух якої здійснюється в площині, перпендикулярній осі шпинделя [63]. Конструктивна схема супорта, що відповідає даному припущенню, показана на рис. 10.6.

При обробці заготовки коливання супорта спричиняються зміною сили різання в часі. Розглянемо зміну положення вершини різця у процесі коливань супорта. В загальному випадку супорт як плоска динамічна коливальна система має три ступені вільності [33]. Для математичного опису переміщень вершини різця будемо розглядати дані переміщення в системі головних ортогональних координат  $\zeta$ - $\eta$ . Це дозволяє значно спростити систему рівнянь та обмежитись розглядом динамічної системи супорта як системи з двома ступенями вільності. Осі головних ортогональних координат співпадають з напрямками головних жорсткостей супорта.

У даній системі координат динамічна система супорта інтерпретується у вигляді двомасової динамічної системи (рис. 10.7), яка здійснює незалежні коливання вздовж осей  $\zeta$  та  $\eta$ , що співпадають з напрямками головних жорсткостей  $c_1$  та  $c_2$  пружної системи супорта.

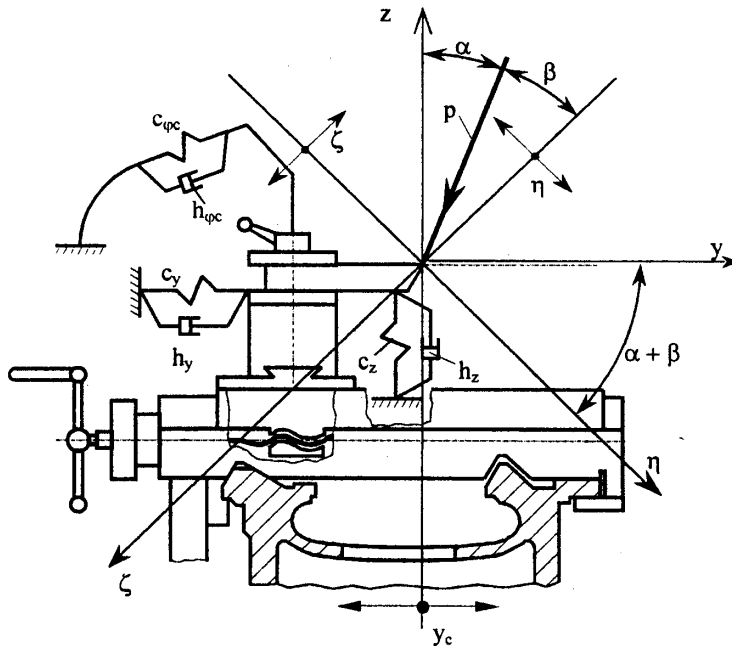


Рис. 10.6. Конструктивна схема супорта токарного верстата:  $p$  – динамічна складова сили різання;  $c_y, c_z$  – еквівалентні жорсткості пружної системи супорта в напрямку осей координат  $y$  і  $z$ ;  $h_y, h_z$  – еквівалентні коефіцієнти опору пружної системи супорта при коливаннях у напрямку осей координат  $y$  і  $z$ ;  $c_{\varphi c}$  – еквівалентна крутильна жорсткість пружної системи супорта;  $h_{\varphi c}$  – еквівалентний коефіцієнт опору супорта при поперечно-кутових коливаннях;  $\eta, \zeta$  – система головних ортогональних координат, що співпадає з напрямками головних жорсткостей пружної системи супорта;  $\alpha, \beta$  – кутові розміри, що характеризують напрямки головних жорсткостей та напрямок дії сили різання

В математичній моделі супорта при розгляді його коливань маса супорта врахована у вигляді двох масових коефіцієнтів (приведених мас)  $m_1$  та  $m_2$ , які представляють собою масу супорта, приведену до вершини різця (зони різання) при коливанні супорта відповідно вздовж осей  $\zeta$  та  $\eta$ . Приведені маси  $m_1$  та  $m_2$  здійснюють незалежно одна від одної коливання вздовж осей  $\zeta$  та  $\eta$ . При цьому приведені жорсткості відповідають головним жорсткостям  $c_1$



та  $c_2$  супорта. Дисипативні властивості механічної системи визначаються приведеними коефіцієнтами опору супорта  $h_1$  та  $h_2$ .

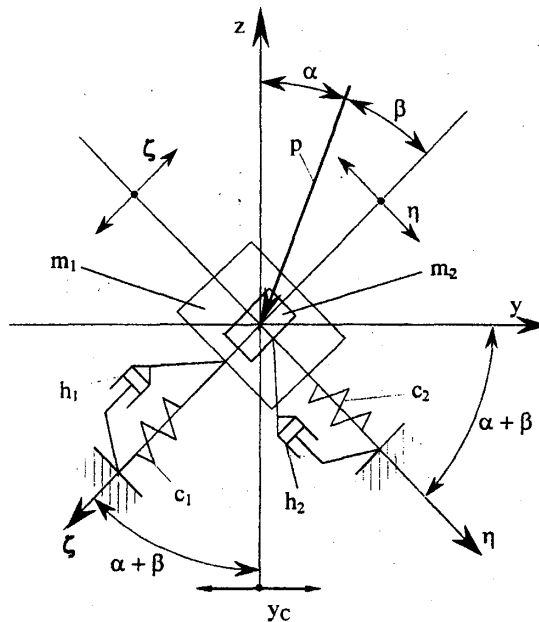


Рис. 10.7. Еквівалентна розрахункова схема супорта:  $\eta, \xi$  – система головних ортогональних координат, що співпадає з напрямками головних осей жорсткості пружної системи супорта;  $c_1, c_2$  – головні жорсткості супорта;  $m_1, m_2$  – масові коефіцієнти (приведені маси), що представляють собою масу супорта, приведену до вершини різця (зони різання) при коливаннях супорта відповідно вздовж осей  $\eta, \xi$ ;  $h_1, h_2$  – приведені коефіцієнти опору супорта;  $p$  – динамічна складова сили різання;  $\alpha, \beta$  – кутові розміри, що визначають положення головних осей та орієнтацію сили різання

Відповідно до розрахункової схеми (рис. 10.7) для двох ступенів вільності, які відповідають переміщенням у напрямках  $\xi$  та  $\eta$  складені рівняння динаміки, що описують коливання вершини різця:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{\xi} + h_1 \dot{\xi} + c_1 \xi &= p \cdot \cos \beta \\ m_2 \ddot{\eta} + h_2 \dot{\eta} + c_2 \eta &= p \cdot \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (10.22)$$

де  $m_1, m_2$  – масові коефіцієнти (приведені маси);

$h_1, h_2$  – приведені коефіцієнти опору супорта;

$c_1, c_2$  – головні жорсткості супорта;

$\xi, \eta$  – переміщення вершини різця вздовж головних осей жорсткості;

$\dot{\xi}, \dot{\eta}, \ddot{\xi}, \ddot{\eta}$  – відповідно проекції швидкості та прискорення вершини різця на осі  $\xi$  та  $\eta$ ;

$p$  – динамічна складова сили різання;

$\alpha$  – кут між динамічною складовою сили різання та вертикальною віссю ( $z$ );

$\beta$  – кут між динамічною складовою сили різання та віссю  $\zeta$ .

Перетворимо диференціальні рівняння системи (10.22) по Лапласу при нульових початкових умовах. Результати перетворення, які мають вигляд алгебраїчних рівнянь запишемо в стандартній формі, прийнятій в теорії автоматичного керування [6]:

$$\left. \begin{aligned} (T_{\zeta_1}^2 s^2 + T_{\zeta_2} s + 1) \cdot \zeta(s) &= p(s) \cdot \frac{\cos \beta}{c_1} \\ (T_{\eta_1}^2 s^2 + T_{\eta_2} s + 1) \cdot \eta(s) &= p(s) \cdot \frac{\sin \beta}{c_2} \end{aligned} \right\} \quad (10.23)$$

де  $p(s)$  – зображення по Лапласу динамічної складової сили різання;

$\zeta(s)$ ,  $\eta(s)$  – зображення по Лапласу переміщення вершини різця в напрямках головних осей  $\zeta$  та  $\eta$ .

Постійні часу, введені в системі рівнянь (10.23), зв'язані з параметрами динамічної системи супорта наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} T_{\zeta_1} &= \sqrt{m_1/c_1}; & T_{\zeta_2} &= h_1/c_1; \\ T_{\eta_1} &= \sqrt{m_2/c_2}; & T_{\eta_2} &= h_2/c_2. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Із системи рівнянь (10.23) визначимо в зображеннях по Лапласу переміщення вершини різця в напрямку головних осей жорсткості супорта:

$$\zeta(s) = \frac{\cos \beta}{c_1} \cdot \frac{1}{(T_{\zeta_1}^2 s^2 + T_{\zeta_2} s + 1)} \cdot p(s); \quad (10.25)$$

$$\eta(s) = \frac{\sin \beta}{c_1} \cdot \frac{1}{(T_{\eta_1}^2 s^2 + T_{\eta_2} s + 1)} \cdot p(s). \quad (10.26)$$

Переміщення вершини різця в інших напрямках лінійно залежить від переміщень в напрямках головних осей.

Вихідним параметром для динамічної системи супорта є зміна сили різання. Вихідним параметром супорта, який впливає на похибку обробки, є переміщення вершини різця вздовж нормалі до поверхні різання, яке відповідає зміщенню вершини різця вздовж осі  $y$ .

Із геометричних міркувань визначимо зміщення вершини різця вздовж осі  $y$  в залежності від переміщень вершини різця в напрямках головних осей жорсткості:

$$y_c = \eta \cdot \cos(\alpha + \beta) - \zeta \cdot \sin(\alpha + \beta). \quad (10.27)$$

Після перетворень даної залежності по Лапласу і підстановки переміщень вздовж головних осей жорсткості, згідно з (10.25) та (10.26), одержимо переміщення вершини різця в зображення по Лапласу:

$$y_c(s) = \frac{\sin \beta \cdot \cos(\alpha + \beta)}{c_2} \cdot \frac{1}{(T_{\eta 1}^2 s^2 + T_{\eta 2} s + 1)} \cdot p(s) - \frac{\cos \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)}{c_1} \cdot \frac{1}{(T_{\zeta 1}^2 s^2 + T_{\zeta 2} s + 1)} \cdot p(s). \quad (10.28)$$

Із цього рівняння визначимо загальну трансформуючу функцію супорта:

$$W_c = \frac{y_c(s)}{p(s)} = \frac{K_{c1}}{(T_{\eta 1}^2 s^2 + T_{\eta 2} s + 1)} - \frac{K_{c2}}{(T_{\zeta 1}^2 s^2 + T_{\zeta 2} s + 1)}, \quad (10.29)$$

де  $K_{c1}$ ,  $K_{c2}$  – коефіцієнти передачі, які визначені через головні жорсткості супорта та кутові розміри:

$$K_{c1} = \frac{\sin \beta \cdot \cos(\alpha + \beta)}{c_2}; \quad K_{c2} = \frac{\cos \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)}{c_2}.$$

На рис. 10.8, а показана структурна математична модель, яка відповідає трансформуючій функції  $W_c$ , визначеній з рівняння (10.29).

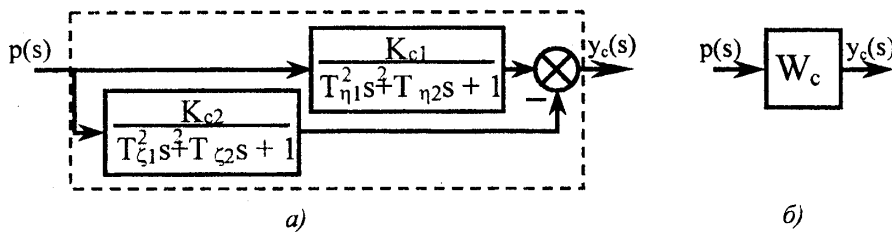


Рис. 10.8. Структурна схема (а) і блок-схема (б) математичної моделі супорта. В зображеннях по Лапласу вказані:  $p(s)$  – динамічна складова сили різання;  $y_c(s)$  – переміщення вершини різця в напрямку осі  $y$ ;  $W_c$  – трансформуюча функція динамічної системи супорта

Аналіз динаміки процесу різання виконано із врахуванням інерційних і дисипативних характеристик процесу. Математична модель динаміки процесу різання складена у прощеному вигляді згідно з методикою [11].

В діапазоні частот до  $10^5$  Гц процес різання може бути описаний диференціальним рівнянням, в якому врахована залежність динамічної складової сили різання  $p_t$  від зміни припуску в часі  $y_t$ :

$$T_p \frac{dp_t}{dt} + p_t = K_p \left[ y_t + T_{\alpha y} \frac{dy_t}{dt} + T_{\alpha p}^2 \frac{d^2 y_t}{dt^2} \right], \quad (10.30)$$

де  $p_t$  – динамічна складова сили різання, обумовлена зміною корпусу;

$y_t$  – зміна припуску в залежності від часу;

$T_p$  – постійна часу процесу різання (згідно з [11], порядок значення постійної складає близько  $T_p = 5 \cdot 10^{-4}$  с);

$T_{\alpha p}$ ,  $T_{\alpha y}$  – постійні коефіцієнти, які враховують особливості геометрії, кінематики та динаміки процесу різання;

$K_p$  – коефіцієнт передачі процесу різання.

Перетворимо рівняння (10.30) по Лапласу при нульових початкових умовах і одержимо алгебраїчне співвідношення:

$$(T_p s + 1) \cdot p_t(s) = K_p (T_{\alpha p}^2 s^2 + T_{\alpha \gamma} s + 1) \cdot y_t(s). \quad (10.31)$$

Звідси знайдемо трансформуючу функцію процесу різання:

$$W_p = \frac{y_t(s)}{p_t(s)} = \frac{K_p (T_{\alpha p}^2 s^2 + T_{\alpha \gamma} s + 1)}{T_p s + 1}. \quad (10.32)$$

Структурна схема процесу різання, яка відповідає математичній моделі (10.32), зображена на рис. 10.9, а.

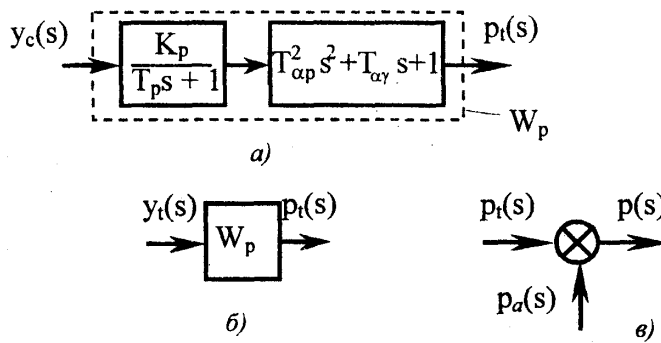


Рис. 10.9. Структурна схема математичної моделі динаміки процесу різання (а), блок-схема моделі процесу (б) та схема суматора, що враховує випадкові флуктуації сили різання (в), які мають місце в процесі обробки реальної деталі В зображеннях по Лапласу позначені:

$y_t(s)$  – зміна припуску;  $p_t(s)$  – динамічна складова сили різання, обумовлена зміною припуску;  $p_a(s)$  – незалежна випадкова складова (флуктуація) сили різання;  $p(s)$  – результуюча динамічних складових сили різання;  $W_p$  – трансформуюча функція процесу різання

При обробці заготовки сила різання змінюється під дією різноманітних факторів. Зокрема, має місце температурна флуктуація сили різання, зміна сили різання з причини неоднорідності структури заготовки та інше. Зміна сили різання носить, як правило, випадковий характер і не залежить від зміни припуску. Тому можна вважати, що сила різання є сумою динамічної складової сили різання  $p_t(s)$ , що визначається зміною припуску, та незалежної випадкової динамічної складової сили різання  $p_a(s)$ . Отже

$$p(s) = p_a(s) + p_t(s).$$

Це рівняння інтерпретоване на структурній схемі (рис. 10.22, в) у вигляді суматора, що дозволяє в математичній моделі врахувати наявність випадкових флуктуацій сили різання.

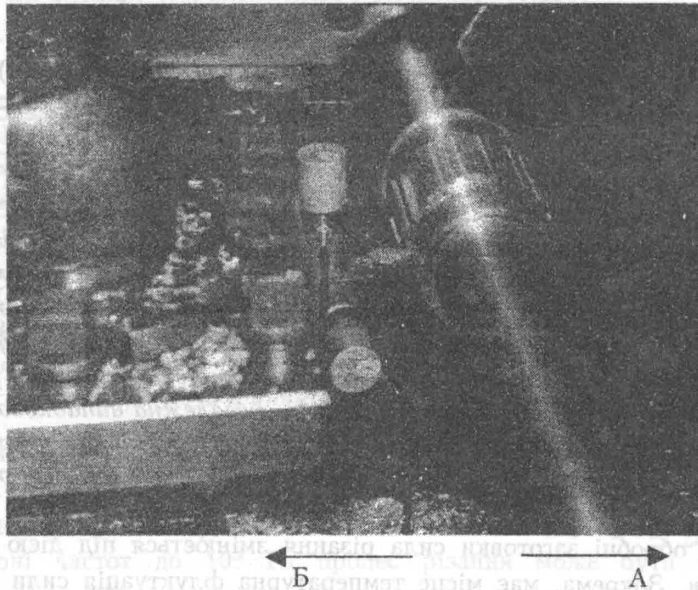
### 10.3. Загальна структурна математична модель шпиндельно-супортної групи

**Загальна математична модель** динамічної системи шпиндель-супортної групи верстата одержана об'єднанням моделей окремих підсистем, а саме: моделі шпиндельної групи, супортної групи і процесу різання.

Зміна припуску  $u_t$  залежить від форми заготовки, деформації шпинделя разом із заготовкою та переміщення супорта.

Пружна система верстата має високу жорсткість. Але під дією сил різання виникають невеликі деформації елементів динамічної системи. Вони особливо проявляються при обробці протяжних маложорстких деталей.

На рис. 10.10 показано процес обробки деталі на токарному верстаті.



*Рис. 10.10. Схема динамічних переміщень шпинделя та супорта в процесі обробки деталі на токарному верстаті. Стрілкою А показане пружне горизонтальне переміщення деталі, стрілкою Б – переміщення різця, які виникають внаслідок дії сили різання*

Під дією сил різання мають місце складні просторові переміщення деталі та різця. На точність обробки впливають в основному горизонтальні проекції переміщень (показані стрілками А і Б на рис. 10.10).

Розглянемо закономірності зміни взаємного положення різця і оброблюваної заготовки, що мають місце при коливальних процесах в динамічній системі верстата при різанні.

Із геометричних міркувань (рис. 10.11) випливає, що зміна припуску в часі:

$$y_t = a - y_c - y_{ш},$$

де  $a$  – відхилення форми заготовки від номінального значення;

$y_c$  – динамічна деформація (переміщення) вершини різця внаслідок коливальних процесів у супортній групі верстата;

$y_{ш}$  – переміщення шпинделя разом із заготовкою в зоні різання.

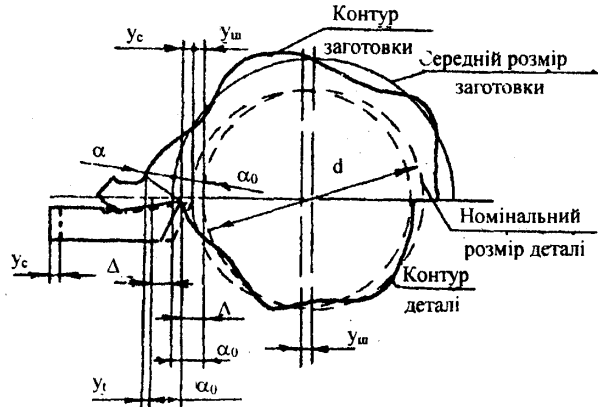


Рис. 10.11. Схема зміни взаємного положення різця та заготовки при коливаннях елементів пружної системи верстата:  $y_{ш}$  – переміщення шпинделя разом із заготовкою;  $y_c$  – переміщення вершини різця внаслідок деформативності супорта;  $\Delta$  – загальна динамічна похибка обробки;  $a_0$  – номінальний діаметр заготовки;  $a$  – відхилення форми заготовки відносно номінального значення;  $y_t$  – зміна припуску в часі

В процесі обробки заготовки відбуваються складні переміщення елементів динамічної системи верстата. Під дією сил різання змінюється взаємне положення супорта та шпинделя. Разом з цим відбуваються додаткові зміни взаємного положення шпинделя і супорта з причини, наприклад, температурних деформацій різця тощо. Ці зміни не залежать від коливань елементів пружної системи верстата. Тому фактична зміна припуску визначиться із врахуванням незалежної складової зміни взаємного положення різця та заготовки:

$$y_t = a - y_c - y_{ш} - y_p, \quad (10.34)$$

де  $a$  – відхилення припуску від номінального значення;

$y_c$  – переміщення вершини різця внаслідок деформацій супорта;

$y_{ш}$  – переміщення шпинделя разом із заготовкою в зоні різання;

$y_p$  – незалежна складова зміни взаємного положення різця та заготовки, яку можна зміною розмірів різця.

Переходячи від залежності (10.34) до зображення її по Лапласу,

отримаємо:

$$y_t(s) = a(s) - y_c(s) - y_w(s) - y_p(s). \quad (10.35)$$

Визначимо похибку обробки  $\Delta$ , що виникає за рахунок динамічних деформацій супорта і шпинделя, з врахуванням додаткової зміни розмірів. У зображеннях по Лапласу одержимо динамічну похибку обробки:

$$\Delta(s) = y_c(s) + y_w(s) + y_p(s) \quad (10.36)$$

Об'єднуючи рівності (10.35) та (10.36), одержимо:

$$y_t(s) = a(s) - \Delta(s). \quad (10.37)$$

Залежності (10.36) та (10.37) зображені у вигляді суматорів (рис. 10.12). Знак “-” біля  $y_c(s)$  враховує, що переміщення вершини різця є протилежним додатному напрямку, прийнятому на рис. 10.7 та у формулі (10.29).

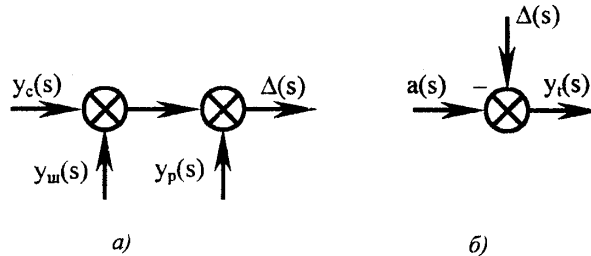


Рис. 10.12. Графічне зображення суми деформацій супорта і шпинделя (а) і схема формування фактичної зміни припуску (б). У зображеннях по Лапласу вказані:  $y_w(s)$  – переміщення шпинделя разом із заготовкою;  $y_c(s)$  – переміщення вершини різця;  $y_p(s)$  – додаткова незалежна зміна взаємного положення різця та заготовки;  $\Delta(s)$  – динамічна похибка обробки;  $y_t(s)$  – зміна припуску;  $a(s)$  – зміна в часі форми заготовки

Для визначення загальної структурної математичної моделі динамічної системи шпиндельно-супортної групи верстата розглянемо в комплексі всі блок-схеми математичних моделей окремих підсистем верстата (рис. 10.13).

З'єднуючи відповідні входи і виходи окремих блок-схем математичних моделей динамічних підсистем, отримаємо загальну структурну блок-схему математичної моделі динамічної системи верстата (рис. 10.14).

Виконаємо деталізацію структурної схеми математичної моделі динамічної системи верстата. Замість трансформуючих функцій блоків  $W_p$ ,  $W_c$ ,  $W_w$  підставимо їх структурні схеми і одержимо загальну структурну схему математичної моделі динамічної системи токарного верстата (рис. 10.15).

Структурна математична модель відповідає динамічній системі верстата, що об'єднує всі основні її елементи: супорт, шпиндель, процес різання. Основним входом моделі є зміна форми заготовки (а). Додатковими входами є випадкова складова сили різання ( $p_a$ ) та зміна розмірів різця ( $y_p$ ). Виходом структурної математичної моделі є динамічна складова похибки обробки деталі ( $\Delta$ ).

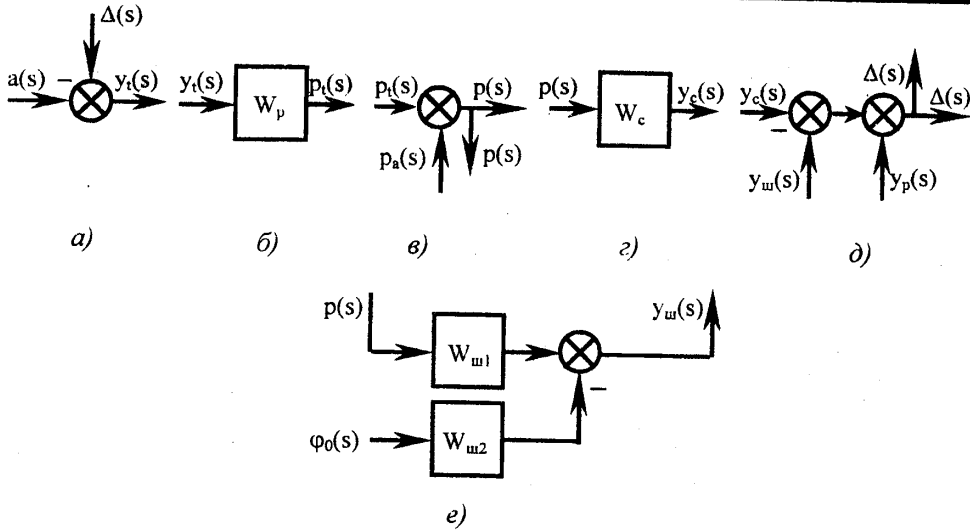


Рис. 10.13. Блок-схеми математичних моделей окремих динамічних підсистем верстата: а – суматор, що визначає фактичну зміну припуску; б – блок-схема математичної моделі процесу різання; в – суматор, що враховує випадкові флуктуації сили різання; г – блок-схема математичної моделі динамічної системи супорта; д – суматори, що визначають залежність динамічної похибки обробки від переміщень шпинделя та супорта; е – блок-схема математичної моделі шпиндельної групи верстата

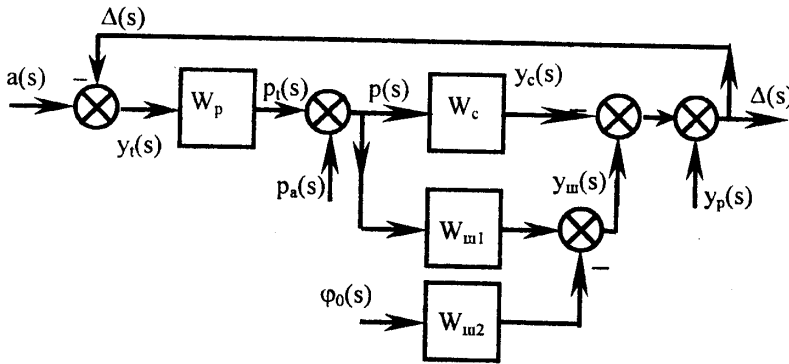


Рис. 10.14. Загальна структурна схема математичної моделі динамічної системи шпиндельно-супортної групи токарного верстата, одержана об'єднанням блок-схем окремих динамічних підсистем. У зображеннях по Лапласу вказані:  $a(s)$  – зміна форми заготовки;  $y_t(s)$  – зміна припуску;  $p_t(s)$  – динамічна складова сили різання, обумовлена зміною форми заготовки;  $p_a(s)$  – незалежна складова (флуктуація) сили різання;  $y_c(s)$  – переміщення вершини різця;  $y_w(s)$  – переміщення шпинделя разом із заготовкою;  $y_p(s)$  – незалежна зміна взаємного положення різця та заготовки;  $\Delta(s)$  – похибка обробки;  $\varphi_0$  – динамічна складова кута повороту приводного вала;  $p(s)$  – результуюча сили різання



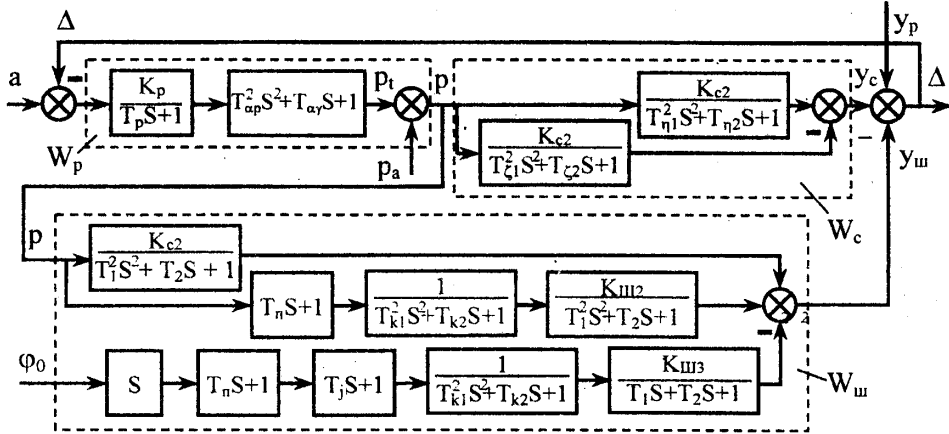


Рис. 10.15. Структурна математична модель, що включає підсистеми шпиндельної ( $W_{ш}$ ) та супортної ( $W_c$ ) груп і процесу різання ( $W_p$ )

Структурна математична модель може бути зображена у вигляді блок-схеми (рис. 10.16).



Рис. 10.16. Блок-схема математичної моделі динамічної системи шпиндельно-супортної групи верстата

Структурна математична модель має додатковий вхід  $\phi_0$  у вигляді динамічної складової кута повороту вала приводної передачі шпинделя.

Цей вхід служить для зв'язку структурної математичної моделі із моделлю привода головного руху, яка розглянута нижче.

Структурна математична модель динамічної системи шпиндельно-супортної групи верстата є основою для розробки візуальної математичної моделі в системі SIMULINK пакету MATLAB.

#### 10.4. Спрощена математична модель привода головного руху

Розроблена структурна (візуальна) математична модель верстата дозволяє визначити основні характеристики коливальних процесів. Модель була застосована для аналізу стохастичних процесів в динамічній системі токарно-гвинторізного верстата мод. КА280. Вона враховує особливості коливальних процесів у шпindelній та супортній групах, в приводі головного руху при наявності стохастичних входів та імітаційного стохастичного навантаження силами різання.

Розроблена стохастична математична модель динамічної системи верстата враховує основні інерційні, дисипативні та деформативні властивості елементів і вузлів верстата при різанні. Модель включає як свої складові розглянуті раніше моделі окремих підсистем верстата.

При розробці моделі всі переміщення в динамічній системі верстата приведені до зони різання. З метою спрощення моделі розглянуто переміщення лише в площині  $ouz$ , які є суттєвими з точки зору визначення динамічної точності обробки (рис. 10.17).

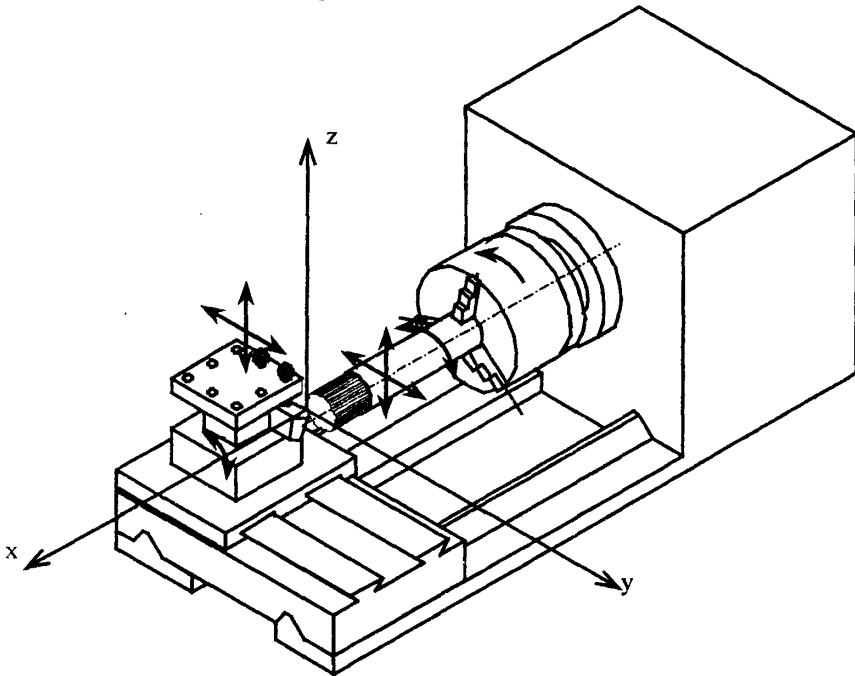


Рис. 10.17. Суттєві напрямки динамічних переміщень при обробці деталі, які впливають на точність обробки

Для розглянутої площини переміщень використана спрощена

розрахункова схема динамічної системи верстата (рис. 10.18).

Динамічна система верстата розділена на чотири підсистеми: підсистема привода головного руху; підсистема шпиндельної групи; процес різання; динамічна підсистема супорта. Математична модель шпиндельно-супортної групи та процесу різання одержана в розділі 10.3 у вигляді блокової структурної моделі (див. рис. 10.16).

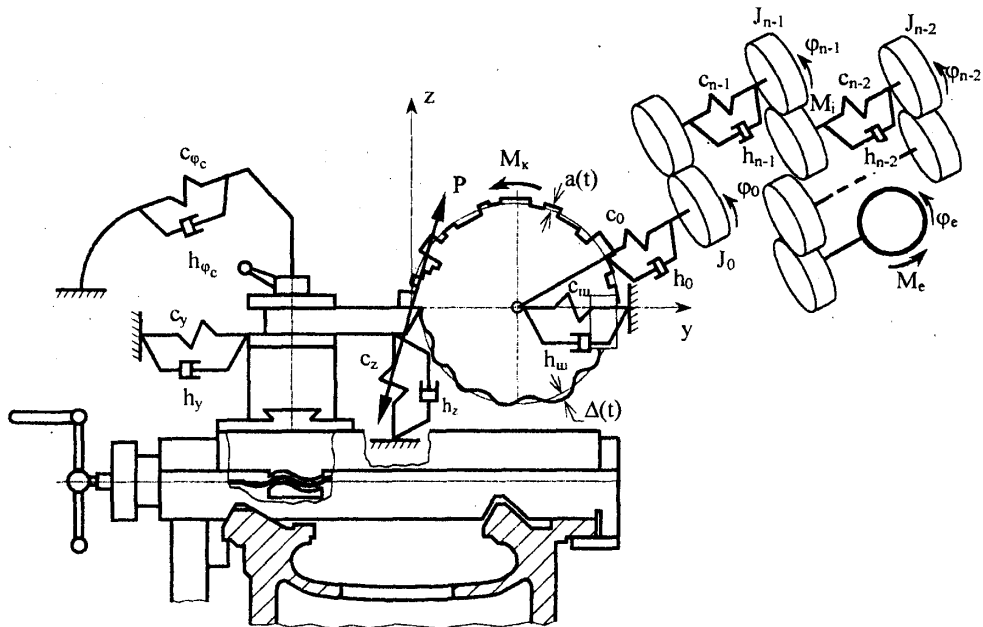


Рис. 10.18. Принципова схема динамічної системи токарного верстата

Виходом даної математичної моделі є динамічна похибка обробки  $\Delta$ , яка визначена у вигляді функціональної залежності від часу  $\Delta(t)$  та відповідного зображення по Лапласу  $\Delta(s)$ . Модель має два входи:  $a(t)$  відповідає імітаційному навантаженню у вигляді випадкової зміни контуру заготовки;  $\varphi_0(t)$  представляє собою динамічну складову кута повороту приводного вала шпинделя. Для цих входів також визначені зображення по Лапласу  $a(s)$  і  $\varphi_0(s)$ .

Останній вхід  $\varphi_0(s)$  є виходом математичної моделі динамічної підсистеми привода головного руху.

В процесі виконання досліджень розроблена математична модель привода головного руху. З метою спрощення моделі привод головного руху розглянуто у вигляді лінійної ланцюгової крутильної системи (див. рис. 10.18). Система включає всі обертові маси, починаючи з ротора електродвигуна і закінчуючи приводним валом шпинделя. Нелінійні властивості системи враховані як стохастичні збурення (крутні моменти  $M_i$ ), що діють на кожний інерційний елемент крутильної системи.

Розглянемо окремо кожний інерційний елемент крутильної системи привода головного руху верстата (рис. 10.19).

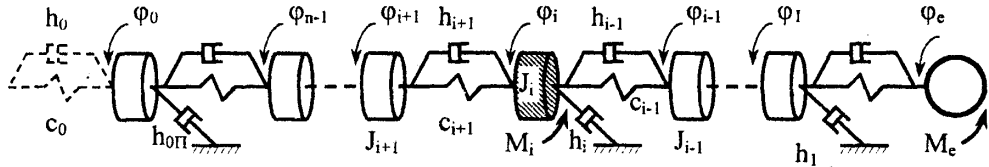


Рис. 10.19. Принципова схема лінійної ланцюгової крутильної динамічної системи привода головного руху верстата з виділеним інерційним елементом

Рівняння динаміки, що відповідає виділеному  $i$ -му інерційному елементу, має вигляд:

$$J_i \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} = M_i + (\varphi_{i-1} - \varphi_i) c_{i-1} + (\dot{\varphi}_{i-1} - \dot{\varphi}_i) h_{i-1} - \dot{\varphi}_i h_i - (\varphi_i - \varphi_{i+1}) c_{i+1} - (\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i+1}) h_{i+1}, \quad (10.38)$$

де  $\varphi_i(t)$ ,  $\varphi_{i-1}(t)$ ,  $\varphi_{i+1}(t)$  – динамічні складові кутів повороту послідовно з'єднаних  $i$ -го,  $(i-1)$ -го та  $(i+1)$ -го інерційних елементів в функції часу  $(t)$ ;

$J_i$  – приведений момент інерції  $i$ -го інерційного елемента;

$c_{i-1}$ ,  $c_{i+1}$  – коефіцієнти жорсткості пружних зв'язків  $i$ -го інерційного елемента із сусідніми елементами ланцюгової системи;

$h_{i-1}$ ,  $h_{i+1}$  – коефіцієнти дисипативних зв'язків  $i$ -го інерційного елемента із сусідніми елементами ланцюгової системи;

$h_i$  – коефіцієнт опору підшипників  $i$ -го елемента (при їх наявності);

$M_i$  – збурюючий момент (в загальному випадку – стохастична функція часу), що діє на  $i$ -й інерційний елемент.

Після перетворення диференціального рівняння (10.38) по Лапласу за нульових початкових умов одержимо алгебраїчне співвідношення між зображеннями по Лапласу кутів повороту трьох інерційних елементів:

$$\begin{aligned} [J_i s^2 + (h_{i-1} + h_i + h_{i+1})s + (c_{i-1} + c_i + c_{i+1})] \cdot \varphi_i(s) = \\ = M_i + (h_{i-1}s + c_{i-1}) \cdot \varphi_{i-1}(s) + (h_{i+1}s + c_{i+1}) \cdot \varphi_{i+1}(s), \end{aligned} \quad (10.39)$$

де  $\varphi_i(s)$ ,  $\varphi_{i-1}(s)$ ,  $\varphi_{i+1}(s)$  – зображення по Лапласу кутів повороту  $i$ -го,  $(i-1)$ -го та  $(i+1)$ -го інерційних елементів;

$s$  – оператор Лапласа.

Із алгебраїчного рівняння (10.39) знаходиться взаємозв'язок зображення по Лапласу кута повороту  $i$ -го інерційного елемента та зображень по Лапласу кутів повороту сусідніх елементів:

$$\begin{aligned} \varphi_i(s) = & \frac{1}{J_i s^2 + (h_{i-1} + h_i + h_{i+1})s + c_{i-1} + c_i + c_{i+1}} \cdot M_i(s) + \\ & + \frac{h_{i-1}s + c_{i-1}}{J_i s^2 + (h_{i-1} + h_i + h_{i+1})s + c_{i-1} + c_i + c_{i+1}} \cdot \varphi_{i-1}(s) + \\ & + \frac{h_{i+1}s + c_{i+1}}{J_i s^2 + (h_{i-1} + h_i + h_{i+1})s + c_{i-1} + c_i + c_{i+1}} \cdot \varphi_{i+1}(s). \end{aligned} \quad (10.40)$$

Графоаналітичне зображення даної залежності (рис. 10.20) дає окремий блок математичної моделі ланцюгової крутильної системи привода головного руху, що відповідає  $i$ -му інерційному елементу.

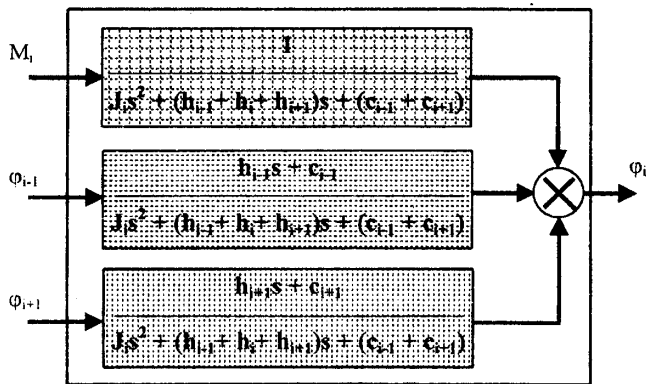


Рис. 10.20. Структурна схема математичної моделі, що описує коливання одного інерційного елемента ланцюгової крутильної системи

Окремі блоки математичної моделі, що описують коливання кожного елемента ланцюгової системи привода, з'єднуються послідовно. Зв'язки між блоками, включаючи зворотні зв'язки, об'єднуються відповідно утворюючи послідовну ланцюгову структуру (рис. 10.21).

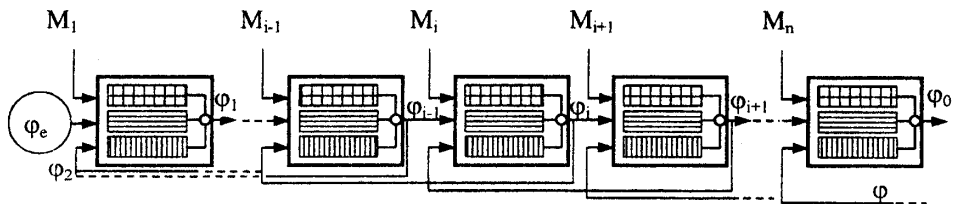


Рис. 10.21. Об'єднання блоків математичної моделі ланцюгової крутильної системи привода головного руху

Виходом даної математичної моделі є динамічна складова кута повороту вала приводної передачі шпинделя  $\varphi_0$ , а входами – динамічна складова кута повороту шпинделя  $\varphi$  (зворотний зв'язок) та динамічна складова кута повороту вала електродвигуна  $\varphi_e$ .

На кожному масу системи діють випадкові збурення у вигляді крутних моментів

$$M_1, \dots, M_{i-1}, M_i, M_{i+1}, \dots, M_n.$$

Ці випадкові збурення при математичному моделюванні задаються стохастичними процесами, спектральні характеристики яких відповідають “білому шуму” [55]. Інтенсивність “білого шуму” може вважатись постійною із значенням:

$$S_{\text{шв}}(\omega) = \sum_{\xi=1}^z \frac{i^2 n_{\xi} Z_{\xi}}{120\pi T_{\xi}^2} (q_{\xi}^2 + D_{\xi}) = \text{const}, \quad (10.41)$$

де  $n_{\xi}$ ,  $Z_{\xi}$  – число обертів за хвилину і число зубців зубчастої передачі, в якій відбуваються імпульсні навантаження;

$q_{\xi}$  – математичне сподівання інтенсивності імпульсів;

$D_{\xi}$  – дисперсія інтенсивності імпульсів;

$T_{\xi}$  – постійна часу, що визначається з приведеного до зубчастої передачі, в якій відбуваються імпульсні навантаження моменту інерції та податливості;

$i$  – передавальне число від поточної зубчастої передачі до шпинделя верстата.

Відповідно сума відносно рідких в часі імпульсних стохастичних навантажень в кожній зубчастій передачі може бути описана випадковим моментом із постійним спектром, інтенсивність якого визначено виходячи із інерційного навантаження, яке відповідає випадковому процесу зміни кутового прискорення шпинделя.

Математичний опис збурень, які вносить зубчаста передача у вигляді широкополосного випадкового процесу з постійним спектром, дає можливість уніфікувати різномірні за характером динамічні дії. Весь набір динамічних збурень в приводі головного руху описується однотипним випадковим процесом.

## 10.5. Структурна математична модель динамічної системи токарного верстата

Розроблені структурні математичні моделі підсистем привода головного руху та шпиндельно-супортної групи в своїй сукупності утворюють загальну модель. Відповідно створена структура (візуальна) математична модель динамічної системи верстата. При розробці використані засоби системи візуального математичного моделювання SIMULINK пакету MATLAB. Загальний вигляд розробленої S-моделі верстата наведено на рис. 10.22.

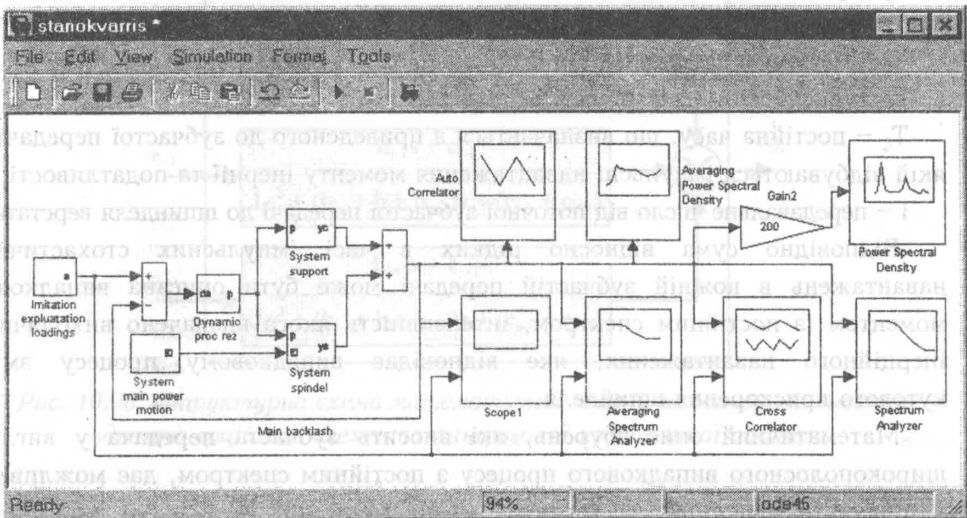
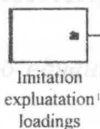
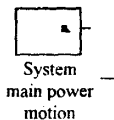


Рис. 10.22. Блок схема візуальної математичної моделі (S-моделі) динамічної системи токарно-гвинторізного верстата KA280

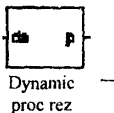
Модель призначена для розрахунку стохастичних коливальних процесів що виникають при спеціальних імітаційних навантаженнях верстата силами різання та здійснення кореляційного і спектрального аналізу системи випадкових коливальних процесів. Вона включає ряд блоків. Зокрема:



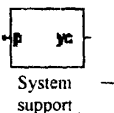
блок-модель імітаційного навантаження силою різання, що формується у вигляді випадкового процесу, який відповідає профілю поверхні спеціальної заготовки, що обробляється;



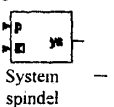
модель багатомасової ланцюгової крутильної системи приводу головного руху;



стохастичну модель процесу різання;



модель супорта як динамічної системи з двома ступенями вільності;



математичну модель шпиндельної групи, що враховує поперечні та крутильні коливання шпинделя.

Імітаційне навантаження верстата здійснено силами різання, що виникають при обробці заготовки спеціального профілю [65, 73]. Спеціальне імітаційне навантаження дозволяє задати випадковий вхід на динамічну систему верстата, який суттєво впливає на процеси в динамічній системі верстата. Випадковий вхід формується при обробці заготовки із спеціально розрахованим профілем поверхні, яка забезпечує випадкове імітаційне навантаження. Використано випадковий вхід у вигляді кусково-постійного випадкового процесу Пуассона. Синтез випадкового процесу Пуассона здійснено за спеціальною програмою (рис. 10.23).

Розроблена і виготовлена заготовка зі складним ступінчастим профілем, що має змінний крок. Відстань між виступами та впадинами ступенів розподілена за законом Пуассона (закон рідких випадків), а висота ступенів та глибина западин – за нормальним законом. Параметри розподілу Пуассона та нормального розподілу визначені розрахунком на ЕОМ в програмному середовищі MathCAD (див. рис. 10.23).

За результатами розрахунків контуру розроблені креслення заготовки із профілем, що відповідає випадковому процесу Пуассона (рис. 10.24).

За розробленими кресленнями виготовлена заготовка із профілем, що відповідає випадковому процесу Пуассона (рис. 10.25).

При обробці цієї заготовки виникає складова сили різання, що здійснює імітаційне стохастичне навантаження на динамічну систему верстата. Інтенсивність прийнятого стохастичного навантаження набагато перевищує власну стохастичну складову (збурення) сили різання, що виникає за рахунок





блок формування випадкового збурення, що відповідає мікрогеометрії контуру заготовки, математична модель якого прийнята у вигляді «білого шуму».

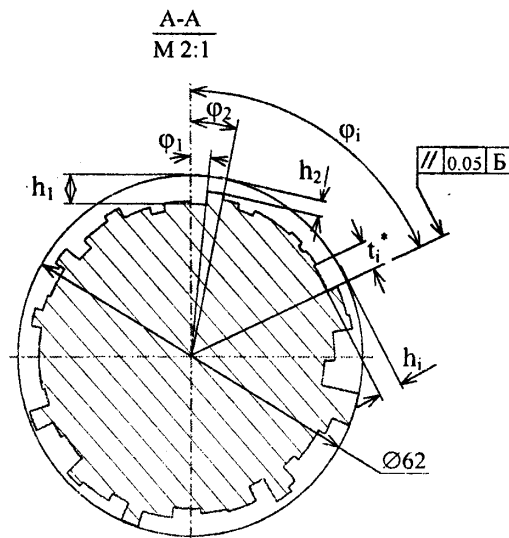
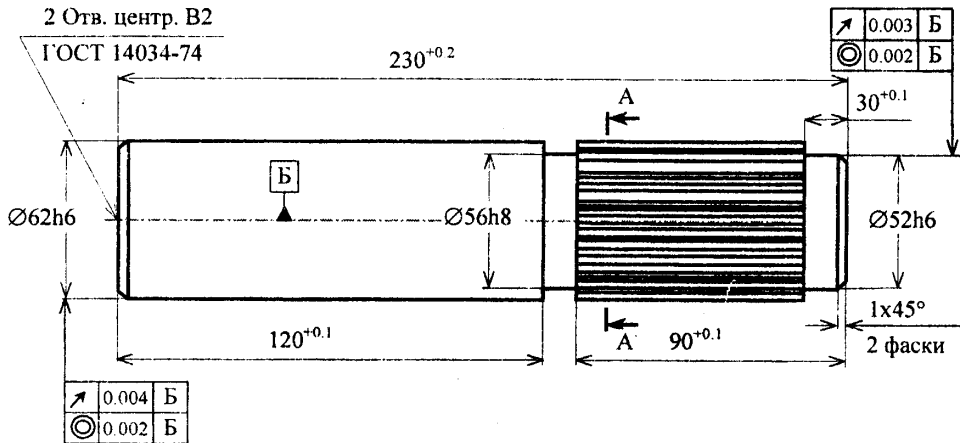
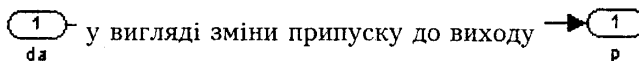


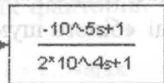
Рис. 10.24. Креслення заготовки для імітації стохастичного навантаження на динамічну систему верстата у вигляді процесу Пуассона

Для задання фактичного контуру заготовки виконано натурні вимірювання контуру перерізу виготовленої заготовки. Висота ступенів та їх крок занесені в файл imitraw.mat, і в подальшому вони слугують вхідними параметрами в блоці From File S-моделі імітаційного навантаження (рис. 10.26).

Модель процесу різання (рис. 10.27) від входу



у вигляді динамічної складової сили різання включає два основні блоки:



Transfer Fcn proc rez

блок, який визначає трансформуючу функцію процесу різання;



Uniform Random Number

блок, який формує адитивну випадкову складову сили різання.

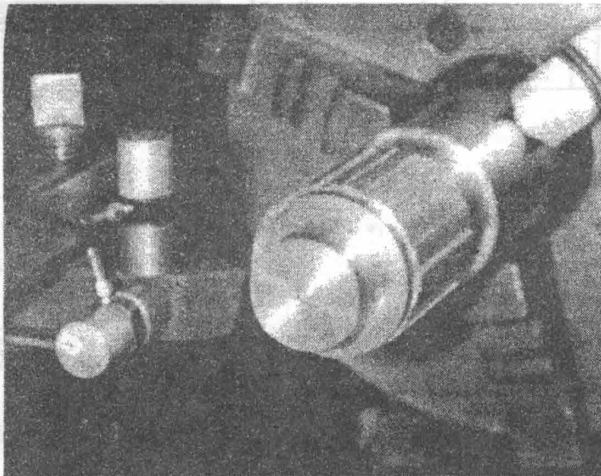


Рис. 10.25. Спеціальна заготовка із профілем, що відповідає випадковому процесу Пуассона, використана для генерації стохастичного імітаційного навантаження на динамічну систему верстата

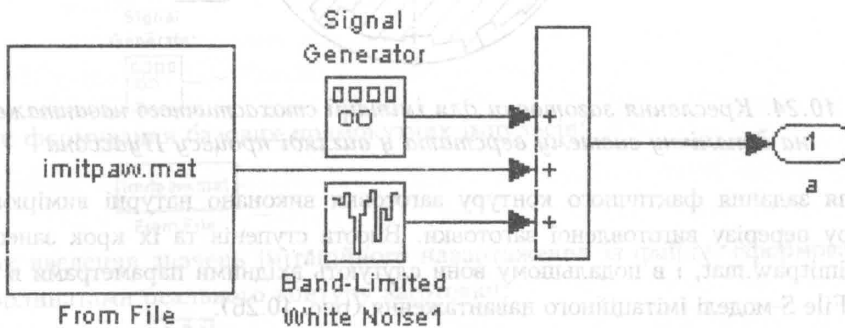


Рис. 10.26. Структура S-моделі для математичного моделювання імітаційного навантаження на динамічну систему верстата

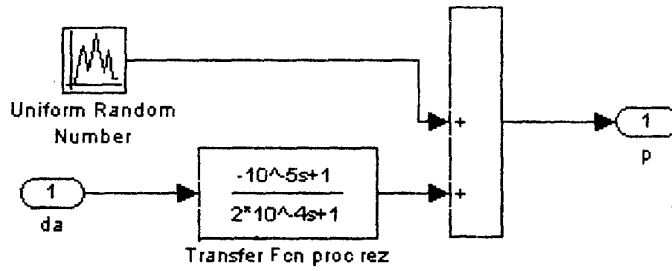
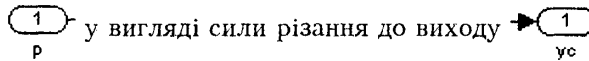


Рис. 10.27. Візуальна стохастична математична модель процесу різання, сформована у вигляді S-моделі

Випадкова складова процесу різання задана у вигляді кусково-постійного випадкового процесу із рівномірним законом розподілу амплітуди.

Блок-схема математичної моделі супорта відповідає поступальній динамічній системі з двома степенями вільності від входу



у вигляді зміщення вершини різця в напрямку поперечної подачі (рис. 10.28).

Модель включає два динамічних блоки, які визначають коливання вершини різця в напрямках головних осей жорсткості. Кожен блок відповідає динамічній підсистемі з відповідною трансформуючою функцією.

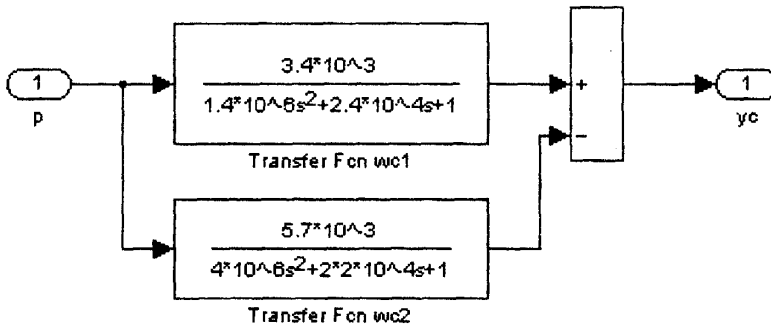
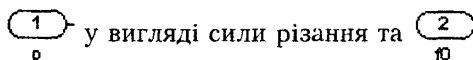


Рис. 10.28. Візуальна математична модель супорта верстата, сформована у вигляді S-моделі

Коефіцієнти трансформуючих функцій визначено через еквівалентні маси та головні жорсткості супортної групи, як це вказано раніше.

Блок – модель шпindelної групи верстата, визначена для динамічної системи з двома степенями вільності від двох входів



динамічної складової кута повороту приводного вала до виходу

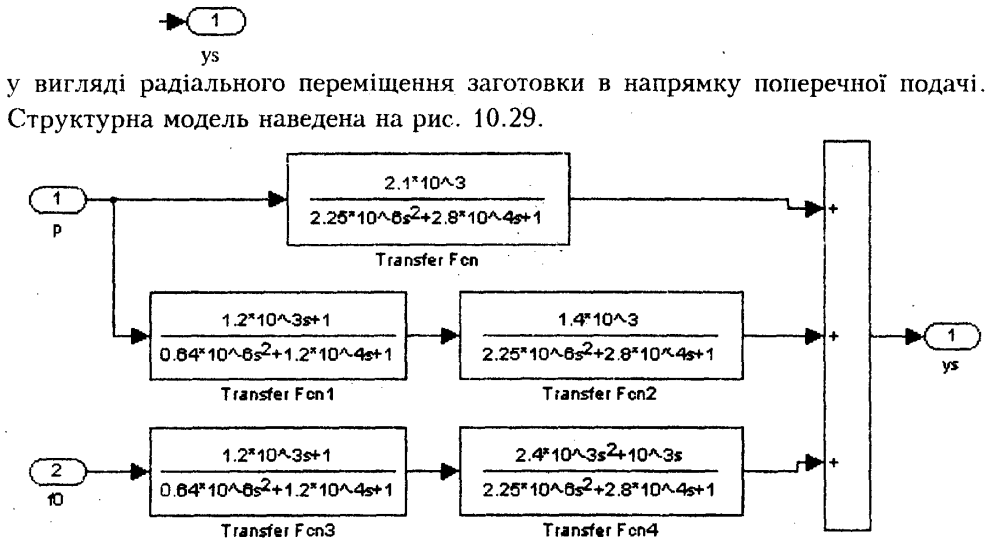


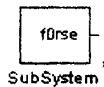
Рис. 10.29. Візуальна математична модель шпиндельної групи верстата, сформована у вигляді S-моделі

Модель шпиндельної групи включає п'ять динамічних блоків – трьох з'єднаних в ланцюг від входу у вигляді сили різання та двох послідовно з'єднаних блоків від входу у вигляді динамічної складової кута повороту приводного вала.

Всі динамічні блоки мають складові у вигляді коливальних та пропорційних або форсуючих ланок. Постійні часу та коефіцієнти демпфування у трансформуючих функціях визначені через еквівалентні маси та жорсткості.

Візуальна математична модель, яка відповідає приводу головного руху, показана на рис. 10.30.

Входом моделі є блок



який моделює навантаження в електромеханічній системі електродвигуна приводу. Виходом моделі є блок



у вигляді динамічної складової кута повороту шестерні приводної передачі.

Модель включає чотири динамічні підсистеми, які відповідають групам рухомих деталей (шестерень, напівмуфт, ділянок валів, шківів) на кожному з валів коробки швидкостей верстата. Ці підсистеми сформовані у вигляді блоків: system eldv-rem, model system val2, model system val3, model system val4.

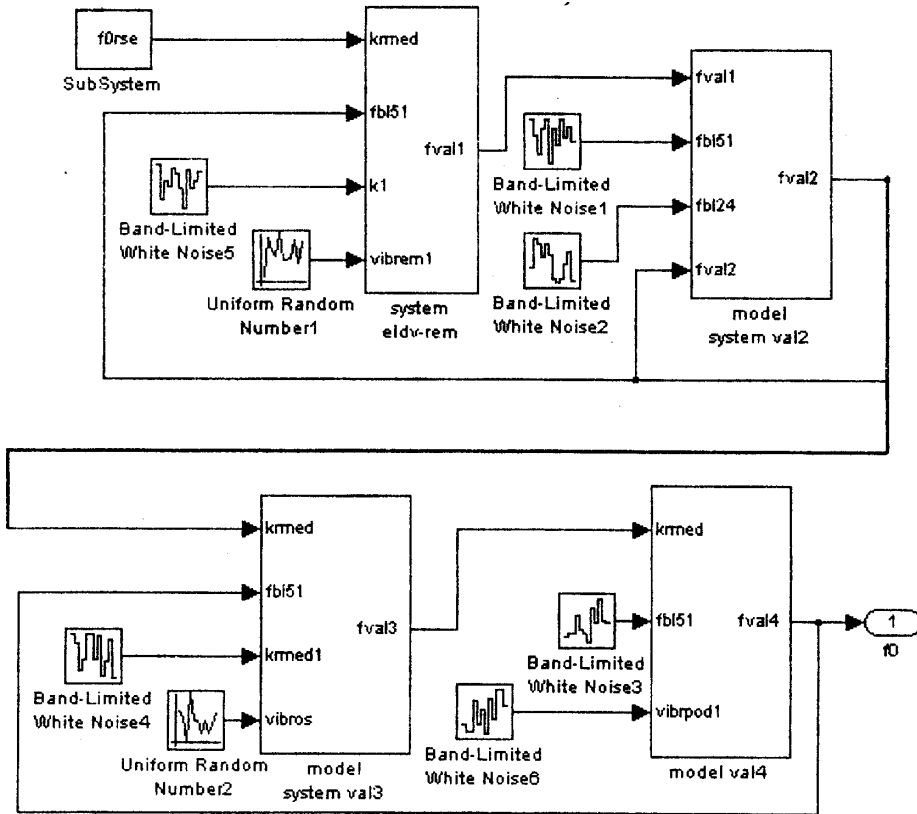
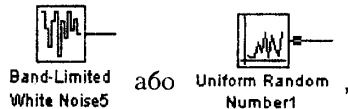


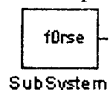
Рис. 10.30. Візуальна математична модель привода головного руху верстата, що відповідає ланцюговій крутильній багатомасовій системі, сформована у вигляді S-моделі

Кожна з чотирьох динамічних підсистем привода головного руху має по два додаткові входи:



що відповідають збуренням у зубчастих передачах привода головного руху. Ці входи моделюють високочастотні та низькочастотні збурення у кожній зубчастій передачі.

Розглянемо окремо кожен блок математичної моделі. Блок



моделює навантаження на привод з боку системи електродвигуна приводу

головного руху. Даний блок (forse) сформовано у вигляді підсистеми, зображеної на рис. 10.31.

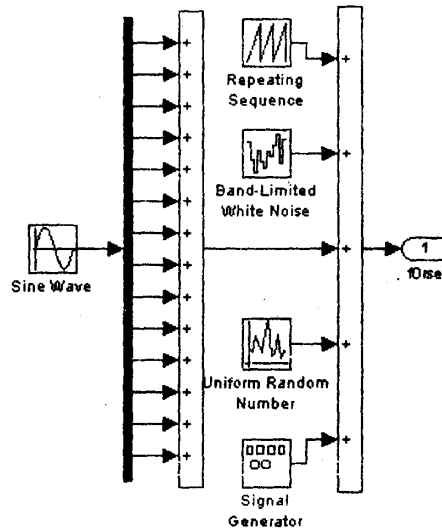


Рис. 10.31. Візуальна математична модель для реалізації навантажень системи електродвигуна приводу головного руху верстата, сформована у вигляді S-моделі

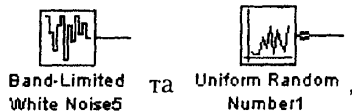
Ця структурна модель включає блок



формування матриці коефіцієнтів (амплітуд, частот, та початкових фаз) розкладу в ряд Фур'є неперервного детермінованого навантаження на привод з боку електродвигуна [73].

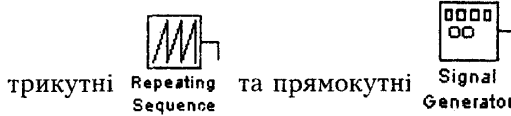
При моделюванні процесів в електродвигуні використовується 14 гармонік розкладу. Вони враховують зусилля, що виникають за рахунок відцентрових сил при обертанні ротора та інших рухомих деталей (зокрема, тіл кочення підшипників), перемагнічування активного заліза обмоток, пульсації магнітного потоку у повітряних зазорах, похибок форми підшипників кочення двигуна: радіальні зазори в підшипниках; хвилястість доріжок підшипників; похибки форми тіл кочення (розмірності, гранності), а також похибки монтажу підшипників.

Зазначені 14 гармонік формуються як один детермінований векторний вхід (див. рис. 10.31), який в подальшому об'єднується суматором. До цього об'єданого векторного входу додаються випадкові входи



які моделюють випадкові збурення в електромережі та в підшипниках

електродвигуна. Також додаються

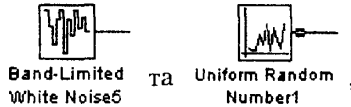


імпульсні навантаження, що виникають в електродвигуні.

Математична модель електродвигуна є одним із блоків математичної моделі привода головного руху. Загалом модель привода головного руху включає чотири блоки, які відповідають чотирьом динамічним підсистемам привода.

Структурні математичні моделі вказаних чотирьох динамічних підсистем включають однотипні модулі, зображені на рис. 10.32 прямокутниками.

Динамічні підсистеми включають вхідні блоки



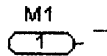
які служать для формування випадкових збурень в з'єднаннях вал-втулка.

Муфти та механізми перебору відповідають ручним перемикачам

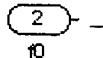


Кожний однотипний блок динамічних підсистем відповідає одній масі, яка здійснює крутильні коливання. Візуальні математичні моделі всіх блоків однотипні і розрізняються лише значеннями коефіцієнтів (рис. 10.33).

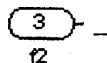
Математична модель динамічної крутильної коливальної системи шківів включає три незалежні входи та один вихід, зокрема визначає:



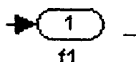
вхід, що відповідає випадковому збуренню від коливань пасів пасової передачі;



вхід у вигляді кута повороту вала електродвигуна;



вхід, що відповідає зворотному зв'язку у вигляді кута повороту шківів на валу коробки швидкостей. Вихід моделі



визначає кут повороту шківів.



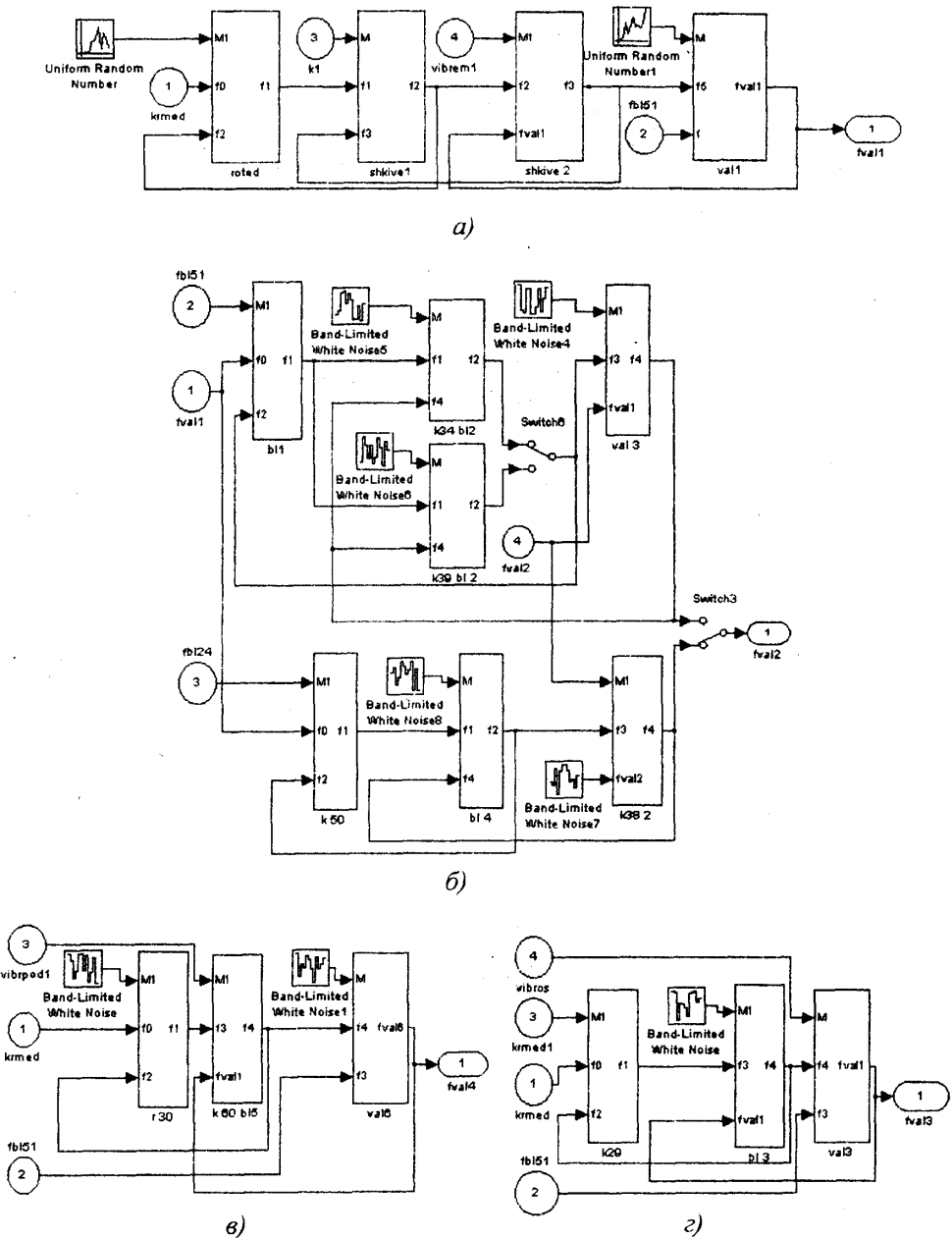


Рис. 10.32. Структурні математичні моделі чотирьох динамічних підсистем привода головного руху верстата КА280: а – підсистема “вал електродвигуна – пасова передача”; б – підсистема “вал II з механізмом реверсу”; в, г – підсистеми валів III і IV

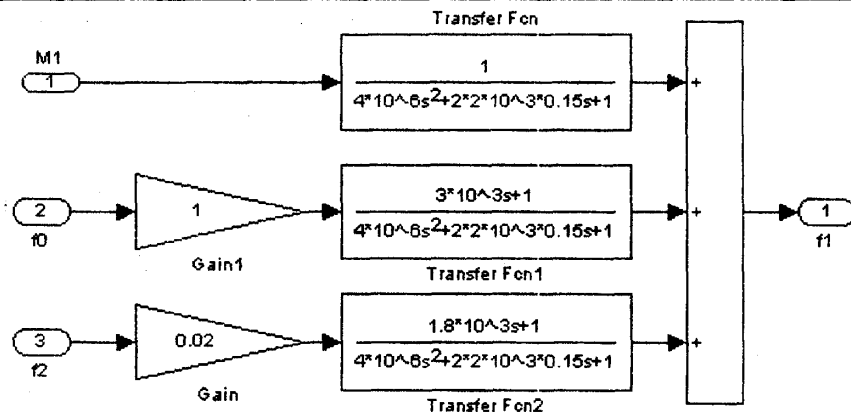


Рис. 10.33. Візуальна математична модель динамічної крутильної коливальної системи шківів як приклад типової математичної моделі елемента крутильної динамічної підсистеми привода головного руху

Математична модель динамічної крутильної коливальної системи шківів має три паралельні ланцюги, в яких знаходяться трансформуючі функції. Перший ланцюг (від входу у вигляді збурення) має трансформуючу функцію, що відповідає коливальній ланці з власною частотою, рівною парціальній частоті коливання шківів. Другий і третій ланцюги включають таку ж коливальну ланку, послідовно з'єднану з пропорційною та форсуючою ланками. Вони відповідають впливу сусідніх коливальних систем (електродвигуна та шківів на валу коробки швидкостей).

Параметри останніх динамічних ланок, які утворюють динамічну систему привода головного руху, визначені шляхом розрахунку і задані в математичній моделі конкретно для кожного однотипного блоку динамічної підсистеми, яка відповідає одній масі, що здійснює крутильні коливання.

## 10.6. Результати математичного моделювання верстата

За результатами математичного моделювання верстата з імітаційним навантаженням здійснено кореляційний та спектральний аналіз [72, 73] динамічної похибки обробки деталі. Для реалізації вказаного аналізу до математичної моделі включено систему блоків, що реалізують стандартні процедури аналізу пакету SIMULINK (рис. 10.34).

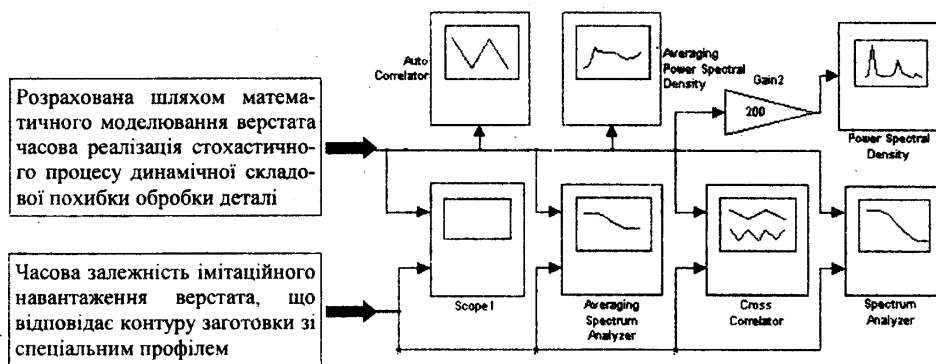


Рис. 10.34. Графічний супровід розрахунків: кореляційний та спектральний аналізи результатів математичного моделювання верстата

Блок побудови графіків (Scope) здійснює виведення у графічному вигляді (рис. 10.35) динамічної похибки обробки деталі (верхній графік) та імітаційного навантаження у вигляді фрагмента заготовки (нижній графік).

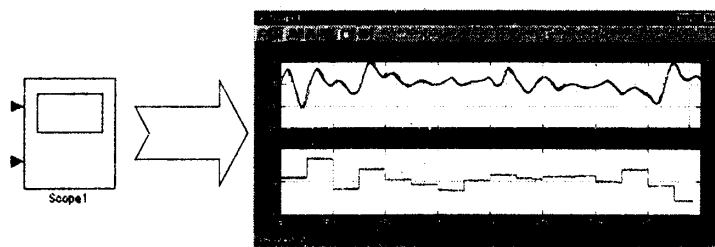


Рис. 10.35. Графічний супровід процесу моделювання шляхом виведення графіків динамічної похибки обробки та імітаційного навантаження у вигляді функції часу

Блоки знаходження спектральної густини потужності (рис. 10.36, а) та усередненої по ансамблю реалізацій спектральної густини потужності (рис. 10.36, б) визначають спектральні характеристики динамічної похибки обробки.

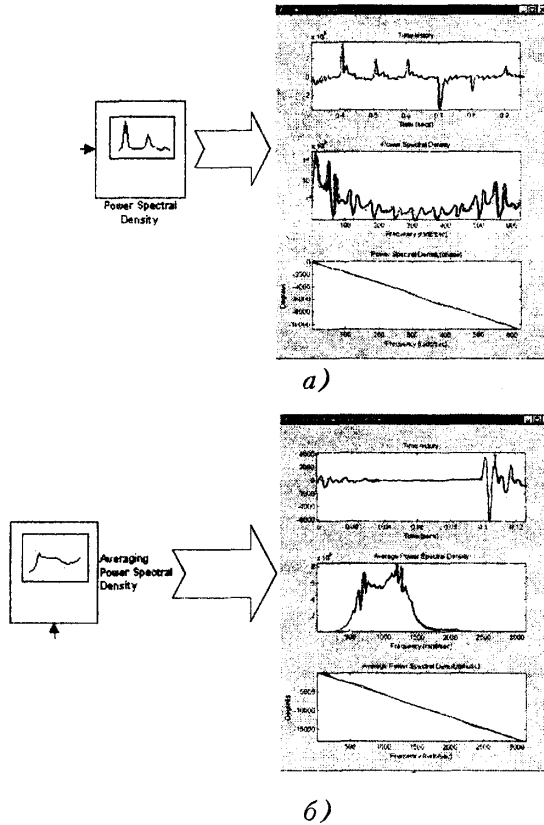


Рис. 10.36. Результати розрахунків спектральної густини потужності (а) та усередненої по ансамблю реалізацій спектральної густини потужності (б) динамічної похибки обробки

Блок знаходження усередненої спектральної густини потужності призначено для зиведення на екран та аналізу стохастичного імітаційного навантаження.

Блок-аналізатор спектра (рис. 10.37) з усередненням по множині реалізації (Averaging Spectrum Analyzer) здійснює спектральний аналіз двох випадкових процесів. Для динамічної похибки обробки та імітаційного навантаження будується амплітудно-частотна (середній графік) та фазочастотна характеристика (нижній графік).

Блок знаходження взаємної кореляційної функції входу та виходу зображений на рис. 10.38. Він встановлює кореляційний зв'язок між випадковими процесами імітаційного навантаження та динамічної похибки обробки деталі.

Блок спектрального аналізу (рис. 10.39) окремої реалізації (Spectrum Analyzer) здійснює спектральний аналіз двох випадкових процесів без усереднення по ансамблю реалізацій. Для динамічної похибки обробки та

імітаційного навантаження будувється амплітудно-частотна (середній графік) та фазочастотна характеристика (нижній графік).

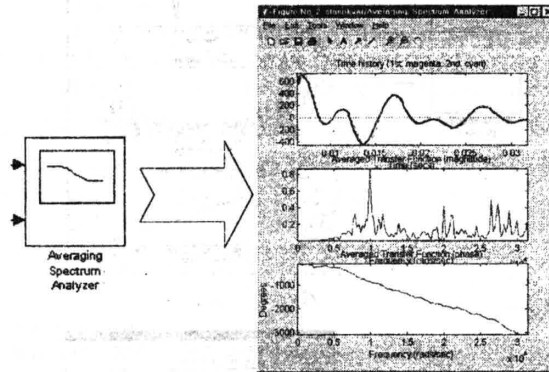


Рис. 10.37. Результати роботи блока-аналізатора спектра з усередненням по множині реалізацій

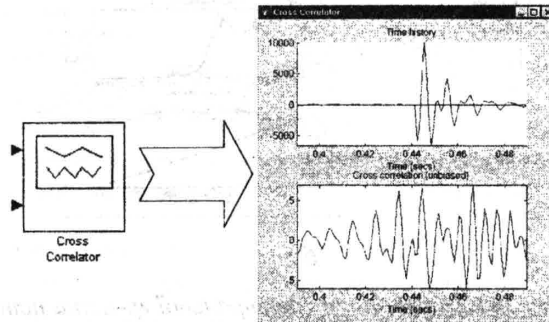


Рис. 10.38. Знаходження взаємної кореляційної функції стохастичного входу і виходу математичної моделі

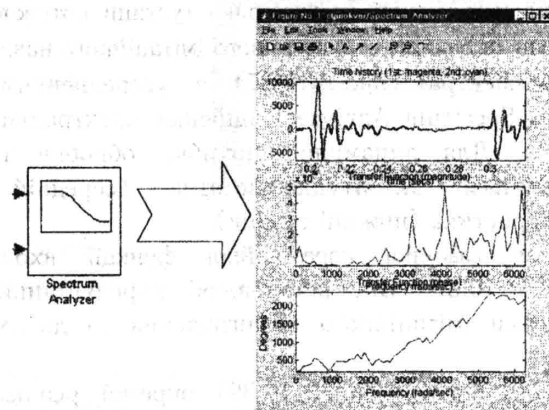


Рис. 10.39. Блок спектрального аналізу окремої реалізації двох випадкових процесів: імітаційного входу та динамічної похибки обробки

Блок знаходження автокореляційної функції (Auto Correlator) похибки обробки деталі здійснює розрахунок і виведення у графічному вигляді фрагменту реалізації випадкового процесу (рис. 10.40, верхній графік) та відповідної йому автокореляційної функції (нижній графік).

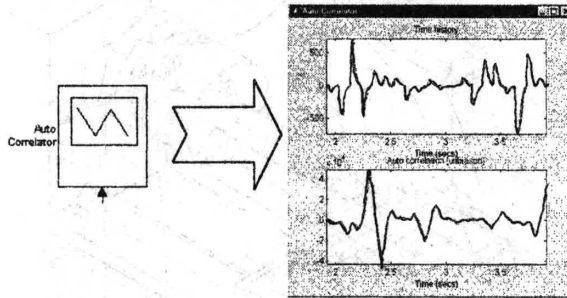


Рис. 10.40. Результати математичного моделювання автокореляційної функції динамічної похибки обробки

Результати математичного моделювання порівнювались із експериментальними даними, одержаними безпосередньо вимірюваннями вібраційних параметрів токарно-гвинторізного верстата КА280 при його імітаційному стохастичному навантаженні [37, 42].

Методика експериментальних досліджень включала ряд вимірювань вібраційних параметрів верстата. Зроблені вимірювання параметрів вібрацій шпindelльної групи, супорта та різця. Вимірювання зроблені комплектом апаратури, що дозволяє виконати комплексний аналіз стохастичних вібраційних параметрів верстата.

Схема розміщення датчиків при визначенні вібраційних характеристик верстата наведена на рис. 10.41.

Для вимірювань параметрів вібрацій використано комплект апаратури, що включає: датчики віброприскорень типу KD45; підсилювач-вимірювач вібрацій Robotron з каскадом подвійного інтегрування вхідного сигналу; 16-канальний магнітограф; аналізатор параметрів вібрацій.

Загальний вигляд використаної апаратури показаний на рис. 10.42.

Апаратура дозволяє здійснити вимірювання вібраційних параметрів верстата в діапазоні від 0 до 50 кГц. Визначено реалізації випадкових процесів, що відповідають віброприскоренням деталей верстата. Шляхом інтегрування одержано записи віброшвидкостей, а шляхом подвійного інтегрування – вібропереміщення.

Одержані реалізації вимірювань вібрацій оброблені за допомогою аналізатора параметрів вібрацій. Визначено спектри віброприскорень, віброшвидкостей та вібропереміщень.

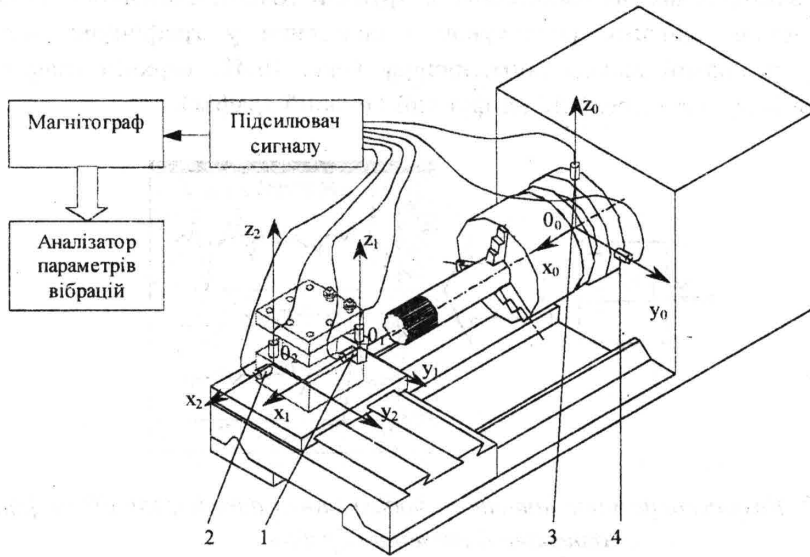


Рис. 10.41. Схема визначення вібраційних параметрів верстата та розміщення датчиків на верстаті: 1 – блок датчиків для вимірювання трьох компонент віброприскорень різця; 2 – датчики для вимірювань вібрацій супорта; 3, 4 – датчики для вимірювань вертикальної та горизонтальної складових віброприскорень передньої опори шпинделя

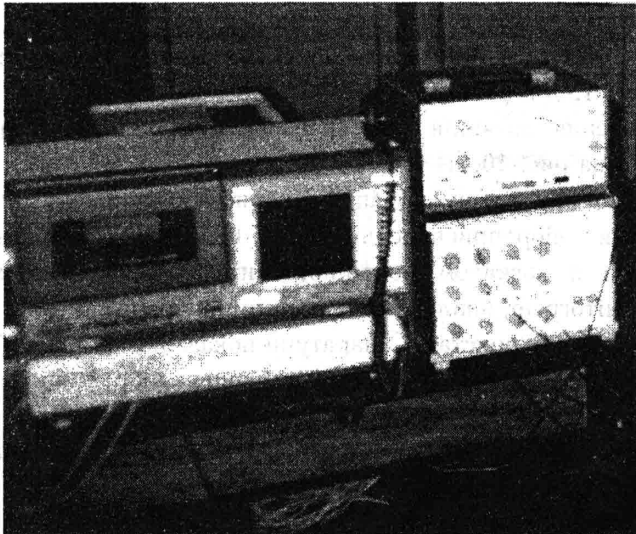
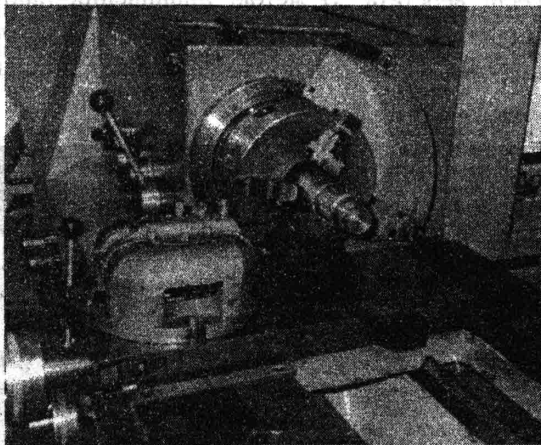


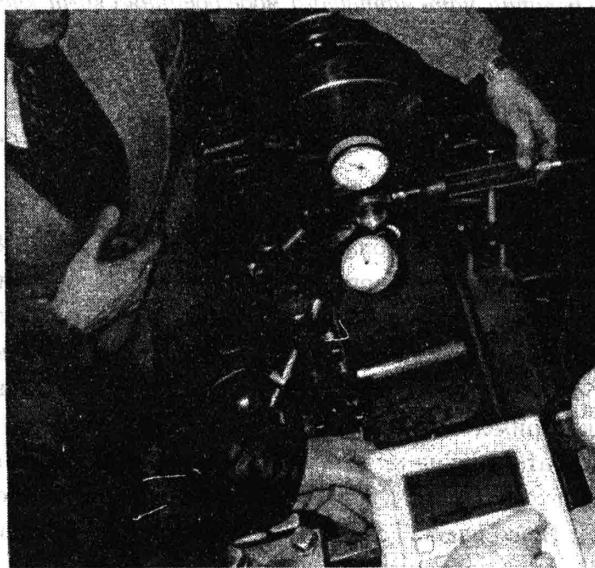
Рис. 10.42. Загальний вигляд апаратури для визначення вібраційних параметрів верстата

Вібраційні параметри різця визначались різними методами. Віброприскорення вимірювались датчиками, встановленими безпосередньо на бокових поверхнях різця. Проекції сил різання вимірювались трикомпонентним динамометром (рис. 10.43).



*Рис. 10.43. Трикомпонентний динамометр для визначення складових сили різання*

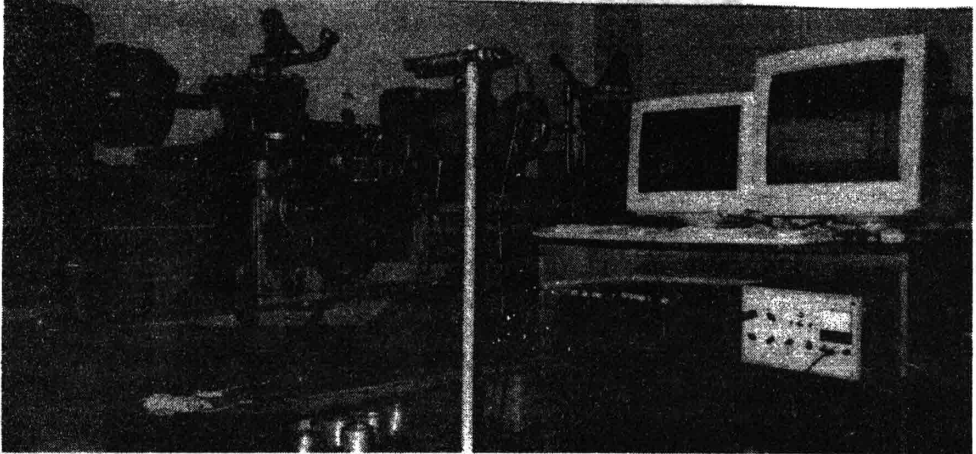
Для контролю за роботою апаратури безпосередньо перед проведенням експериментальних досліджень виконувались контрольні вимірювання параметрів вібрацій із графічною індикацією результатів вимірювань (рис. 10.44).



*Рис. 10.44. Контрольні вимірювання параметрів вібрацій з поточною графічною індикацією результатів вимірювань*



Для порівняння результатів математичного моделювання з експериментальними даними виконувались паралельні вимірювання параметрів віброакустичного сигналу і математичного моделювання динамічних процесів верстата. З метою підвищення надійності результатів порівняльного аналізу використовувалась паралельна обробка експериментальних даних і результатів моделювання в режимі реального часу (рис. 10.45).



*Рис. 10.45. Порівняння експериментальних даних (комп'ютер зліва) та результатів математичного моделювання (комп'ютер справа) при моделюванні в режимі реального часу*

Типовий визначений експериментально спектр вертикальних віброприскорень різця має кілька резонансних зон і охоплює діапазон частот до 10 кГц (рис. 10.46, а).

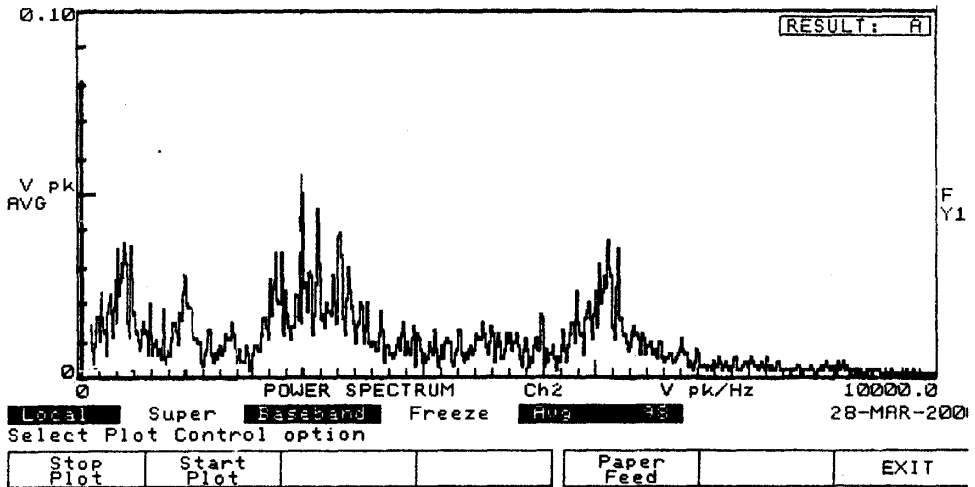
При вимірюваннях встановлено, що найбільш суттєвими за рівнем потужності, є вібрації в діапазонах: 0,2..0,6; 1..1,2; 2..3 та 5,8..6,4 кГц.

Спектр вертикальних віброприскорень різця, визначений в результаті математичного моделювання (рис. 10.46, б), в цілому відповідає експериментальному. Визначені за результатами математичного моделювання резонансні області складають: 0,8..1,2; 2..2,2; 2,4..3 кГц, що відповідає результатам експериментів.

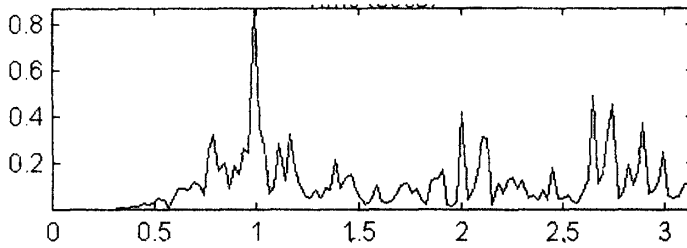
Розроблена математична модель дає змогу розрахувати спектри середнього діапазону частот (до 3 кГц). Точність визначення резонансних зон складає близько 10 %. Враховуючи складність динамічної системи верстата, таку точність моделі можна вважати задовільною.

Розроблена візуальна математична модель [73] відзначається універсальністю, надійністю роботи та достатнім рівнем точності розрахунків.

Вона рекомендується для дослідження показників динамічної якості верстата.



a)



b)

Рис. 10.46. Експериментально виміряний спектр вертикальних віброприскорень різця (a) та спектр, визначений в результаті математичного моделювання (б)

Використання розробленої математичної моделі дає змогу оцінити вплив всіх інерційних, дисипативних та деформативних параметрів на віброакустичні характеристики верстата. Змінюючи окремо деякий параметр або комплекс параметрів можна ціле направлено змінювати динамічні властивості верстата в потрібному частотному діапазоні.

## РОЗДІЛ 11

### Уточнена структурна математична модель силової частини привода головного руху токарного верстата

#### 11.1. Математична модель динамічної системи електродвигуна

В результаті аналізу кінематичної схеми верстата (рис. 11.1) встановлено, що основними можливими джерелами віброакустичних збурень є силова частина привода головного руху.

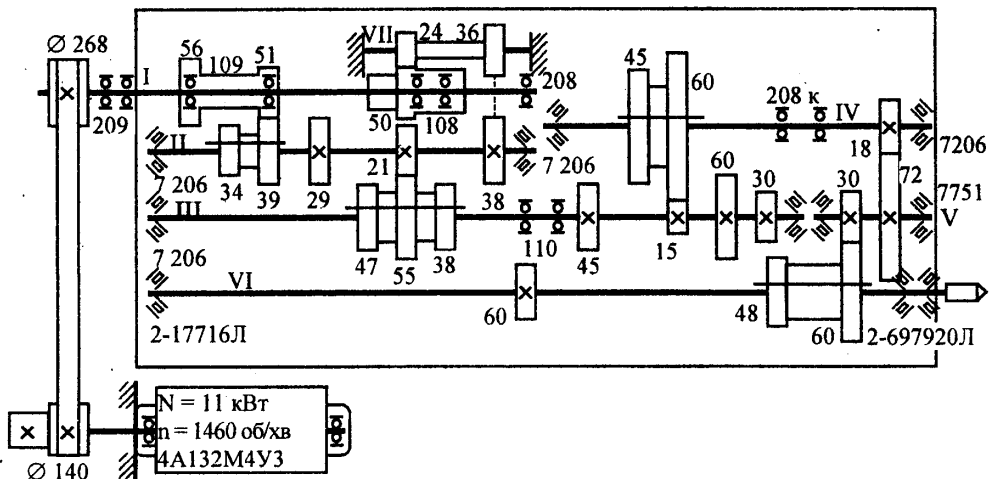


Рис. 11.1. Кінематична схема токарно-гвинторізного верстата моделі КА-280

Основними підсистемами, які генерують вібраційні та віброакустичні збурення, є електродвигун, вал I і зв'язані з ним група реверса і вал II. Тому для виявлення основних причин віброакустичних збурень і розробки пропозицій по їх зменшенню розроблена уточнена математична модель частини привода головного руху, яка включає названі елементи.

Електродвигун привода головного руху встановлений на рамці, розташованій на торцевій поверхні станини (рис. 11.2).

При роботі електродвигуна його корпус здійснює коливальний рух. Основними зміщеннями корпусу є поперечно-кутові коливання у вертикальній та горизонтальній площинах (показані стрілками  $\varphi_z$  і  $\varphi_y$ ), а також крутильні коливання (показані стрілкою  $\varphi_\varphi$ ). Ці коливання спричиняють переміщення корпусу, які впливають на переміщення розміщеного в ньому ротора.

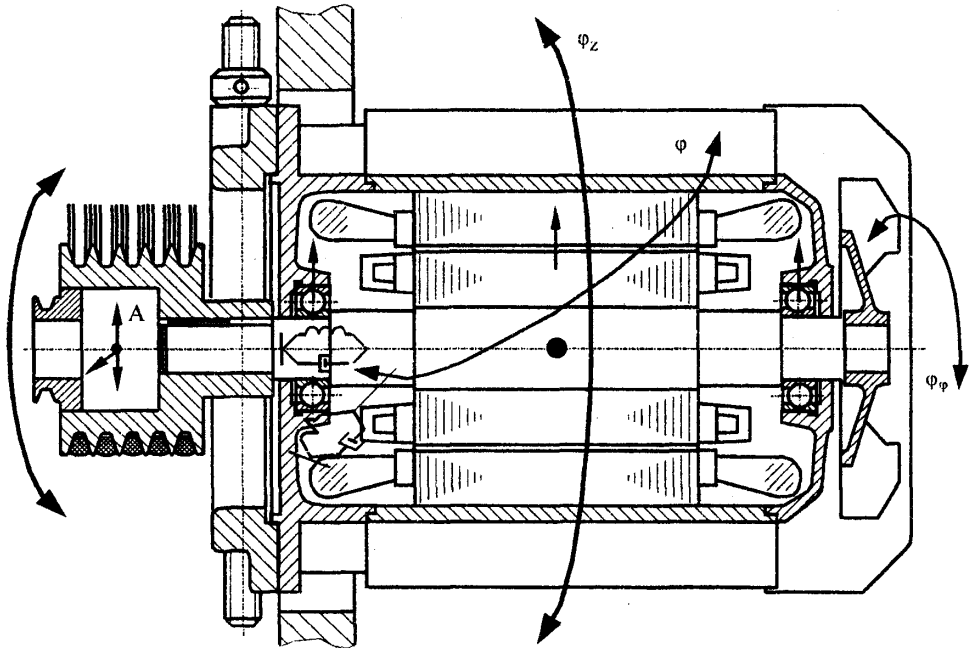


Рис. 11.2. Конструктивне розташування електродвигуна привода головного руху і суттєві ступені вільності корпусу електродвигуна

Розглянемо окремо корпус електродвигуна (рис. 11.3). З метою математичного опису коливань корпусу приведемо всі його інерційні, жорсткісні та дисипативні параметри до точки А. Одержимо динамічну модель корпусу електродвигуна у вигляді твердого тіла, що має три ступені вільності. Ці ступені вільності представляють собою переміщення  $Z_e$ ,  $Y_e$  і поперечно-кутові переміщення корпусу  $\varphi_e$ .

Динамічна модель включає еквівалентні інерційні, дисипативні та жорсткісні параметри корпусу, які приведені до точки А і відповідають трьом ступеням вільності ротора. В напрямку осі  $Z$  маємо еквівалентну жорсткість динамічної системи корпусу  $C_{z_0}$  і еквівалентний коефіцієнт опору  $h_{\varphi_0}$ .

На корпус діють збурення з боку станини. Вони визначаються відповідними переміщеннями  $Y_0$ ,  $Z_0$  та  $\varphi_0$ .

На корпус передаються зусилля з боку ротора. Це здійснюється, в основному, через підшипники ротора (зусилля  $P_{01}$  і  $P_{02}$ ), а також через силову дію електромагнітних сил, обумовлених робочим процесом електродвигуна (зусилля  $P_{e1}$ ). Ці зусилля мають специфіку свого виникнення і обумовлені, зокрема, властивостями динамічної системи ротора електродвигуна разом зі шківом.

Розглянемо динамічну систему ротора електродвигуна разом із ведучим шківом (рис. 11.4).

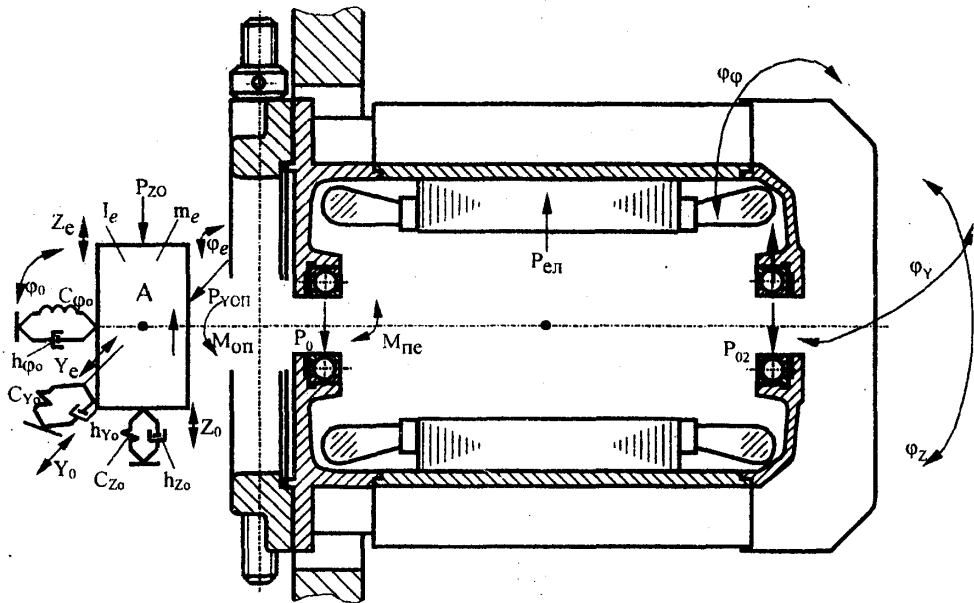


Рис. 11.3. Приведення динамічної системи корпусу електродвигуна до точки А

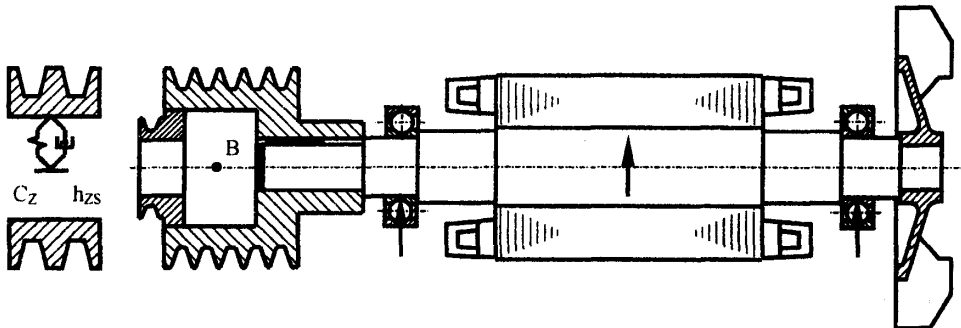


Рис. 11.4. Приведення ротора електродвигуна разом із ведучим шківом до точки В

Ротор електродвигуна представляє собою жорсткий масивний вал. Тому його динамічна модель взята у вигляді одномасової системи із трьома ступенями вільності. Загалом як корпус, так і ротор, інтерпретовані як два точкових твердих тіла, маси і моменти яких зосереджені в одній точці (А чи В). Це зображено схематично на рис. 11.5. При цьому ротор із шківом показано як умовний шків.

матеріальним точкам, розташованим в одному місці простору, вдається значно спростити розробку математичної моделі системи електродвигуна привода головного руху.

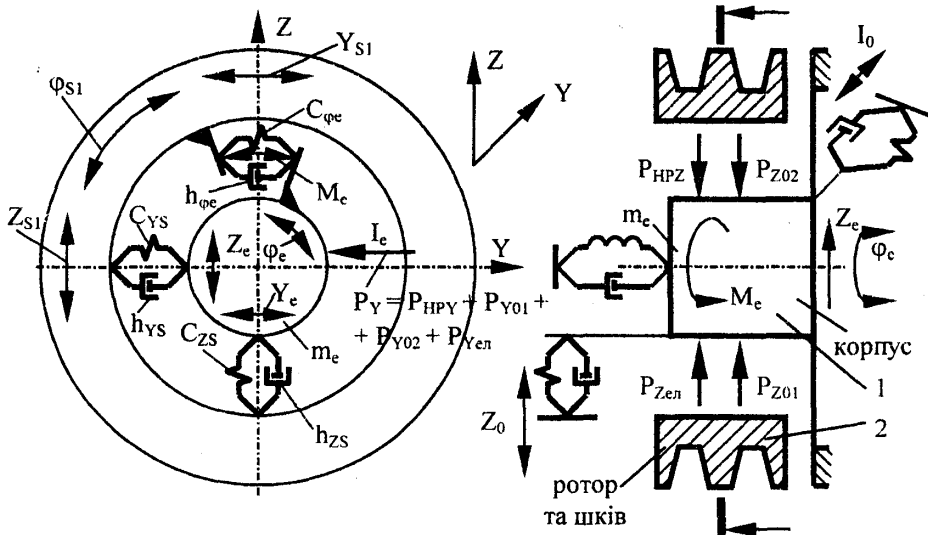


Рис. 11.5. Взаємна динамічна модель корпусу і ротора електродвигуна

Складемо рівняння динамічної рівноваги корпусу електродвигуна. Для цього приведемо його інерційні, дисипативні та жорсткісні параметри до перерізу вала, розташованого в середині шківів. Розрахункова схема динамічної системи корпусу показана на рис. 11.6.

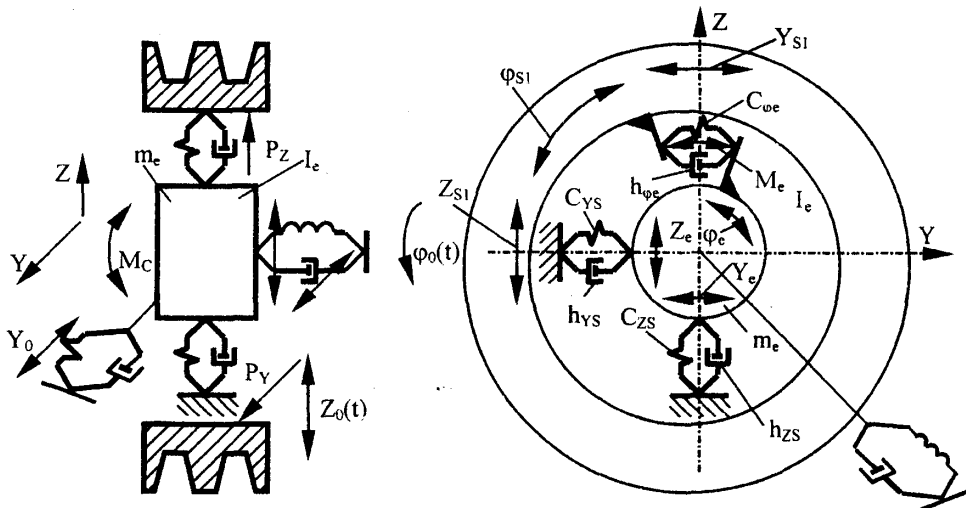


Рис. 11.6. Розрахункова схема динамічної системи корпусу електродвигуна

На схемі позначено:  $m_e$  – маса корпусу, приведена до перерізу вала;  $I_e$  – момент інерції корпусу;  $\varphi_e$  – динамічна складова кута повороту корпусу;  $Y_e, Z_e$  – динамічні зміщення корпусу в напрямках осей  $X$  і  $Y$ , приведені до перерізу вала;  $C_{YS}, C_{ZS}$  – динамічна жорсткість з'єднання корпус–ротор у напрямках  $Y$  і  $Z$  відповідно;  $h_{YS}, h_{ZS}$  – еквівалентні коефіцієнти опору з'єднання корпус–ротор у напрямках  $Y$  і  $Z$  відповідно;  $C_\varphi \approx 0, h_\varphi$  – еквівалентна крутильна жорсткість та коефіцієнт опору з'єднання корпус–ротор;  $Y_{S1}, Z_{S1}, \varphi_{S1}$  – динамічні переміщення ротора (шків) у напрямках осей  $Y, Z$  і повороту шків відповідно;  $M_e$  – динамічний крутний момент, спричинений дією електричного поля на корпус електродвигуна;  $P_{Z01}, P_{Y01}$  – проекції на осі  $Z$  і  $Y$  динамічних навантажень на корпус, обумовлених вібраціями передньої опори ротора, а також наявністю хвилястості доріжок, гранності тіл кочення підшипників, похибками опирання кілець тощо;  $P_{Z02}, P_{Y02}$  – проекції динамічних навантажень на корпус, що діють на нього з боку задньої опори ротора;  $P_{Ye.l}, P_{Ze.l}$  – стохастичні періодичні навантаження, що діють на корпус з причини пульсації магнітного потоку в зазорі, перемагнічування активного заліза та інших специфічних факторів електромагнітних процесів, що мають місце в статорних обмотках електродвигуна.

Складемо рівняння динаміки, які описують коливання корпусу електродвигуна, як системи з трьома ступенями вільності.

Рівняння сил в проекціях на осі координат  $Y$  і  $Z$ :

$$\begin{aligned} m_e \ddot{Y}_e &= P_Y + C_{YS}(Y_{S1} - Y_e) + h_{YS}(\dot{Y}_{S1} - \dot{Y}_e) + C_{Y0}(Y_0 - Y_e) + h_{Y0}(\dot{Y}_0 - \dot{Y}_e); \\ m_e \ddot{Z}_e &= P_Z + C_{ZS}(Z_{S1} - Z_e) + h_{ZS}(\dot{Z}_{S1} - \dot{Z}_e) + C_{Z0}(Z_0 - Z_e) + h_{Z0}(\dot{Z}_0 - \dot{Z}_e), \end{aligned} \quad (11.1)$$

де проекції навантажень  $P_Y$  і  $P_Z$  визначаються формулами:

$$\begin{aligned} P_Y &= P_{HPY} + P_{Y01} + P_{Y02} + P_{Ye.l}; \\ P_Z &= P_{HPZ} + P_{Z01} + P_{Z02} + P_{Ze.l}. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Перетворимо рівняння по Лапласу при нульових початкових умовах і одержимо:

$$\begin{aligned} Y_e(S) &= \frac{1}{T_{Ye}^2 S^2 + 2\xi_{Ye} T_{Ye} S + 1} [K_{Ye} P_Y + (1 + T_{YS1} S) Y_{S1}(S) + K_{0Y} (1 + T_{Y0} S) Y_0(S)]; \\ Z_e(S) &= \frac{1}{T_{Ze}^2 S^2 + 2\xi_{Ze} T_{Ze} S + 1} [K_{Ze} P_Z + (1 + T_{ZS1} S) Z_{S1}(S) + K_{0Z} (1 + T_{Z0} S) Z_0(S)], \end{aligned} \quad (11.3)$$

де коефіцієнти, що входять в залежності, визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} T_{Ye} &= \sqrt{\frac{m_e}{C_{YS} + C_{Y0}}}; & T_{Ze} &= \sqrt{\frac{m_e}{C_{ZS} + C_{Z0}}}; & \xi_{Ye} &= \frac{1}{2} \frac{h_{YS} + h_0}{\sqrt{m_e(C_{YS} + C_{Y0})}}; \\ K_{Ye} &= \frac{1}{C_{YS} + C_{Y0}}; & K_{Ze} &= \frac{1}{C_{ZS} + C_{Z0}}; & \xi_{Ze} &= \frac{1}{2} \frac{h_{ZS} + h_{Z0}}{\sqrt{m_e(C_{ZS} + C_{Z0})}}; \\ T_{YS1} &= \frac{h_{YS}}{C_{YS} + C_{Y0}}; & T_{ZS1} &= \frac{h_{ZS}}{C_{ZS} + C_{Z0}}; & T_{Y0} &= \frac{h_{Y0}}{C_{Y0}}; \end{aligned} \quad (11.4)$$

$$K_{0Y} = \frac{C_{0Y}}{C_{YS} + C_{Y0}}; \quad T_{Z0} = \frac{h_{Z0}}{C_{ZS} + C_{Z0}}; \quad K_{0Z} = \frac{C_{0Z}}{C_{ZS}}.$$

Рівняння крутильних коливань корпусу електродвигуна має вигляд:

$$I_e \ddot{\varphi} = M_e + C_{\varphi e} (\varphi_{S1} - \varphi_e) + h_{\varphi e} (\dot{\varphi}_{S1} - \dot{\varphi}_e) + C_{\varphi_0} (\varphi_0 - \varphi_e) + h_{\varphi_0} (\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi}_e). \quad (11.5)$$

Перетворимо дане рівняння по Лапласу і одержимо:

$$\varphi(S) = \frac{1}{T_{\varphi e}^2 S^2 + 2\xi_{\varphi e} T_{\varphi e} S + 1} [K_{\varphi e} M_e(S) + (1 + T_{\varphi S1} S) \varphi_{S1}(S) + K_{\varphi_0} (1 + T_{\varphi_0} S) \varphi_0(S)], \quad (11.6)$$

де значення коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} T_{\varphi e} &= \sqrt{\frac{I_e}{C_{\varphi e} + C_{\varphi_0}}}; & \xi_{\varphi e} &= \frac{1}{2} \frac{h_{\varphi S} + h_{\varphi_0}}{\sqrt{I_e (C_{\varphi e} + C_{\varphi_0})}}; \\ K_{\varphi e} &= \frac{1}{C_{\varphi e} + C_{\varphi_0}}; & T_{\varphi S1} &= \frac{h_{\varphi e}}{C_{\varphi e} + C_{\varphi_0}}; \\ K_{\varphi_0} &= \frac{C_{\varphi_0}}{C_{\varphi e} + C_{\varphi_0}}; & T_{\varphi_0} &= \frac{h_{\varphi_0}}{C_{\varphi_0}}. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Динамічний момент, що діє на корпус електродвигуна, визначається змінами параметрів електромережі, а також залежить від характеристики електродвигуна. Тому

$$M_e(S) = M_{em}(S) - M_{ep}(S), \quad (11.8)$$

де  $M_{em}$  – момент, який виникає внаслідок змін в електромережі (напруги, струму, частоти);

$M_{ep}$  – момент, який пов'язаний із змінами частоти обертання ротора і визначається власне характеристиками електродвигуна.

Характеристика асинхронного електродвигуна зв'язує динамічний крутний момент на валу електродвигуна зі зміною кутової швидкості його обертання. Характеристика в першому наближенні відповідає трансформуючій функції [33]:

$$W_e(S) = \frac{M_{ep}(S)}{\omega_e(S)} = \frac{K_e}{T_c S + 1}, \quad (11.9)$$

де  $M_{ep}(S)$  – зображення по Лапласу динамічного крутного моменту на валу електродвигуна;

$\omega(S)$  – зображення по Лапласу динамічної складової кутової швидкості вала електродвигуна;

$K_e$  – коефіцієнт передачі;

$T_c$  – постійна часу.

Два останні параметри визначаються через показники електродвигуна наступними залежностями:

$$K_e = \frac{2M_{KP} \cdot \Omega_0}{\Omega_0 - \omega_0}; \quad T_c = \frac{1}{\omega_C S_K}, \quad (11.10)$$



де  $M_{кр}$  – критичний (максимальний) момент електродвигуна;

$\Omega_0$  – кутова швидкість ідеального холостого ходу;

$\omega_0$  – номінальна кутова швидкість вала електродвигуна;

$\omega_c$  – частота (кутова) промислової електромережі;

$S_k$  – критичне значення ковзання статичної характеристики.

Із залежності (3.9) знайдемо значення динамічної складової моменту:

$$M_{еп}(S) = \frac{K_e S}{T_e S + 1} \varphi(S). \quad (11.11)$$

При визначенні даної формули враховано, що  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ ,  $\omega(S) = S\varphi(S)$ .

Підставивши значення моменту із (11.8) та (11.9) в (11.11), знайдемо:

$$\begin{aligned} \varphi(S) \left\{ T_{\varphi e}^2 S^2 + 2\xi_{\varphi e} T_{\varphi e} S + 1 + \frac{K_e S}{T_e S + 1} \right\} = \\ = K_{\varphi e} M_{eM}(S) + (1 + T_{\varphi S1} S) \varphi_{S1}(S) + K_{\varphi_0} (1 + T_{\varphi_0} S) \varphi_0(S). \end{aligned}$$

Перетворимо вираз в лівій частині цієї залежності і одержимо:

$$\varphi(S) = \frac{1 + T_e S}{T_{e3}^3 S^3 + T_{e2}^2 S^2 + T_{e1} S + 1} [K_{\varphi e} M_{eM}(S) + (1 + T_{\varphi S1} S) \varphi_{S1}(S) + K_{\varphi_0} (1 + T_{\varphi_0} S) \varphi_0(S)], \quad (11.12)$$

де нові значення постійних:

$$T_{e3} = \sqrt[3]{T_{e\varphi}^2 T_e}; \quad T_{e2} = \sqrt{T_{e\varphi}^2 + 2\xi_{\varphi} \cdot T_{e\varphi} \cdot T_e}; \quad T_{e1} = K_e + T_e.$$

Остаточно рівняння, які описують динамічні коливальні процеси в електромеханічній системі електродвигуна головного руху запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \varphi(S) &= W_{\varphi 1} M_{eM}(S) + W_{\varphi 2} \cdot \varphi_{S1}(S) + W_{\varphi 0} \cdot \varphi_0(S); \\ Y_e(S) &= W_{e1} [P_{Y01}(S) - P_{Y02}(S) + P_{Yee}(S)] + W_{e2} Y_{S1}(S) + W_{eY0} \cdot Y_0(S); \\ Z_e(S) &= W_{e3} [P_{Z01}(S) - P_{Z02}(S) + P_{Zee}(S)] + W_{e4} Z_{S1}(S) + W_{eZ0} \cdot Z_0(S). \end{aligned} \quad (11.13)$$

Трансформуючі функції, які входять в дані залежності, записуються у вигляді:

$$\begin{aligned} W_{\varphi 0} &= \frac{K_{\varphi_0} (1 + T_{\varphi_0} S)}{T_{e3}^3 S^3 + T_{e2}^2 S^2 + T_{e1} S + 1}; & W_{\varphi 01} &= \frac{K_{\varphi e} (1 + T_e S)}{T_{e3}^3 S^3 + T_{e2}^2 S^2 + T_{e1} S + 1}; \\ W_{\varphi 2} &= \frac{(1 + T_{\varphi S1} S)(1 + T_e S)}{T_{e3}^3 S^3 + T_{e2}^2 S^2 + T_{e1} S + 1}; & W_{eY0} &= \frac{K_{Y0} (1 + T_{Y0} S)}{T_{Ye}^2 S^2 + 2\xi_{Ye} T_{Ye} S + 1}; \\ W_{e1} &= \frac{K_{Ye}}{T_{Ye}^2 S^2 + 2\xi_{Ye} T_{Ye} S + 1}; & W_{e2} &= \frac{1 + T_{YS1} S}{T_{Ye}^2 S^2 + 2\xi_{Ye} T_{Ye} S + 1}; \\ W_{eZ0} &= \frac{K_{Z0} (1 + T_{Z0} S)}{T_{Zc}^2 S^2 + 2\xi_{Zc} T_{Zc} S + 1}; & W_{e3} &= \frac{K_{Ze}}{T_{Zc}^2 S^2 + 2\xi_{Zc} T_{Zc} S + 1}; \\ W_{e4} &= \frac{1 + T_{ZS1} S}{T_{Zc}^2 S^2 + 2\xi_{Zc} T_{Zc} S + 1}. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Рівняння, які описують динамічні процеси в електродвигуні, записуються в графоаналітичному вигляді як структурна схема корпуса електродвигуна (рис. 11.7).

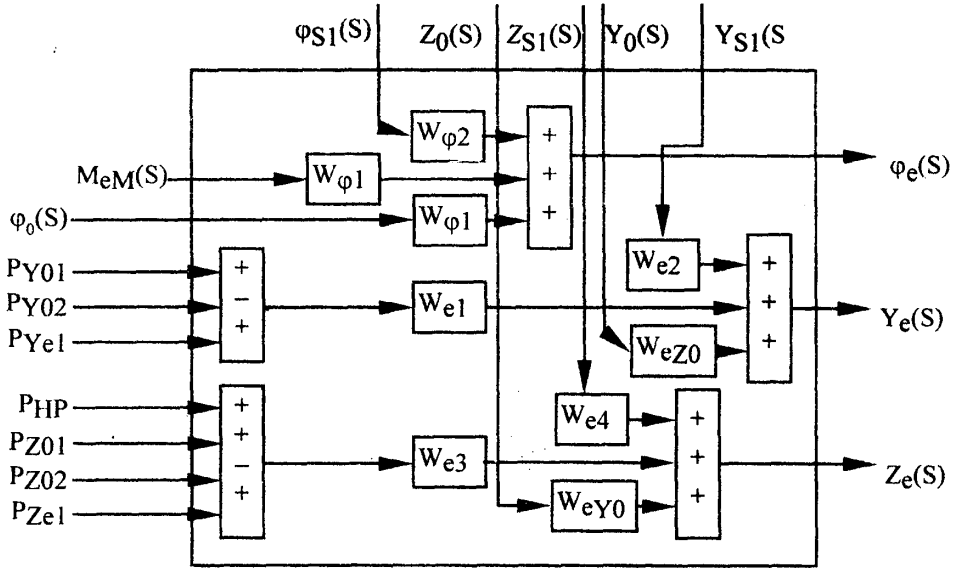


Рис. 11.7. Структурна схема динамічної системи електродвигуна

Структурна схема представляє собою основу для розробки блока візуальної моделі в системі SIMULINK математичного пакету MATLAB (рис. 11.8).

При розробці математичної моделі динамічної системи ротора та шківів система приводиться до схеми плоского руху (рис. 11.9).

На схемі позначені:  $m_{S1}$  – маса ротора і шківів;  $I_{I1}$  – момент інерції ротора і шківів;  $C_{Yp}$ ,  $C_{Zp}$  – еквівалентні жорсткості пасової передачі в напрямках  $Y$  і  $Z$ ;  $h_{Yp}$ ,  $h_{Zp}$  – коефіцієнти опору передачі;  $C_{\phi p}$ ,  $h_{\phi p}$  – еквівалентна крутильна жорсткість пасової передачі;  $i = d_{S2}/d_{S1}$  – передавальне число пасової передачі;  $Y_{S2}$ ,  $Z_{S2}$  – переміщення другого шківів в напрямках  $Y$  і  $Z$  відповідно;  $\phi_{S2}$  – кутове зміщення другого шківів;  $P_{Yp}$ ,  $P_{Zp}$  – додаткові зусилля в проєкціях на осі  $Y$  і  $Z$ , які виникають з причини поперечних коливань пасів та невірноважених сил на ротор;  $M_p$  – додатковий крутний момент, який виникає за рахунок поперечних коливань пасів.

Складемо рівняння динаміки, які описують коливання ротора та шківів  $S1$  в напрямках осей  $Y$  і  $Z$  та крутильні коливання шківів.

Рівняння сил в проєкціях на осі координат  $X$  і  $Z$  будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} m_{S1} \ddot{Y}_{S1} &= C_{YS} (Y_e - Y_{S1}) + h_{YS} (\dot{Y}_e - \dot{Y}_{S1}) + C_{YP} (Y_{S2} - Y_{S1}) + h_{YP} (\dot{Y}_{S2} - \dot{Y}_{S1}) + P_{YP}; \\ m_{S1} \ddot{Z}_{S1} &= C_{ZS} (Z_e - Z_{S1}) + h_{ZS} (\dot{Z}_e - \dot{Z}_{S1}) + C_{ZP} (Z_{S2} - Z_{S1}) + h_{ZP} (\dot{Z}_{S2} - \dot{Z}_{S1}) + P_{ZP}. \end{aligned} \quad (11.15)$$

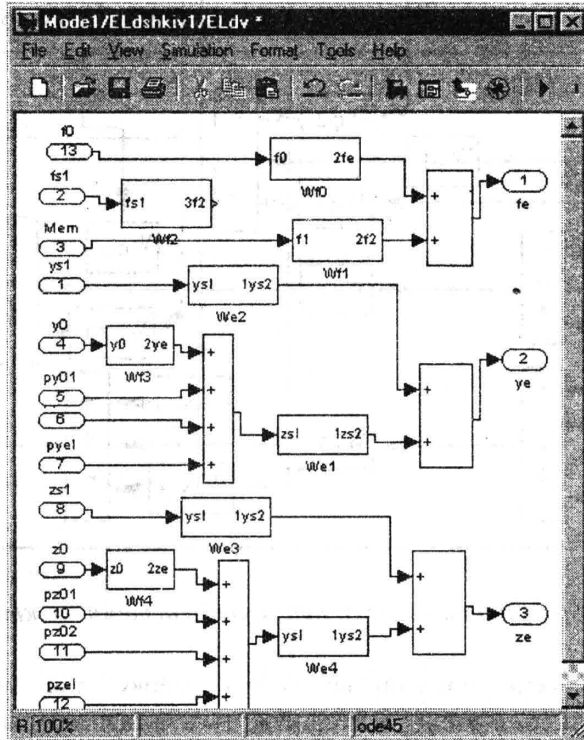


Рис. 11.8. Візуальна математична модель корпусу силового електродвигуна привода головного руху

Перетворимо рівняння по Лапласу і визначимо в операторній формі переміщення шківів в напрямках  $Y$  і  $Z$ :

$$\begin{aligned} Y_{S1}(S) &= \frac{1}{T_{YS1}^2 S^2 + 2\xi_{YS1} S + 1} [K_{YP} P_{YP} + K_{YS1e} (1 + T_{YSc} S) Y_e(S) + \\ &+ K_{YSPe} (1 + T_{YSP} S) Y_{S2}(S)]; \\ Z_{S1}(S) &= \frac{1}{T_{ZS1}^2 S^2 + 2\xi_{ZS1} S + 1} [K_{ZP} P_{ZP} + K_{ZS1e} (1 + T_{ZSc} S) Z_e(S) + \\ &+ K_{ZSPe} (1 + T_{ZSP} S) Z_{S2}(S)]. \end{aligned} \quad (11.16)$$

де значення постійних часу і коефіцієнтів залежать від інерційних, дисипативних і жорсткісних параметрів динамічної системи згідно

співвідношень:

$$\begin{aligned}
 T_{YS1} &= \sqrt{\frac{m_{S1}}{C_{YS} + C_{YP}}}; & \xi_{YS1} &= \frac{1}{2} \frac{h_{YS} + h_{YP}}{\sqrt{m_{S1}(C_{YS} + C_{YP})}}; \\
 T_{ZS1} &= \sqrt{\frac{m_{S1}}{C_{ZS} + C_{ZP}}}; & \xi_{ZS1} &= \frac{1}{2} \frac{h_{ZS} + h_{ZP}}{\sqrt{m_{S1}(C_{ZS} + C_{ZP})}}; \\
 K_{YP} &= \frac{1}{C_{YS} + C_{YP}}; & K_{ZP} &= \frac{1}{C_{ZS} + C_{ZP}}; \\
 K_{YS1e} &= \frac{C_{YS}}{C_{YS} + C_{YP}}; & K_{ZS1e} &= \frac{C_{ZS}}{C_{ZS} + C_{ZP}}; \\
 K_{YS1P} &= \frac{C_{YP}}{C_{YS} + C_{YP}}; & K_{ZS1P} &= \frac{C_{ZP}}{C_{ZS} + C_{ZP}}; \\
 T_{YSe} &= \frac{h_{YS}}{C_{YS}}; & T_{ZSe} &= \frac{h_{ZS}}{C_{ZS}}; \\
 K_{YSP} &= \frac{h_{YP}}{C_{YP}}; & T_{ZSP} &= \frac{h_{ZP}}{C_{ZP}}.
 \end{aligned} \tag{11.17}$$

Складемо рівняння крутильних коливань першого шківa. Нехай шків S1 зміщується на кут  $\delta\varphi_{S1}$ , а шків S2 – на кут  $\delta\varphi_{S2}$ . При цьому видовження паса буде:

$$\delta(l) = \frac{d_{S2}}{2} \delta\varphi_{S2} - \frac{d_{S1}}{2} \delta\varphi_{S1}, \tag{11.18}$$

де  $d_{S2}$  і  $d_{S1}$  – діаметри шківів пасової передачі.

Сила натягу ремня зміниться на величину:

$$\delta N = \delta L \cdot C_N,$$

де  $C_N$  – жорсткість паса при розтягу.

Момент, що діє з боку паса на шків, зміниться на величину:

$$\delta M_p = \delta N \cdot \frac{d_{S1}}{2}. \tag{11.19}$$

Об'єднавши три останні залежності, одержимо:

$$C_{\varphi P} = \frac{d_{S1}^2}{2} C_N. \tag{11.20}$$

Тоді одержимо для малих зміщень шківів момент, що виникає за рахунок деформації паса, у вигляді:

$$M_{\varphi P} = C_{\varphi P} (i\varphi_{S2} - \varphi_{S1}). \tag{11.21}$$

Аналогічно знайдемо силу опору, пропорційну швидкостям відносного кутового зміщення шківів:

$$M_{VP} = h_{\varphi P} (i\dot{\varphi}_{S2} - \dot{\varphi}_{S1}). \tag{11.22}$$

Рівняння крутильних коливань першого шківa, згідно принципу Даламбера, запишемо у вигляді:

$$I_{S1}\ddot{\varphi}_{S1} = C_{\varphi e}(\varphi_e - \varphi_{S1}) + h_{\varphi e}(\dot{\varphi}_e - \dot{\varphi}_{S1}) + M_{\tau P} + M_{VP} + M_P \quad (11.23)$$

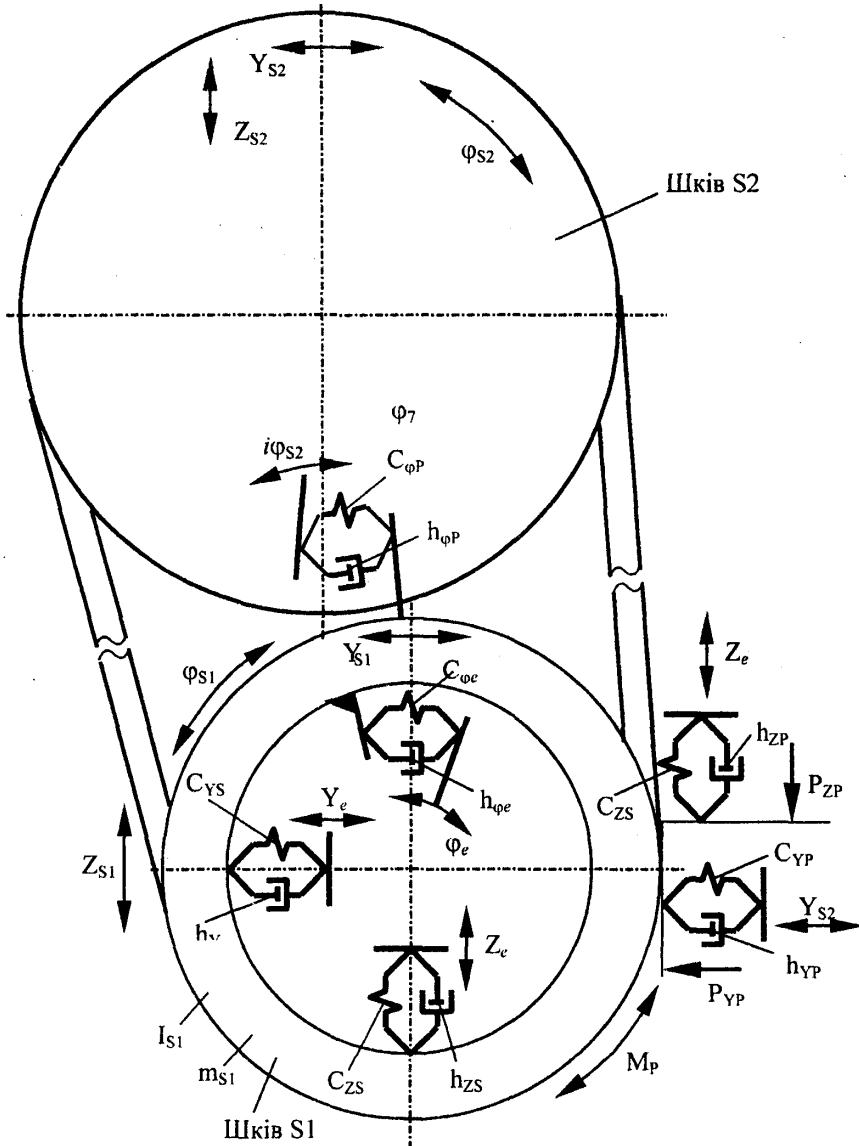


Рис. 11.9. Приведена плоска динамічна модель ротора електродвигуна і приводного шківa

Підставимо значення крутильних моментів і одержимо:

$$I_{S1}\ddot{\varphi}_{S1} + (h_{\varphi e} + h_{\varphi P})\dot{\varphi}_{S1} + (C_{\varphi e} + C_{\varphi P})\varphi_{S1} = M_{\tau P} + C_{\varphi e}\varphi_e + h_{\varphi e}\dot{\varphi}_e + iC_{\varphi e}\varphi_{S2} + ih_{\varphi e}\dot{\varphi}_{S2} \cdot$$

Перетворимо дане рівняння по Лапласу і одержимо:

$$\varphi_{S1}(S) = \frac{1}{T_{\varphi S1}^2 S^2 + 2\xi_{\varphi S1} T_{\varphi S1} S + 1} K_{\varphi P} M_P + K_{\varphi S1e} (1 + T_{\varphi Se} S) \varphi_e(S) + K_{\varphi S1P} (1 + T_{\varphi SP} S) \varphi_{S2}(S), \quad (11.24)$$

де значення постійних часу і коефіцієнтів знаходяться за формулами:

$$\begin{aligned} T_{\varphi S1} &= \sqrt{\frac{I_{S1}}{C_{\varphi e} + C_{\varphi P}}}; & \xi_{\varphi S1} &= \frac{1}{2} \frac{h_{\varphi e} + h_{\varphi P}}{\sqrt{I_{S1} (C_{\varphi e} + C_{\varphi P})}}; \\ K_{\varphi P} &= \frac{1}{C_{\varphi e} + C_{\varphi P}}; & K_{\varphi S1e} &= \frac{C_{\varphi e}}{C_{\varphi e} + C_{\varphi P}}; \\ T_{\varphi Se} &= \frac{h_{\varphi e}}{C_{\varphi e}}; & T_{\varphi SP} &= \frac{h_{\varphi P}}{C_{\varphi P}}; & K_{\varphi S1P} &= \frac{i C_{\varphi P}}{C_{\varphi e} + C_{\varphi P}}. \end{aligned} \quad (11.25)$$

Остаточні рівняння, які описують коливання шківів, розташованого на валу електродвигуна, будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi_{S1}(S) &= W_{\varphi P} M_P(S) + W_{\varphi e} \varphi_e(S) + W_{\varphi S2} \varphi_{S2}(S); \\ Y_{S1}(S) &= W_{Y P} P_{Y P}(S) + W_{Y S1e} Y_e(S) + W_{Y S2} Y_{S2}(S); \\ Z_{S1}(S) &= W_{Z P} P_{Z P}(S) + W_{Z S1e} Z_e(S) + W_{Z S2} Z_{S2}(S). \end{aligned} \quad (11.26)$$

Трансформуючі функції, які входять в дані залежності, мають вигляд:

$$\begin{aligned} W_{\varphi P} &= \frac{K_{\varphi P}}{T_{\varphi S1}^2 S^2 + 2\xi_{\varphi S1} T_{\varphi S1} S + 1}; & W_{\varphi e} &= \frac{K_{\varphi S1e} (1 + T_{\varphi Se} S)}{T_{\varphi S1}^2 S^2 + 2\xi_{\varphi S1} T_{\varphi S1} S + 1}; \\ W_{\varphi S2} &= \frac{K_{\varphi S1P} (1 + T_{\varphi SP} S)}{T_{\varphi S1}^2 S^2 + 2\xi_{\varphi S1} T_{\varphi S1} S + 1}; & W_{Y P} &= \frac{K_{Y P}}{T_{Y S1}^2 S^2 + 2\xi_{Y S1} T_{Y S1} S + 1}; \\ W_{Y S1e} &= \frac{K_{Y S1e} (1 + T_{Y Se} S)}{T_{Y S1}^2 S^2 + 2\xi_{Y S1} T_{Y S1} S + 1}; & W_{Y S2} &= \frac{K_{Y S1P} (1 + T_{Y SP} S)}{T_{Y S1}^2 S^2 + 2\xi_{Y S1} T_{Y S1} S + 1}; \\ W_{Z P} &= \frac{K_{Z P}}{T_{Z S1}^2 S^2 + 2\xi_{Z S1} T_{Z S1} S + 1}; & W_{Z S1e} &= \frac{K_{Z S1e} (1 + T_{Z Se} S)}{T_{Z S1}^2 S^2 + 2\xi_{Z S1} T_{Z S1} S + 1}; \\ W_{Z S2} &= \frac{K_{Z S1P} (1 + T_{Z SP} S)}{T_{Z S1}^2 S^2 + 2\xi_{Z S1} T_{Z S1} S + 1}. \end{aligned} \quad (11.27)$$

Рівняння, які описують коливання шківів, розташованого на валу електродвигуна, записуються в графоаналітичному вигляді і утворюють структурну схему динамічної підсистеми шківів. Структурна схема має три виходи і дев'ять входів, що відповідають динамічним діям на шківів з боку інших підсистем (рис. 11.10).

Загальна математична модель динамічної системи електродвигуна одержана як результат об'єднання блокових моделей корпусу електродвигуна (див. рис. 11.8) та ротора електродвигуна разом зі шківом (див. рис. 11.11).

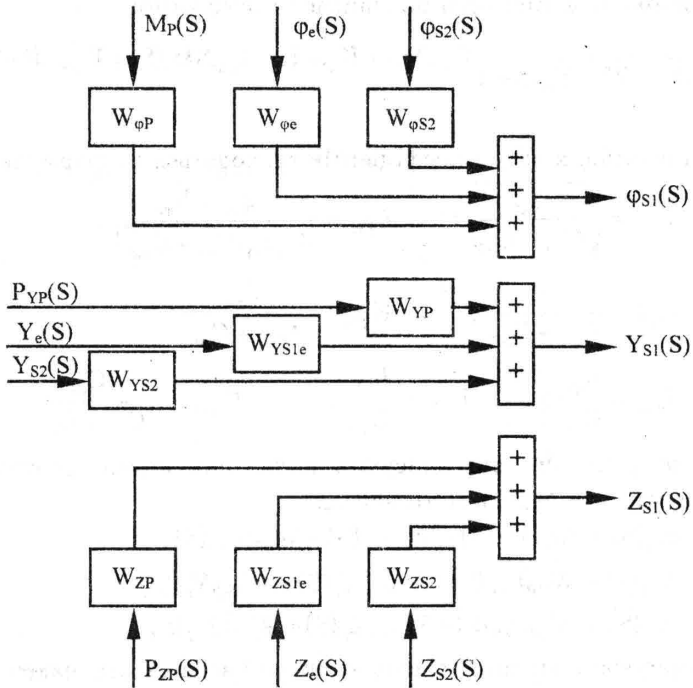


Рис. 11.10. Структурна схема динамічної системи шківa, розташованого на валу електродвигуна

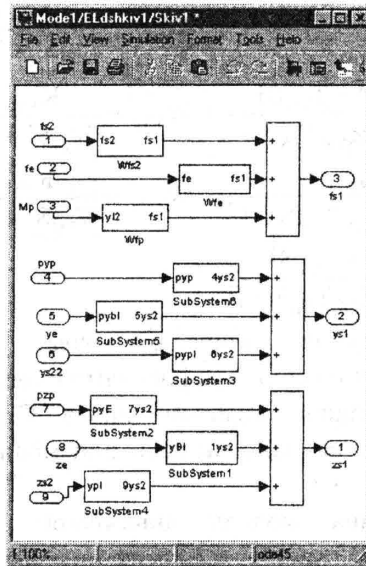


Рис. 11.11. Візуальна математична модель ротора електродвигуна разом із приводним шківом

Блоки моделі об'єднуються шляхом підключення відповідних входів до виходів іншого блока (рис. 11.12).

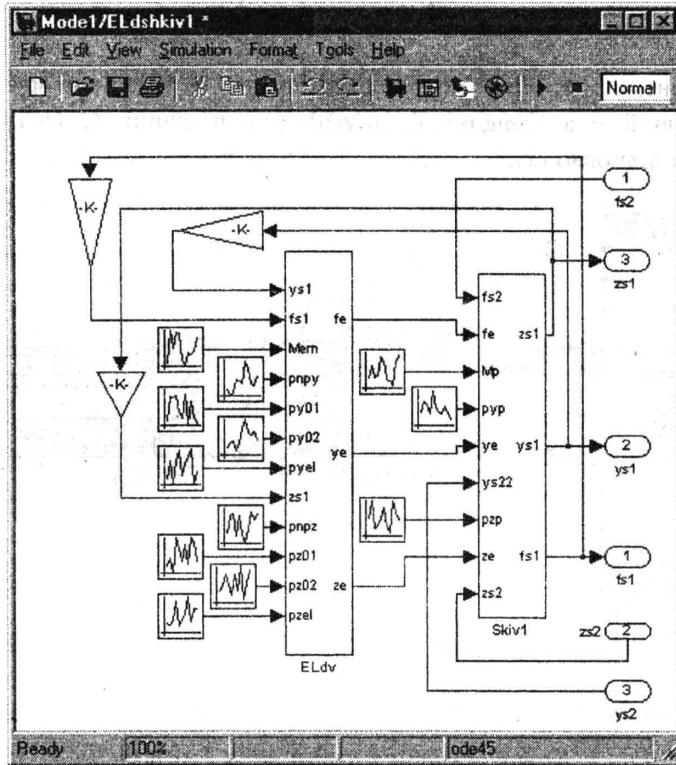


Рис. 11.12. Загальна математична модель динамічної системи електродвигуна

Незалежні входи математичної моделі прийняті у вигляді широкополосних випадкових процесів, які показані відповідними блоками на рис. 11.12.



## 11.2 Математична модель динамічної системи вала I зі шківом і муфтою

Розглянемо динамічну модель вала I (рис. 11.13), який має три напрямки руху: перший – в площині Y, другий – в площині Z, третій – крутильні коливання відносно осі.

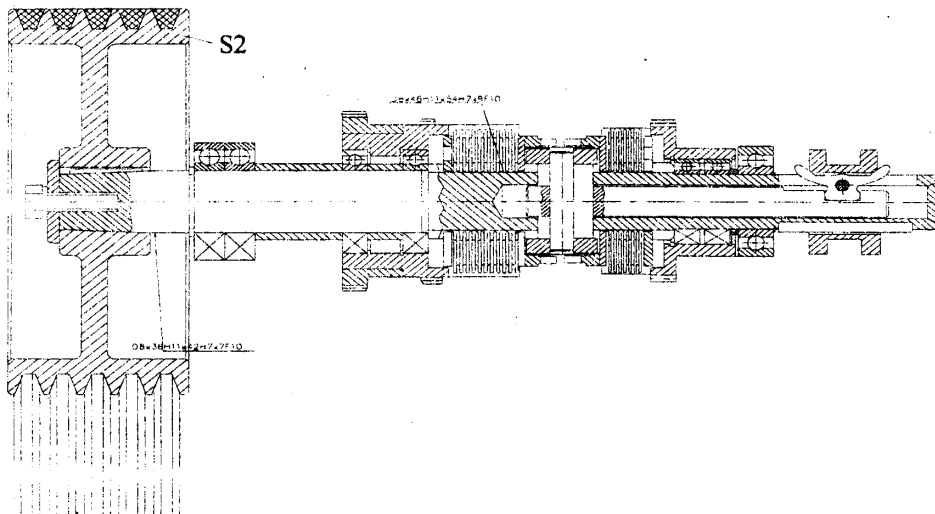


Рис. 11.13. Конструктивна схема вала I зі шківом S2 і муфтою

Вал має значну довжину в осьовому напрямку. Маса вала зосереджена в двох точках, а саме: на хвостовику, де розташований шків S2, та по середині між опорами, де розташована фрикційна муфта. Тому за динамічну модель вала при його коливаннях в площинах Y та Z прийнято двомасові моделі на пружній невагомій балці.

Розглянемо динамічну модель вала в площині Y (рис. 11.14).

Маса вала I зосереджена в двох точках A та B.

Маса  $m_{S2}$ , зосереджена в точці A, включає масу шківа S2 та приєднану до неї масу частини вала. Основна маса вала  $m_1$  зосереджена в точці B, яка знаходиться на відстані  $L_1$  від опори вала.

Коливання мас  $m_{S2}$  та  $m_1$  відбуваються під дією силових та кінематичних збуджуючих факторів.

Кінематичні збурення представляють собою динамічні переміщення опор  $Y_{11}$  та  $Y_{12}$ . Силowymi факторами є проекції на вісь Y навантажень, що діють на вал з боку: шківа S1, при його зміщенні на величину  $Y_{S1}$ ; блока зубчастих

коліс ВІ, при його переміщенні  $Y_{ВІ}$ ; зубчастого колеса РІ, при його переміщенні  $Y_{РІ}$ ; вилки переключення муфти при дії зусилля у вилці  $P_{YВ}$ .

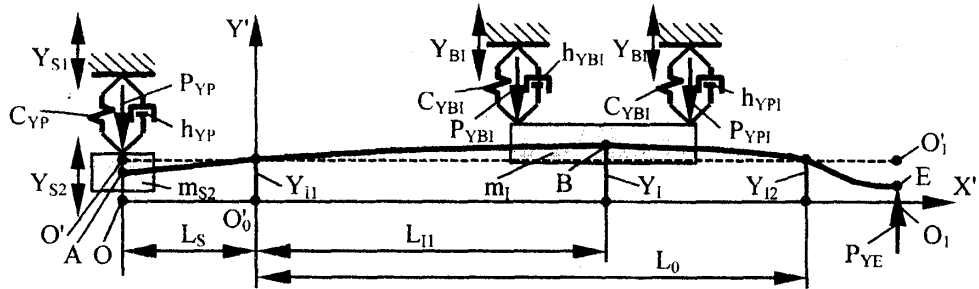


Рис. 11.14. Динамічна модель вала I як двомасової системи

Кінематичні збурення в підшипниках призводять до зміщення всіх точок вала відносно його статичного положення  $OO_1$ . Будемо розглядати коливання мас у відносних координатах.

Зміщення нейтрального положення за рахунок переміщення опор  $Y_{I1}$  та  $Y_{I2}$  показано пунктирною лінією  $O'O'_1$ . Рівняння цієї лінії в системі координат  $Y'O_0X$  має вигляд:

$$Y(X) = Y_{I1} + \frac{Y_{I1} + Y_{I2}}{L_0} X. \quad (11.29)$$

Підставивши в це рівняння значення координати  $X$ , знайдемо зміщення нейтрального положення вала, що виникає внаслідок переміщення опор. Для точки А ( $X = -L_S$ ):

$$Y_{IВ} = Y_{I1} \left( 1 - \frac{L_1}{L_0} \right) + \frac{L_1}{L_0} Y_{I2} = \lambda_{В} Y_{I1} + \mu_{В} Y_{I2}. \quad (11.30)$$

Для визначення рівнянь динаміки двомасової системи вала, що здійснює коливання в площині  $Y$ , використаємо метод сил [75]. Згідно методу сил, відносні переміщення мас  $m_{S2}$  і  $m_I$  визначаються системою рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} Y_{S2} - Y_{IA} &= \delta_{AA} P_A + \delta_{AB} P_B + \delta_{AE} P_E \\ Y_I - Y_{IВ} &= \delta_{BA} P_A + \delta_{BB} P_B + \delta_{BE} P_E \end{aligned} \right\}, \quad (11.31)$$

де  $\delta_{ij}$  – коефіцієнти, які визначають переміщення точки  $i$  ( $i = A, B$ ) під дією одиничної сили, прикладеної в точці  $j$  ( $j = A, B$ ).

Сили, які діють на вал, включають сили інерції і визначаються наступними залежностями:

$$P_A = -m_{S2} \ddot{Y}_{S2} + C_{YVP} (Y_{S1} - Y_{S2}) + h_{YVP} (\dot{Y}_{S1} - \dot{Y}_{S2}) + P_{YVP}. \quad (11.32)$$

Перший доданок в правій частині відповідає силі інерції, що діє на масу  $m_{S2}$ , а інші доданки відображають динамічний вплив пасової передачі.

$$P_B = -m_I \ddot{Y}_I + C_{Y_{BI}}(Y_{BI} - Y_I) + h_{Y_{BI}}(\dot{Y}_{BI} - \dot{Y}_I) + P_{Y_{BI}} + C_{Y_{PI}}(Y_{PI} - Y_I) + h_{Y_{PI}}(\dot{Y}_{PI} - \dot{Y}_I) + P_{Y_{PI}}. \quad (11.33)$$

В цій формулі перший доданок – сила інерції, другий і третій доданки відповідають впливу блока ВІ, сила  $P_{Y_{BI}}$  описує динамічні імпульсні навантаження в зубчастій передачі, а три останні доданки відповідають впливу зубчастого колеса ланцюга реверса.

Підставимо значення сил (11.32), (11.33) та переміщень (11.29) і (11.30) у систему (11.31) і одержимо систему двох рівнянь для визначення переміщень мас  $m_{S2}$  та  $m_I$ . Рівняння, що описують переміщення першої маси, будуть мати вигляд:

$$Y_{S2} - \lambda_A Y_{I1} - \mu_A Y_{I2} = -\delta_{AA} m_{S2} \ddot{Y}_{S2} + \delta_{AA} C_{YP} Y_{S1} - \delta_{AA} C_{YP} Y_{S2} + \delta_{AA} h_{YP} \dot{Y}_{S1} - \delta_{AA} h_{YP} \dot{Y}_{S2} + \delta_{AA} P_{YP} + \delta_{AB} P_{Y_{BI}} + \delta_{AB} P_{Y_{PI}} + \delta_{AB} m_I \ddot{Y}_I + \delta_{AB} C_{Y_{BI}} Y_{BI} - \delta_{AB} C_{Y_{BI}} Y_I + \delta_{AB} C_{Y_{PI}} Y_{PI} + \delta_{AB} h_{Y_{PI}} \dot{Y}_{PI} + \delta_{AB} h_{Y_{PI}} \dot{Y}_I + \delta_{AB} P_{Y_I} + \delta_{AE} P_{YE}. \quad (11.34)$$

Рівняння, яке описує переміщення маси  $m_I$ , має вигляд:

$$Y_I - \lambda_B Y_{I1} - \mu_B Y_{I2} = -\delta_{BA} m_{S2} \ddot{Y}_{S2} + \delta_{BA} C_{YP} Y_{S1} - \delta_{BA} C_{YP} Y_{S2} + \delta_{BA} h_{YP} \dot{Y}_{S1} - \delta_{BA} h_{YP} \dot{Y}_{S2} + \delta_{BB} P_{YP} + \delta_{BB} m_I \ddot{Y}_I + \delta_{BB} C_{Y_{BI}} Y_{BI} - \delta_{BB} C_{Y_{BI}} Y_{BI} + \delta_{BB} h_{Y_{BI}} \dot{Y}_{BI} - \delta_{BB} h_{Y_{BI}} \dot{Y}_I + \delta_{BB} P_{Y_{BI}} + \delta_{BB} C_{Y_{PI}} Y_{PI} - \delta_{BB} C_{Y_{PI}} Y_I + \delta_{BB} h_{Y_{PI}} \dot{Y}_{PI} - \delta_{BB} h_{Y_{PI}} \dot{Y}_I + \delta_{BB} P_{Y_I} + \delta_{BE} P_{YE}. \quad (11.35)$$

Перетворимо дану систему диференціальних рівнянь (11.34) і (11.35) по Лапласу і одержимо в загальному вигляді:

$$\begin{cases} A_{11}(S)Y_{S2}(S) + A_{12}(S)Y_I(S) = B_1(S) \\ A_{21}(S)Y_{S2}(S) + A_{22}(S)Y_I(S) = B_2(S) \end{cases} \quad (11.36)$$

Операторні комплекси визначені згідно залежностей:

$$\begin{aligned} A_{11}(S) &= \delta_{AA} m_{S2} S^2 + \delta_{AA} h_{YP} S + (1 + \delta_{AA} C_{YP}); \\ A_{12}(S) &= \delta_{AB} m_I S^2 + \delta_{AB} (h_{Y_{BI}} + h_{Y_{PI}}) S + \delta_{AB} (C_{Y_{BI}} + C_{Y_{PI}}); \\ B_1(S) &= \lambda_A Y_{I1}(S) + \mu_A Y_{I2}(S) + \delta_{AA} (C_{YP} + h_{YP} S) Y_{S1}(S) + \delta_{AA} P_{YP}(S) + \delta_{AB} P_{Y_{BI}}(S) + \delta_{AB} P_{Y_{PI}}(S) + \delta_{AB} (C_{Y_{BI}} + h_{Y_{BI}} S) Y_{BI}(S) + \delta_{AB} (C_{Y_{PI}} + h_{Y_{PI}} S) Y_{PI}(S) + \delta_{AE} P_{YE}(S); \\ A_{21}(S) &= \delta_{BA} m_{S2} S^2 + \delta_{BA} h_{YP} S + \delta_{BA} C_{YP}; \\ A_{22}(S) &= \delta_{BB} m_I S^2 + \delta_{BB} (h_{Y_{BI}} + h_{Y_{PI}}) S + 1 + \delta_{BB} (C_{Y_{BI}} + C_{Y_{PI}}); \\ B_2(S) &= \lambda_B Y_{I1}(S) + \mu_B Y_{I2}(S) + \delta_{BA} (C_{YP} + h_{YP} S) Y_{S1}(S) + \delta_{BA} P_{YP}(S) + \delta_{BB} P_{Y_{BI}}(S) + \delta_{BB} P_{Y_{PI}}(S) + \delta_{BB} (C_{Y_{BI}} + h_{Y_{BI}} S) Y_{BI}(S) + \delta_{BB} (C_{Y_{PI}} + h_{Y_{PI}} S) Y_{PI}(S) + \delta_{BE} P_{YE}(S). \end{aligned} \quad (11.37)$$

Із системи лінійних рівнянь (3.36) визначимо динамічні переміщення окремих мас у вигляді:

$$Y_{S2}(S) = \frac{A_{22}B_1(S) - A_{12}(S)B_2(S)}{A_{11}A_{22}(S) - A_{12}(S)A_{21}(S)}; \quad (11.38)$$

$$Y_I(S) = \frac{A_{11}B_2(S) - A_{21}(S)B_1(S)}{A_{11}A_{22}(S) - A_{12}(S)A_{21}(S)}. \quad (11.39)$$

Знаменники цих формул визначаються шляхом підстановки значень величин із формул і перетворень. Остаточно одержимо:

$$W_{YI} = \frac{K_{YI}}{T_{4YI}^4 S^4 + T_{3YI}^3 S^3 + T_{2YI}^2 S^2 + T_{4YI} S + 1}. \quad (11.40)$$

В загальному вигляді ця трансформуюча функція має вигляд:

$$W_{YI} = \frac{K_{YI}}{\sum_{i=0}^4 T_{iYI}^i S^i + 1},$$

де значення коефіцієнтів дорівнюють:

$$\begin{aligned} K_{YI} &= \frac{1}{(1 + \delta_{AA} C_{YP})(1 + \delta_{BB}(C_{YBI} + C_{YPI})) - \delta_{AB}\delta_{BA} C_{YP}(C_{YBI} + C_{YPI})}; \\ T_{4YI}^4 &= \frac{\delta_{AA} m_{S2} \delta_{BB}(h_{YBI} + h_{YPI}) + \delta_{AA} h_{YP} \delta_{BB} m_I - \delta_{AB} m_I \delta_{BA} h_{YP} - \delta_{AB}(h_{YBI} + h_{YPI}) \delta_{BA} m_{S2}}{(1 + \delta_{AA} C_{YP})(1 + \delta_{BB}(C_{YBI} + C_{YPI})) - \delta_{AB}\delta_{BA} C_{YP}(C_{YBI} + C_{YPI})}; \\ T_{3YI}^3 &= \frac{\delta_{AA} m_{S2} [1 + \delta_{BB}(C_{YBI} + C_{YPI})] + (1 + \delta_{AA} C_{YP}) \delta_{BB} m_I - \delta_{AA} h_{YP} \delta_{BB}(h_{YBI} + h_{YPI}) - \delta_{AB} m_I \delta_{BA} C_{YP} - \delta_{AB}(C_{YBI} + C_{YPI}) \delta_{BA} m_{S2} - \delta_{AB}(h_{YBI} + h_{YPI}) \delta_{BA} h_{YP}}{(1 + \delta_{AA} C_{YP})(1 + \delta_{BB}(C_{YBI} + C_{YPI})) - \delta_{AB}\delta_{BA} C_{YP}(C_{YBI} + C_{YPI})}. \end{aligned} \quad (11.41)$$

Враховуючи залежність (11.40), із формул (11.38) і (11.39) знайдемо переміщення мас. Переміщення маси  $m_{S2}$  в напрямку осі  $Y$  буде:

$$\begin{aligned} Y_{S2}(S) &= W_{Y2H} Y_H(S) + W_{Y2I2} Y_{I2}(S) + W_{Y2SI} Y_{SI}(S) + W_{Y2PY} Y_{YP}(S) + W_{Y2PBI} Y_{YBI}(S) + \\ &+ W_{Y2PPI} Y_{YPI}(S) + W_{Y2BI} Y_{BI}(S) + W_{Y2PI} Y_{PI}(S) + W_{Y2YE} Y_{YE}(S). \end{aligned} \quad (11.42)$$

Переміщення маси  $m_I$  в напрямку осі  $Y$ :

$$\begin{aligned} Y_I(S) &= W_{YIH} Y_H(S) + W_{YI2} Y_{I2}(S) + W_{YISI} Y_{SI}(S) + W_{YIPY} Y_{YP}(S) + W_{YIPBI} Y_{YBI}(S) + \\ &+ W_{YIPPI} Y_{YPI}(S) + W_{YIBI} Y_{BI}(S) + W_{YIPI} Y_{PI}(S) + W_{YIYE} Y_{YE}(S). \end{aligned} \quad (11.43)$$

Аналогічним чином знайдено залежності переміщення мас в напрямку осі  $Z$ . Переміщення маси  $m_{S2}$  складає:

$$\begin{aligned} Z_{S2}(S) &= W_{Z2H} Z_H(S) + W_{Z2I2} Z_{I2}(S) + W_{Z2SI} Z_{SI}(S) + W_{Z2PY} Z_{YP}(S) + W_{Z2PBI} Z_{ZBI}(S) + \\ &+ W_{Z2PPI} Z_{ZPI}(S) + W_{Z2BI} Z_{BI}(S) + W_{Z2PI} Z_{PI}(S) + W_{Z2ZE} Z_{ZE}(S). \end{aligned} \quad (11.44)$$

Переміщення маси  $m_I$  в напрямку осі  $Z$  дорівнює:

$$\begin{aligned} Z_I(S) &= W_{ZIH} Z_H(S) + W_{ZI2} Z_{I2}(S) + W_{ZISI} Z_{SI}(S) + W_{ZIPY} Y_{YP}(S) + W_{ZIPBI} Z_{ZBI}(S) + \\ &+ W_{ZIPPI} Z_{ZPI}(S) + W_{ZIBI} Z_{BI}(S) + W_{ZIPI} Z_{PI}(S) + W_{ZIZE} Y_{ZE}(S). \end{aligned} \quad (11.45)$$

Всі трансформуючі функції, що входять в дані залежності, є дробово-

раціональними функціями, причому функції  $W_{Y2S1}$ ,  $W_{Y2B1}$ ,  $W_{Y2P1}$ ,  $W_{Y1S1}$ ,  $W_{Y1B1}$ ,  $W_{Y1P1}$ ,  $W_{Z2S1}$ ,  $W_{Z2B1}$ ,  $W_{Z2P1}$ ,  $W_{Z1S1}$ ,  $W_{Z1B1}$ ,  $W_{Z1P1}$  мають вигляд:

$$W_1 = \frac{\sum_{i=0}^4 K_i S^i}{\sum_{i=1}^4 T_i^i S^i + 1} \quad (11.46)$$

Всі останні функції визначаються як

$$W_2 = \frac{\sum_{i=0}^3 K_i S^i}{\sum_{i=1}^4 T_i^i S^i + 1} \quad (11.47)$$

Кожна із залежностей (11.42)–(11.47) допускає запис у вигляді структурної математичної моделі. Наприклад, для залежності (11.42) структурна математична модель має вигляд, показаний на рис. 11.15.

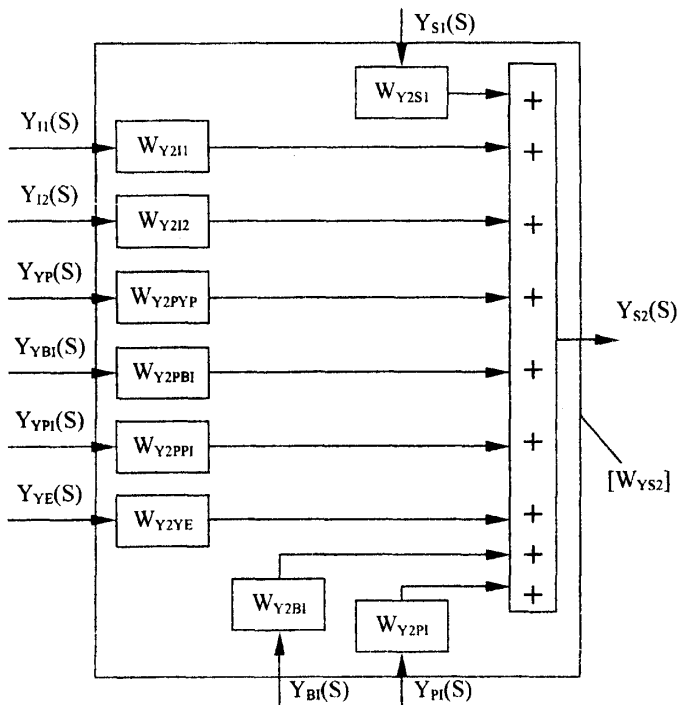


Рис. 11.15. Структурна математична модель, що відповідає залежності (11.42)

Структурна схема представляє собою основу для розробки блоку візуальної математичної моделі в системі SIMULINK (рис. 11.16).

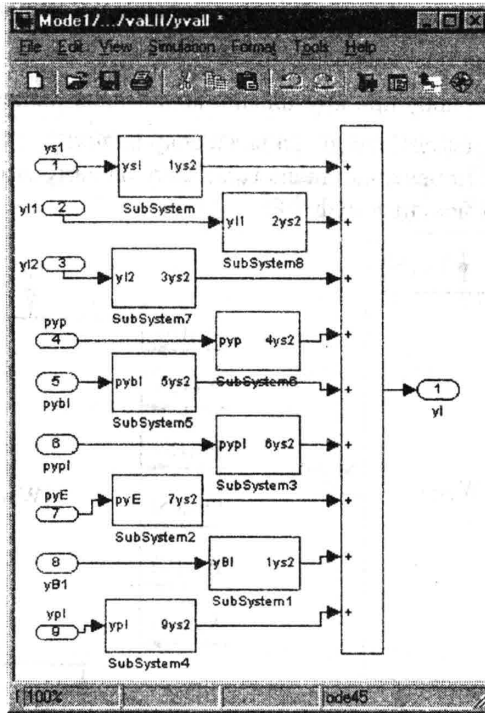


Рис. 11.16. Блок візуальної математичної моделі, який описує поперечні переміщення шківів S2

Структурна математична модель має вигляд блока з одним виходом і дев'ятьма входами. На рис. 11.17, а показана блок-схема математичної моделі, що відповідає структурі, наведеній на рис. 11.16, і рівнянню (11.42).

В динамічній системі вала I мають місце також крутильні коливання відносно геометричної осі вала. Враховуючи, що вал має значну крутну жорсткість, за динамічну модель його крутильних коливань приймемо одномасову крутильну систему (рис. 11.18).

Рівняння динамічної рівноваги при крутильних коливаннях вала I має вигляд:

$$\begin{aligned}
 I_1 \ddot{\varphi}_{S2} = & M_P + C_{\varphi P} \left( \frac{1}{i} \varphi_{S1} - \varphi_{S2} \right) + h_{\varphi P} \left( \frac{1}{i} \dot{\varphi}_{S1} - \dot{\varphi}_{S2} \right) + M_{I12} - h_{I12} \dot{\varphi}_{S2} + \\
 & + C_{\varphi B1}^{(1,2)} (\varphi_{B1} - \varphi_{S2}) + h_{\varphi B1}^{(1,2)} (\dot{\varphi}_{B1} - \dot{\varphi}_{S2}) + C_{\varphi P1}^{(1,2)} (\varphi_{P1} - \varphi_{S2}) + \\
 & + h_{\varphi P1}^{(1,2)} (\dot{\varphi}_{P1} - \dot{\varphi}_{S2}) + M_E + M_{B1} + M_{P1}, \quad (11.48)
 \end{aligned}$$

де  $I_1$  – момент інерції вала I разом зі шківом S2;

$M_{I12}$  – збурюючий момент, який виникає в підшипникових опорах I1 і I2 вала;

$h_{I12}$  – коефіцієнт опору підшипникових опор;

$C_{\varphi B1}^{(1,2)}$  – кутова жорсткість напівмуфти B1;

- $h_{\phi BI}^{(1,2)}$  – коефіцієнт опору при крутильних коливаннях напівмуфти ВІ;
- $C_{\phi PI}^{(1,2)}$  – кутова жорсткість напівмуфти РІ;
- $h_{\phi PI}^{(1,2)}$  – коефіцієнт опору при крутильних коливаннях напівмуфти РІ;
- $M_E$  – збурюючий момент, що діє на вал з боку вилки;
- $M_{BI}$  – збурюючий момент, що діє на вал з боку напівмуфти ВІ;
- $M_{PI}$  – збурюючий момент в муфті РІ.

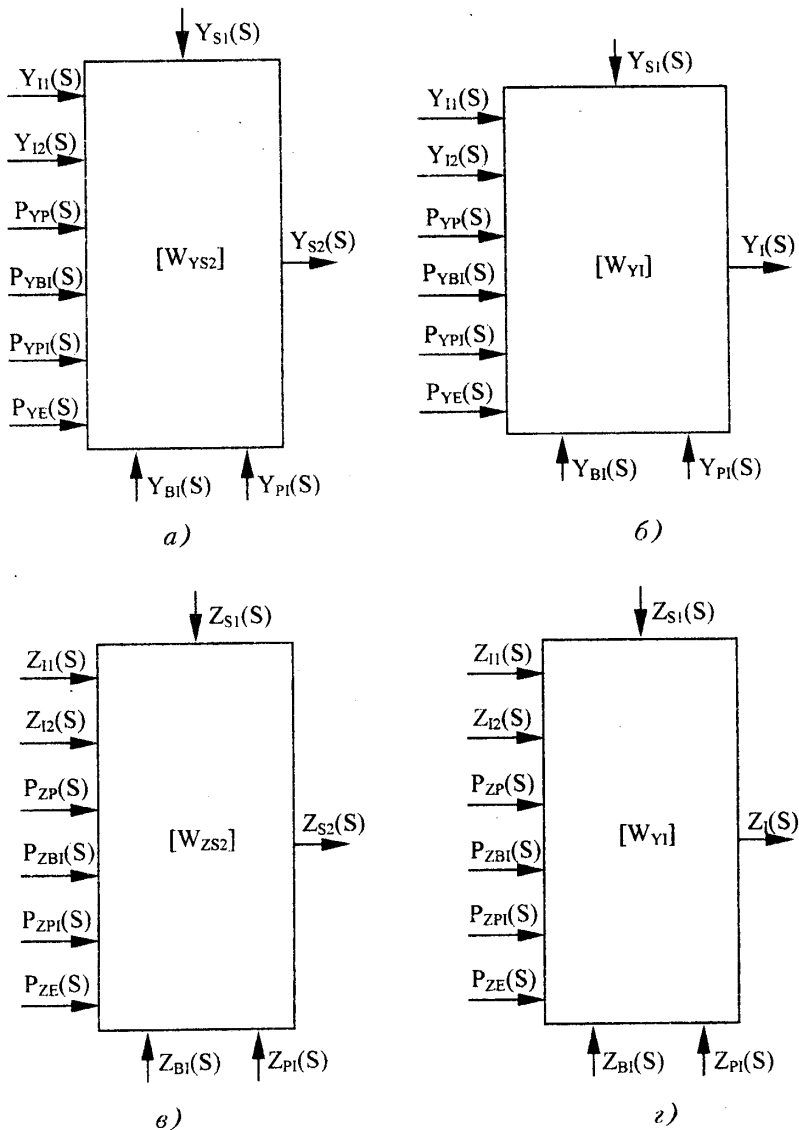


Рис. 11.17. Блок-схеми математичних моделей, які описують коливання зосереджених мас  $m_{S1}$  і  $m_{S1}$  в напрямках Y і Z

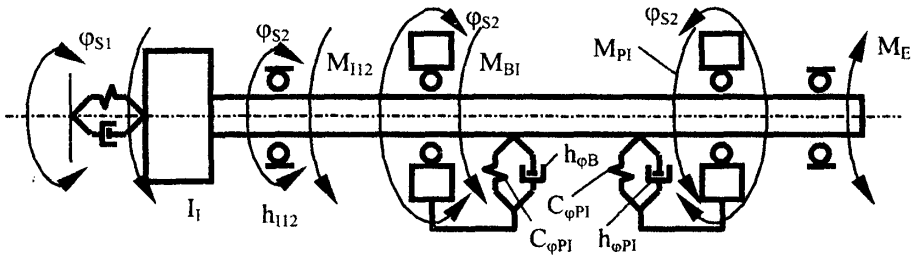


Рис. 11.18. Динамічна модель крутильних коливань вала I

Кутові жорсткості та коефіцієнти опору напівмуфт залежать від включення напівмуфт і визначаються неоднозначними залежностями:

$$C_{\varphi BI}^{(1,2)} = \begin{cases} C_{\varphi BI}^{(1)} \\ C_{\varphi BI}^{(2)} \end{cases}; \quad C_{\varphi PI}^{(1,2)} = \begin{cases} C_{\varphi PI}^{(1)} \\ C_{\varphi PI}^{(2)} \end{cases};$$

$$h_{\varphi BI}^{(1,2)} = \begin{cases} h_{\varphi BI}^{(1)} \\ h_{\varphi BI}^{(2)} \end{cases}; \quad h_{\varphi PI}^{(1,2)} = \begin{cases} h_{\varphi PI}^{(1)} \\ h_{\varphi PI}^{(2)} \end{cases}, \quad (11.49)$$

де верхні значення у фігурних дужках відповідають включенню лівої напівмуфти, а нижні значення – включенню правої напівмуфти.

Перетворимо диференціальне рівняння по Лапласу і одержимо відповідно:

$$W_{\varphi I} = \frac{K_{\varphi I}(1 + T_{\varphi I}S)}{T_{\varphi I}^2 S^2 + T_{\varphi I}S + 1}; \quad W_{\varphi BI} = \frac{K_{\varphi BI}(1 + T_{\varphi BI}S)}{T_{\varphi I}^2 S^2 + T_{\varphi I}S + 1};$$

$$W_{\varphi PI} = \frac{K_{\varphi PI}(1 + T_{\varphi PI}S)}{T_{\varphi I}^2 S^2 + T_{\varphi I}S + 1}; \quad W_{MP} = \frac{K_{MP}}{T_{\varphi I}^2 S^2 + T_{\varphi I}S + 1};$$

$$W_{M112} = \frac{K_{\varphi 112}}{T_{\varphi I}^2 S^2 + T_{\varphi I}S + 1}; \quad W_{\varphi E} = \frac{K_{\varphi E}}{T_{\varphi I}^2 S^2 + T_{\varphi I}S + 1};$$

$$W_{BI} = \frac{K_{\varphi BI}}{T_{\varphi I}^2 S^2 + T_{\varphi I}S + 1}; \quad W_{PI} = \frac{K_{\varphi PI}}{T_{\varphi I}^2 S^2 + T_{\varphi I}S + 1}. \quad (11.50)$$

Відповідно рівнянню, сформуємо структурну математичну модель (рис. 11.19).

Відповідно до структурної схеми розроблений блок системи SIMULINK, який описує крутильні коливання вала I (рис. 11.20).



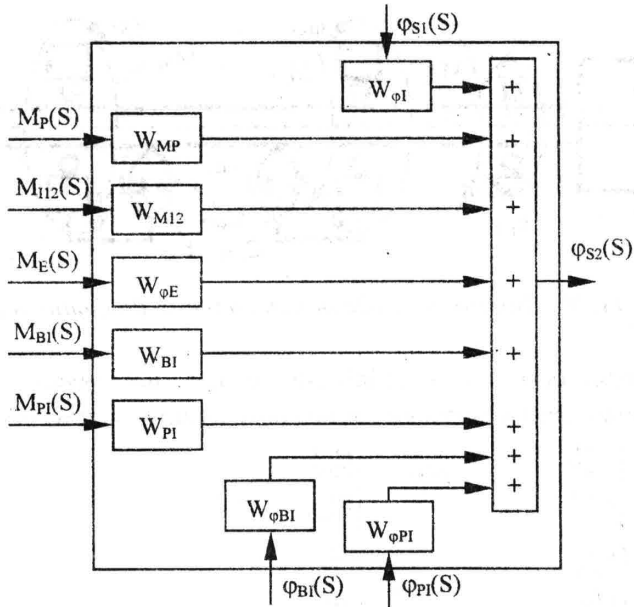


Рис. 11.19. Структурна схема математичної моделі, що описує крутильні коливання вала I

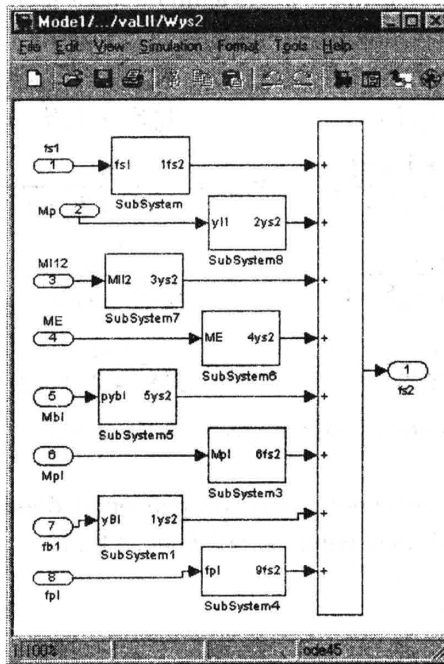


Рис. 11.20. Блок візуальної математичної моделі, що описує крутильні коливання вала II

### 11.3. Математична модель зубчастої передачі від вала I до вала II

Напівмуфта VI, яка знаходиться на валу I, має блок зубчастих коліс, який знаходиться в зчепленні із блоком шестерень, розташованим на валу II (рис. 11.21).

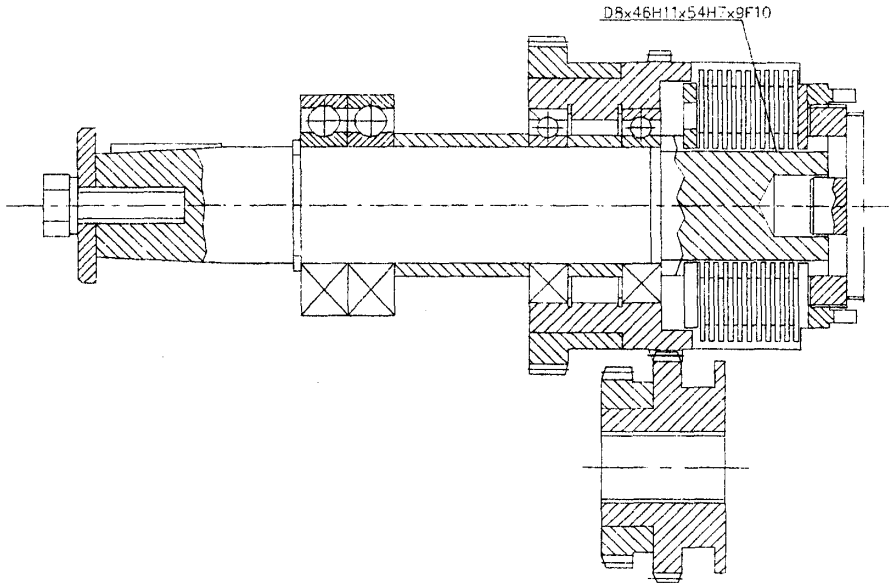


Рис. 11.21. Конструктивна схема зубчастої передачі від вала I до вала II

Особливістю зубчастої передачі є те, що зусилля передається зосередженою силою, яка проходить ексцентрично відносно центрів мас елементів динамічної системи. Тому при аналізі динаміки зубчастого зчеплення необхідно враховувати взаємний вплив поступальних і крутильних переміщень елементів динамічної системи.

Динамічну модель зубчастої передачі подано у вигляді плоскої двомасової системи, яка має шість ступенів вільності, що відповідають поперечним і крутильним коливанням напівмуфти VI та блока шестерень VII (рис. 11.22).

Динамічне зусилля у зубчастому зчепленні визначається контактними деформаціями та імпульсними навантаженнями, які виникають при зміні точок контакту зубців. Визначимо зміну контактного навантаження в залежності від переміщень зубчастого колеса VI та шестерні VII.

При зміщенні колеса на величину  $Y_{VI}$ , а шестерні на величину  $Y_{VII}$  деформація в контакті  $\Delta l_a$  в першому наближенні визначиться як

$$\Delta e_{BY} = \frac{Y_{VII} + Y_{VI}}{\cos \gamma} \quad (11.51)$$

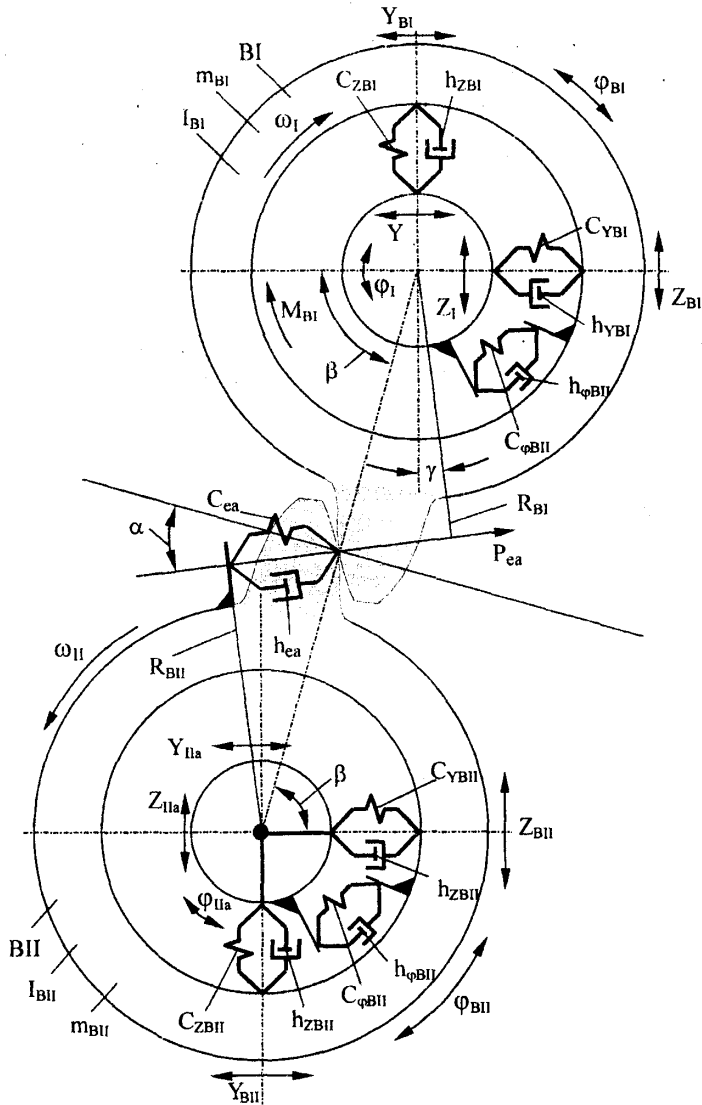


Рис. 11.22. Динамічна модель зубчастої передачі від вала I до вала II

Відповідно швидкість деформації буде дорівнювати:

$$\Delta \dot{e}_{BY} = \frac{\dot{Y}_{BII} + \dot{Y}_{B1}}{\cos \gamma}$$

Зміщення мас в перпендикулярному напрямку деформує зчеплення відповідно на величину:

$$\Delta e_{BZ} = \frac{-Z_{BII} + Z_{B1}}{\sin \gamma};$$

$$\Delta \dot{e}_{BZ} = \frac{-\dot{Z}_{BII} + \dot{Z}_{BI}}{\sin \gamma} \quad (11.52)$$

Крутильні коливання колеса і шестерні призведуть до зміни деформації зони контакту. Відповідно:

$$\begin{aligned} \Delta e_{B\phi} &= R_{BII} \phi_{BII} - R_{BI} \phi_{BI}; \\ \Delta \dot{e}_{B\phi} &= R_{BII} \dot{\phi}_{BII} - R_{BI} \dot{\phi}_{BI}. \end{aligned} \quad (11.53)$$

Будемо вважати зону контакту пружно-дисипативним зв'язком. Коефіцієнт жорсткості цього зв'язку –  $C_{ea}$ , коефіцієнт опору –  $h_{ea}$ . Зусилля в зоні контакту визначається залежністю:

$$P_{ca} = C_{ca} (\Delta e_{BY} + \Delta e_{BZ} + \Delta e_{B\phi}) + h_{ca} (\Delta \dot{e}_{BY} + \Delta \dot{e}_{BZ} + \Delta \dot{e}_{B\phi}) + P_{e1}. \quad (11.54)$$

Останнім доданком в формулі є сила, що виникає в зоні контакту за рахунок ?переспряження? Perezчеплення? зубців? передачі.

Підставивши значення складових деформації та виконавши перетворення залежності по Лапласу, одержимо:

$$\begin{aligned} P_{ca}(S) &= \frac{C_{ea}}{\cos \gamma} Y_{BII}(S) - \frac{C_{ea}}{\cos \gamma} Y_{BI}(S) + \frac{h_{ea}}{\cos \gamma} S \cdot Y_{BII}(S) - \frac{h_{ea}}{\cos \gamma} S \cdot Y_{BI}(S) - \\ &- C_{ea} \sin \gamma \cdot Z_{BII}(S) + C_{ea} \sin \gamma \cdot Z_{BI}(S) - h_{ea} \sin \gamma \cdot S \cdot Z_{BII}(S) - \\ &- h_{ea} \sin \gamma \cdot S \cdot Z_{BI}(S) + C_{ea} \cdot R_{BII} \cdot \phi_{BII}(S) - C_{ea} \cdot R_{BI} \cdot \phi_{BI}(S) + \\ &+ h_{ca} - R_{BII} - \phi_{BII}(S) - h_{ca} - R_{BI} - \phi_{BI}(S) + P_{e1}. \end{aligned} \quad (11.55)$$

Складемо рівняння динаміки для напівмуфти ВІ. Три рівняння відповідають переміщенням колеса в напрямках Y і Z та крутильним коливанням навколо центра мас. Згідно методу Даламбера, одержимо:

$$\begin{aligned} m_{BI} \ddot{Y}_{BI} &= P_{ea} \cos \gamma + C_{YBI} (Y_I - Y_{BI}) - h_{YBI} (\dot{Y}_I - \dot{Y}_{BI}) + P_{YBI}; \\ m_{BI} \ddot{Z}_{BI} &= P_{ea} \sin \gamma + C_{ZBI} (Z_I - Z_{BI}) - h_{ZBI} (\dot{Z}_I - \dot{Z}_{BI}) + P_{ZBI}; \\ I_{BI} \ddot{\phi}_{BI} &= P_{ea} R_{BI} + C_{\phi BI} (\phi_I - \phi_{BI}) - h_{\phi BI} (\dot{\phi}_I - \dot{\phi}_{BI}) + M_{BI}. \end{aligned} \quad (11.56)$$

Перетворимо дану систему по Лапласу і одержимо операторну форму математичної моделі, що визначає переміщення напівмуфти ВІ:

$$\begin{aligned} Y_{BI}(S) &= \frac{K_{YBI}}{T_{YBI}^2 S^2 + 2\xi T_{YBI} S + 1} [C_{YBI} (1 + T_{YBI} S) Y_I(S) + K_{eaY} (1 + T_{ca} S) Y_{BII}(S) - \\ &- K_{eaZ} (1 + T_{ca} S) Z_{BII}(S) + K_{eaZ} (1 - T_{ca} S) Z_{BI}(S) + K_{ea\phi 2} (1 + T_{ca} S) \phi_{BII}(S) - \\ &- K_{ea\phi 1} (1 + T_{ca} S) \phi_{BI}(S) - P_{e1}(S) + K_{YP} P_{YBI}(S)]; \\ Z_{BI}(S) &= \frac{K_{ZBI}}{T_{ZBI}^2 S^2 + 2\xi T_{ZBI} S + 1} [C_{ZBI} (1 + T_{ZBI} S) Z_I(S) + K_{eaY} (1 + T_{ca} S) Y_{BII}(S) - \\ &- K_{eaY} (1 + T_{ca} S) Y_{BI}(S) - K_{caZ} (1 - T_{ca} S) Z_{BII}(S) + K_{ea\phi 2} (1 + T_{ca} S) \phi_{BII}(S) - \\ &- K_{ea\phi 1} (1 + T_{ca} S) \phi_{BI}(S) - P_{e1}(S) + K_{ZP} P_{ZBI}(S)]; \\ \phi_{BI}(S) &= \frac{K_{\phi BI}}{T_{\phi BI}^2 S^2 + 2\xi T_{\phi BI} S + 1} [C_{\phi BI} (1 + T_{\phi BI} S) \phi_I(S) + K_{eaY} (1 + T_{ca} S) Y_{BII}(S) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -K_{eaY}(1+T_{ea}S)Y_{BI}(S) - K_{eaZ}(1-T_{ea}S)Z_{BI}(S) + K_{ea\varphi_2}(1+T_{ea}S)\varphi_{BI}(S) - \\ & - K_{ea\varphi_1}(1+T_{ca}S)\varphi_{BI}(S) - P_{eI}(S) + K_{\varphi P}M_{BI}(S) \Big\}, \end{aligned} \quad (11.57)$$

$$\begin{aligned} \text{де } T_{YBI} &= \sqrt{\frac{m_{BI}}{C_{YBI} + C_{ea}}}; & T_{YBI} &= \frac{h_{YBI}}{C_{YBI}}; & \xi_{YBI} &= \frac{1}{2} \frac{h_{YBI} + h_{ea}}{\sqrt{m_{BI}(C_{YBI} + C_{ea})}}; \\ K_{YBI} &= \frac{1}{C_{YBI} + C_{ea}}; & T_{ZBI} &= \frac{h_{ZBI}}{C_{ZBI}}; & T_{ZBI} &= \sqrt{\frac{m_{BI}}{C_{ZBI} + C_{ea}}}; \\ \xi_{ZBI} &= \frac{1}{2} \frac{h_{ZBI} + h_{ea}}{\sqrt{m_{BI}(C_{ZBI} + C_{ea})}}; & K_{ZBI} &= \frac{1}{C_{ZBI} + C_{ea}}; & T_{\varphi BI} &= \sqrt{\frac{I_{BI}}{C_{\varphi BI} + C_{ea}R_{BI}^2}}; \\ \xi_{\varphi BI} &= \frac{1}{2} \frac{h_{\varphi BI} + h_{ea}R_{BI}^2}{\sqrt{I_{BI}(C_{\varphi BI} + C_{ea}R_{BI}^2)}}. \end{aligned} \quad (11.58)$$

В загальному вигляді переміщення напівмуфти ВІ буде визначатися у вигляді:

$$\begin{aligned} Y_{BI}(S) &= W_{YI}Y_I + W_{YII}Y_{VII} + W_{ZBI}Y_{VII} + W_{ZI}Y_{BI} + W_{Y\varphi VII}Y_{VII} + W_{Y\varphi BI}Y_{BI} + \\ & + W_{Ye}P_{eI} + W_{Ze}P_{YBI}; \\ Z_{BI}(S) &= W_{ZI}Z_I + W_{ZYBI}Y_{VII} + W_{ZYBI}Y_{BI} + W_{ZYVII}Y_{VII} + W_{Z\varphi VII}Y_{VII} + W_{Z\varphi BI}Y_{BI} + \\ & + W_{Ze}P_{eI} + W_{ZP}P_{ZBI}; \\ \varphi_{BI}(S) &= W_{\varphi I}\varphi_I + W_{\varphi VII}Y_{VII} + W_{\varphi YBI}Y_{BI} + W_{\varphi ZBI}Z_{BI} + W_{\varphi ZBI}Z_{VII} + W_{\varphi\varphi VII}Y_{VII} + \\ & + W_{\varphi e}P_{eI} + W_{\varphi M}M_{BI}. \end{aligned} \quad (11.59)$$

Всі трансформуючі функції, які входять в дану залежність, мають вигляд:

$$W = \frac{K(1+TS)}{T^2 + 2\xi TS + 1}. \quad (11.60)$$

Відповідно до даних залежностей, сформована структурна математична модель і блокова математична модель (рис. 11.23).

Складемо рівняння динаміки для шестерні VII. Вони мають вигляд аналогічній системі рівнянь (11.59). Три рівняння описують переміщення шестерні  $Y_{VII}$ ,  $Z_{VII}$ ,  $\varphi_{VII}$  у напрямках  $Y$ ,  $Z$  і крутильні коливання шестерні. Відповідно:

$$\begin{aligned} m_{VII}\ddot{Y}_{VII} &= -P_{ea} \cos \gamma + C_{YVII}(Y_{IIa} - Y_{VII}) + h_{YVII}(\dot{Y}_{IIa} - \dot{Y}_{VII}) + P_{IIYa}; \\ m_{VII}\ddot{Z}_{VII} &= -P_{ea} \sin \gamma + C_{ZVII}(Z_{IIa} - Z_{VII}) - h_{ZVII}(\dot{Z}_{IIa} - \dot{Z}_{VII}) + P_{IIza}; \\ I_{VII}\ddot{\varphi}_{VII} &= -P_{ea}R_{BI} + C_{\varphi VII}(\varphi_{IIa} - \varphi_{VII}) - h_{\varphi VII}(\dot{\varphi}_{IIa} - \dot{\varphi}_{VII}) + M_{II\varphi a}, \end{aligned} \quad (11.61)$$

де  $m_{VII}$ ,  $I_{VII}$  – маса і момент інерції шестерні VII;  $C_{YVII}$ ,  $C_{ZVII}$ ,  $C_{\varphi VII}$  – складові жорсткості шліцьового з'єднання між блоком шестерень VII і валом II;  $h_{YVII}$ ,  $h_{ZVII}$ ,  $h_{\varphi VII}$  – коефіцієнти опору шліцьового з'єднання;  $Y_{IIa}$ ,  $Z_{IIa}$ ,  $\varphi_{IIa}$  – переміщення вала II в точці а, де знаходиться блок шестерень VII;  $P_{IIa}$ ,  $P_{IIa}$ ,  $M_{II\varphi a}$  – додаткові стохастичні навантаження, що діють в шліцьовому з'єднанні.

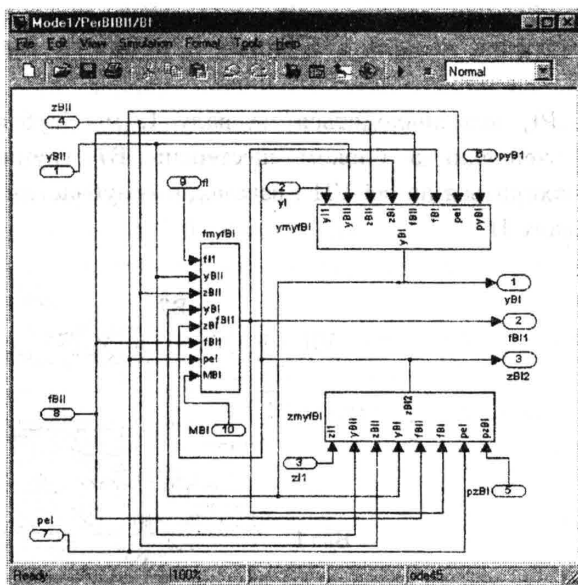


Рис. 11.23. Структурна математична модель зубчастої передачі від вала I до вала II

Система рівнянь (11.61) перетворюється аналогічно системі рівнянь (11.56). В результаті одержана структурна математична модель, вигляд якої відповідає структурі, наведеній на рис. 11.23. Дана модель показана в блоковому вигляді на рис. 11.24.

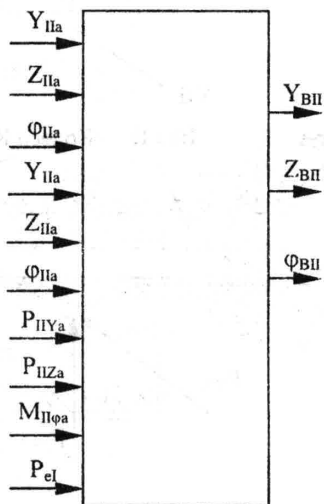


Рис. 11.24. Блоковий вигляд математичної моделі, що описує коливання блока шестерень ВІІ

### 11.4. Математична модель зубчастих передач групи реверса

Напівмуфта РІ, яка знаходиться на валу І, має зубчасте колесо, яке знаходиться в зчепленні з блоком шестерень В7 групи реверса. Блок шестерень В7 знаходиться на осі VII і взаємодіє із зубчастим колесом КII, що знаходиться на валу II.

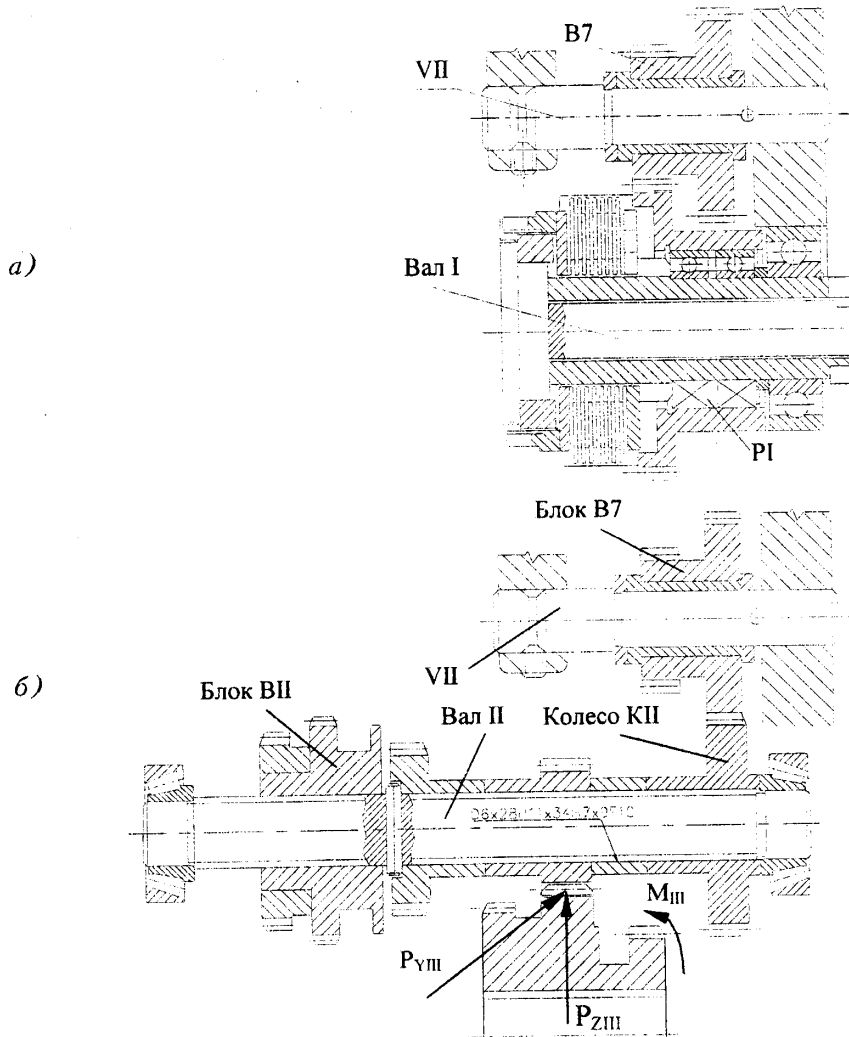


Рис. 11.25. Конструктивна схема кінематичного ланцюга групи реверса:

а – передача від муфти РІ до блока В7;

б – передача від блока В7 до вала II

Конструктивно колесо КІІ жорстко з'єднано з валом ІІ. Тому можна вважати, що ця система представляє собою одну масу  $m_{II}$ .

Дія моменту  $M_{III}$  з боку привода головного руху на вал ІІ, спричиняє виникнення сил  $R_{ZIII}$  і  $R_{YIII}$ . Вони призводять до коливань вала ІІ. Але враховуючи, що блок ВІІ і колесо КІІ знаходяться близько до опор вала ІІ, можна вважати, що коливання вала під дією сил  $R_{ZIII}$  і  $R_{YIII}$  мало впливають на динамічну систему блока ВІІ і колеса КІІ.

Тому динамічна модель зубчастих передач групи реверса прийнята у вигляді, показаному на рис. 11.26.

Динамічна модель включає чотири твердих тіла з масами:  $m_{PI}$  – маса напівмуфти на валу І;  $m_{B7}$  – маса блока шестерень В7;  $m_{B7}$  – приведена маса осі 7;  $m_{II}$  – маса зубчастого колеса КІІ разом з приведеною масою вала ІІ.

Напівмуфта РІ здійснює плоский рух із трьома ступенями вільності. Він характеризується переміщеннями  $Y_{B7}$ ,  $Z_{B7}$ ,  $\Phi_{B7}$ .

Блок шестерень В7 також здійснює плоский рух, який визначається переміщеннями  $Y_{B7}$ ,  $Z_{B7}$ ,  $\Phi_{B7}$ .

Вісь 7 (необертова деталь) описана як одномасова система з двома ступенями вільності, що відповідають переміщенням  $Y_7$  і  $Z_7$ .

Зубчасте колесо КІІ здійснює плоский рух з трьома ступенями вільності. Він характеризується переміщеннями  $Y_{KII}$ ,  $Z_{KII}$ ,  $\Phi_{KII}$ . Зубчасте колесо знаходиться на валу ІІ біля його опори. Тому переміщення вала ІІ враховані введенням законів його руху у вигляді переміщень  $Y_{II}$ ,  $Z_{II}$ ,  $\Phi_{II}$ .

Зубчаста передача групи реверса не передає силового крутного моменту. Тому номінальні навантаження в зубчастих зчепленнях є незначними. Враховуючи це, можна знехтувати втратами енергії у зчепленнях і в динамічній моделі враховувати лише жорсткість зубчастих зчеплень у вигляді коефіцієнтів  $C_{ec}$  і  $C_{ed}$ .

Визначимо динамічні зусилля в зубчастих зчепленнях в залежності від переміщення елементів динамічної системи.

Розглянемо передачу від напівмуфти РІ до блока В7. При зміщенні напівмуфти РІ на величину  $Y_{PI}$ , а блока шестерень В7 на величину  $Y_{B7}$  деформація в контакті зубців визначається як

$$\Delta e_{dPY} = \frac{Y_{B7} - Y_{PI}}{\cos \gamma_d} \quad (11.62)$$

Зміщення мас в перпендикулярному напрямку призведе до деформації зчеплення на величину

$$\Delta e_{dPZ} = \frac{Z_{B7} - Z_{PI}}{\sin \gamma_d} \quad (11.63)$$

Крутильні коливання напівмуфти і шестерні призведуть до деформації зони контакту відповідно на величину:



$$\Delta e_{dP\phi} = R_{7d}\phi_{B7} - R_1\phi_{P1} \quad (11.64)$$

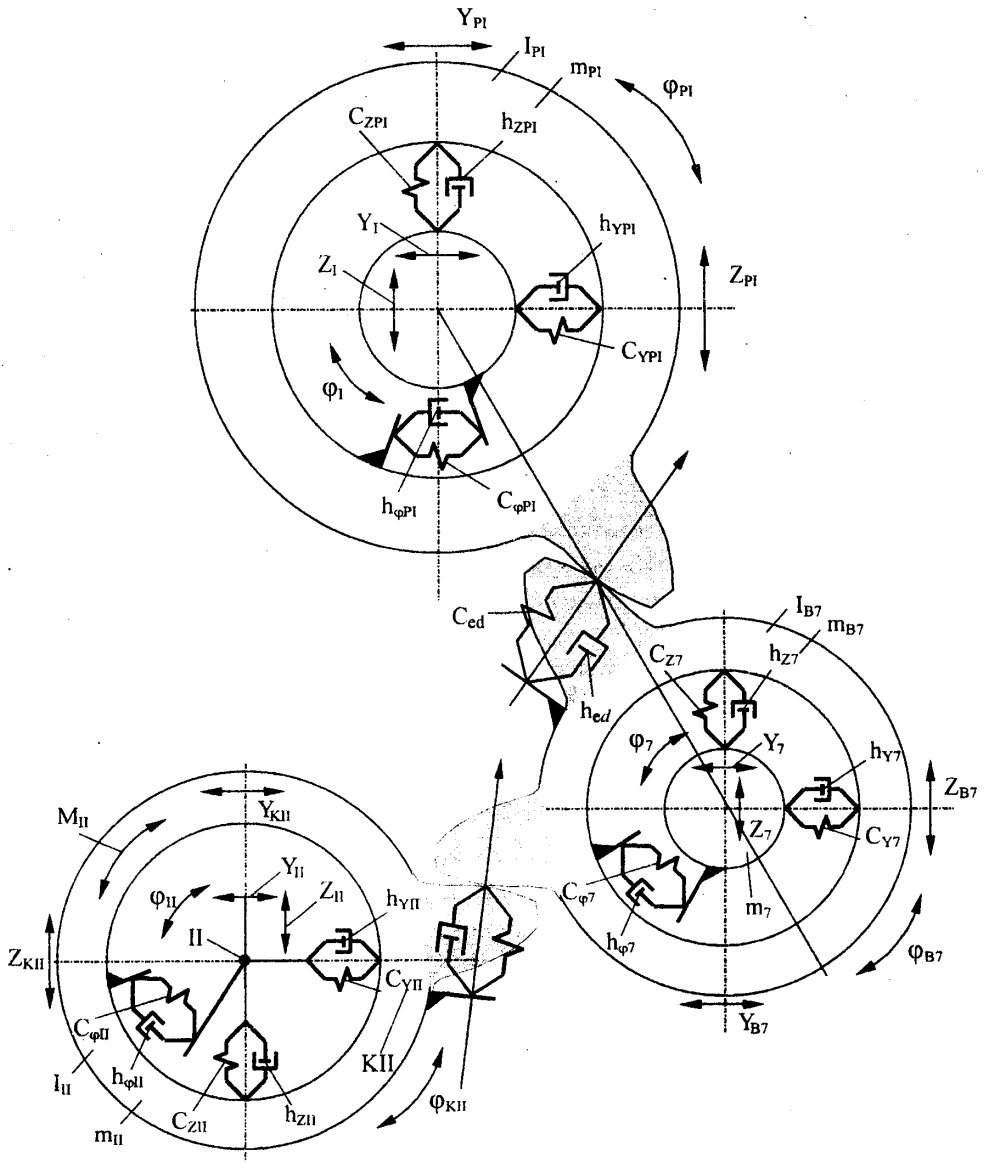


Рис. 11.26. Динамічна модель зубчастих передач групи реверса

При контакті зубців має місце пружний зв'язок із нелінійними характеристиками. Тому зусилля в контакті зубців визначаються залежністю:

$$P_{ed} = C_{ed}(\Delta e_{dPY} + \Delta e_{dPZ} + \Delta e_{dP\phi}) + P_d, \quad (11.65)$$

де  $P_d$  – нелінійна сила, яка виникає в контакті зубців передачі.

Підставивши значення деформації, одержимо:

$$P_{ed} = \frac{C_{ed}}{\cos \gamma_d} Y_{B7} - \frac{C_{ed}}{\cos \gamma_d} Y_{P1} + \frac{C_{ed}}{\sin \gamma_d} Z_{B7} - \frac{C_{ed}}{\sin \gamma_d} Z_{P1} + C_{ed} R_{7d} \varphi_{B7} - C_{ed} R_{1d} \varphi_{P1} + P_d. \quad (11.66)$$

Аналогічним чином знайдемо динамічне зусилля в передачі від блока шестерень B7 до колеса КІІ. Складові деформації зчеплення, обумовлені переміщеннями в напрямках Y і Z та кутовим зміщенням, визначаються як

$$\Delta e_{cPY} = \frac{Y_{KII} - Y_{B7}}{\cos \gamma_c}; \quad (11.67)$$

$$\Delta e_{cPZ} = \frac{Z_{KII} + Z_{B7}}{\sin \gamma_c}; \quad (11.68)$$

$$\Delta e_{cP\varphi} = R_{KII} \varphi_{KII} - R_{7c} \varphi_{B7}. \quad (11.69)$$

Відповідно динамічне зусилля в зчепленні шестерні B7 і колеса КІІ:

$$P_{ec} = \frac{C_{ec}}{\cos \gamma_c} Y_{KII} - \frac{C_{ec}}{\cos \gamma_c} Y_{B7} + \frac{C_{ec}}{\sin \gamma_c} Z_{B7} - \frac{C_{ec}}{\sin \gamma_c} Z_{KII} + C_{ec} R_{KII} \varphi_{KII} - C_{ec} R_{7c} \varphi_{B7} + P_c, \quad (11.70)$$

де  $P_c$  – нелінійна сила, яка виникає в контакті зубців передачі.

Складемо рівняння динаміки для напівмуфти P1. Три рівняння відповідають переміщенням напівмуфти в напрямках Y, Z і  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} m_{P1} \ddot{Y}_{P1} &= P_{ed} \cos \gamma_d + C_{YP1} (Y_1 - Y_{P1}) + h_{YP1} (\dot{Y}_1 - \dot{Y}_{P1}) + P_{YP1}; \\ m_{P1} \ddot{Z}_{P1} &= P_{ed} \sin \gamma_d + C_{ZP1} (Z_1 - Z_{P1}) + h_{ZP1} (\dot{Z}_1 - \dot{Z}_{P1}) + P_{ZP1}; \\ I_{P1} \ddot{\varphi}_{P1} &= P_{ed} R_1 + C_{\varphi P1} (\varphi_1 - \varphi_{P1}) + h_{\varphi P1} (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_{P1}) + M_{P1}. \end{aligned} \quad (11.71)$$

Підставимо в дану систему рівнянь значення зусилля в зубчастому зчепленні і перетворимо систему по Лапласу. Остаточо одержимо переміщення напівмуфти P1 в трьох напрямках:

$$\begin{aligned} Y_{P1}(S) &= W_{YP1} Y_1 + W_{YB7} Y_{B7} + W_{YZB7} Z_{B7} + W_{YZP1} Z_{P1} + \\ &+ W_{YB7} \varphi_{B7} + W_{Y\varphi B1} \varphi_{P1} + W_{YPd} P_d + W_{YYP1} P_{YP1}; \\ Z_{P1}(S) &= W_{ZP1} Z_1 + W_{ZB7} Y_{B7} + W_{ZZB7} Z_{B7} + W_{ZYP1} Z_{P1} + \\ &+ W_{Z\varphi B7} \varphi_{B7} + W_{Z\varphi P1} \varphi_{P1} + W_{ZPd} P_d + W_{ZZP1} P_{ZP1}; \\ \varphi_{P1}(S) &= W_{\varphi P1} \varphi_1 + W_{\varphi B7} Y_{B7} + W_{\varphi YP1} Y_{P1} + W_{\varphi ZB7} Z_{B7} + \\ &+ W_{\varphi ZP1} Z_{P1} + W_{\varphi\varphi B7} \varphi_{B7} + W_{\varphi Pd} P_d + W_{\varphi\varphi P1} M_{P1}. \end{aligned} \quad (11.72)$$

Трансформуючі функції, які входять в дані залежності, мають вигляд:

$$\text{функції } W_{YP1}, W_{ZP1}, W_{\varphi P1}: \frac{K(1+TS)}{T^2 S^2 + 2\xi TS + 1};$$

інші трансформуючі функції одержано у вигляді  $\frac{K}{T^2 S^2 + 2\xi TS + 1}$  з відповідними коефіцієнтами K, T,  $\xi$ , які знайдені за параметрами динамічної

системи.

Відповідно до одержаних рівнянь сформована математична модель динамічної системи напівмуфти, яка подана на рис. 11.27.

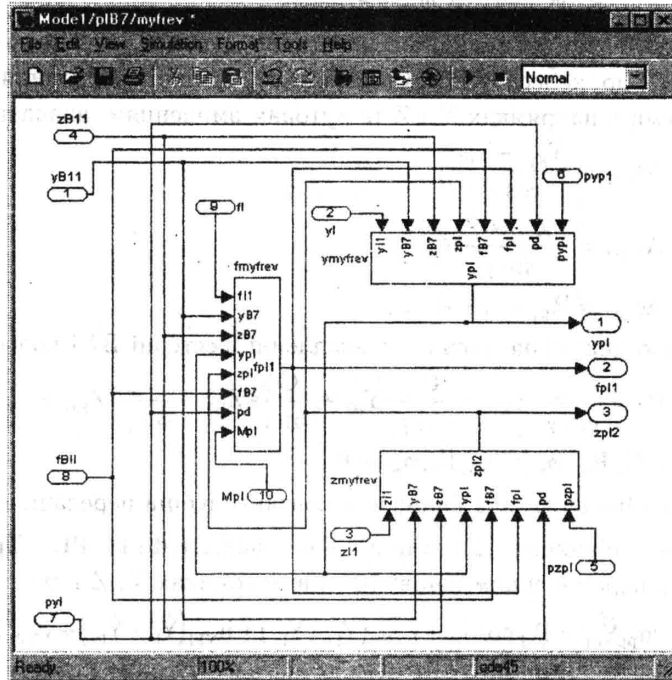


Рис. 11.27. Структурна математична модель динамічної системи напівмуфти PI

Складемо рівняння динаміки для динамічної системи блока шестерень B7. Три рівняння відповідають переміщенням блока  $Y_{B7}$ ,  $Z_{B7}$  і  $\Phi_{B7}$ :

$$\begin{aligned} m_{B7} \ddot{Y}_{B7} &= -P_{ed} \cos \gamma_d + P_{ec} \cos \gamma_c + C_{Y7} (Y_7 - Y_{B7}) + h_{Y7} (\dot{Y}_7 - \dot{Y}_{B7}) + P_{YP7}; \\ m_{B7} \ddot{Z}_{B7} &= -P_{ed} \sin \gamma_d - P_{ec} \sin \gamma_c + C_{Z7} (Z_7 - Z_{B7}) + h_{Z7} (\dot{Z}_7 - \dot{Z}_{B7}) + P_{ZP7}; \\ I_{B7} \ddot{\Phi}_{B7} &= -P_{ed} R_{7d} - P_{ec} R_{7c} + h_{\Phi 7} \dot{\Phi}_{B7}, \end{aligned} \quad (11.73)$$

де  $P_{YP7}$ ,  $P_{ZP7}$  – додаткові сили, що діють на блок шестерень з боку вала 7.

Підставимо в систему рівнянь динаміки значення зусиль в обох зубчастих зчепленнях і перетворимо рівняння по Лапласу. Остаточного одержимо переміщення блока шестерень в трьох напрямках:

$$\begin{aligned} Y_{B7}(S) &= W_{YP7} Y_{P1} + W_{Y7B7} Z_{B7} + W_{Y7P1} Z_{P1} + W_{Y7\Phi 7} \Phi_{B7} + \\ &+ W_{Y7P1} \Phi_{P1} + W_{Y7d} P_d + W_{Y7KY} Y_{KII} + W_{Y7KZ} Z_{KII} + \\ &+ W_{Y7K\Phi} \Phi_{KII} + W_{Y7Pc} P_c + W_{Y7Y} Y_7 + W_{YYP7} P_{YP7}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{B7}(S) = & W_{ZP7}Y_{P1} + W_{Z7B7}Y_{B7} + W_{Z7d}Z_{P1} + W_{Z7\phi Z}\phi_{B7} + \\
 & + W_{Z7P1}\phi_{P1} + W_{Z7d}P_d + W_{Z7KY}Y_{KII} + W_{Z7KZ}Z_{KII} + \\
 & + W_{Z7K\phi}\phi_{KII} + W_{Z7Pc}P_c + W_{ZZ7}Z_7 + W_{ZZP7}P_{ZP7}; \\
 \phi_{B7}(S) = & W_{\phi P1}Y_{P1} + W_{\phi 7B7}Y_{B7} + W_{\phi 7B7}Z_{B7} + W_{\phi ZP1}Z_{P1} + \\
 & + W_{\phi \phi P1}\phi_{P1} + W_{\phi Pd}P_d + W_{\phi 7KY}Y_{KII} + W_{\phi 7KZ}Z_{KII} + \\
 & + W_{\phi 7K\phi}\phi_{KII} + W_{\phi Pc}P_c.
 \end{aligned}
 \tag{11.74}$$

Трансформуючі функції, які входять в праві частини формул, мають вигляд:  $W = \frac{K}{T^2S^2 + 2\xi TS + 1}$ . Виключення складають функції  $W_{Y7}$  і  $W_{ZZ7}$ ,

які мають вигляд:  $W = \frac{K(1 + TS)}{T^2S^2 + 2\xi TS + 1}$ .

Відповідно до одержаних рівнянь сформована структурна математична модель динамічної системи блока шестерень B7 (рис. 11.28).

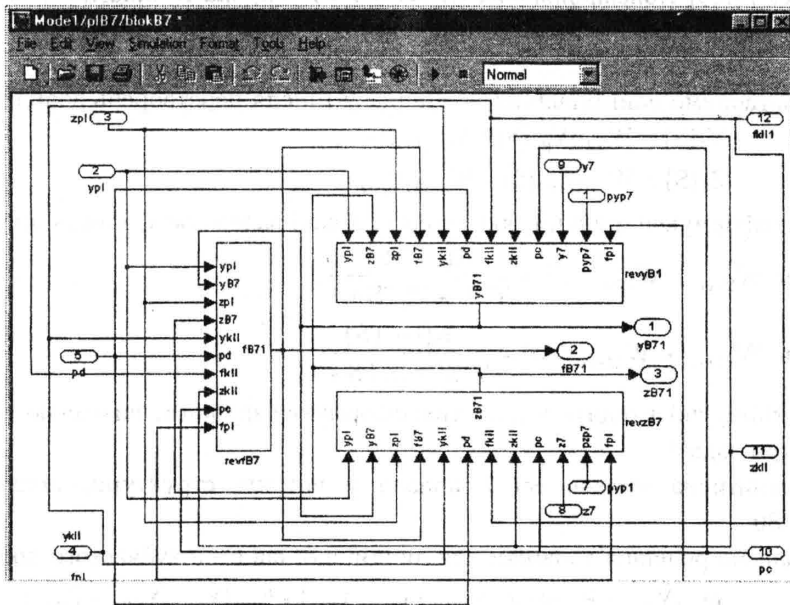


Рис. 11.28. Структурна математична модель блока шестерень B7

Блок шестерень B7 знаходиться на осі 7 (рис. 11.29). Він обертається і при своєму русі створює динамічні навантаження на вісь 7. Відповідно в динамічній системі осі 7 мають місце динамічні коливальні процеси, які, в свою чергу, впливають на коливання блока 7.

Складемо рівняння динаміки для осі 7. Вісь 7 представляє собою одномасову систему з двома ступенями вільності. Рівняння динаміки осі

мають вигляд:

$$\begin{aligned} m_7 \ddot{Y}_7 &= C_{Y7}(Y_{B7} - Y_7) + h_{Y7}(\ddot{Y}_{B7} - \ddot{Y}_7) - P_{YP7}; \\ m_7 \ddot{Z}_7 &= C_{Z7}(Z_{B7} - Z_7) + h_{Z7}(\ddot{Z}_{B7} - \ddot{Z}_7) - P_{ZP7}. \end{aligned} \quad (11.75)$$

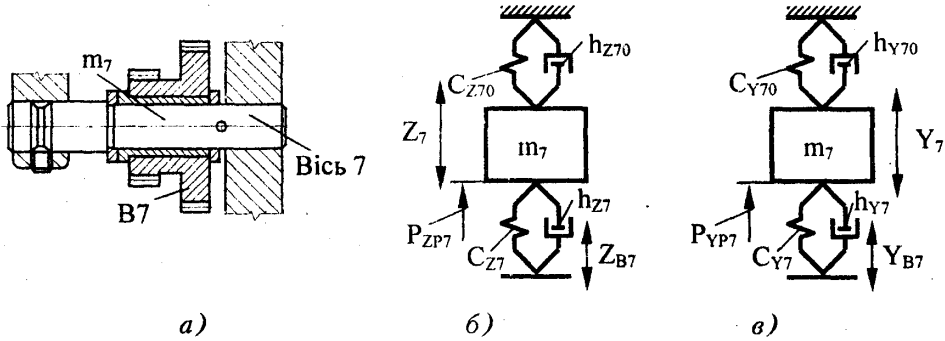


Рис. 11.29. Конструктивна схема осі VII (а) та її динамічні моделі при вертикальних (б) та горизонтальних (в) коливаннях

Перетворимо дані рівняння по Лапласу і після перетворень знайдемо:

$$\begin{aligned} Y_7(S) &= W_{Y70} Y_{B7}(S) + W_{Y7PO} P_{YP7}; \\ Z_7(S) &= W_{Z70} Z_{B7}(S) + W_{Z7PO} P_{ZP7}. \end{aligned} \quad (11.76)$$

Трансформуючі функції, які входять в дані залежності, мають вигляд:

$$\begin{aligned} \text{для } W_{Y70} \text{ і } W_{Z70}: W &= \frac{K(1+TS)}{T^2 S^2 + 2\xi TS + 1}; \\ \text{для } W_{Y7PO} \text{ і } W_{Z7PO}: W &= \frac{K(1+TS)}{T^2 S^2 + 2\xi TS + 1}. \end{aligned} \quad (11.77)$$

Постійні, які входять в дані трансформуючі функції, визначаються через параметри задачі.

Математична модель осі 7 подана у вигляді структури, показаної на рис. 11.30.

Складемо рівняння динаміки для динамічної системи зубчастого колеса КII:

$$\begin{aligned} m_{KII} \ddot{Y}_{KII} &= P_{ec} \cos \gamma_c + C_{YII}(Y_{II} - Y_{KII}) + h_{YII}(\dot{Y}_{II} - \dot{Y}_{KII}) + P_{IIyc}; \\ m_{KII} \ddot{Z}_{KII} &= P_{ec} \sin \gamma_c + C_{ZII}(Z_{II} - Z_{KII}) + h_{ZII}(\dot{Z}_{II} - \dot{Z}_{KII}) + P_{IIzc}; \\ I_{KII} \ddot{\phi}_{KII} &= -P_{ec} R_{KII} + C_{\phi II}(\phi_{IIc} - \phi_{KII}) + h_{\phi II}(\dot{\phi}_{IIc} - \dot{\phi}_{KII}) + M_{IIc}. \end{aligned} \quad (11.78)$$

Дана система рівнянь в цілому відповідає системі рівнянь, яка описує коливання шестерні VII. Тому вона перетворюється до виду структурної математичної. Дана модель показана у вигляді блока, зображеного на рис. 11.31.

При розробці математичної моделі динамічної системи вала II виконано аналіз схеми роботи вала. На рис. 11.32 наведені можливі варіанти з'єднання вала із кінематичним ланцюгом привода головного руху.

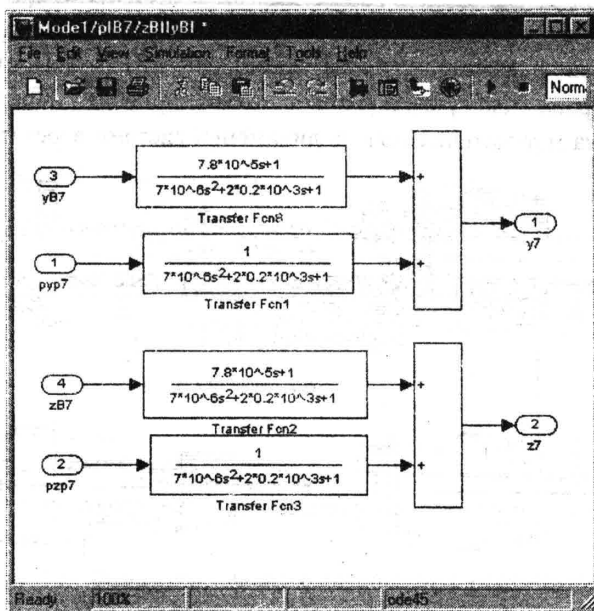


Рис. 11.30. Структурна математична модель динамічної системи осі 7

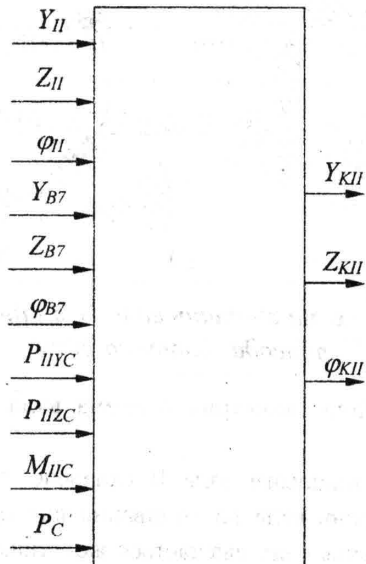


Рис. 11.31. Блокова математична модель, що описує динамічні коливальні процеси колеса КІІ

При включеннях за схемами, показаними на рис. 11.32, а та б, привід головного руху суттєво впливає на колювання вала, а при включенні за схемою,

показаними на рис. 11.32, в, поперечні коливання вала мало впливають на динамічні процеси в системах блока шестерень ВІІ і КІІ. Остання схема включення і обрана для розрахункової схеми привода. При цьому значно спрощена загальна математична модель динамічної системи верстата.

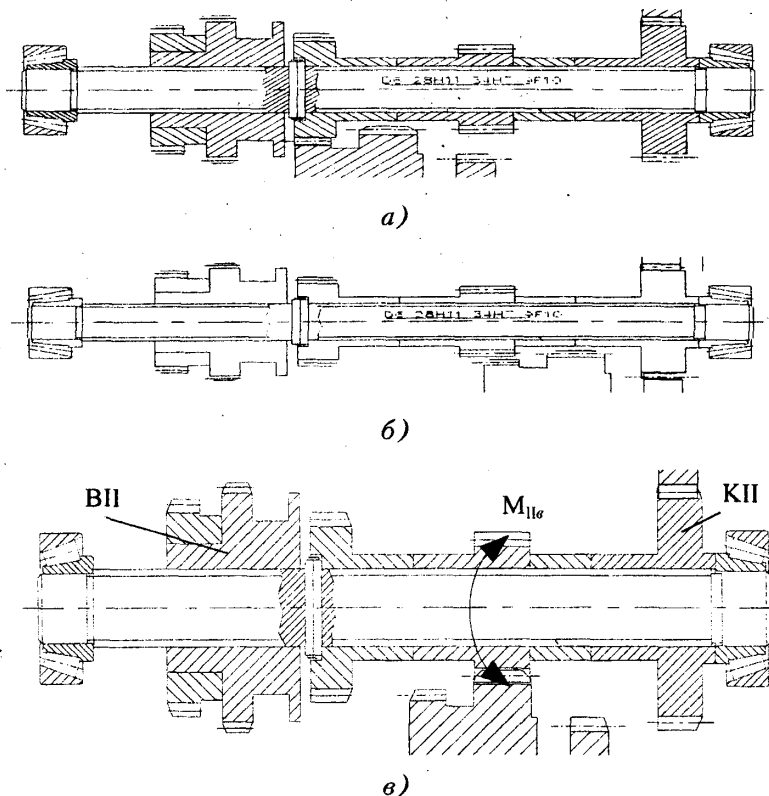


Рис. 11.32. Можливі схеми з'єднань вала ІІ з кінематичним ланцюгом привода головного руху

На рис. 11.33 показана геометрична схема вала ІІ при його поперечних коливаннях.

Рівняння динамічної рівноваги вала ІІ складене із врахуванням незначного впливу поперечних коливань вала на коливання шестерні ВІІ колеса КІІ. Тому вал ІІ при поперечних коливаннях вважається жорстким і невагомим. Переміщення точок вала а і с, де розташовані шестерня ВІІ і колесо КІІ, визначимо із геометричних міркувань в залежності від зміщення підшипникових опор:

$$Y_{IIa} = Y_{III} + \frac{l_a(Y_{II2} - Y_{III})}{L_{II}} = \lambda_a Y_{III} + \mu_a Y_{II2};$$

$$Z_{IIa} = \lambda_a Z_{III} + \mu_a Z_{II2};$$

$$Y_{IIc} = Y_{III} + \frac{l_c(Y_{II2} - Y_{III})}{L_{II}} = \lambda_c Y_{III} + \mu_c Y_{II2}; \quad (11.79)$$

$$Z_{IIc} = \lambda_c Z_{III} + \mu_c Z_{II2}.$$

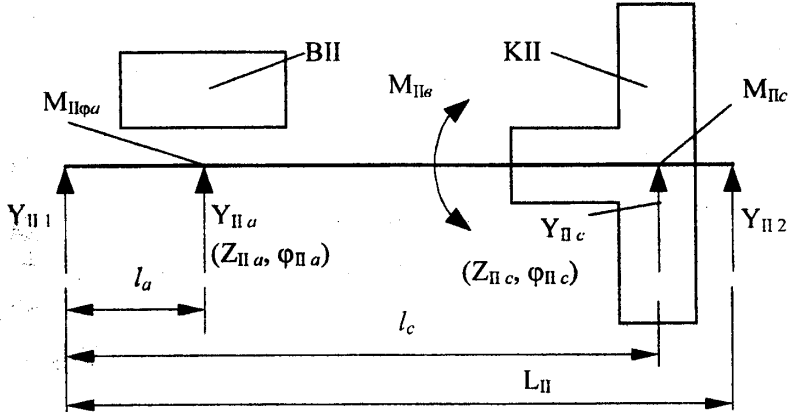


Рис. 11.33. Динамічна модель поперечних переміщень вала ІІ

Кутові переміщення вала ІІ будуть впливати на коливання елементів динамічної системи. Для визначення кутових переміщень складемо рівняння динамічної рівноваги для крутильних коливань вала (рис. 11.34). При цьому враховано момент інерції вала.

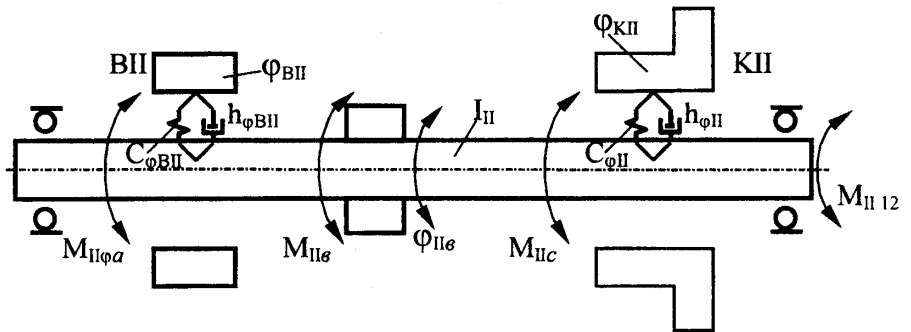


Рис. 11.34. Динамічна модель крутильної системи вала ІІ

Рівняння, яке описує крутильні коливання вала, одержане у вигляді:

$$I_{II} \ddot{\phi}_{IIb} = C_{\phi ВІІ} (\phi_{ВІІ} - \phi_{IIa}) + h_{\phi ВІІ} (\dot{\phi}_{ВІІ} - \dot{\phi}_{IIa}) + M_{IIфа} + M_{IIфа} + C_{\phi ІІ} (\phi_{КІІ} - \phi_{IIc}) + h_{\phi ІІ} (\dot{\phi}_{КІІ} - \dot{\phi}_{IIc}) + M_{IIc} + M_{II2}, \quad (11.80)$$

де  $\phi_{IIb}$  – кут повороту середньої частини вала ІІ;

$\phi_{IIa}$  – кут повороту вала в місці розташування шестерні ВІІ;



$\varphi_{IIc}$  – кут повороту вала в місці розташування колеса КІІ;

$M_{IIb}$  – момент, що діє на вал ІІ з боку привода головного руху;

$M_{II12}$  – крутний момент, що діє на вал ІІ з боку підшипників.

Будемо вважати, що вал ІІ має значну крутну жорсткість, тому прийmemo  $\varphi_{IIa} = \varphi_{IIb} = \varphi_{IIc}$ .

Після перетворення диференціального рівняння по Лапласу одержимо зображення по Лапласу кута повороту вала у вигляді:

$$\varphi_{IIb}(S) = W_{IIbI} \varphi_{bII} + W_{Ma} M_{Ika} + W_{IKI} \varphi_{KII} + W_{Mc} M_{I1c} + W_{MI2} M_{II2} + W_{Mb} M_{IIb}. \quad (11.81)$$

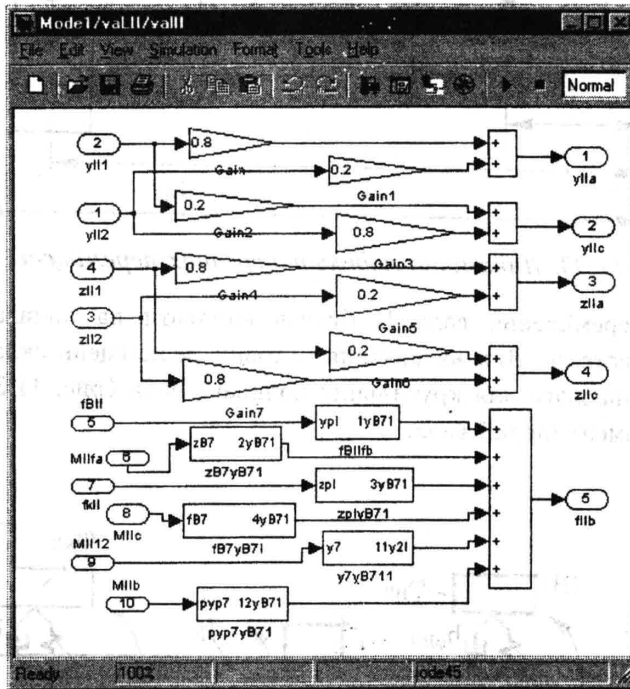


Рис. 11.35. Математична модель, яка описує поперечні деформації та крутильні коливання вала ІІ

### 11.5. Загальна математична модель віброактивної частини привода головного руху верстата та результати математичного моделювання

Розроблені блоки математичної моделі окремих динамічних підсистем об'єднані в одну загальну математичну модель. Блоки об'єднуються шляхом підключення відповідних входів до відповідних виходів наступного блока. Один із входів у вигляді крутного моменту, прикладеного до точки  $a$  вала II, є незалежним.

Візуальна математична модель, одержана шляхом об'єднання блоків, наведена на рис. 11.36. Незалежний вхід моделі показаний портом MVAL2.

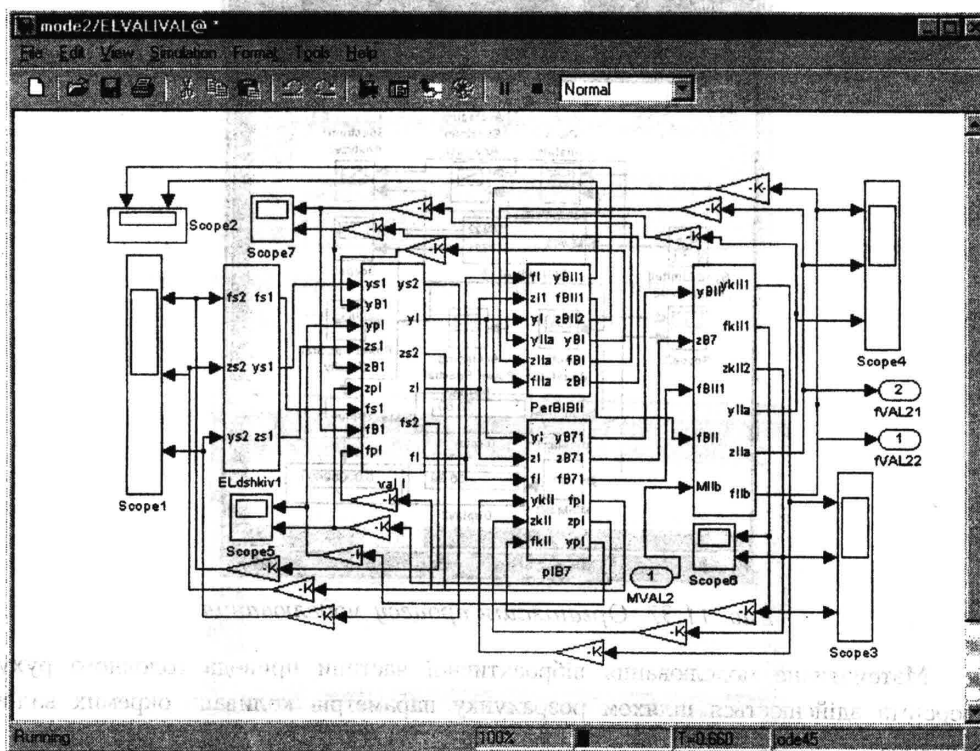


Рис. 11.36. Візуальна математична модель віброактивної частини привода

Для організації виведення результатів моделювання в моделі використано ряд блоків Scope. Вони дозволяють вивести графіки залежності відповідного параметра від часу. Зокрема, виводяться залежності поперечних переміщень елементів динамічної системи та кути повороту.

Для організації процесу моделювання використана допоміжна візуальна модель (рис. 11.37).

В даній допоміжній моделі використано ряд додаткових засобів аналізу

динамічних коливальних процесів у елементах приводу головного руху. Зокрема, здійснюється статистична обробка випадкових процесів, знаходяться кореляційна функція (автокореляційна функція) і взаємна кореляційна функція, розраховуються спектральна щільність потужності випадкового процесу і середня спектральна щільність потужності, додатково визначаються мінімальні та максимальні значення випадкових процесів. При цьому знаходиться розмах коливань валів та інших елементів динамічної системи. В допоміжній системі використовується один незалежний вхід у вигляді крутного моменту, що діє на вал II. Даний крутний момент задано у вигляді широкополосного випадкового процесу.

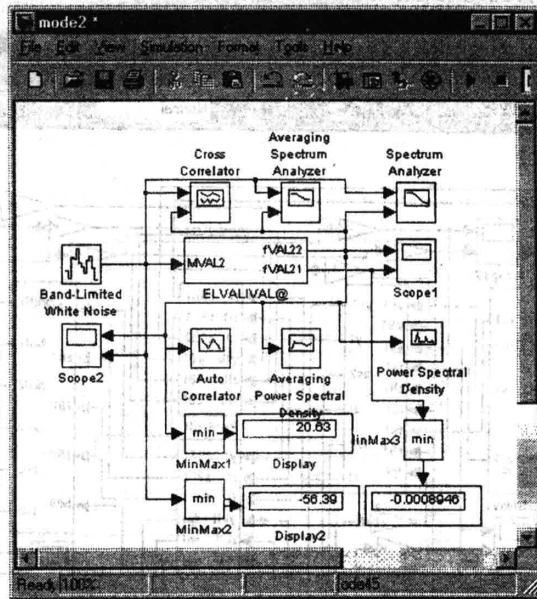


Рис. 11.37. Організація процесу моделювання

Математичне моделювання віброактивної частини приводу головного руху верстата здійснюється шляхом розрахунку параметрів коливань окремих валів приводу.

Виконано розрахунки динаміки приводу при усталених і перехідних процесах. Як приклад нижче наведено розрахунок перехідних процесів блока В7 (рис. 11.38). На верхньому графіку зображено кутові відхилення блока в кутових хвилинах, на двох нижніх – поперечні коливання блока, що мають вигляд випадкових процесів. Наведений перехідний процес впливає несуттєво.

Більш характерним є перехідний процес, одержаний при раптовій зміні крутного моменту на валу приводу головного руху (рис. 11.39).

Аналогічний вигляд мають перехідні процеси в інших елементах динамічної системи верстата. Перехідний процес при плавному гальмуванні приводу наведений на рис. 11.40.

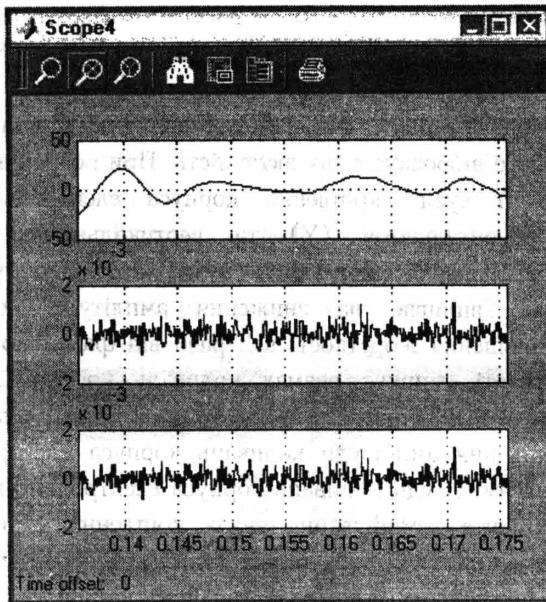


Рис. 11.38. Приклад розрахунку перехідного процесу, що має місце в блоці шестерень В7

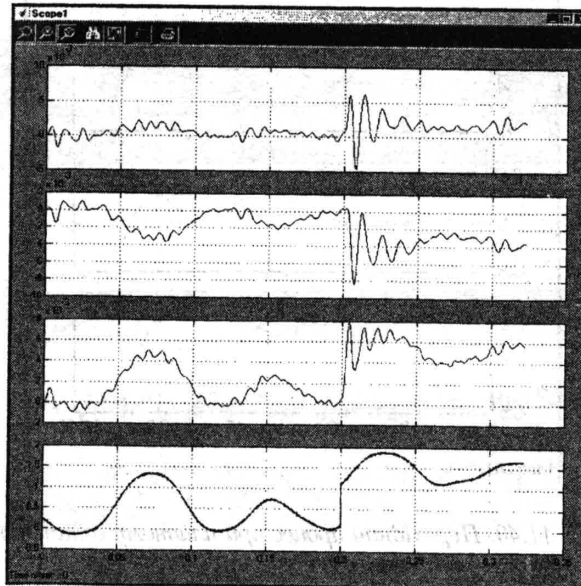


Рис. 11.39. Перехідний процес в приводі при раптовій зміні крутного моменту

В процесі математичного моделювання визначені усталені коливання валів

привода (рис. 11.41).

В результаті математичного моделювання виявлено вплив окремих факторів на віброактивність основних підсистем верстата.

В процесі моделювання виконані розрахунки впливу параметрів електродвигуна на його віброакустичну активність. При розрахунках змінювались показники жорсткості вузла кріплення корпусу електродвигуна при його коливаннях в горизонтальному (Y) та вертикальному (Z) напрямках. Встановлено, що збільшення жорсткості вузла кріплення у вертикальному напрямку позитивно впливає на зниження амплітуди коливань корпусу електродвигуна. Збільшення жорсткості в 2 рази від фактичної жорсткості, яка забезпечена на верстаті, знижує розмах коливань корпусу у вертикальному напрямку в 1,7 раза. Підвищення жорсткості вузла кріплення на 50 % приводить до незначного зменшення амплітуди коливань корпусу електродвигуна. Більш суттєвого зменшення амплітуди коливань корпусу електродвигуна можна досягти підвищенням коефіцієнта демпфування вузла кріплення корпусу. Збільшення коефіцієнта демпфування в 2 рази більше ніж у 5 разів знижує амплітуду коливань корпусу електродвигуна в горизонтальному напрямку.

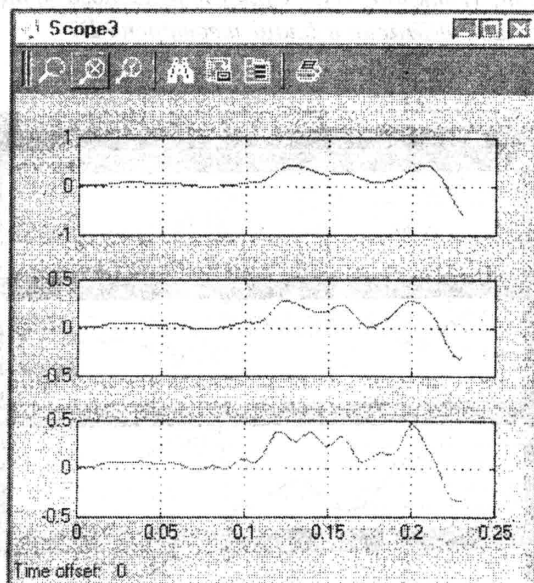
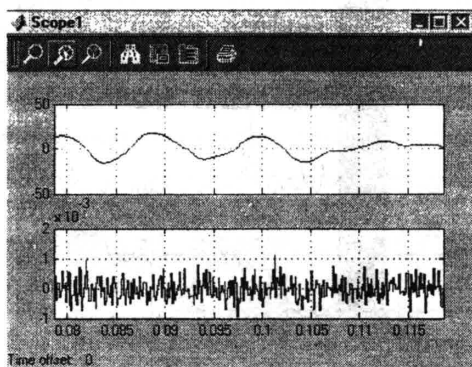


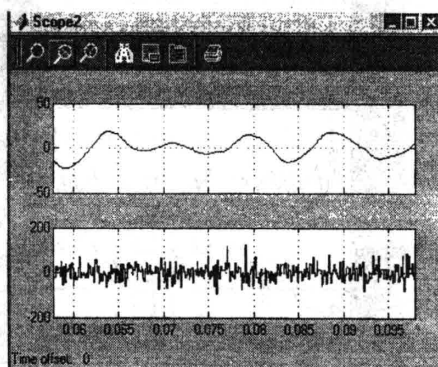
Рис. 11.40. Перехідний процес при плавному гальмуванні одного із валів привода

Динамічні властивості пасової передачі суттєво впливають на динаміку і віброакустичну активність привода головного руху. Основним фактором, який обумовлює віброактивність передачі, є власні коливання пасів як систем з

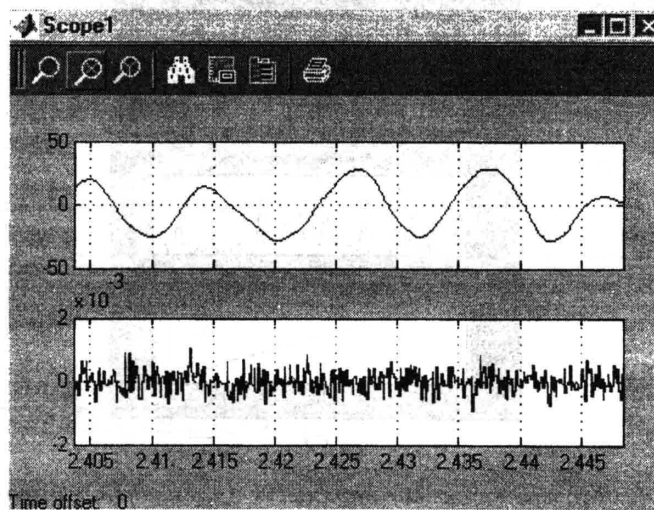
розподіленими параметрами. Частота власних коливань визначається, зокрема, натягом пасів. Враховуючи, що коливання всіх 10 гілок пасів є майже незалежними, для моделювання впливу віброакустичного збурення пасів вибрано широкополосний випадковий процес у вигляді “білого шуму”. Параметром, який визначає віброактивність пасової передачі, є інтенсивність “білого шуму”. При збільшенні інтенсивності має місце послідовне збільшення амплітуд коливань корпусу електродвигуна. Коливання вала I теж визначаються інтенсивністю віброакустичних збурень у пасовій передачі. Амплітуда коливань збільшується при збільшенні інтенсивності збурення, що діє на вал з боку пасової передачі.



a)



б)

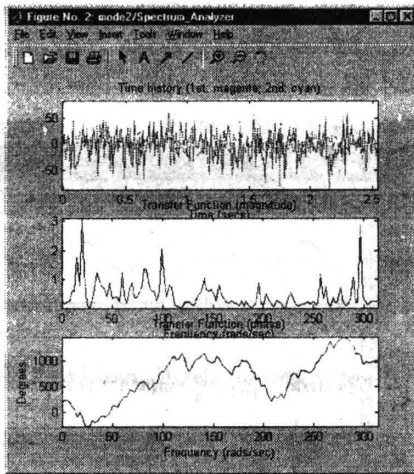


в)

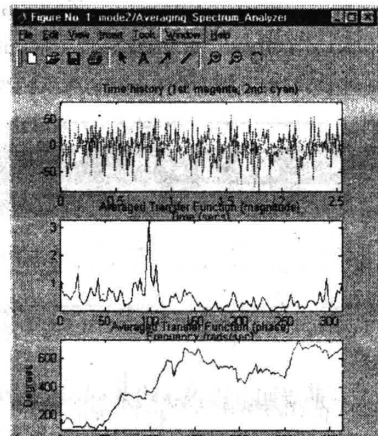
Рис. 11.41. Усталені крутильні та поперечні коливання валів привода

Колівання вала I визначаються широким колом факторів. Зокрема, це фактори, обумовлені робочим процесом фрикційної муфти. При математичному

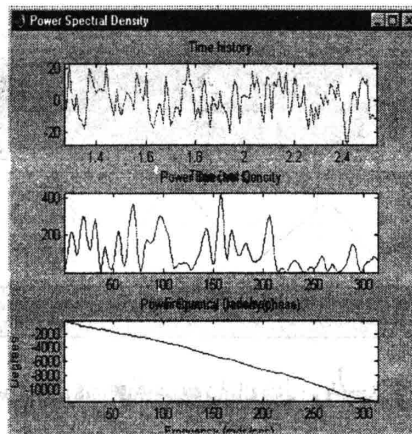
моделюванні досліджені вібраційні процеси, що мають місце при переключенні муфти. Розрахунок виконано при ступінчастій зміні швидкостей обертання і ступінчасті зміні всіх параметрів динамічної підсистеми муфти: Зокрема, при переключенні змінюється жорсткість підшипникових вузлів та їх коефіцієнтів опору. Також змінюються дисипативні та деформативні параметри самих напівмуфт і характеристики зубчастих передач.



a)



б)



в)

Рис. 11.42. Моделювання спектральних характеристик коливальних процесів, що мають місце у віброактивній частині привода

Високий рівень вібрацій виявлений при моделюванні групи реверса. Так, коливання блока В7 перевищують по амплітуді коливання вала І. При моделюванні виявлене існування широкого кола резонансних явищ в блоці В7.

## РОЗДІЛ 12

### Математичні моделі на основі спектрального аналізу динамічних процесів металорізальних верстатів

#### 12.1. Спектральні характеристики стохастичних динамічних ударних навантажень в ланцюговій крутильній системі привода головного руху верстата

В динамічній системі верстата діє ряд внутрішніх стохастичних збурень значної інтенсивності. Ці збурення представляють собою суттєво нестационарні випадкові процеси.

Динамічна система верстата відзначається значною складністю. Розглянемо кінематичну схему токарно-гвинторізного верстата (рис. 12.1).

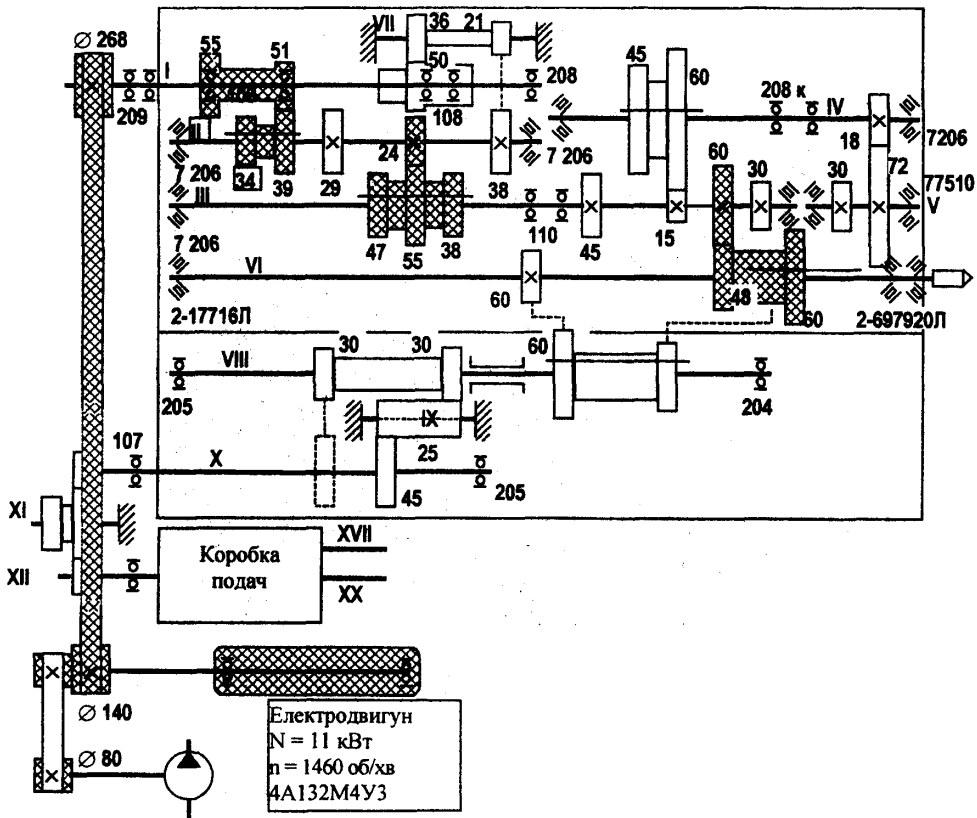


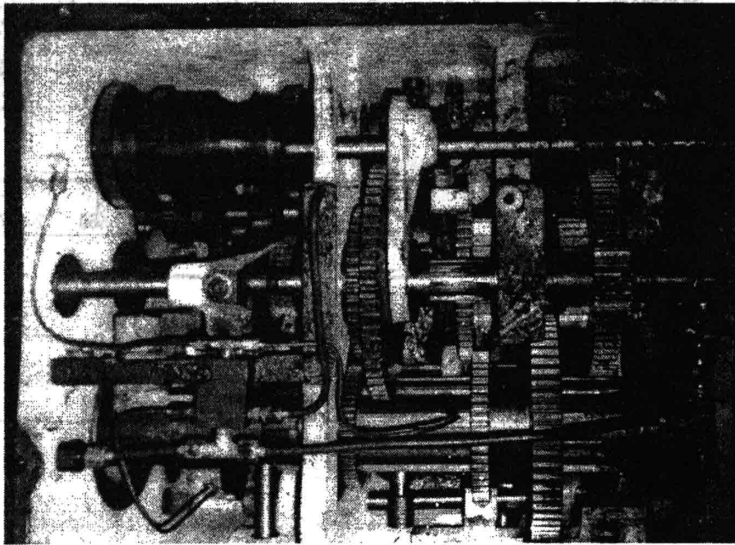
Рис. 12.1. Кінематична схема токарно-гвинторізного верстата моделі КА-280, на якій виділено кінематичний ланцюг привода головного руху, що включає основні джерела динамічних вібраційних навантажень



Джерела внутрішніх стохастичних збурень знаходяться, зокрема, в зубчастих передачах і мають вигляд імпульсних (ударних) навантажень. Найбільші імпульсні навантаження виникають в приводі головного руху який передає основну частину потужності електродвигуна (кінематичний ланцюг привода виділено штриховкою). Імпульсні навантаження мають вигляд випадкових збурень, що виникають, в люфтових (зазорних) ланках приводів головного руху верстата.

В приводі головного руху наявна велика кількість рухомих інерційних елементів, які мають значну кінетичну енергію. Інерційними елементами є вали, зубчасті колеса, муфти. З'єднання між ними мають зазори, які вимірюються сотими і десятими частками міліметра. Всі деталі головного руху знаходяться у складній динамічній взаємодії. Компактне розташування привода призводить до додаткових взаємних впливів його елементів один на одного і збільшує інтенсивність вібраційного поля верстата.

Складність аналізу таких систем ілюструється наведеним нижче зовнішнім виглядом частини привода головного руху (рис. 12.2).



*Рис. 12.2. Загальний вигляд частини привода головного руху верстата (стрілкою ← показано шпиндель)*

Блоки зубчастих коліс, які знаходяться на обертових валах, мають обмежені переміщення в межах зазорів шліцьових з'єднань і можуть зміщуватися один відносно одного.

При взаємодії зубчастих коліс виникають складні процеси контактних деформацій, виникнення знакозмінних нелінійних сил тертя, динамічного

перерозподілу інтенсивних поверхневих навантажень по поверхні зуба, деформації зубів та перерозподілу зусиль, що діють на окремі зуби передачі. Тому внутрішні динамічні навантаження виникають в основному в зубчастих передачах, які зв'язують вали привода. При роботі верстата навантаження діють одночасно із процесами різання і обумовлюють виникнення стохастичних коливальних процесів у шпindelній групі верстата [55, 72].

Враховуючи значну складність динамічної системи при математичному моделюванні, прийнята схема суперпозиції неперервних і розривних випадкових процесів. Проведено кількісний аналіз окремо дії найбільш суттєвих (імпульсних) навантажень в зубчастих передачах та оцінено їх сумарний вплив на зміну кінематичних та динамічних параметрів привода головного руху.

В процесі роботи верстата шпindel має випадкові зміни (флуктуації) кутової швидкості. Вони визначаються в основному імпульсними (ударними) навантаженнями, що виникають в приводних зубчастих передачах. При наявності неточностей виготовлення і монтажу в деяких парах зубців мають місце зазори або переспряження зубців. Це призводить до появи імпульсних навантажень значної інтенсивності в динамічній системі верстата.

Розглянемо динамічну систему привода головного руху, яка відповідає виділеній (див. рис. 12.1) частині привода. Динамічна система представлена як ланцюгова система, на яку діють імпульсні навантаження в різних точках по довжині ланцюга. Навантаження виникають хаотично в залежності від взаємного положення зубчастих коліс. Навантаження визначаються закономірностями випадкового характеру. Їх оцінка зв'язана із значною складністю. Для визначення динамічних навантажень проведено теоретичний аналіз параметрів стохастичних ударних навантажень. Розроблена нелінійна математична модель для визначення параметрів імпульсних навантажень в коробці швидкостей верстата. При розробці математичної моделі прийнято ряд припущень.

Враховуючи короткочасність дії імпульсу, можна знехтувати рухом валів привода в поперечному до осі обертання напрямку і розглянути ланцюгову нелінійну крутильну систему привода головного руху (рис. 12.3).

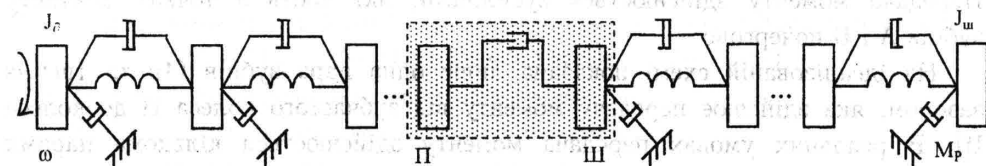


Рис. 12.3. Ланцюгова крутильна система привода головного руху з виділеною ділянкою, що включає інерційні елементи (II і III), між якими виникають імпульсні (ударні) навантаження

Імпульс навантаження виникає при перерозподілі точок контакту зубців передачі між ланками кінематичного ланцюга П і Ш. Шестерня П є кінцевою ланкою першої (лівої) частини кінематичного ланцюга приводу головного руху, початковою ланкою якого є ротор електродвигуна. Зубчасте колесо Ш є початковою ланкою другої (правої) частини кінематичного ланцюга приводу головного руху, кінцевою ланкою якого є власне шпиндель верстата.

При зміні точок контакту зубців в приводі виникають інтенсивні імпульсні навантаження. Враховуючи значні статичні крутні моменти, які мають місце в приводі в першому наближенні, можна знехтувати особливостями закону розподілу по довжині кінематичного ланцюга сил інерції та розглянути привід головного руху як два зосереджені інерційні елементи, причому перший відповідає приведенню лівої частини кінематичного ланцюга до ротора електродвигуна, а другий – приведенню правої частини кінематичного ланцюга до шпинделя верстата. Ідеалізована приведена схема крутильної системи показана на (рис. 12.4).

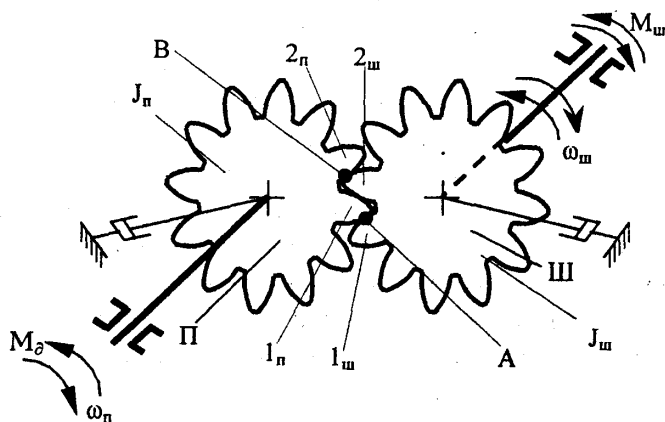


Рис. 12.4. Схема виникнення ударних навантажень у зубчастій передачі привода головного руху

На схемі показані два інерційні елементи П (привод) і Ш (шпиндель). Передача моменту здійснюється зусиллями, які діють в точках контакту зубців А і В по чергово.

На ідеалізованій схемі показана лише одна пара зубців ( $1_{п}$  та  $1_{ш}$ ) із зазором, яка здійснює передачу моменту від зубчастого колеса П до колеса Ш. В реальних умовах передача моменту здійснюється кількома парами зубців. Наявність кількох точок контакту в передачі із зазором не змінює принципово механізму перерозподілу навантажень між окремими зубцями передачі. Тому для обґрунтування механізму виникнення імпульсних навантажень та математичного опису його закономірностей прийнята

спрощена (ідеалізована) схема, наведена на рис. 12.4.

Припинення контакту зубців у точці А призводить до вибірки зазору в точці В. В результаті чого виникає контакт зубців 2п і 2ш в точці В. Рух валів передачі під час зміни точок контакту зубців має три якісно відмінні фази. **Перша фаза** відповідає зміні зусилля в контакті зубців 1п та 1ш (точка А) від номінального значення до нуля. Зусилля в передачі, а також крутний момент М змінюється при цьому від номінального до мінімального (можливо і нульового) значення. **Друга фаза** відповідає повороту валів в межах зазору між зубцями. **Третя фаза** руху має місце під час контакту зубців 2п і 2ш в точці В. Вона характеризується зміною моменту від мінімального до номінального значень. Друга фаза руху може виникати одночасно з першою та третьою фазами. Вона може проявлятися незначним чином. Якщо шпindel навантажений значними силами різання, то виникають пружні деформації зубців, що викликає зменшення модуля зміни моменту М під час зміни точок контакту зубців. Відповідно поворот валів під час другої фази руху буде незначним, але загальний механізм зміни крутного моменту зберігається.

Розглянемо характер зміни крутного моменту в різних фазах руху. На рис. 12.5 наведені можливі реалізації закону зміни моменту в передачі. Показані на рисунку випадки відповідають різним геометричним параметрам та умовам роботи зубців передачі.

Випадок, показаний на рис. 12.5, а, відповідає зубчатій передачі із зазором між зубцями, коли момент навантаження на шпindelі незначний, а крутний момент на валу електродвигуна мінімальний (момент холостого ходу). Випадок, показаний на рис. 12.5, б, відповідає реальній зубчастій передачі із зазором при довільному навантаженні шпинделя, а випадок, показаний на рис. 12.5, в, – передачі з переспряженням зубців. Останній характеризується ударом зуба 2п по зубу 2ш в той момент, коли ще наявний контакт зубців 1п та 2п (див. рис. 12.4).

Для математичного опису зміни моменту під час удару використаємо узагальнені функції, зокрема одиничну ступінчасту функцію:

$$1(t_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq T_k \\ 0 & \text{при } t < T_k \end{cases}$$

Зміна моменту в зубчатій передачі при цьому визначається залежністю:

$$M = M_H - \Delta M \cdot 1(t - T_k) + \Delta M \cdot 1[t - (T_k + \Delta t)],$$

де  $T_k$  – час, при якому має місце зміна моменту;

$\Delta M$  – амплітуда імпульсного крутного моменту;

$\Delta t$  – тривалість імпульсного навантаження.

Прийнято, що амплітуда імпульсу для передачі із зазором  $\Delta M > 0$ , а для передачі, в якій наявний переспряження зубців,  $-\Delta M < 0$ .

Обмежимося розглядом дії на динамічну систему лише випадкових

центрованих імпульсних навантажень. Графік зміни імпульсного крутного моменту в часі наведено на рис. 12.5, з.

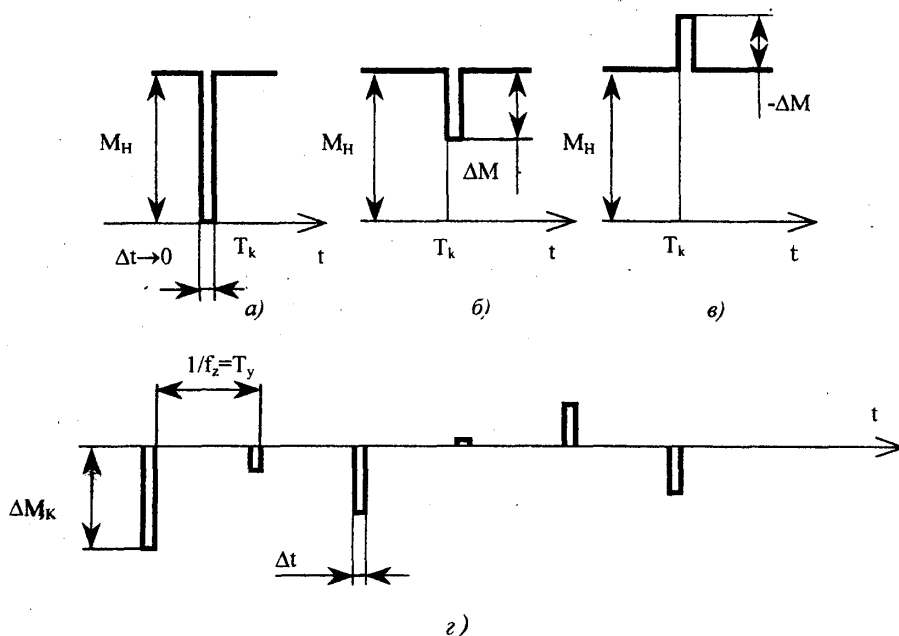


Рис. 12.5. Зміна крутного моменту, що діє в окремі зубчастій передачі привода головного руху при наявності зазорів передачі: а – ідеалізований випадок, коли наявна повна відсутність контакту зубців у межах зазору; б – випадок імпульсного зменшення крутного моменту з причини наявності зазору в передачі; в – імпульсне збільшення крутного моменту з причини наявності переспряження зубців передачі; г – центрований імпульсний випадковий процес крутного моменту в зубчастій передачі

Випадковий імпульсний крутний момент відповідає послідовності імпульсів нескінченно малої ширини. Періодичність імпульсів відповідає частоті ударів  $f_z$  (Гц), що співпадає із зубцевою частотою передачі:

$$f_z = \frac{n \cdot z_n}{60}, \quad (12.1)$$

де  $n$  – число обертів вала за хвилину;

$z_n$  – число зубців зубчастого колеса, розташованого на валу.

Відповідно визначимо період дії ударів:

$$T_y = \frac{1}{f_z} = \frac{60}{n \cdot z_n}.$$

Тривалість ударного імпульсу  $\Delta t$  є незначною, тому прийемо, що ширина ударного імпульсу є постійною для серії ударів, а амплітуди імпульсів є

випадковими величинами. Позначимо математичне сподівання амплітуд через  $\overline{\Delta M}$ , а дисперсію – через  $D_{\Delta M}$ . Ці параметри визначаються статистичною обробкою серії імпульсів відповідно за формулами:

$$\overline{\Delta M} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Delta M_k ; \quad (12.2)$$

$$D_{\Delta M} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\Delta M_k - \overline{\Delta M})^2 , \quad (12.3)$$

де  $K$  – загальне число імпульсів у розглянутій серії;

$\Delta M_k$  – амплітуда  $k$ -го імпульсу.

Розглянемо дві окремі динамічні підсистеми крутильної динамічної системи привода головного руху (рис. 12.6), на які діє імпульсний момент виду:

$$M = -\Delta M \cdot 1(t - T_K) + \Delta M \cdot 1[t - (T_K + \Delta t)], \quad (12.4)$$

де  $T_k$  – час зміни моменту.

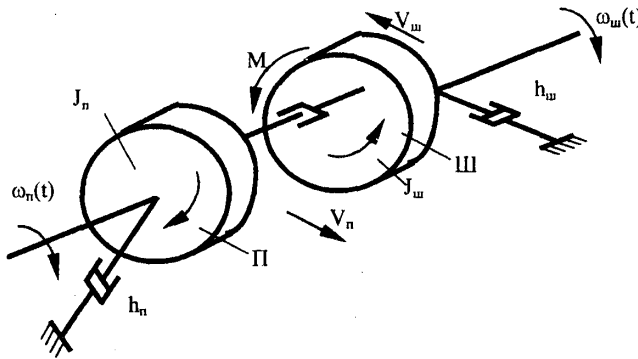


Рис. 12.6. Приведені до зубчастого зчеплення динамічні підсистеми лівої частини привода головного руху і шпинделя верстата (правої частини головного руху)

Для динамічної підсистеми шпинделя (Ш) рівняння зміни кутової швидкості під дією імпульсного моменту має вигляд:

$$J_w \frac{d\omega_w}{dt} + h_w \omega_w = -\Delta M \text{ при } T_k \leq t \leq T_k + \Delta t, \quad (12.5)$$

де  $J_w$  – приведений до шпинделя момент інерції всієї даної підсистеми;

$h_w$  – приведений коефіцієнт опору підсистеми;

$\omega_w$  – зміна кутової швидкості шпинделя за рахунок імпульсного навантаження.

Рівняння (12.5) має нульові початкові умови, тобто

$$\text{при } t = T_k \quad \omega_w = 0.$$

Розв'язок рівняння (12.5) для проміжку часу

$$T_k \leq t \leq T_k + \Delta t$$

буде мати вигляд:

$$\omega_w(t) = -\frac{\Delta M}{h_w} \left[ 1 - e^{-\frac{h_w}{J_w}(t-T_k)} \right]$$

В момент часу, що відповідає кінцю дії ударного імпульсу,  
 $t = T_k + \Delta t$

одержимо значення кутової швидкості підсистеми шпинделя у вигляді:

$$\omega_w(t) = -\frac{\Delta M}{h_w} \left[ 1 - e^{-\frac{h_w}{J_w} \Delta t} \right] \quad (12.6)$$

Знак мінус означає, що під дією імпульсного навантаження шпиндель набуває додаткової кутової швидкості, протилежної напрямку свого постійного обертання.

Для динамічної підсистеми електродвигуна (П) (рис. 12.10) рівняння зміни кутової швидкості має вигляд:

$$J_n \frac{d\omega_n}{dt} + h_n \omega_n = \Delta M, \quad (12.7)$$

де  $J_n$  – момент інерції частини приводу головного руху що знаходиться зліва від передачі, приведений до ротора двигуна;

$h_n$  – постійна, яка враховує як механічні, так і електричні втрати в електромеханічній системі.

Для приводу головного руху з двигуном постійного струму, згідно з [39]:

$$h_n = h_M + \frac{C_e \cdot C_m}{R_R} \Phi_B^2, \quad (12.8)$$

де  $\Phi_B$  – магнітний потік збудження якоря електродвигуна;

$C_e, C_m$  – постійні величини, які визначають характеристики двигуна;

$R_R$  – активний опір обмотки якоря;

$h_M$  – приведений коефіцієнт опору в підшипниках приводу.

Для приводу, який має асинхронний двигун, коефіцієнт опору складає:

$$h_n = h_M + \frac{m_B^2 \cdot U_0^2}{2 \cdot R_p \cdot R_C}, \quad (12.9)$$

де  $m_B$  – коефіцієнт взаємної індукції;

$U_0$  – амплітуда синусоїдальної зміни напруги збудження;

$R_p, R_C$  – електричні опори ротора та обмоток статора відповідно.

Рівняння (12.7) має нульові початкові умови і його розв'язок для

$$T_k \leq t \leq T_k + \Delta t$$

запишеться у вигляді:

$$\omega_n(t) = \frac{\Delta M}{h_n} \left[ 1 - e^{-\frac{h_n}{J_n}(t-T_k)} \right]$$

В момент часу, який відповідає завершенню дії імпульсного навантаження,

$$t = T_k + \Delta t$$

значення кутової швидкості підсистеми електродвигуна складе

$$\omega_{\Pi}(t) = \frac{\Delta M}{h_{\Pi}} \left[ 1 - e^{-\frac{h_n \Delta t}{J_n}} \right]. \quad (12.10)$$

Залежності (12.6) та (12.10) визначають кутові швидкості підсистем в кінці дії імпульсного навантаження. Кутова швидкість шестерні  $\Pi$  в цей час (рис. 12.6) збільшується, а кутова швидкість зубчатого колеса  $\text{Ш}$  зменшується. При цьому має місце вибір зазору та нове імпульсне навантаження (удар) в зубчастій передачі.

Розглянемо загальну динамічну систему приводу головного руху яка приведена до вала електродвигуна. Під час вибірки зазору загальна динамічна система складається із двох автономних приведених підсистем (рис. 12.6). В момент часу, коли зазор вибрано, дві системи з'єднуються в одну так, як це показано на рис. 12.7. Для подальшого аналізу ці системи приводяться до одного вала (вала електродвигуна).

Після вибору зазору в ланцюговій системі приводу головного руху виникають хвильові явища. Їх врахування представляє окрему задачу і не розглядається в рамках даного дослідження. Вважається, що протяжність кінематичних ланцюгів приводу головного руху невелика, що дозволяє знехтувати хвильовими процесами.

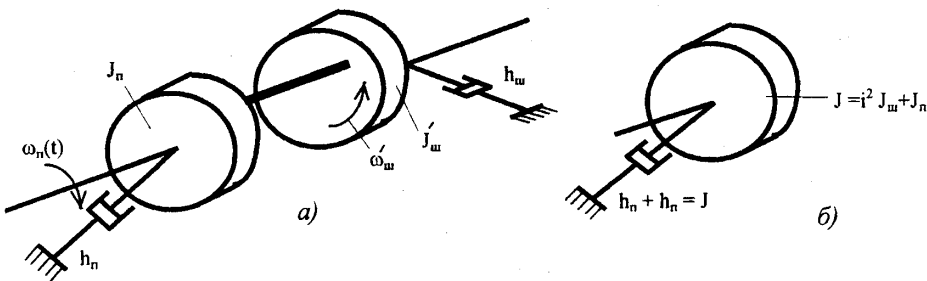


Рис. 12.7. Схема приведення окремих елементів системи приводу головного руху до одного вала

Приведені до вала електродвигуна моменти інерції обох підсистем в момент удару складають:

$$J_n \text{ та } J'_ш = J_ш \left( \frac{\omega_{нш}}{\omega_{нд}} \right)^2 = J_ш \cdot i^2, \quad (12.11)$$

де  $i$  – загальне передавальне число від вала електродвигуна до шпинделя;

$\omega_{нш}$  – номінальна частота обертання шпинделя;



$\omega_{нд}$  – номінальна частота обертання вала електродвигуна.

Після удару в момент часу  $t \geq T_k + \Delta t$  момент інерції системи буде:

$$J = J_{ш} \cdot i^2 + J_{п} \quad (12.12)$$

Кутові швидкості приведених підсистем до удару складають

$$\omega_{п} \text{ та } \omega'_{ш} = \frac{\omega_{ш}}{i} \quad (12.13)$$

Знайдемо загальну кутову швидкість системи після вибору зазору. Із закону збереження моменту кількості руху при пружному ударі впливає співвідношення:

$$J_{п} \omega_{п} - J'_{ш} \omega'_{ш} = (J_{п} + J_{ш}) \omega_{ко}, \quad (12.14)$$

де  $\omega_{ко}$  – загальна кутова швидкість системи після удару.

Підставляючи в (12.84) значення величин із (12.81) та (12.83), одержимо:

$$\omega_{ко} = \frac{J_{п} \cdot \omega_{п} - i \cdot J_{ш} \cdot \omega_{ш}}{J_{п} + i^2 \cdot J_{ш}}$$

Після підстановки в дану формулу кутових швидкостей із (12.6) та (12.10) знайдемо:

$$\omega_{ко} = \Delta M \frac{\left[ \frac{J_{п}}{h_{п}} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{h_{п}}{J_{п}} \Delta t} \right) - \frac{i \cdot J_{ш}}{h_{ш}} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{h_{ш}}{J_{ш}} \Delta t} \right) \right]}{J_{п} + i^2 \cdot J_{ш}} \quad (12.15)$$

Із аналізу цієї формули випливає, що кутова швидкість системи після удару може бути або додатною, або від'ємною, тобто може збільшуватись або зменшуватись в залежності від місця розташування передачі, в якій виникають імпульсні навантаження.

Запишемо формулу (12.15) у спрощеному вигляді. Розкладаючи експоненту в ряд згідно з формулою

$$e^z \approx 1 + z,$$

одержимо лінійну складову кутової швидкості:

$$\omega_{ко} = \frac{\Delta M \cdot \left( \frac{J_{п}}{h_{п}} - i \frac{J_{ш}}{h_{ш}} \right) \cdot (1 - i) \cdot \Delta t}{J_{п} + i^2 J_{ш}}$$

Враховуючи, що час зміни моменту  $\Delta t$  є дуже малим, можна вважати, що після удару всі маси динамічної системи приводу набувають невеликого приросту кутової швидкості, який може бути додатним або від'ємним в залежності від параметрів зубчастої передачі та місця її розташування в приводі. Якщо для передач із зазором удари відбуваються в передачах, близьких до електродвигуна, то множник в дужках менший нуля, якщо удар має місце, ближче до шпинделя – множник додатний.

Значення кутової швидкості, якої набуває шпиндель після удару, є випадковою величиною, що залежить від випадкової зміни моменту та

тривалості удару. Позначимо математичне сподівання кутової швидкості  $\overline{\omega_{\text{КО}}}$ , а дисперсію значень кутової швидкості  $D_{\omega_{\text{КО}}}$ .

Розглянемо рух приводу головного руху після дії удару. Динамічна модель приводу наведена на рис. 12.7, б. Рівняння зміни кутової швидкості приводу має вигляд:

$$J \frac{d\omega_{\text{К}}}{dt} + h\omega_{\text{К}} = 0, \quad (12.16)$$

де  $h$  – постійна, яка визначається залежностями (12.8) або (12.9) з урахуванням коефіцієнтів опору у всій динамічній системі;  $J$  – момент інерції системи, який відповідає формулі (12.12).

Рівняння (12.16) має випадкові початкові умови

$$\text{при } t = T_{\text{К}} + \Delta t, \quad \omega = \omega_{\text{КО}}.$$

Загальний розв'язок рівняння із врахуванням початкових умов складає:

$$\omega_{\text{К}}(t) = \omega_{\text{КО}} \cdot e^{-\frac{h}{J} \cdot (t - T_{\text{К}})}. \quad (12.17)$$

Введемо нові позначення в рівнянні (12.17). Постійна часу крутильної динамічної системи приводу головного руху:

$$T = \frac{h}{J}.$$

Постійна часу включає приведені до вала електродвигуна коефіцієнт опору  $h$  та момент інерції  $J$ . Вона враховує місце дії удару в приводі головного руху верстата.

Введемо також інтенсивність імпульсної зміни швидкості приводу:

$$Q_{\text{К}} = \omega_{\text{КО}} \frac{h}{J}, \quad (12.18)$$

яка в силу залежності (12.15) є випадковою величиною. Тоді рух приводу після дії імпульсного навантаження визначиться формулою [55]:

$$\omega_{\text{К}} = \frac{1}{T} Q_{\text{К}} \cdot e^{-\frac{(t - T_{\text{К}})}{T}}. \quad (12.19)$$

Імпульсні навантаження в зубчастій передачі діють в приводі періодично з частотою  $f_z$  (формула (12.1)) і викликають сумарну зміну кутової швидкості, яку можна визначити користуючись принципом суперпозиції. Відповідно значення кутової швидкості в момент часу  $t$  складає:

$$\omega(t) = \frac{1}{T} \sum_{T_{\text{К}} \leq t} Q_{\text{К}} \cdot e^{-\frac{(t - T_{\text{К}})}{T}}, \quad (12.20)$$

де сума береться для всіх значень  $t \geq T_{\text{К}}$ .

Залежність (12.20) визначає зміну кутової швидкості системи під дією імпульсних навантажень, які відбуваються лише в одній зубчастій передачі. Зміна кутової швидкості в часі представляє собою випадковий процес, схематична реалізація якого для однієї зубчастої передачі наведена на

рис. 12.8.

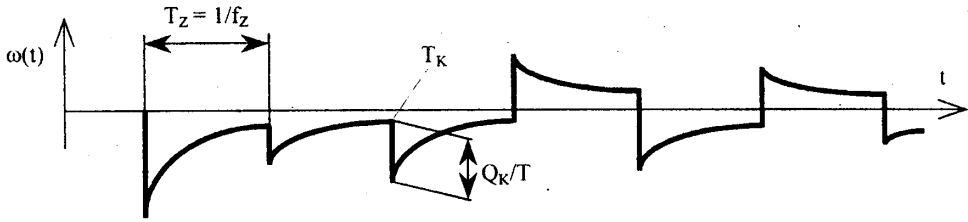


Рис. 12.8. Характерна реалізація випадкового процесу зміни куткової швидкості шпинделя під дією імпульсних навантажень, що діють в одній зубчастій передачі

Наявні на графіку миттєві зміни куткової швидкості пояснюються введенням припущення про абсолютно пружні удари і відсутність пружних хвиль в динамічній системі приводу головного руху верстата. Враховуючи, що миттєві ступеневі зміни куткової швидкості невеликі, можна вважати ці припущення обґрунтованими і прийняти, що розрахунковий випадковий процес зміни швидкості відповідає реальному процесу.

В приводі головного руху наявний ряд зубчастих передач, які генерують випадкові зміни куткової швидкості. Загальна кутова швидкість елементів приводу відповідає суперпозиції збурень куткової швидкості від кожної зубчастої передачі і визначається сумою:

$$\omega_{\Sigma}(t) = \sum_{j=1}^M \omega_j(t),$$

де  $M$  – загальне число зубчастих передач у приводі.

Реалізація випадкової зміни сумарної куткової швидкості відповідає сумі випадкових процесів. Визначимо окремо кожен випадковий процес і знайдемо його спектральні характеристики згідно з методикою [19].

Розглянемо проміжок часу  $(s, t)$ , причому  $s \rightarrow -\infty$ . Кутову швидкість, яка спричинена імпульсними навантаженнями, що мають місце в проміжку часу  $(s, t)$ , позначимо  $\omega_{\Sigma}(t)$ . Прийmemo, що число ударів, що мало місце за даний проміжок часу, в середньому складало  $\mu$  ударів в одиницю часу. Удари є рідкими подіями, тому величина  $\mu$  мала. Число ударів в одиницю часу  $\mu$  відповідає частоті імпульсів (12.1). Тому:

$$\mu \cong f_z.$$

Число ударів можна вважати розподіленим за законом Пуассона (закон рідких подій), причому математичне сподівання цього розподілу:

$$\lambda = \mu(t - s).$$

Визначимо випадкову подію  $e_m$ , яка відповідає числу ударів  $m = 0, 1, 2, \dots$  за проміжок часу  $(s, t)$ . Ймовірність цієї події:

$$P(e_m) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Для проміжку часу ( $s, t$ ) при кількості ударів  $m$  кутова швидкість приводу визначається залежністю:

$$\omega_s(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^m Q_k \cdot e^{-\frac{(t-T_k)}{T}} \quad (12.21)$$

Дана залежність є основою для розрахунків випадкового процесу зміни кутової швидкості. Розрахунки виконані в програмному середовищі MathCAD. Випадкові параметри приводів задавались вбудованими функціями, що генерують послідовності випадкових чисел з нормальним законом розподілу.

Одержані розрахункові типові реалізації зміни кутової швидкості (рис. 12.9) охоплюють діапазон флуктуації кутової швидкості, ширина якого складає 2...6 % від номінальної кутової швидкості.

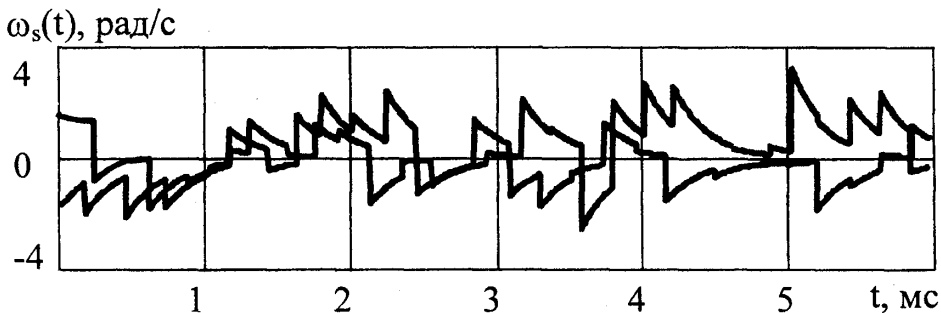


Рис. 12.9. Розрахункові реалізації випадкового процесу флуктуації кутової швидкості шпинделя металорізального верстата

Таким чином, абсолютні значення флуктуації кутової швидкості шпинделя є незначними. Вони несуттєво впливають на кінематичні характеристики приводу головного руху. В той же час вплив зміни кутової швидкості на динамічні властивості верстата є досить значним. Причиною цього є імпульсні навантаження в приводі, а також ймовірність співпадання циклічної зміни кутової швидкості із резонансними частотами верстата. Для визначення впливу зміни кутової швидкості на динаміку верстата визначені спектральні характеристики випадкового процесу флуктуації кутової швидкості шпинделя.

Для цього виконано аналіз залежності (12.21). Розглянемо всі можливі випадки наявності кількох ударів в одиницю часу ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ).

Знайдемо математичне сподівання випадкової функції  $\omega_s(t)$ :

$$M[\omega_s(t)] = \sum_{m=0}^{\infty} P(e_m) M[\omega_s(t) | e_m], \quad (12.22)$$

де  $M[\omega_s(t)|e_m]$  – умовне математичне сподівання випадкової функції  $\omega_s(t)$  за умови здійснення події  $e_m$ .

Умовне математичне сподівання розраховується на основі формули (12.20) шляхом знаходження статистичного середнього по всіх можливих значеннях інтенсивності ударів  $Q_K$  та всіх можливих моментах ударів  $T_k$  при фіксованому числі ударів, що діють в інтервалі часу  $(s, t)$ .

Враховуючи незалежність випадкових величин  $Q_K$  і  $T_K$ , одержимо:

$$M[\omega_s(t) | e_m] = \frac{1}{T} \sum_{K=1}^m M \left[ Q_K \cdot e^{-\frac{(t-T_k)}{T}} \right] = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^m M[Q_K] \cdot M \left[ e^{-\frac{(t-T_k)}{T}} \right]. \quad (12.23)$$

Математичне сподівання експоненціальної функції:

$$M \left[ e^{-\frac{(t-T_k)}{T}} \right] = \int_s^t e^{-\frac{(t-\tau)}{T}} \cdot P_{TK}(\tau) d\tau,$$

де  $P_{TK}(\tau)$  – густина ймовірності випадкової величини  $T_K$ .

Цю густину ймовірності прийемо постійною  $P_{TK}(\tau) = 1/(t-s)$ , оскільки моменти ударів розподілені в проміжку часу  $(s, t)$  рівномірно.

Таким чином, математичне сподівання експоненціальної функції:

$$M \left[ e^{-\frac{(t-T_k)}{T}} \right] = \frac{1}{t-s} \int_s^t e^{-\frac{(t-\tau)}{T}} d\tau = \frac{T}{t-s} \left( 1 - e^{-\frac{(t-s)}{T}} \right). \quad (12.24)$$

Позначивши математичне сподівання інтенсивності удару  $M[Q_K] = q$ , одержимо:

$$M[\omega_s(t) | e_m] = \sum_{K=1}^m \frac{q}{t-s} \left( 1 - e^{-\frac{(t-s)}{T}} \right) = \frac{mq}{t-s} \left( 1 - e^{-\frac{(t-s)}{T}} \right). \quad (12.25)$$

Використовуючи значення (12.25), знайдемо з (12.22) математичне сподівання випадкової функції  $\omega_s(t)$ :

$$M[\omega_s(t)] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\mu(t-s)]^m \cdot e^{-\mu(t-s)}}{m! \cdot (t-s)} mq \left( 1 - e^{-\frac{(t-s)}{T}} \right).$$

Після перетворення даної залежності одержимо:

$$M[\omega_s(t)] = \mu q e^{-\mu(t-s)} \left( 1 - e^{-\frac{(t-s)}{T}} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[\mu(t-s)]^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Враховуючи, що експоненціальна функція відповідає ряду:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

одержимо, підставивши замість  $z = \mu(t-s)$ :

$$e^{\mu(t-s)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[\mu(t-s)]^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Таким чином, математичне сподівання кутової швидкості складе:

$$M[\omega_s(t)] = \mu q \left( 1 - e^{-\frac{(t-s)}{T}} \right). \quad (12.26)$$

В граничному випадку  $s \rightarrow -\infty$  значення математичного сподівання кутової швидкості визначається залежністю:

$$M[\omega_s(t)] = \mu q. \quad (12.27)$$

Знайдемо кореляційну функцію кутової швидкості. Для цього розглянемо значення величин у два моменти часу  $t$  і  $t'$ . Для  $t' > t$  з формули (12.20) одержимо:

$$\omega(t') = \frac{1}{T} \sum_{T_k \leq t} Q_k \cdot e^{-\frac{(t'-T_k)}{T}}. \quad (12.28)$$

Сума в правій частині (12.28) може бути розділена на дві складові. Відповідно знайдемо:

$$\omega(t') = \frac{1}{T} \sum_{T_k \leq t} Q_k \cdot e^{-\frac{(t'-T_k)}{T}} + \frac{1}{T} \sum_{t \leq T_k \leq t'} Q_h \cdot e^{-\frac{(t'-T_k)}{T}}. \quad (12.29)$$

З формули (12.29), враховуючи (12.20), випливає:

$$\omega(t') = \omega(t) \cdot e^{-\frac{t'-t}{T}} + \frac{1}{T} \sum_{t \leq T_h \leq t'} Q_h \cdot e^{-\frac{(t'-T_h)}{T}}. \quad (12.30)$$

Другий доданок в (12.30) не залежить від  $\omega(t)$ , тому що він включає інші випадкові величини. Тому кореляційна функція дорівнює кореляційному моменту величин:

$$\omega(t) e^{-\frac{t'-t}{T}} \quad \text{та} \quad \omega(t).$$

Відповідно значення кореляційної функції флуктуацій кутової швидкості шпинделя складе:

$$R_\omega(t, t') = D[\omega(t)] \cdot e^{-\frac{t'-t}{T}}. \quad (12.31)$$

Знайдемо дисперсію кутової швидкості  $D[\omega(t)]$ . Дисперсія (умовна) випадкової функції  $\omega_s(t)$  за умови, що в приводі діє  $m$  ударів за час  $(s, t)$ , дорівнює сумі дисперсій доданків у формулі (12.21) (внаслідок незалежності доданків). Знайдемо дисперсію одного доданку. Його центральний момент другого порядку:

$$M\{\omega_s(t)^2\} = M\left[Q_k^2 e^{-\frac{2(t-T_k)}{T}}\right] = M[Q_k^2] \cdot M\left[e^{-\frac{2(t-T_k)}{T}}\right]. \quad (12.32)$$

Математичне сподівання інтенсивності ударів  $Q_k$  дорівнює  $q$ . Дисперсію інтенсивності ударів позначимо  $D$ . Тоді

$$M[Q_k^2] = q^2 + D. \quad (12.33)$$

Математичне сподівання експоненціальної функції

$$e^{-\frac{2(t-T_k)}{T}}$$

знайдемо за формулами (12.23) та (12.24), в яких замість

$$T \rightarrow T/2.$$

Відповідно значення математичного сподівання експоненціальної функції:

$$M \left[ e^{-\frac{2(t-T_k)}{T}} \right] = \frac{T}{2(t-s)} \left( 1 - e^{-\frac{2(t-s)}{T}} \right). \quad (12.34)$$

В результаті одержимо умовну дисперсію кутової швидкості  $\omega_s(t)$  за умови, що за час  $(s, t)$  в приводі діє  $m$  ударів:

$$D[\omega_s(t) | e_m] = \frac{m(q^2 + D)}{2T(t-s)} \left( 1 - e^{-\frac{2(t-s)}{T}} \right) - \frac{mq^2}{(t-s)^2} \left( 1 - e^{-\frac{t-s}{T}} \right)^2. \quad (12.35)$$

Дисперсія випадкової кутової швидкості:

$$D[\omega_s(t)] = \sum_{m=0}^{\infty} D[\omega_s(t) | e_m] \cdot P(e_m).$$

Після підстановки значень величин із (12.35) одержимо:

$$D[\omega_s(t)] = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{m(q^2 + D)}{2T(t-s)} \left( 1 - e^{-\frac{2(t-s)}{T}} \right) - \frac{mq^2}{(t-s)^2} \left( 1 - e^{-\frac{t-s}{T}} \right)^2 \right] \cdot \frac{[\mu(t-s)]^m \cdot e^{-\mu(t-s)}}{m!}.$$

Після спрощення, відповідно до формул (12.25) та (12.26), знайдемо:

$$D[\omega_s(t)] = \frac{\mu(q^2 + D)}{2T} \left( 1 - e^{-\frac{2(t-s)}{T}} \right) - \frac{\mu q^2}{t-s} \left( 1 - e^{-\frac{t-s}{T}} \right)^2. \quad (12.36)$$

В граничному випадку  $s \rightarrow -\infty$  значення дисперсії кутової швидкості визначається залежністю:

$$D[\omega(t)] = \frac{\mu(q^2 + D)}{2T}. \quad (12.37)$$

Використовуючи значення дисперсії, одержимо кореляційну функцію кутової швидкості приводу, приведені до вала електродвигуна відповідно при дії ударних імпульсів лише в одній зубчастій передачі у вигляді:

$$R_{\omega}(t, t') = \frac{\mu(q^2 + D)}{2T} \cdot e^{-\frac{t-t'}{T}}. \quad (12.38)$$

Якщо  $t' < t$ , то відповідно в степені експоненти зміниться порядок доданків і тому для всіх значень  $t'$  і  $t$  будемо мати:

$$R_{\omega}(t, t') = \frac{\mu(q^2 + D)}{2T} \cdot e^{-\frac{|t-t'|}{T}}, \quad (12.39)$$

де  $\mu$  – число імпульсних навантажень в одиницю часу (частота навантажень);

$q$  – математичне сподівання інтенсивності ударних імпульсів;

$D$  – дисперсія інтенсивності імпульсів, що діють у зубчастій передачі;

$T$  – постійна часу.

Всі ці параметри залежать від місця виникнення імпульсного навантаження, тобто від місця розташування зубчастого зчеплення в приводі головного руху.

В приводі наявний ряд зубчастих передач. Тому кутова швидкість шпинделя визначається сумою випадкових змін кутової швидкості, обумовлених ударами в різних передачах.

Будемо вважати зміни кутової швидкості, що мають місце під дією імпульсних навантажень у різних передачах некорельованими. При цьому кореляційна функція буде визначатися наступною формулою:

$$R_{\Sigma}(t, t') = \sum_{\xi=1}^Z \frac{\mu_{\xi}(q_{\xi}^2 + D_{\xi})}{2T_{\xi}} \cdot e^{-\frac{|t-t'|}{T_{\xi}}}, \quad (12.40)$$

де  $Z$  – число послідовно з'єднаних передач в приводі головного руху;

$\mu_{\xi}$  – частота навантажень в  $\xi$ -ій передачі;

$q_{\xi}$ ,  $D_{\xi}$  – математичне сподівання та дисперсія інтенсивності імпульсів;

$T_{\xi}$  – постійна часу, визначена для даної передачі.

Формула (12.40) дозволяє визначити кореляційну функцію випадкових флуктуацій кутової швидкості вала електродвигуна, який є початковою ланкою приводу головного руху.

Кутова швидкість шпинделя як випадкова функція часу пов'язана з випадковою кутовою швидкістю вала електродвигуна лінійною залежністю:

$$\omega_{ш} = i \cdot \omega_{п}, \quad (12.41)$$

де  $i$  – передавальне число, визначене як  $i$  в формулах (12.81)–(12.83).

З (12.110), (12.111) випливає залежність для знаходження кореляційної функції кутової швидкості власне шпинделя металорізального верстата:

$$R_{\omega\omega}(t, t') = \sum_{\xi=1}^Z \frac{i^2 n_{\xi} z_{\xi} (q_{\xi}^2 + D_{\xi})}{120 T_{\xi}} \cdot e^{-\frac{|t-t'|}{T_{\xi}}}, \quad (12.42)$$

де  $n_{\xi}$ ,  $z_{\xi}$  – число обертів за хвилину  $i$  число зубців зубчатої передачі, в якій відбуваються імпульсні навантаження.

Таким чином, математична модель кореляційної функції флуктуації **кутової швидкості** відповідає лінійній математичній моделі, базисні функції якої є експонентами, а число складових математичної моделі дорівнює числу зубчастих передач в приводі головного руху верстата.

Визначимо кореляційну функцію **кутового прискорення** шпинделя. Прискорення зв'язане з кутовою швидкістю диференціальною залежністю:

$$\epsilon_{ш} = \frac{d\omega_{ш}}{dt}.$$

Відповідно кореляційна функція кутового прискорення згідно з [19]:



$$R_{\omega\omega}(t, t') = \frac{\partial^2 R_{\omega\omega}(t, t')}{\partial t \partial t'}$$

Виконуючи операцію подвійного диференціювання у формулі (12.102) по змінних  $t$  та  $t'$ , як це зроблено в [60], одержимо залежність, яка включає дельта-функцію:

$$R_{\omega\omega}(t, t') = \sum_{\xi=1}^z \frac{i^2 n_{\xi} Z_{\xi} (q_{\xi}^2 + D_{\xi})}{120 T_{\xi}} \cdot \left[ -\frac{1}{T_{\xi}} \cdot e^{-\frac{|t-t'|}{T_{\xi}}} + \frac{2}{T_{\xi}} \cdot \delta(t-t') \right], \quad (12.113)$$

де  $\delta(t-t')$  – одинична імпульсна функція (дельта-функція Дірака).

Із аналізу кореляційних функцій кутової швидкості шпинделя (12.42) та кутового прискорення (12.43) випливає, що вони залежать лише від різниці

$$\tau = t - t',$$

тобто відповідають стаціонарним випадковим процесам. Тому кореляційні функції можна записати у вигляді:

$$R_{\omega\omega}(\tau) = \sum_{\xi=1}^z \frac{i^2 n_{\xi} Z_{\xi} (q_{\xi}^2 + D_{\xi})}{120 T_{\xi}} \cdot e^{-\frac{|\tau|}{T_{\xi}}};$$

$$R_{\omega\omega}(\tau) = \sum_{\xi=1}^z \frac{i^2 n_{\xi} Z_{\xi} (q_{\xi}^2 + D_{\xi})}{120 T_{\xi}} \cdot \left[ -\frac{1}{T_{\xi}} \cdot e^{-\frac{|\tau|}{T_{\xi}}} + \frac{2}{T_{\xi}} \cdot \delta(\tau) \right].$$

Цим кореляційним функціям відповідають спектральні щільності відповідно кутової швидкості

$$S_{\omega\omega}(\omega) = \sum_{\xi=1}^z \frac{i^2 n_{\xi} Z_{\xi} (q_{\xi}^2 + D_{\xi})}{120 \pi} \cdot \frac{1}{(1 + T_{\xi}^2 \omega^2)} \quad (12.44)$$

та кутового прискорення шпинделя

$$S_{\omega\omega}(\omega) = \sum_{\xi=1}^z \frac{i^2 n_{\xi} Z_{\xi} (q_{\xi}^2 + D_{\xi})}{120 \pi} \cdot \frac{\omega^2}{(T_{\xi}^2 \omega^2 + 1)}. \quad (12.45)$$

Дані залежності дозволяють сформулювати практично важливі висновки, які використовуються для опису спектральних характеристик кутової швидкості шпинделя. З формули (12.44) випливає, що для низькочастотної області в діапазоні частот:

$$\omega < \frac{1}{T_{\xi}} \quad (T_{\xi}^2 \omega^2 \ll 1) \quad \text{для всіх } \xi = 1, \dots, z$$

спектральну щільність флуктуацій кутової швидкості допустимо вважати постійною величиною, що не залежить від частоти:

$$S_{\omega\omega}(\omega) = \sum_{\xi=1}^z \frac{i^2 n_{\xi} Z_{\xi}}{120 \pi} (q_{\xi}^2 + D_{\xi}) = \text{Const}. \quad (12.46)$$

Для зони високих частот спектра вібрацій привода головного руху, що

відповідають частотам

$$\omega > \frac{1}{T_{\xi}} \quad (T_{\xi}^2 \omega^2 \gg 1) \quad \text{для всіх } \xi = 1, \dots, z$$

із формули (12.45) випливає, що спектральна густина флуктуацій кутового прискорення шпинделя може вважатись постійною із значенням:

$$S_{\omega_{\xi}}(\omega) = \sum_{\xi=1}^z \frac{i^2 n_{\xi} Z_{\xi}}{120 \pi T_{\xi}^2} (q_{\xi}^2 + D_{\xi}) = \text{Const.} \quad (12.47)$$

Таким чином, із теоретичного аналізу випливає, що спектральна характеристика флуктуації кутової швидкості шпинделя металорізального верстата, які виникають під дією імпульсних навантажень в зубчастих передачах приводу головного руху, відповідає кореляційній функції у вигляді суми експоненціальних складових (формули (12.42)), причому кількість доданків суми дорівнює числу зубчастих передач приводу головного руху, а інтенсивність зміни доданків визначається частотою обертання зубчастих коліс та числом зубців передач.

Для аналізу **низькочастотних коливальних процесів** спектр флуктуацій кутової швидкості може бути прийнятий відповідним “білому шуму” з постійною спектральною щільністю (формула (12.46)), причому інтенсивність спектра залежить від суми інтенсивностей випадкових імпульсних навантажень в усіх зубчастих передачах.

Для аналізу **високочастотних коливальних процесів** доцільно використовувати математичну модель у вигляді спектральної щільності кутового прискорення шпинделя (формула (12.47)), що відповідає “білому шуму”, інтенсивність якого залежить, зокрема, від інерційних та дисипативних параметрів приводу головного руху.

Таким чином, при математичному моделюванні динамічних процесів верстата випадкові збурення в зубчастих передачах можна визначити адитивним набором випадкових процесів у вигляді “білого шуму”. Для моделювання низькочастотних процесів “білий шум” визначає флуктуації кутової швидкості, а для моделювання високочастотних процесів – флуктуації кутового прискорення. Кількість цих випадкових процесів відповідає числу зубчастих передач в приводі головного руху.

При моделюванні динамічної системи верстата в кожній зубчастій передачі необхідно помістити джерело стохастичних збурень, статистичні характеристики якого відповідають “білому шуму”. Це значно спрощує математичну модель і дає можливість виявити вплив окремих зубчастих передач на динамічні процеси, що мають місце при роботі верстата.

## **12.2. Спектральний аналіз форми поверхні, одержаної в результаті обробки на токарному верстаті**

Металорізальний верстат представляє собою складну динамічну систему, що містить сотні окремих масивних жорстких деталей, з'єднання яких між собою потребує створення прецизійних спряжень. Динамічні процеси, що супроводжують роботу металорізального верстата, відзначаються значною складністю. Це обумовлено нелінійними характеристиками основних елементів динамічної системи, зокрема контактних деформацій в прецизійних з'єднаннях деталей верстата. Динамічні процеси, які супроводжують роботу верстата, є стохастичними. Динамічна якість верстата визначає сталість руху інструмента і деталі, що обробляється, а також переміщення ланок системи при зовнішніх впливах, що змінюються у часі. Ці параметри залежать від характеристик пружної системи, власних частот коливань, динамічної деформативності ланок і схем їх навантаження.

Основні показники динамічної якості верстата наступні:

- найбільш продуктивний режим роботи верстата, що допускається сталістю різання при можливих відхиленнях його параметрів, зокрема найбільша ширина зрізу, що визначає продуктивність обробки;
- амплітуда відносних коливань інструмента і деталі по нормалі до поверхні, що обробляється при різанні та на холостому ході;
- швидкодія виконання допоміжних рухів елементів протягом всього циклу обробки деталі;
- надійність безперервної автоматичної роботи верстата протягом досить тривалого часу;
- шум і коливання основи, на якій встановлений верстат.

Запропонована методика визначення показників динамічної якості базується на спектральному аналізі форми обробленої поверхні, одержаної при обробці заготовок спеціального виду. Заготовки мають зовнішні поверхні, сформовані у вигляді випадкових процесів з наперед визначеними статистичними характеристиками [65, 73].

Здійснена обробка базової заготовки із спеціальним профілем, що має прямокутні виступи, висота яких є випадковою величиною (рис. 12.10).

Базова заготовка була розроблена і виготовлена з метою забезпечення необхідних статистичних характеристик випадкового контуру її зовнішньої поверхні. Ескіз розробленої базової заготовки наведений на рис. 12.11.

Контур заготовки представляє собою випадковий процес у вигляді прямокутних виступів однакової ширини, висота яких змінюється як випадкова величина з нормальним законом розподілу. Визначимо статистичні характеристики даного випадкового процесу, а саме: кореляційну функцію та спектральну щільність.

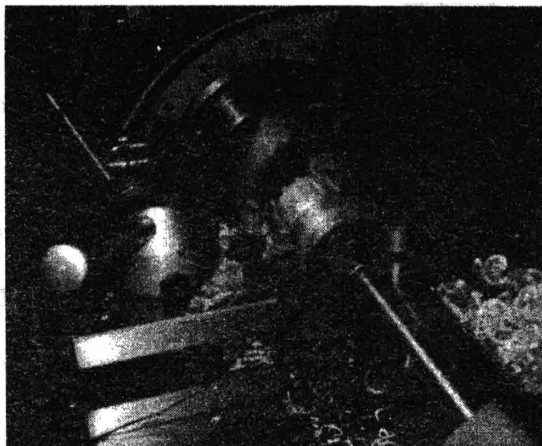


Рис. 12.10. Обробка базової заготовки з прямокутними виступами однакової ширини, розташованими рівномірно по периферії, причому висота виступів є випадковою величиною

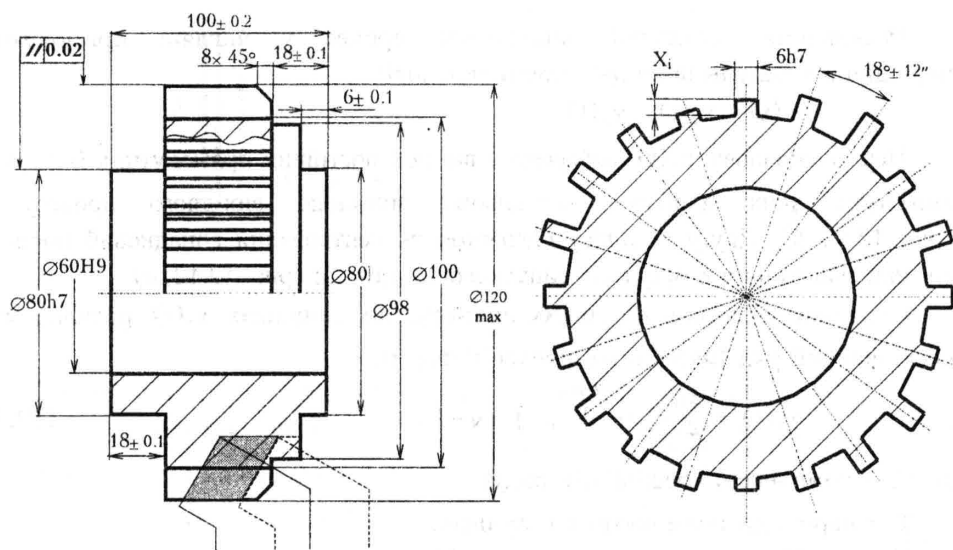


Рис. 12.11. Ескіз базової заготовки з прямокутними виступами, висота яких є випадковою величиною

Протяжність імпульсу позначимо як  $\gamma T$ , середнє значення амплітуди імпульсів визначено як середнє арифметичне висоти:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i . \quad (12.48)$$

Середньоквадратичне значення амплітуди імпульсів:

$$x_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2} . \quad (12.49)$$

Розглянемо випадковий процес у вигляді прямокутних періодичних імпульсів, які діють з кроком  $T$  (рис. 12.12, а).

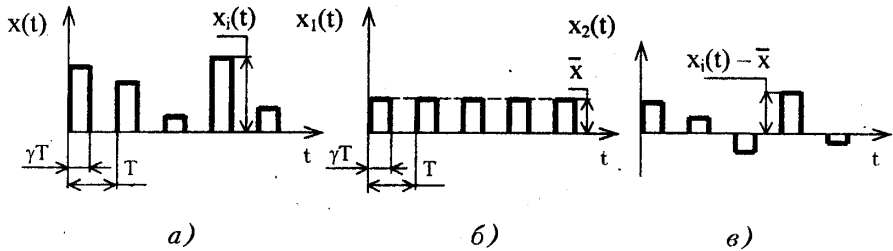


Рис. 12.12. Випадковий процес, що відповідає заготовці з періодичними імпульсами однакової ширини і випадкової амплітуди, (а) та складові процесу у вигляді однакових імпульсів (б) та випадкових імпульсів, математичне сподівання яких дорівнює нулю (в)

Розкладемо загальний випадковий процес у вигляді прямокутних періодичних імпульсів на дві окремі складові:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) .$$

Першу складову  $x_1(t)$  виберемо у вигляді постійних прямокутних імпульсів, амплітуда яких дорівнює середньому значенню вихідного процесу  $\bar{x}$  (рис. 12.12, б). Другу складову одержимо як центрований випадковий процес у вигляді знакозмінних імпульсів випадкової амплітуди (рис. 12.12, в).

Складову у вигляді постійних прямокутних імпульсів  $x_1(t)$  розкладемо в нескінченний ряд Фур'є в комплексній формі:

$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{j \frac{2\pi kt}{T}} , \quad j = \sqrt{-1} , \quad (12.50)$$

де  $c_k$  – комплексні коефіцієнти ряду;

$T$  – період дії прямокутних імпульсів.

Згідно [6], модулі комплексних коефіцієнтів дорівнюють:

$$|c_k| = \left| \frac{\bar{x}}{k\pi} \sin(k\pi\gamma) \right| , \quad (12.51)$$

де  $\gamma$  – коефіцієнт ширини імпульсу (див. рис. 12.12, а).

Враховуючи, що спектральна щільність гармонічної функції відповідає дельта-функції, одержимо для окремої гармоніки розкладу (12.50), а саме для:

$$x_k(t) = c_k e^{j \frac{2\pi kt}{T}} , \quad (12.52)$$

відповідну їй складову спектральної щільності:

$$S_k(\omega) = \frac{\pi}{2} |c_k|^2 \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right). \quad (12.53)$$

Загалом спектральна щільність складової  $x_1(t)$  буде одержана у вигляді нескінченної суми, що включає дельта-функції і має вигляд лінійчастого спектра (визначається за формулою):

$$S_1(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{x}^2 \sin^2(k\pi\gamma)}{2\pi k^2} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right). \quad (12.54)$$

Спектральні характеристики, що визначають випадкові зміни контуру базової заготовки розраховані за формулою (12.54) для конкретних геометричних параметрів контуру заготовки, наведено на рис. 12.13.

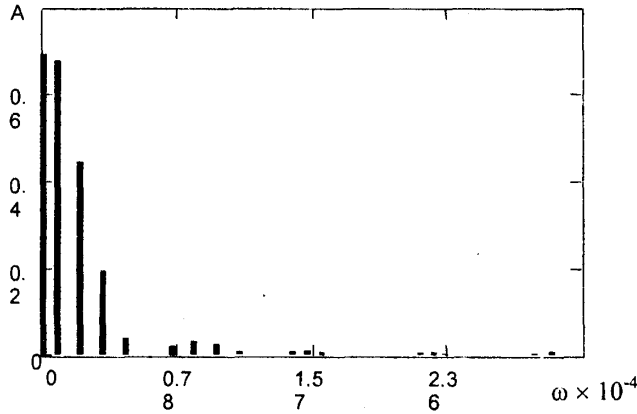


Рис. 12.13. Спектральна щільність періодичної складової випадкового процесу, що описує контур базової заготовки

На рисунку висота лінії відповідає множнику при дельта-функції.

Спектральна щільність випадкової  $x_2(t)$  складової центрованого процесу у вигляді імпульсів випадкової амплітуди згідно [6] визначається залежністю:

$$S_2(\omega) = \frac{4\sigma^2 \sin\left(\frac{\omega\gamma T}{2}\right)}{T\omega^2}, \quad (12.55)$$

де  $\sigma = \sqrt{x_{\text{ср}}^2 - \bar{x}^2}$  задано у відповідності з формулами (12.48) та (12.49).

Спектральні характеристики, що визначають випадкові зміни контуру базової заготовки і розраховані за формулою (12.55) для конкретних геометричних параметрів контуру, наведені на рис. 12.14.

Враховуючи, що функція спектральної щільності парна, тобто

$$S(\omega) = S(-\omega), \quad (12.56)$$

розглянуто спектральну щільність лише в інтервалі  $\omega \in [0, +\infty[$ .

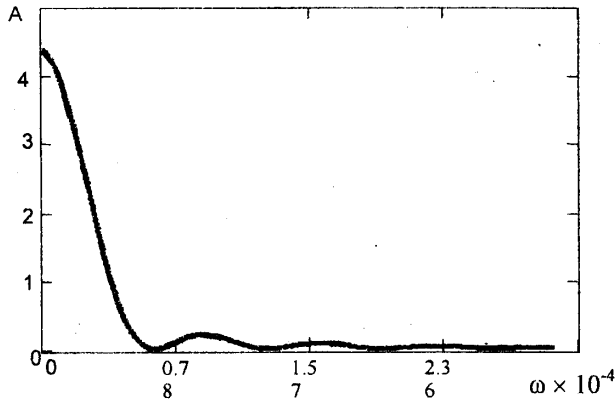


Рис. 12.14. Спектральна щільність центрованої випадкової складової процесу, що описує контур базової заготовки

Разом з базовою заготовкою, розроблені та використані заготовки з випадковими профілями іншого виду. Заготовка з прямокутними виступами різної ширини (рис. 12.15) має виступи однакової висоти, канавки між виступами мають постійну ширину, а ширина виступів є змінною випадковою величиною з нормальним законом розподілу.

Особливістю заготовки є деяка відмінність форми виступу від прямокутної форми. Це обумовлено особливостями технологічного процесу виготовлення заготовки. Канавки між виступами обробляються дисковою фрезою постійної товщини за один прохід, тому виступи мають невелике розширення у напрямку збільшення радіуса заготовки.

На рис. 12.16 дано ескіз третього варіанта заготовки. Заготовка має однакові прямокутні виступи, ширина канавок між якими є випадковою величиною з нормальним законом розподілу.

Всі розглянуті заготовки виконані з одного матеріалу і мають однакові поверхні для закріплення в патроні верстата. При виготовленні заготовок використана спеціальна технологія, і похибка виконання розмірів ширини виступів і пазів не перевищувала  $\pm 0,01 \dots \pm 0,05$  мм. Номінальні усереднені значення ширини виступів та пазів склали 6 мм, а висоти виступів – 10 мм. Тому максимальні відносні відхилення дійсного контуру заготовки від розрахованого випадкового процесу не перевищували 8 %. Середні значення відхилень були значно менші та склали 1..3 % від номінальних розмірів.

Обробка заготовок виконувалась на новому токарно-гвинторізному верстаті мод. КА280 виробництва АТ "Веркон".

В процесі обробки здійснювалися виміри параметрів вібрацій різця та корпусу шпиндельної бабки. Оброблена поверхня вимірювалася з метою визначення параметрів точності її виготовлення (рис. 12.17).

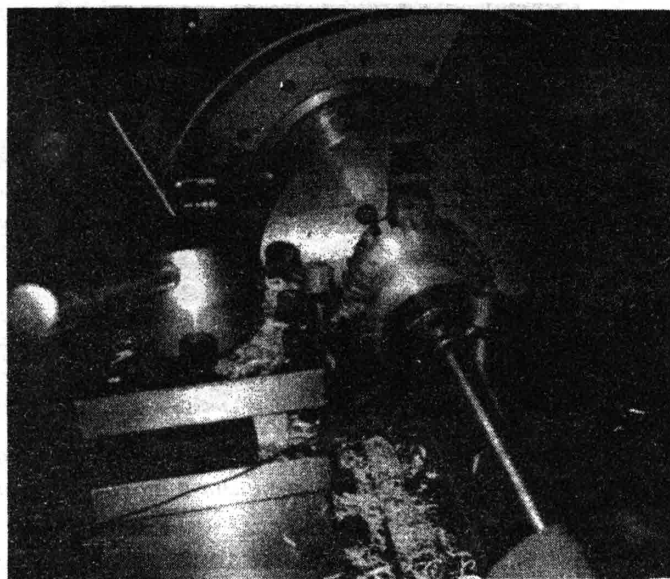
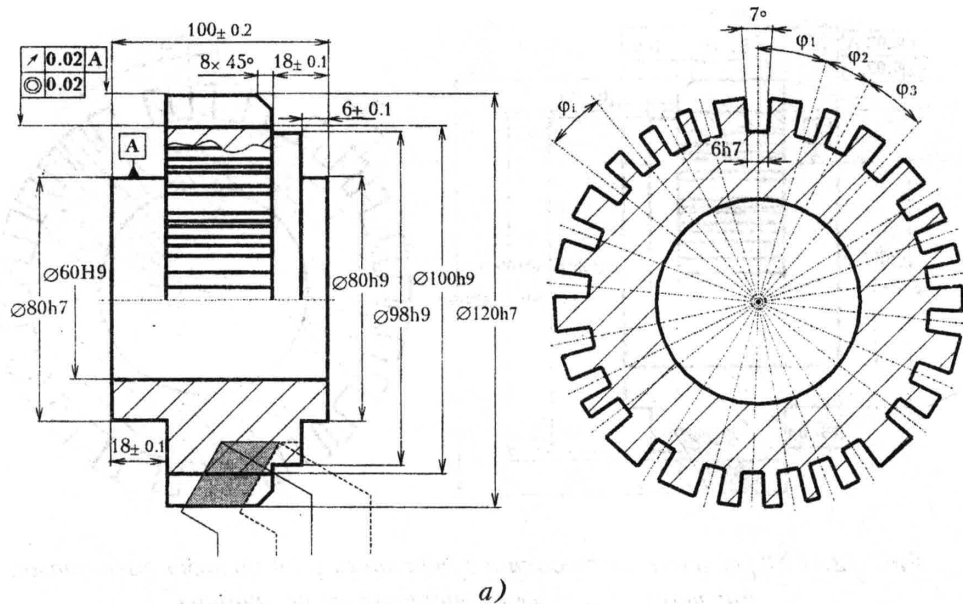


Рис. 12.15. Креслення заготовки з радіальними виступами, ширина яких є випадковою величиною, (а) та обробка даної заготовки на токарному верстаті (б)



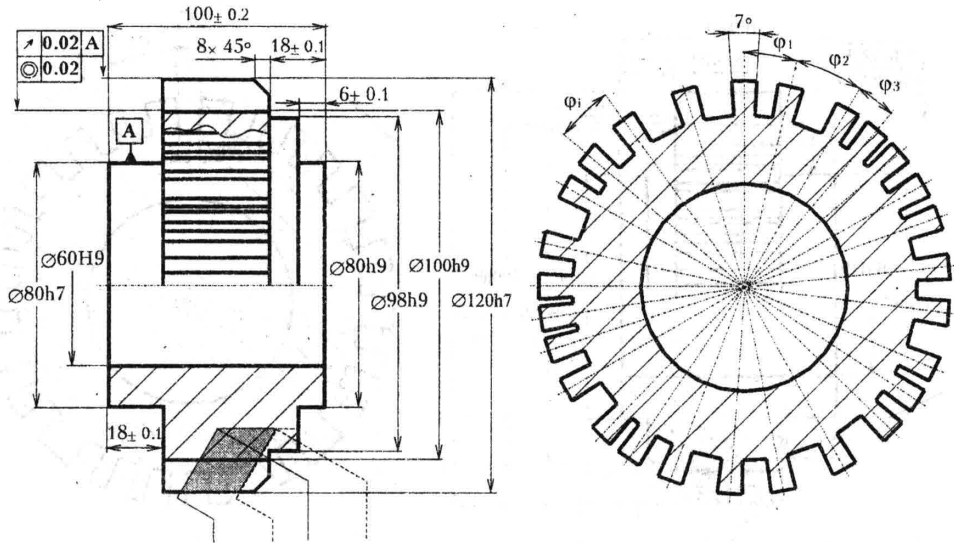


Рис. 12.16. Креслення заготовки з однаковими радіальними виступами, відстань між якими є випадковою величиною

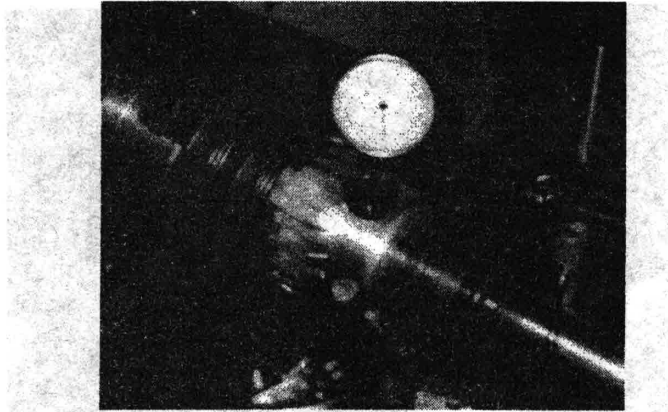


Рис. 12.17. Вимірювання обвідної обробленої поверхні заготовки з однаковими виступами, відстань між якими є випадковою величиною

Вимірювання геометрії обробленої поверхні проведені кількома методами. Безпосередньо на верстаті після обробки зроблені вимірювання обвідної в різних перерізах заготовки. Вимірювання ординат обвідної здійснені індикатором з ціною поділки 0,001 мм. При цьому шпиндель верстата повертався вручну з дискретністю по куту повороту шпинделя  $3^\circ$ .

Додатково вимірювання форми перерізу обробленої поверхні виконувалися на кругломірі. На рис. 12.18 наведено одержані типові круглограми оброблених поверхонь для розглянутих заготовок різного виду.

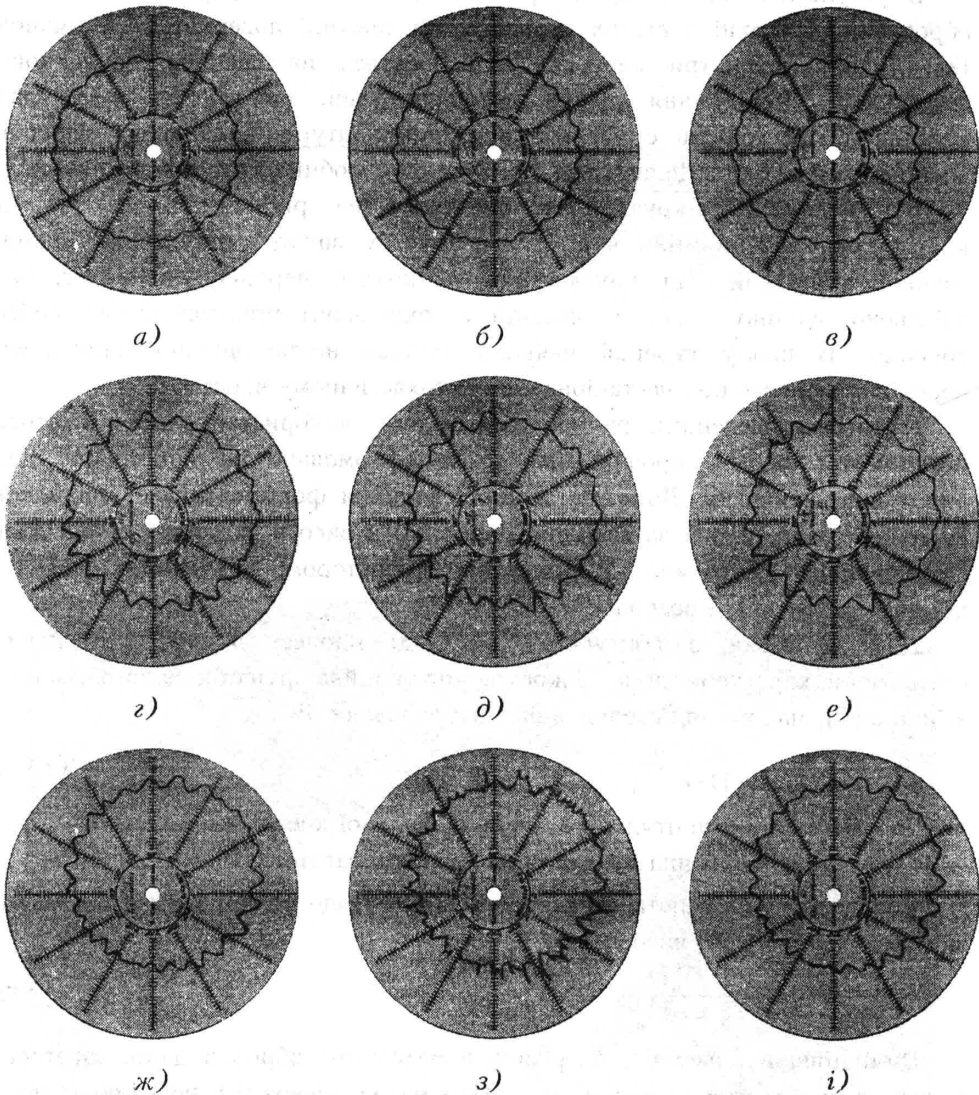


Рис. 12.18. Круглограми поверхонь, одержаних при обробці заготовок спеціального виду на верстаті КА280: а, б, в – круглограми поверхні, одержаної при обробці заготовки з прямокутними виступами, ширина яких є випадковою величиною з нормальним законом розподілу; г, д, е – круглограми поверхні, одержаної при обробці базової заготовки з прямокутними виступами, висота яких є випадковою величиною з нормальним законом розподілу; ж, з, і – круглограми поверхні, одержаної при обробці заготовки з однаковими прямокутними виступами, ширина пазів між якими є випадковою величиною з нормальним законом розподілу

В результаті аналізу круглограм встановлено, що форма циліндричної обробленої поверхні в різних перерізах по довжині поверхні є ідентичною. Геометричні параметри перерізів відрізняються на величину випадкових флуктуацій. Порівняння різних перерізів (див. рис. 12.18, *a-v*) дало можливість встановити смугу розташування контурів випадкових перерізів обробленої поверхні. Це явище має місце при обробці всіх видів заготовок.

Виключенням є круглограма, наведена на рис. 12.18, *з*. На цій круглограмі наявні зміни контуру поверхні у вигляді імпульсних викидів значної амплітуди. Ця круглограма відповідає перерізу, в якому було здійснено зупинку супорта верстата з подальшим продовженням процесу обробки. В цьому перерізі наявний суттєво нестаціонарний випадковий перехідний процес при нестаціонарному стохастичному вході.

Разом із наведеними раніше заготовками, використовувалася заготовка ступінчастої форми, профіль якої було сформовано як комбінацію двох випадкових процесів. Довжина кожної сходинки формувалась як випадкова величина, розподілена за законом Пуассона, а висота сходинки визначалась як випадкова величина, сформована генератором випадкових чисел з нормальним законом розподілу (рис. 12.19).

Для заготовки з контуром у вигляді процесу Пуассона визначені статистичні характеристики. Зокрема, кореляційна функція даного процесу, згідно з [6], має вигляд експоненціальної залежності:

$$R(\tau) = D \cdot e^{-\frac{|\tau|}{T_n}}, \quad (12.57)$$

де  $D$  – дисперсія амплітудних значень радіальної координати профілю;

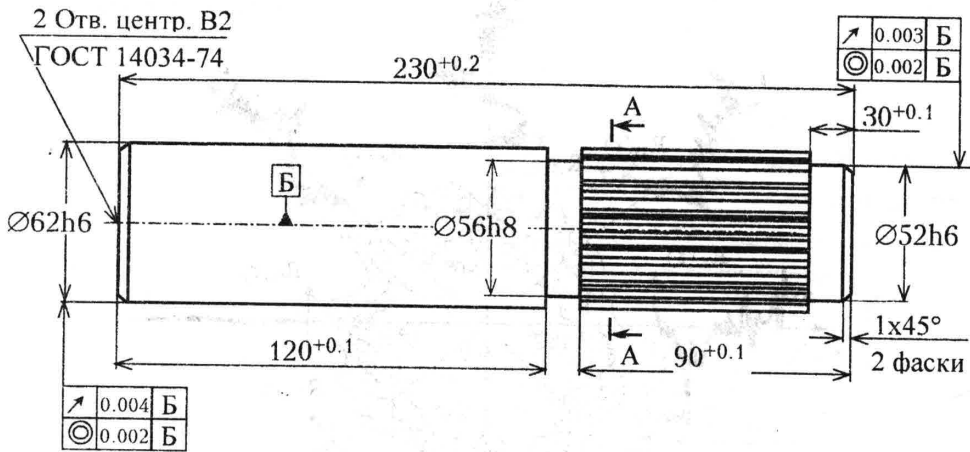
$T_n$  – середня довжина сходинки на поверхні заготовки.

Спектральна щільність випадкового процесу, що відповідає перерізу даної заготовки згідно з [6] визначена у вигляді:

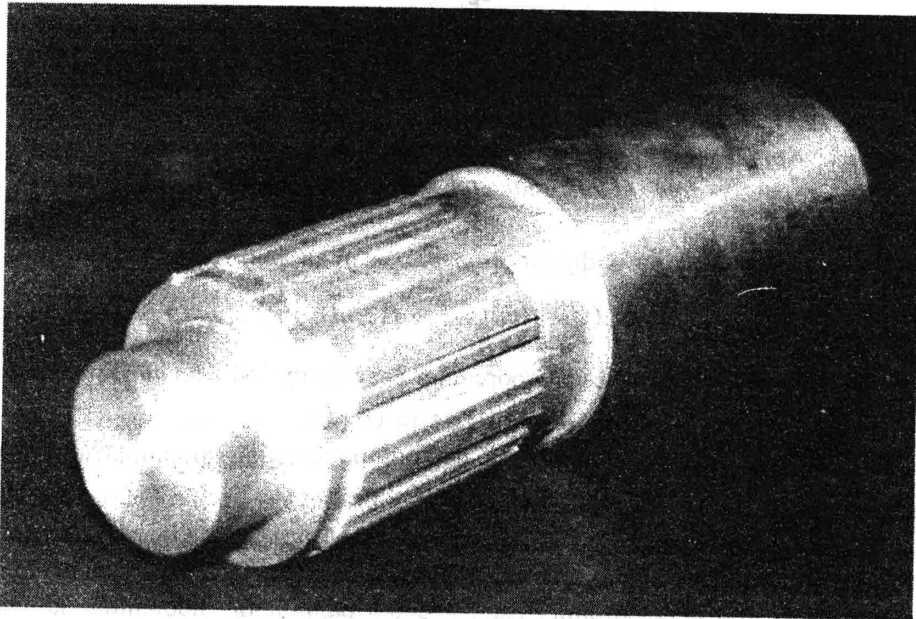
$$S(\omega) = \frac{2T_n D}{1 + \omega^2 T_n^2}. \quad (12.58)$$

Циліндрична поверхня, одержана в результаті обробки даної заготовки, також мала характерну хвилястість. Параметри поверхні в невеликих межах змінювались випадковим чином по довжині деталі.

В результаті обробки експериментальних круглограм одержані статистичні характеристики зміни форми перерізу по довжині деталі. На рис. 12.20 наведена смуга розташування вимірних десяти різних перерізів обробленої поверхні, по довжині деталі. Знайдені їх математичне сподівання та автокореляційні (коваріаційні) функції. Автокореляційні функції визначені як зміни радіальних координат в залежності від полярного кута.



a)



б)

Рис. 12.19. Креслення заготовки, контур якої відповідає випадковому процесу Пуассона (а, б) та загальний вигляд даної заготовки під час обробки на верстаті(в)

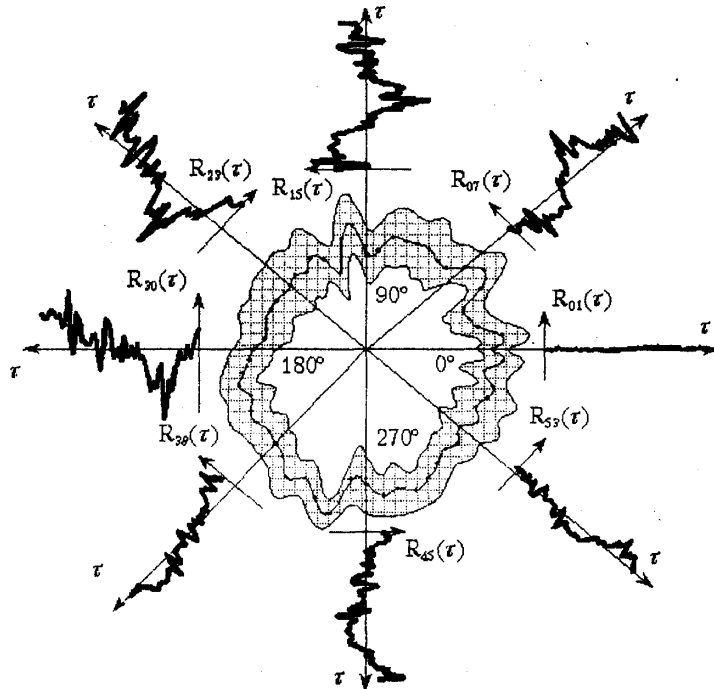


Рис. 12.20. Смуга зміни радіальної координати контурів обробленої поверхні в різних перерізах та коваріаційні функції випадкового процесу при різних значеннях полярних кутів

Значення коваріаційних функцій розраховані за формулою [4]:

$$R(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k(t) - \mu(t))(x_k(t + \tau) - \mu(t + \tau)), \quad (12.59)$$

де  $x_k(t)$ ,  $x_k(t + \tau)$  – радіальні координати контуру обробленої поверхні в  $k$ -му перерізі відповідно в моменти часу  $t$  та  $(t + \tau)$ ;

$\mu(t)$ ,  $\mu(t + \tau)$  – математичне сподівання радіальної координати контуру обробленої поверхні в моменти часу  $t$  та  $(t + \tau)$ ;

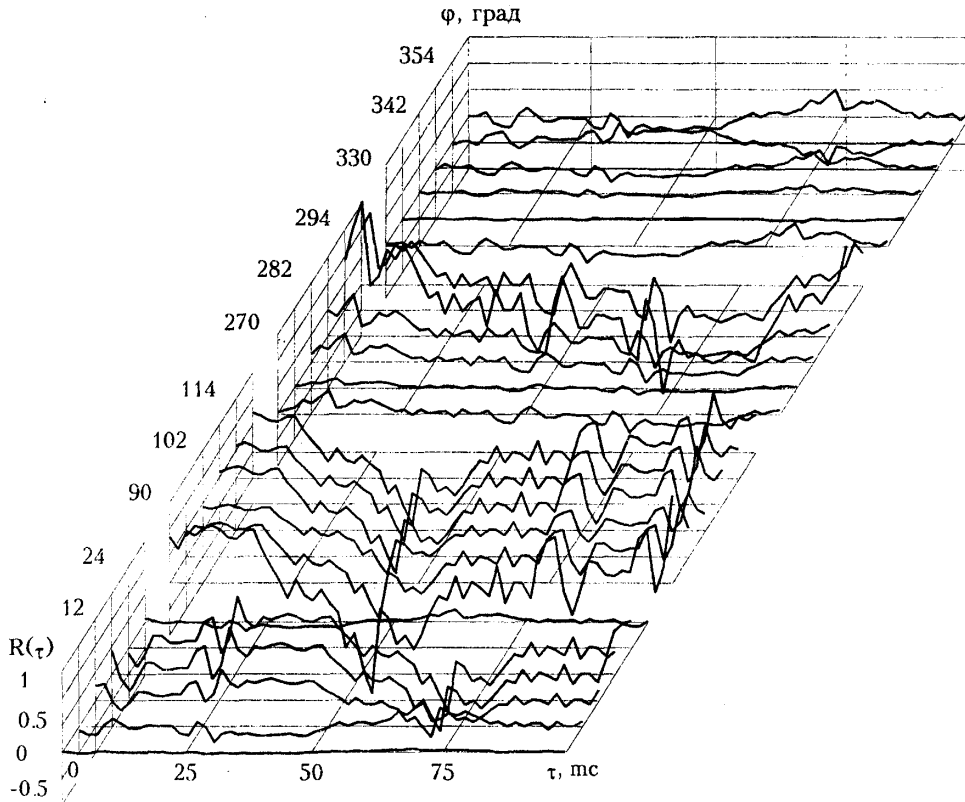
$N$  – кількість точок, в яких проводились виміри радіальної координати обробленої поверхні.

Для уточнення кореляційних властивостей радіальних координат контурів в тангенціальному напрямку визначені потокові діаграми кореляційних функцій (рис. 9.18). Зміни кореляційної функції мають груповий характер по полярному куту.

Як правило, кореляційні функції є затухаючими знакозмінними із короткоперіодичною та довгоперіодичними складовими.

Контур перерізу обробленої поверхні представляє собою циклічний

випадковий процес. Для дослідження параметрів цього процесу виконано його спектральний аналіз.



*Рис. 12.51. Поточкова діаграма автокореляційних функцій параметрів випадкового процесу зміни радіальної координати контуру обробленої поверхні в залежності від тангенціальної координати для різних полярних кутів  $\varphi$*

Контур обробленої поверхні є складною полігармонічною функцією. Цю функцію можна вважати періодичною з періодом  $2\pi$ . Тому спектр контуру є лінійчастим. Його одержано з використанням процедури швидкого перетворення Фур'є за допомогою вбудованої функції `fft` пакету `MathCAD`. Результати розрахунку спектра показані на рис. 12.22.

З аналізу лінійчастого спектра випливає, що контур поверхні заготовки має превалюючі гармоніки з номерами 2 і 3. Це означає наявність овальності та огранки його по трьох гранях. Модулі амплітуд цих гармонік в 4–5 разів перевищують середні значення амплітуд гармонік до 25-ї. Основні гармоніки мають періоди по куту  $120^\circ$  і  $36^\circ$ , що відповідає частотам коливань 31,5 і 105 Гц.

Контур обробленої поверхні має складові гармоніки з номерами 13, 18 та 25, амплітуди яких дещо більші середнього значення. Загалом суттєві

гармоніки, що утворюють контур, обмежуються номерами до 28-ї включно. Деякі з гармонік з даного діапазону мають незначні амплітуди (11, 16, 17, 26 та 29-33 гармоніки). Вклад цих гармонік у формування контуру обробленої поверхні не є суттєвим.

```
bsf:= stack(bs, submatrix(bs, 1, 3, 1, 1))
```

```
c := fft(bsf)  A := last(c)
```

```
i := 1..A  w := 1..8
```

$\Phi =$	180		48		21
	120		32		31.5
	36		9.5		105
	27.6	град	7.3	мс	136.5
	25.7		6.8		147
	20		5.3		189
	17.1		4.5		220.5
	14.4		3.8		262.5

$$ff_i := \sqrt{\operatorname{Re} c_i^2 + \operatorname{Im} c_i^2}$$

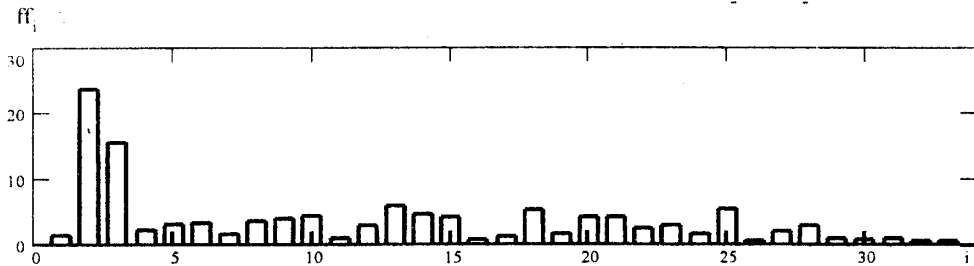
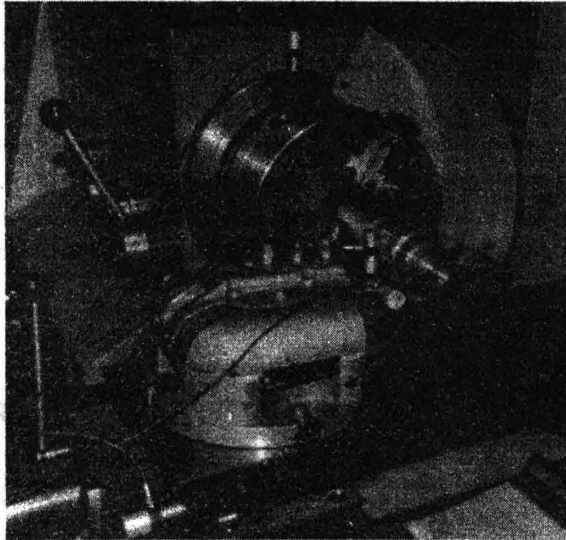


Рис. 12.22. Фрагмент документа пакету MathCAD та результати розрахунків спектра випадкового контуру перерізу обробленої поверхні:  $ff_i$  – модуль амплітуди  $i$ -ї гармоніки дискретного розкладу за схемою швидкого перетворення Фур'є;  $\varphi$  – вектор полярних кутів, що відповідає кутовим періодам восьми суттєвих гармонік розкладу;  $T$  – вектор періодів коливань контуру;  $f$  – вектор циклічних частот суттєвих гармонік

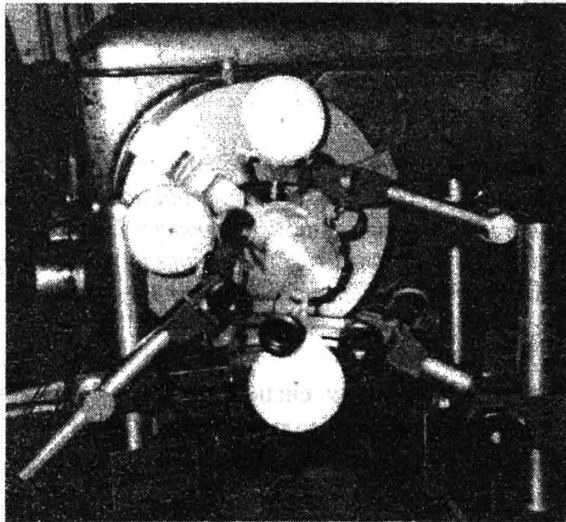
Спектральний аналіз форми контура дає можливість порівняти показники динамічної якості двох різних токарних верстатів.

Для цього виконані обробка однієї заготовки на двох різних верстатах (рис. 12.23) та порівняння спектрів оброблених поверхонь.

На рис. 12.24 наведені круглограми двох типових перерізів обробленої поверхні. Поверхні одержані обробкою однієї й тієї ж заготовки з випадковим профілем у вигляді процесу Пуассона на двох різних верстатах.



а)



б)

Рис. 12.23. Обробка однієї заготовки на двох різних верстатах з проведенням вимірювань параметрів обробленої поверхні:  
а – на верстаті КА280 з використанням трикомпонентного динамометра для вимірювань сили різання; б – на верстаті 1К62

По круглограмах визначені розбіжності форми контурів обробленої поверхні на різних інтервалах зміни полярних кутів. В цілому розбіжність



двох круглограм по амплітуді знаходиться в межах 6..8 мкм. На ділянках підвищеної коливальності процесів розбіжність досягає 8..12 мкм. Фазове зміщення основних максимумів та мінімумів обох круглограм становить не більше 10°..20°. Для аналізу точності обробки на круглограмах визначене базове коло, діаметр якого відповідає середньому значенню радіальної координати поверхні обробленої на верстаті 1К62. Відхилення радіальних координат поверхні обробленої на верстаті КА280 має постійну від'ємну складову близько 2..3 мкм. Розмахи коливань круглограм складають 17 мкм для верстата 1К62 та 7 мкм для верстата КА280.

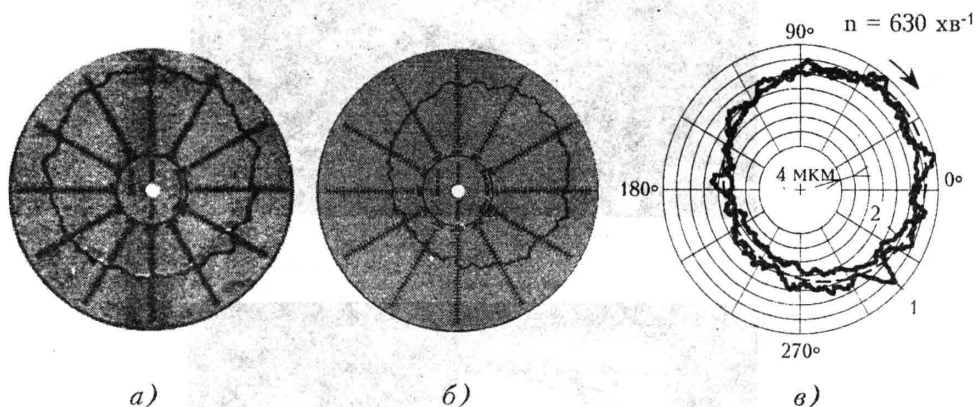


Рис. 12.24. Порівняння експериментально визначених круглограм поверхонь, одержаних в результаті обробки однієї заготовки на верстатах 1К62 та КА280 при імітаційному навантаженні у вигляді процесу Пуассона: а – круглограма поверхні, обробленої на верстаті 1К62; б – круглограма поверхні, обробленої на верстаті КА280; в – порівняння контурів поверхонь шляхом приведення до єдиної системи відліку (крива 1 – верстат 1К62, крива 2 – верстат КА280)

Для аналізу частотного складу експериментально визначених круглограм розраховані їх лінійчасті спектри амплітуд (рис. 12.25).

Спектри амплітуд знайдені шляхом застосування процедури швидкого дискретного перетворення Фур'є до масиву значень радіальної координати кожної круглограми. При формуванні дискретної математичної моделі прийнято об'єм масиву дискретних значень в кількості 4096 ( $2^{12}$ ). Для одержання даного масиву використана сплайн-інтерполяція експериментально визначених круглограм, що відповідають рис. 12.24 з подальшим розрахунком необхідної кількості точок (ординат круглограм).

З аналізу спектрів, наведених на рис. 12.25, випливає, що обидві круглограми мають дві різні групи за порядком значень амплітуд групи гармонік – низькочастотну групу, яка включає гармоніки до 25-ї (до частоти близько 150 Гц), та високочастотну з гармоніками №№ 25–100.

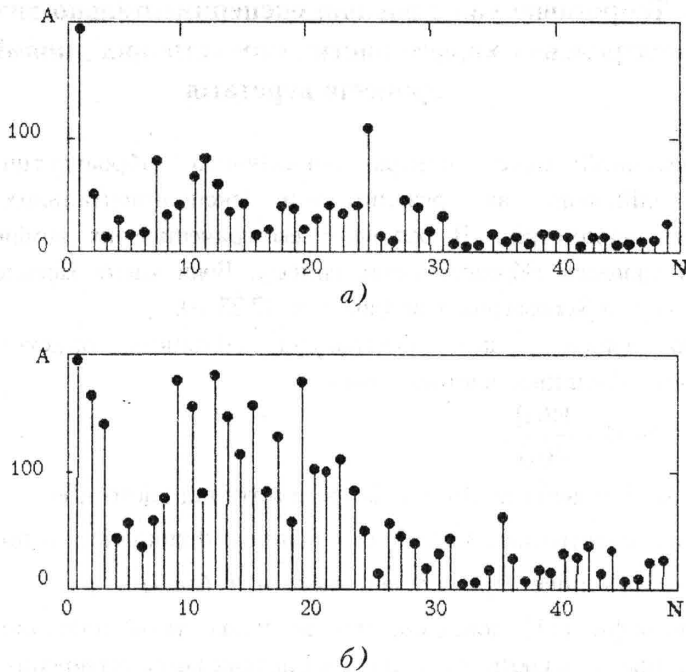


Рис. 12.25. Лінійчасті спектри амплітуд, розраховані за одержаними експериментально круглограмами поверхонь, оброблених на верстатах KA280 (а) та 1K62 (б)

Середні значення амплітуд гармонік низькочастотної частини спектра приблизно в 5..10 разів більші, ніж середні значення амплітуд високочастотних гармонік. Це співвідношення має місце для поверхонь, оброблених на обох верстатах. Порівнюючи амплітуди гармонік одного номера, для двох круглограм можна зробити висновок, що амплітуди гармонічних складових контуру поверхні при обробці на верстаті 1K62 в 2..4 рази більші, ніж відповідні амплітуди поверхні, обробленої на верстаті KA280. Це пояснюється суттєво вищим рівнем вібрацій елементів динамічної системи відремонтованого верстата 1K62 в порівнянні з новим верстатом KA280.

З аналізу спектра круглограми поверхні обробленої на верстаті KA280 впливає наявність превалюючої гармоніки з номером 24. Це вказує на наявність резонансної області в динамічній системі верстата, частота якої відповідає 24 гармоніці і складає 144 Гц.

### 12.3. Теоретичне узагальнення експериментально визначених спектральних характеристик стохастичних динамічних процесів верстатів

Математичний опис спектра динамічного віброакустичного процесу верстата здійснено за результатами експериментальних вимірювань вібраційних параметрів. В результаті експериментальних вимірювань знайдено спектральні щільності віброакустичного сигналу. Вони мають характерний вигляд із значною кількістю резонансних піків (див. рис. 12.25, а).

Будемо вважати, що спектральна щільність описується дробово-раціональною функцією частоти, тобто

$$S(\omega) = \frac{H(\omega)}{Z(\omega)}, \quad (12.60)$$

де  $H(\omega)$  і  $Z(\omega)$  – деякі поліноми, що залежать від частоти  $\omega$ .

Оскільки спектральна щільність є парною функцією, то поліноми  $H(\omega)$  і  $Z(\omega)$  включають лише парні степені частоти, тобто  $\omega^2, \omega^4, \dots$

В монографії [44] доведено, що за таких умов поліноми чисельника і знаменника представляють собою добутки деяких комплексно-спряжених функцій частоти  $h$  та  $q$ , тобто

$$S(\omega) = \frac{H(\omega)}{Z(\omega)} = \frac{h(j\omega) \cdot h(-j\omega)}{q(j\omega) \cdot q(-j\omega)}. \quad (12.61)$$

Із даної залежності випливає, що спектральна щільність рівна:

$$S(\omega) = \left| \frac{h(j\omega)}{q(j\omega)} \right|^2.$$

Будемо вважати динамічну систему верстата квазілінійною системою автоматичного управління, що має певне кінечне число ( $I$ ) стохастичних збурюючих входів

$$X_i(t) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, I).$$

Позначимо через  $W_i(S)$  трансформуючу функцію від входу  $X_i$  до виходу  $Y$ . Тоді зображення по Лапласу вихідного сигналу ( $S$  – оператор Лапласа):

$$Y(S) = \sum_{i=1}^I W_i(S) \cdot X_i(S). \quad (12.62)$$

Введемо формуючий фільтр для  $i$ -го входу  $X_i$ , який визначає випадковий вхід  $X_i(t)$  через одиничний стохастичний сигнал  $X_0(t)$ , що відповідає “білому шуму”. Одиничний стохастичний сигнал є випадковим процесом, спектральна щільність якого постійна, тобто

$$S_0(\omega) = \text{const} = S_0.$$

Трансформуючу функцію формуючого фільтра для  $i$ -го входу позначимо:

$$W_{i0}(S) = \frac{X_i(S)}{X_0(S)}. \quad (12.63)$$

Враховуючи (12.63), із (12.62) одержимо зображення по Лапласу вихідного сигналу. Воно буде мати вигляд:

$$Y(S) = \sum_{i=1}^l W_i(S) \cdot W_{i0}(S) \cdot X_0(S). \quad (12.64)$$

Враховуючи, що зображення по Лапласу одиничного стохастичного сигналу є однаковим для кожного входу, із (12.164) визначимо загальну трансформуючу функцію динамічної системи верстата для виходу  $Y$  у вигляді:

$$\frac{Y(S)}{X_0(S)} = W_Y(S) = \sum_{i=1}^l W_i(S) \cdot W_{i0}(S). \quad (12.65)$$

Загальну трансформуючу функцію із (12.65) як трансформуючу функцію квазілінійної системи можна подати у кількох формах, зокрема у вигляді дробово-раціональної функції:

$$W_Y(S) = \frac{K_0 + K_1 S + \dots + K_m S^m}{T_n S^n + \dots + T_1 S + 1}, \quad (12.66)$$

де  $K_0, K_1, \dots, K_m$  – коефіцієнти передачі динамічної системи;

$T_n, \dots, T_1$  – постійні часу трансформуючої функції;

$m$  і  $n$  – цілі числа (звичайно  $n > m$ ).

Поліноми, які входять в чисельник і знаменник трансформуючої функції (12.66), розкладемо на множники. В результаті отримаємо формулу, яка описує загальну трансформуючу функцію:

$$W_Y(S) = K \cdot \frac{\prod_{\mu} (1 + \tau_{1\mu} S + \tau_{2\mu}^2 S^2)}{\prod_{\nu} (1 + T_{1\nu} S + T_{2\nu}^2 S^2)}, \quad (12.67)$$

де  $\tau_{1\mu}, \tau_{2\mu}, T_{1\nu}, T_{2\nu}$  – коефіцієнти складових розкладу;  $K$  – загальний коефіцієнт передачі динамічної системи верстата.

Під знаками добутку у формулі (12.67) знаходяться множники, кожний з яких відповідає парі комплексно-спряжених коренів поліномів відповідно чисельника і знаменника.

Визначимо комплексні спряжені корені полінома, що знаходяться в знаменнику трансформуючої функції. Для цього маємо рівняння:

$$T_{2\nu}^2 S^2 + T_{1\nu} S + 1 = 0,$$

звідки

$$S_{\nu 1, 2} = \frac{-T_{1\nu} \pm \sqrt{T_{1\nu}^2 - 4T_{2\nu}^2}}{2T_{2\nu}^2}.$$

Після перетворення цієї залежності одержимо значення коренів:

$$S_{v1,2} = \frac{-1}{T_{2v}} \left( \frac{1}{2} \theta_v \pm j \sqrt{1 - \frac{\theta_v^2}{4}} \right), \quad j = \sqrt{-1}, \quad (12.68)$$

де  $\theta_v = \frac{T_{1v}}{T_{2v}}$  – постійна, яка залежить від співвідношення коефіцієнтів.

При наявності в чисельнику чи знаменнику трансформуючої функції лише одного дійсного кореня із пари коренів, визначених залежністю (12.68), відповідно коефіцієнт  $\tau_{2\mu}$  або  $T_{2v}$  буде дорівнювати нулю.

Прийmemo, що трансформуюча функція є відношенням деяких поліномів  $p$  та  $q$ , тобто

$$W_Y(S) = K \cdot \frac{p(S)}{q(S)}. \quad (12.69)$$

Враховуючи залежність (12.167) із (12.169), одержимо:

$$\begin{aligned} p(S) &= \prod_{\mu} (1 + \tau_{1\mu} S + \tau_{2\mu}^2 S^2); \\ q(S) &= \prod_{v} (1 + T_{1v} S + T_{2v}^2 S^2). \end{aligned} \quad (12.70)$$

Знайдемо квадрат модуля частотної трансформуючої функції:

$$|W_Y(j\omega)|^2 = K^2 \cdot \frac{p(j\omega) \cdot p(-j\omega)}{q(j\omega) \cdot q(-j\omega)}. \quad (12.71)$$

Підставивши значення  $S \rightarrow j\omega$  в формули (12.69) і (12.70), із залежності (12.71) одержимо:

$$|W_Y(j\omega)|^2 = K^2 \cdot \frac{\prod_{\mu} [(1 - \tau_{2\mu}^2 \omega^2)^2 + \tau_{1\mu}^2 \omega^2]}{\prod_{v} [(1 - T_{2v}^2 \omega^2)^2 + T_{1v}^2 \omega^2]}. \quad (12.72)$$

Цей квадрат модуля з точністю до множника  $S_0$  дорівнює спектральній щільності вихідного сигналу [3]:

$$S_Y(\omega) = |W_Y(j\omega)|^2 \cdot S_0, \quad (12.73)$$

Враховуючи, що залежність (12.172) включає лише парні степені частоти  $\omega$ , спектральну щільність вихідного сигналу визначимо в функції квадрата частоти  $Q = \omega^2$ :

$$S_Y(Q) = K^2 \cdot S_0 \cdot \frac{\prod_{\mu} [(1 - \tau_{2\mu}^2 Q)^2 + \tau_{1\mu}^2 Q]}{\prod_{v} [(1 - T_{2v}^2 Q)^2 + T_{1v}^2 Q]} = K^2 \cdot S_0 \cdot \frac{\prod_{\mu} [1 + (\tau_{1\mu}^2 - 2\tau_{2\mu}^2)Q + \tau_{2\mu}^4 Q^2]}{\prod_{v} [1 + (T_{1v}^2 - 2T_{2v}^2)Q + T_{2v}^4 Q^2]}. \quad (12.74)$$

Спектральну щільність  $S_Y(Q)$  (12.74) розкладемо на прості дроби. Для цього знайдемо корені полінома, який знаходиться в знаменнику функції.

Пара коренів визначається як розв'язок рівняння:

$$T_{2v}^4 Q^2 + (T_{1v}^2 - 2T_{2v}^2)Q + 1 = 0. \quad (12.75)$$

Остаточна пара коренів рівняння (12.175) буде визначена як

$$Q_{v,1,2} = \frac{2T_{2v}^2 - T_{1v}^2 \pm \sqrt{(2T_{2v}^2 - T_{1v}^2)^2 - 4T_{2v}^4}}{2T_{2v}^4}. \quad (12.76)$$

Після перетворень та скорочень в (12.76) знайдемо пару комплексно-спряжених коренів рівняння (12.75) у вигляді:

$$Q_{v,1,2} = \frac{2}{T_{2v}^2} \left[ 1 - \frac{\theta_v^2}{2} \pm j\theta_v \sqrt{1 - \frac{\theta_v^2}{2}} \right], \quad (12.77)$$

де через  $\theta_v$  позначене відношення постійних часу:  $\theta_v = \frac{T_{1v}}{T_{2v}}$ .

Аналогічно корені чисельника спектральної щільності, яка визначена формулою (12.74), знайдені у вигляді:

$$Q_{\mu,1,2} = \frac{2}{T_{2\mu}^2} \left[ 1 - \frac{\theta_\mu^2}{2} \pm j\theta_\mu \sqrt{1 - \frac{\theta_\mu^2}{2}} \right], \quad (12.78)$$

де  $\theta_\mu = \frac{T_{1\mu}}{T_{2\mu}}$  представляє собою відношення постійних часу.

Комплексні спряжені корені знаменника спектральної щільності подамо у вигляді алгебраїчної форми комплексного числа:

$$Q_{v,1,2} = a_v \pm jb_v,$$

де дійсна та уявна складові коренів визначаються через значення коефіцієнтів:

$$a_v = \frac{2}{T_{2v}^2} \left( 1 - \frac{\theta_v^2}{2} \right); \quad b_v = 2 \frac{\theta_v^2}{T_{2v}^2} \sqrt{1 - \frac{\theta_v^2}{2}}.$$

Раніше введені коефіцієнти визначаються через складові коренів згідно з формулами:

$$\theta_v = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{a_v}{b_v}\right)^2}}; \quad T_{2v}^2 = \frac{2}{a_v \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{b_v^2}{a_v^2} + 1\right)}; \quad T_{2v} = 2 \sqrt{\frac{a_{2v}}{b_v + 2a_{2v}}}. \quad (12.79)$$

Аналогічно для комплексно-спряжених коренів чисельника одержимо алгебраїчну форму запису у вигляді:

$$Q_{\mu,1,2} = a_\mu \pm jb_\mu,$$

де значення дійсної та уявної частин кореня чисельника визначені формулами:

$$a_\mu = \frac{2}{T_{2\mu}^2} \left( 1 - \frac{\theta_\mu^2}{2} \right); \quad b_\mu = 2 \frac{\theta_\mu^2}{T_{2\mu}^2} \sqrt{1 - \frac{\theta_\mu^2}{2}}.$$

Для цих залежностей маємо співвідношення між коефіцієнтами:

$$\theta_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{b_{\mu}}{a_{\mu}}\right)^2}}; \quad T_{2\mu} = \frac{2}{a_{\mu} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{b_{\mu}^2}{a_{\mu}^2} + 1 \right)}. \quad (12.80)$$

Коли співмножник полінома в знаменнику трансформуючої функції із пари коренів має лише один дійсний корінь, тоді параметр

$$T_{2\nu} = 0$$

і значення кореня буде знайдено з рівняння  $1 + T_{1\nu}^2 Q = 0$ .

Відповідно розв'язок даного рівняння:

$$Q_{\nu 3} = -\frac{1}{T_{1\nu}^2} = -\frac{1}{T_{\nu}^2}. \quad (12.81)$$

Аналогічно визначається дійсний корінь чисельника. При  $T_{2\mu} = 0$ :

$$1 + T_{3\nu}^2 Q = 0;$$

$$Q_{\mu 3} = -\frac{1}{T_{3\mu}^2} = a_{\mu 3} \quad (12.82)$$

або

$$T_{3\mu} = \sqrt{-a_{\mu 3}}.$$

Використовуючи знайдені значення коренів знаменника, здійснимо розклад спектральної щільності (12.74) як дробово-раціональної функції від квадрата частоти ( $Q = \omega^2$ ) на прості дроби. З метою спрощення розкладу будемо вважати, що знаменник спектральної щільності не має кратних коренів. Це обмеження не є принциповим, оскільки спектральна щільність визначена наближено за результатами експериментів і для її опису використовується наближена математична модель.

Згідно з [42], розклад дробово-раціональної функції на прості дроби має вигляд:

$$S_Y(Q) = \sum_{\nu 3} \frac{N_{\nu 3}}{Q - Q_{\nu 3}} + \sum_{\nu 1,2} \frac{N_{\nu 2}(Q + d_{\nu})}{(Q - a_{\nu})^2 + b_{\nu}^2}, \quad (12.83)$$

де перша сума відповідає набору дійсних коренів знаменника ( $Q_{\nu 3}$ ), а друга сума включає доданки, кожен з яких відповідає одній парі комплексно-спряжених коренів знаменника ( $Q_{\nu 1,2}$ ).

Виконаємо перетворення у формулі (12.83) підставивши в неї замість  $Q$  значення частоти. Одержимо:

$$S_Y(\omega) = \sum_{\nu 3} \frac{N_{\nu 3}}{\omega^2 + \frac{1}{T_{\nu}^2}} + \sum_{\nu 1,2} \frac{N_{\nu 2}(\omega^2 + d_{\nu})}{\omega^4 + 2(-a_{\nu})\omega^2 + a_{\nu}^2 + b_{\nu}^2}. \quad (12.84)$$

Введемо нові коефіцієнти згідно з формулами:

$$\alpha_v^2 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{a_v^2 + b_v^2} - a_v \right); \quad \alpha_{v3} = \frac{1}{T_{\partial v}}; \quad \beta_v^2 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{a_v^2 + b_v^2} + a_v \right). \quad (12.85)$$

Відповідно дійсна та уявна складові коренів знаменника:

$$a_v = \beta_v^2 - \alpha_v^2; \quad b_v = \sqrt{(\beta_v^2 + \alpha_v^2)^2 - (\beta_v^2 - \alpha_v^2)^2}. \quad (12.86)$$

Із врахуванням нових позначень одержимо розклад спектральної щільності на прості дроби (12.84) у вигляді:

$$S_Y(\omega) = \sum_{v3} \frac{N_{v3}}{\omega^2 + a_{v3}^2} + \sum_{v1,2} \frac{N_{v2}(\omega^2 + d_v)}{\omega^4 + 2(\alpha_v^2 - \beta_v^2)\omega^2 + (\alpha_v^2 + \beta_v^2)^2}. \quad (12.87)$$

Виконаємо перетворення в чисельнику дроби під знаком другої суми у формулі (12.87):

$$\begin{aligned} N_{v2}(\omega^2 + d_v) &= \frac{N_{v2}}{\alpha_v} \alpha_v (\omega^2 + \alpha_v^2 + \beta_v^2) + \\ &+ \frac{N_{v2}(d_v - \alpha_v^2 - \beta_v^2)}{\alpha_v(\alpha_v^2 + \beta_v^2)} (\alpha_v^2 + \beta_v^2). \end{aligned} \quad (12.88)$$

Позначимо постійні величини:

$$D_{1v} = \pi \frac{N_{v2}}{\alpha_v}; \quad D_{2v} = \pi \frac{N_{v2}(d_v - \alpha_v^2 - \beta_v^2)}{\alpha_v(\alpha_v^2 + \beta_v^2)}; \quad D_{3v} = N_{v3}\pi.$$

Відповідно визначимо параметри:

$$\begin{aligned} N_{v3} &= D_{3v} \alpha_v / \pi; \\ N_{v2} &= \pi \frac{D_{2v}(\alpha_v^2 + \beta_v^2)}{D_{1v}} + \alpha_v^2 + \beta_v^2. \end{aligned} \quad (12.89)$$

З використанням нових позначень формула (12.87) для визначення спектральної щільності набуде вигляду:

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= \sum_{v3} \frac{D_{3v} \alpha_v / \pi}{a_{v3}^2 + \omega^2} + \sum_{v1,2} \frac{D_{2v} \alpha_v (\alpha_v^2 + \beta_v^2)}{\omega^4 + 2(\alpha_v^2 - \beta_v^2)\omega^2 + (\alpha_v^2 + \beta_v^2)^2} + \\ &+ \sum_{v1,2} \frac{D_{1v} \alpha_v (\omega^2 + \alpha_v^2 + \beta_v^2)}{\omega^4 + 2(\alpha_v^2 - \beta_v^2)\omega^2 + (\alpha_v^2 + \beta_v^2)^2}. \end{aligned} \quad (12.90)$$

Всі три вирази під знаками суми у формулі (12.90) можуть бути записані в узагальненому вигляді як одна базисна функція математичної моделі:

$$\varphi(D_v, \alpha_v, \beta_v, \gamma_v, \omega) = \frac{D_v}{\pi} \cdot \frac{(\alpha_v + \gamma_v \beta_v)(\alpha_v^2 + \beta_v^2) + (\alpha_v - \gamma_v \beta_v)\omega^2}{(\alpha_v^2 + \beta_v^2)^2 + 2(\alpha_v^2 - \beta_v^2)\omega^2 + \omega^4}, \quad (12.91)$$

де:

– для першої суми у (12.90) ( $\beta_v = 0$ ,  $\gamma_v = 0$ ) і базисна функція:

$$\varphi_{v3}(\omega) = \varphi(D_v, \alpha_v, 0, 0, \omega) = \frac{D_{3v} \alpha_{v3}}{\pi(\alpha_v^2 + \beta_v^2)\omega^2}; \quad (12.92)$$



– для другої суми у формулі (12.90) ( $\gamma_v = \alpha_v / \beta_v$ ) базисна функція:

$$\begin{aligned} \varphi_{2v}(\omega) &= \varphi\left(D_v, \alpha_v, \beta_v, \gamma_v = \frac{\alpha_v}{\beta_v}, \omega\right) = \\ &= \frac{D_{2v}\alpha_v}{\pi} \cdot \frac{\alpha_v^2 + \beta_v^2}{\omega^4 + 2(\alpha_v^2 - \beta_v^2)\omega^2 + (\alpha_v^2 + \beta_v^2)^2}; \end{aligned} \quad (12.93)$$

– для третьої суми у формулі (12.190) ( $\gamma_v = 0$ ) базисна функція:

$$\begin{aligned} \varphi_{1v}(\omega) &= \varphi(D_v, \alpha_v, \beta_v, \gamma_v = 0, \omega) = \\ &= \frac{D_{1v}\alpha_v}{\pi} \cdot \frac{\omega^2 + \alpha_v^2 + \beta_v^2}{\omega^4 + 2(\alpha_v^2 - \beta_v^2)\omega^2 + (\alpha_v^2 + \beta_v^2)^2}. \end{aligned} \quad (12.94)$$

Не дивлячись на різний вигляд базисних функцій (12.93) та (12.94) вони дають подібні результати розрахунків. На рис. 12.26 наведено дві базисні функції, побудовані за допомогою пакету MathCAD.

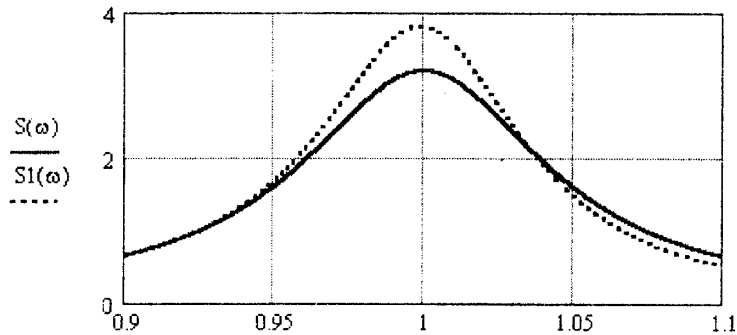


Рис. 12.26 Результати розрахунків базисних функцій математичних моделей

Базисні функції  $\varphi_{1v}(\omega)$  та  $\varphi_{2v}(\omega)$ , визначені формулами (12.93) та (12.94), окремо допускають розклад на прості дроби у вигляді:

$$\varphi_{1v}(\omega) = \frac{D_{1v}\alpha_v}{2\pi} \left[ \frac{1}{\alpha_v^2 + (\omega - \beta_v)^2} + \frac{1}{\alpha_v^2 + (\omega + \beta_v)^2} \right]; \quad (12.95)$$

$$\varphi_{2v}(\omega) = \frac{D_{2v}\alpha_v}{2\pi} \left[ \frac{1 - \frac{1}{\beta_v}(\omega - \beta_v)}{\alpha_v^2 + (\omega - \beta_v)^2} + \frac{1 + \frac{1}{\beta_v}(\omega + \beta_v)}{\alpha_v^2 + (\omega + \beta_v)^2} \right]. \quad (12.96)$$

Базисні функції мають екстремуми по параметру  $\omega$ . Для знаходження екстремуму базисної функції  $\varphi_{2v}(\omega)$  знайдемо похідну залежності (12.96) по параметру  $\omega$  і прирівняємо її до нуля. Одержимо рівняння:

$$4\omega^3 + 4\omega(\alpha_v^2 - \beta_v^2) = 0. \quad (12.97)$$

Звідси знаходимо значення частоти, при якій має місце екстремум:

$$\omega_{e2} = \sqrt{\beta_v^2 - \alpha_v^2}. \quad (12.98)$$

Для практично важливого випадку  $\beta_v \gg \alpha_v$  маємо:

$$\omega_{e2} \approx \beta_v. \quad (12.99)$$

Знаходження екстремуму базисної функції  $\varphi_{iv}(\omega)$  здійснено з використанням математичного пакету MathCAD 2000. Нижче наведено фрагмент документа MathCAD, що здійснює знаходження похідної залежності (12.94) та її коренів:

$$\begin{aligned} \gamma := 0 \quad & \frac{d}{d\omega} \frac{(\alpha + \gamma \cdot \beta)(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha - \gamma \cdot \beta)\omega^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2 + 2(\alpha^2 - \beta^2)\omega^2 + \omega^4} \rightarrow \\ & \rightarrow 2\alpha \frac{\omega}{(\alpha^2 + \beta^2)^2 + 2(\alpha^2 - \beta^2)\omega^2 + \omega^4} - \\ & - \frac{[\alpha(\alpha^2 + \beta^2)^2 + \alpha\omega^2] \cdot [4(\alpha^2 - \beta^2)\omega + 4\omega^3]}{[(\alpha^2 + \beta^2)^2 + 2(\alpha^2 - \beta^2)\omega^2 + \omega^4]^2}, \end{aligned} \quad (12.100)$$

$$\begin{aligned} & 0 \\ & \left[ -\alpha^2 - \beta^2 + 2(\alpha^2\beta^2 + \beta^4)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ & 2\alpha \frac{\omega}{(\alpha^2 + \beta^2)^2 + 2(\alpha^2 - \beta^2)\omega^2 + \omega^4} - \left[ -\alpha^2 - \beta^2 + 2(\alpha^2\beta^2 + \beta^4)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ & - \frac{[\alpha(\alpha^2 + \beta^2)^2 + \alpha\omega^2] [4(\alpha^2 - \beta^2)\omega + 4\omega^3]}{[(\alpha^2 + \beta^2)^2 + 2(\alpha^2 - \beta^2)\omega^2 + \omega^4]^2} \text{solve, } \omega \rightarrow \left[ -\alpha^2 - \beta^2 - 2(\alpha^2\beta^2 + \beta^4)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \left[ -\alpha^2 - \beta^2 - 2(\alpha^2\beta^2 + \beta^4)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (12.101)$$

За фізичною суттю задачі корінь є дійсним і додатним. Тому за корінь треба взяти другу компоненту одержаного вектора, що знаходиться в правій частині формули (12.101). Відповідно значення кореня буде:

$$\omega_{e1} = \sqrt{-\alpha_v^2 - \beta_v^2 + 2\sqrt{\alpha_v^2\beta_v^2 + \beta_v^4}}. \quad (12.102)$$

Для практично важливого випадку, коли  $\beta_v \gg \alpha_v$  маємо:

$$\omega_{e1} \approx \beta_v. \quad (12.103)$$

Таким чином, встановлено, що обидві базисні функції мають близькі

екстремуми, які визначаються умовами (12.98) та (12.102).

Ця обставина використана для знаходження коефіцієнтів математичної моделі. З метою спрощення моделі із розгляду виключаються безрезонансні складові, які відповідають базисній функції  $\varphi_{3v}(\omega)$ . При цьому математична модель спектральної щільності в загальному вигляді:

$$S_Y(\omega) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^N \sum_{i=1}^2 \varphi_{ik}(D_k, \alpha_k, \beta_k, \gamma_{ik}, \omega), \quad (12.104)$$

де  $\gamma_{1k} = 0$ ,  $\gamma_{2k} = \alpha_k / \beta_k$ .

Узагальнений вираз спектральної щільності:

$$S_Y(\omega) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^N \sum_{i=1}^2 D_{ik} \cdot \frac{(\alpha_k + \gamma_{ik} \beta_k)(\alpha_k^2 + \beta_k^2)^2 + (\alpha_k - \gamma_{ik} \beta_k)\omega^2}{(\alpha_k^2 + \beta_k^2)^2 + 2(\alpha_k^2 - \beta_k^2)\omega^2 + \omega^4}. \quad (12.105)$$

Цей вираз являє собою нелінійну математичну модель спектральної щільності випадкового процесу вихідного параметра динамічної системи верстата.

Математична модель включає три групи коефіцієнтів  $D_k$ ,  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  і залежний від них коефіцієнт  $\gamma_k$ . Ці коефіцієнти визначаються за експериментальними спектрами віброприскорень чи спектра акустичного сигналу.

При визначенні коефіцієнтів враховуються характерні особливості математичної моделі, зокрема точки екстремумів базисних функцій.

Розроблений **метод визначення коефіцієнтів** полягає в наступному. Використовується одержана експериментально спектральна щільність віброприскорень чи рівня звукового тиску. На рис. 12.27 наведена типова експериментальна спектрограма віброприскорень корпусу шпіндельної бабки токарно-гвинторізного верстата КА-280 [72].

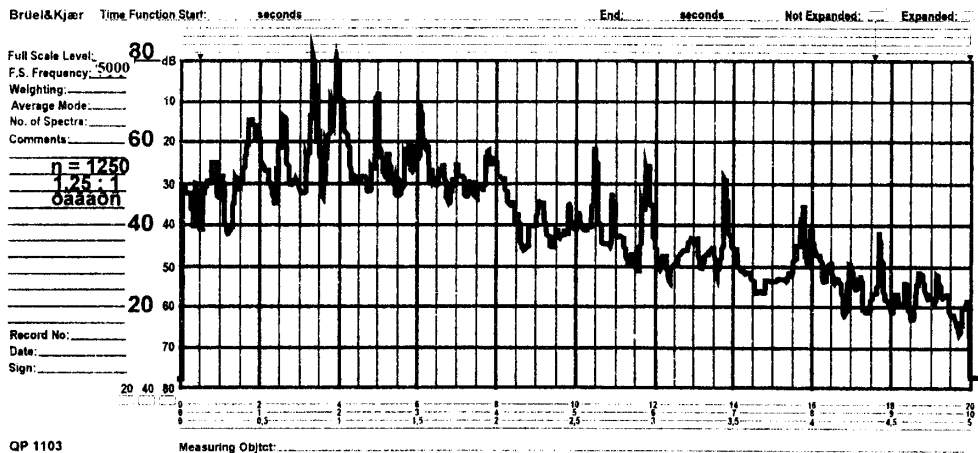


Рис. 12.27. Експериментальна спектрограма віброприскорень корпусу шпіндельної бабки верстата КА-280

Із аналізу спектрограми випливає, що частотний діапазон віброакустичних впливів, суттєвих за рівнем віброприскорень, складає 0...5 кГц. В межах даного частотного діапазону мають місце декілька десятків резонансних піків спектральної щільності. Для кожного з цих піків шляхом підбору знаходяться резонансні частоти, що наближено (див: формули (12.99) та (12.103)) відповідають коефіцієнтам  $\beta_k$  математичної моделі. Для спектрограми, наведеної на рис. 12.27, знайдені значення окремих резонансних частот складають:

$\beta_0 = 3000$	$\beta_9 = 450$	$\beta_{33} = 1650$	$\beta_{41} = 1420$
$\beta_1 = 1450$	$\beta_{10} = 140$	$\beta_{34} = 1550$	$\beta_{42} = 1320$
$\beta_2 = 5000$	$\beta_{15} = 1940$	$\beta_{35} = 40$	$\beta_{54} = 2120$
$\beta_3 = 1000$	$\beta_{16} = 2280$	$\beta_{36} = 70$	$\beta_{55} = 950$
$\beta_4 = 840$	$\beta_{30} = 2200$	$\beta_{37} = 170$	$\beta_{61} = 750$
$\beta_7 = 1520$	$\beta_{31} = 1750$	$\beta_{38} = 2070$	
$\beta_8 = 650$	$\beta_{32} = 1840$	$\beta_{39} = 2010$	

Визначені коефіцієнти  $\beta_k$  використовуються для знаходження інших коефіцієнтів моделі –  $\alpha_k, D_k$ .

Нижче наведено ряд знайдених коефіцієнтів, що відповідають рис. 12.27.

$\alpha_0 = 1550$	$D_0 = 2,5$	$\alpha_{32} = 30$	$D_{32} = 0,05$
$\alpha_1 = 650$	$D_1 = 0,9$	$\alpha_{33} = 30$	$D_{33} = 0,05$
$\alpha_2 = 1000$	$D_2 = 1,7$	$\alpha_{34} = 30$	$D_{34} = 0,05$
$\alpha_3 = 1050$	$D_3 = 0,9$	$\alpha_{35} = 30$	$D_{35} = 0,025$
$\alpha_4 = 25$	$D_4 = 0,14$	$\alpha_{36} = 10$	$D_{36} = 0,006$
$\alpha_7 = 70$	$D_7 = 0,25$	$\alpha_{37} = 20$	$D_{37} = 0,015$
$\alpha_8 = 40$	$D_8 = 0,15$	$\alpha_{38} = 20$	$D_{38} = 0,035$
$\alpha_9 = 90$	$D_9 = 0,35$	$\alpha_{39} = 20$	$D_{39} = 0,025$
$\alpha_{10} = 45$	$D_{10} = 0,07$	$\alpha_{41} = 20$	$D_{41} = 0,025$
$\alpha_{15} = 60$	$D_{15} = 0,25$	$\alpha_{42} = 20$	$D_{42} = 0,025$
$\alpha_{16} = 40$	$D_{56} = 0,11$	$\alpha_{54} = 20$	$D_{54} = 0,02$
$\alpha_{30} = 30$	$D_{30} = 0,05$	$\alpha_{55} = 20$	$D_{55} = 0,035$
$\alpha_{31} = 30$	$D_{31} = 0,06$	$\alpha_{61} = 40$	$D_{61} = 0,025$

Спочатку знаходиться наближена математична модель, яка включає лише базисні функції  $\varphi_{2k}(\omega)$  (формула (12.93)). Для цієї моделі за коефіцієнтами  $\beta_k$  підбираються коефіцієнти  $\alpha_k$  і  $D_{2k}$  із умови, щоб одержана математична модель наближено відповідала вихідній спектральній щільності.

Підібрані значення коефіцієнтів, що відповідають рис. 12.27, наведені нижче у вигляді масивів пакету MathCAD:

	0
0	$1,55 \cdot 10^3$
1	650
2	$1 \cdot 10^3$
3	$1,05 \cdot 10^3$
4	25
5	25
6	30
7	70
8	40
9	90
10	45
11	20
12	40
13	40
14	25
15	60

	0
0	$3 \cdot 10^3$
1	$1,45 \cdot 10^3$
2	$5 \cdot 10^3$
3	$1 \cdot 10^3$
4	840
5	$1 \cdot 10^3$
6	$1,24 \cdot 10^3$
7	$1,52 \cdot 10^3$
8	650
9	450
10	240
11	$2,63 \cdot 10^3$
12	$2,96 \cdot 10^3$
13	$3,45 \cdot 10^3$
14	$3,94 \cdot 10^3$
15	$1,94 \cdot 10^3$

	0
0	2,5
1	0,9
2	1,7
3	0,9
4	0,14
5	0,14
6	0,14
7	0,25
8	0,15
9	0,35
10	0,07
11	0,09
12	0,18
13	0,17
14	0,08
15	0,25

Всього для спектра, зображеного на рис. 12.27, визначено 283 резонансні частоти і відповідно 283 коефіцієнти  $\beta_k$ ,  $\alpha_k$  і  $D_{2k}$ .

Нижче (рис. 12.28) наведені результати розрахунків спектра віброприскорень за знайденою наближеною математичною моделлю:

$$N := 282 \quad k := 0..N \quad \gamma_k := \frac{\alpha_k}{\beta_k} \quad (12.106)$$

$$S(\omega) := \frac{1}{\pi} * \sum_{k=0}^N D_k * \frac{(\alpha_k + \gamma_k * \beta_k) * [(\alpha_k)^2 + (\beta_k)^2] + (\alpha_k - \gamma_k * \beta_k) * \omega^2}{[(\alpha_k)^2 + (\beta_k)^2]^2 + 2[(\alpha_k)^2 + (\beta_k)^2] * \omega^2 + \omega^4}$$

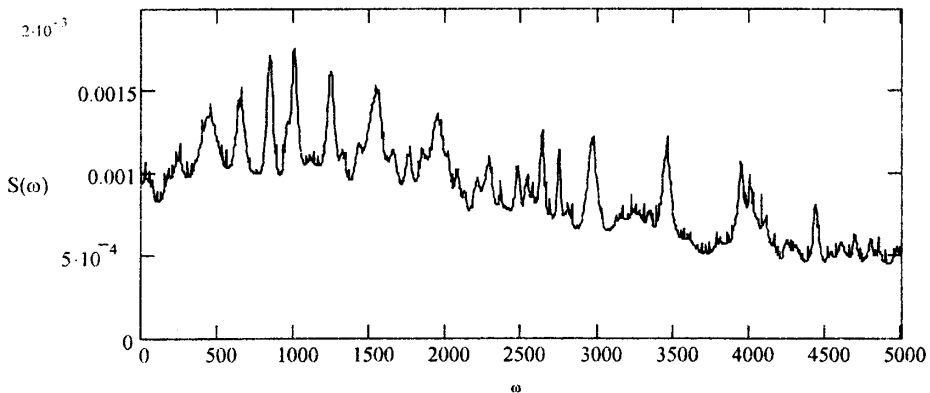


Рис. 12.28. Результати розрахунків спектра віброприскорень за наближеною математичною моделлю

Експериментальні спектрограми, як правило, будуються в логарифмічному масштабі по осі абсцис так, як це показано на рис. 12.27. Ця обставина не є суттєвою. Для переходу від логарифмічного масштабу до дійсного значення спектральної щільності використовують наближену математичну модель.

На рис. 12.29 наведено розрахунок дійсних значень спектральної щільності, одержаний шляхом потенціювання наближеної математичної моделі:

$$\text{coe} := 0.008$$

$$L(\omega) := 0.00036 \cdot 10 \left[ \frac{1}{\text{coe}} \sum_{k=0}^N D_k \left[ \frac{(\alpha_k + \gamma_k \cdot \beta_k)(\alpha_k \gamma + (\beta_k \gamma)^2 + (\alpha_k - \gamma_k \cdot \beta_k) \omega^2)}{(\alpha_k \gamma + (\beta_k \gamma)^2 + 2 \cdot (\alpha_k \gamma + (\beta_k \gamma)^2) \omega^2 + \omega^4)} \right] \right] \quad (12.107)$$

$$L(1000) = 1.822 \cdot 10^{-3}$$

$$L(5000) = 5.322 \cdot 10^{-4}$$

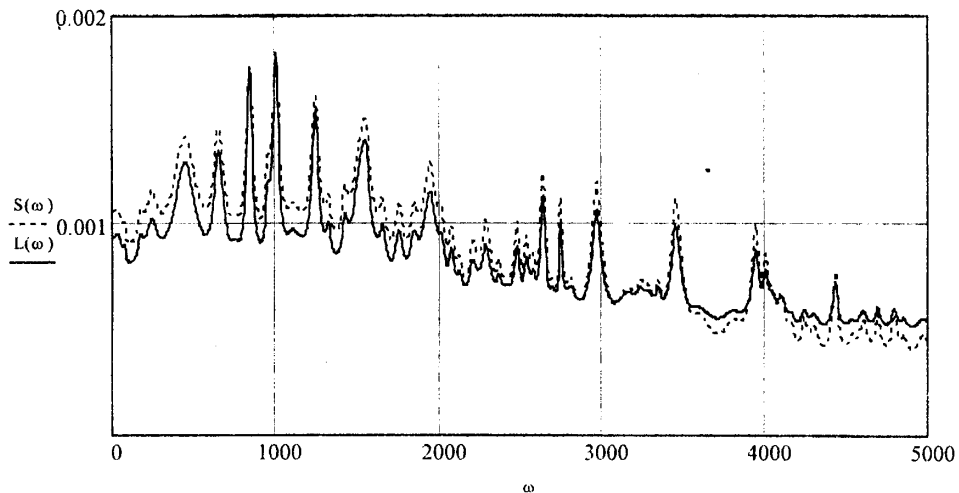


Рис. 12.29. Порівняння спектральних щільностей, зображених відповідно в логарифмічному (суцільна крива) і лінійному (пунктирна крива) масштабах по осі ординат

Із порівняння кривих в різних масштабах випливає, що залежності мають близькі значення і використання логарифмічного масштабу не є суттєвим.

Одержана раніше наближена математична модель (12.106), яка включає базисні функції лише одного виду, є досить неточною. Для її уточнення вводиться друга частина математичної моделі. Початково вважається, що

$$D_{2k} = D_{1k} = D_k / 2,$$

і виконуються обчислення з подальшим уточненням значень коефіцієнтів. Уточнення значень коефіцієнтів здійснено методом найменших квадратів.

Знайдені уточнені значення коефіцієнтів моделі мають вигляд:

	0		0		0		0
0	1,55·10 <sup>3</sup>	0	3·10 <sup>3</sup>	0	0,518	0	1,774
1	650	1	1,45·10 <sup>3</sup>	1	0,258	1	0,656
2	1·10 <sup>3</sup>	2	5·10 <sup>3</sup>	2	0,491	2	1,256
3	1,05·10 <sup>3</sup>	3	1·10 <sup>3</sup>	3	0,194	3	0,695
4	25	4	840	4	0,036	4	0,103
5	25	5	1·10 <sup>3</sup>	5	0,03	5	0,1
6	30	6	1,24·10 <sup>3</sup>	6	0,04	6	0,103
7	70	7	1,52·10 <sup>3</sup>	7	0,071	7	0,176
8	40	8	650	8	0,045	8	0,119
9	90	9	450	9	0,095	9	0,273
10	45	10	240	10	0,02	10	0,05
11	20	11	2,63·10 <sup>3</sup>	11	0,027	11	0,064
12	40	12	2,96·10 <sup>3</sup>	12	0,042	12	0,134
13	40	13	3,45·10 <sup>3</sup>	13	0,037	13	0,136
14	25	14	3,94·10 <sup>3</sup>	14	0,024	14	0,06
15	60	15	1,94·10 <sup>3</sup>	15	0,056	15	0,189

Всього визначено 283 пар коефіцієнтів  $D_{1k}$  і  $D_{2k}$ .

Результати розрахунків спектра віброприскорень за уточненою моделлю наведені нижче (рис. 12.30).

$$S_{12}(\omega) := \frac{1}{\pi} * \sum_{k=0}^N \left[ D_{1k} * \left[ \frac{(\alpha_k + \gamma_{1k} * \beta_k) * [\alpha_k]^2 + (\beta_k)^2}{[\alpha_k]^2 + (\beta_k)^2} + \frac{(\alpha_k + \gamma_{1k} * \beta_k) * \omega^2}{2 * [\alpha_k]^2 - (\beta_k)^2} * \omega^2 + \omega^4 \right] + D_{2k} * \left[ \frac{(\alpha_k + \gamma_k * \beta_k) * [\alpha_k]^2 + (\beta_k)^2}{[\alpha_k]^2 + (\beta_k)^2} + \frac{(\alpha_k + \gamma_k * \beta_k) * \omega^2}{2 * [\alpha_k]^2 - (\beta_k)^2} * \omega^2 + \omega^4 \right] \right] \quad (12.108)$$

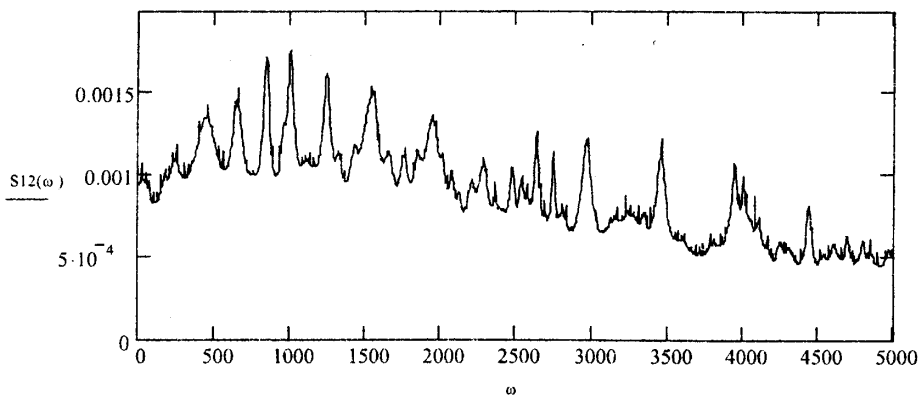


Рис. 12.30. Результати розрахунків спектра віброприскорень за уточненою математичною моделлю

Знаходження кореляційної функції стохастичного динамічного процесу верстата виконано шляхом перетворення Фур'є знайденого аналітичного виразу процесу (12.208) спектральної щільності віброакустичного параметра.

За спектральною щільністю випадкового процесу знаходиться кореляційна функція (автокореляційна функція). Згідно [19], спектральній щільності виду (12:208) відповідає кореляційна функція у вигляді добутку експоненціальної та тригонометричних функцій:

$$R(\tau) = \sum_{k=0}^{N1} \sum_{l=1}^2 D_{ik} \cdot e^{-\alpha_k |\tau|} \cdot [\cos(\beta_k \tau) + \gamma_k \cdot \sin(\beta_k |\tau|)] \quad (12.209)$$

Результати розрахунків згідно даної залежності наведено нижче (рис. 12.65).

$$R(\tau) := \sum_{k=0}^{282} D1_k \cdot e^{-\alpha_k |\tau|} \cdot [\cos(\beta_k \cdot \tau) + \gamma1_k \cdot \sin(\beta_k \cdot |\tau|)] + D2_k \cdot e^{-\alpha_k |\tau|} \cdot [\cos(\beta_k \cdot \tau) + \gamma_k \cdot \sin(\beta_k \cdot |\tau|)]. \quad (12.210)$$

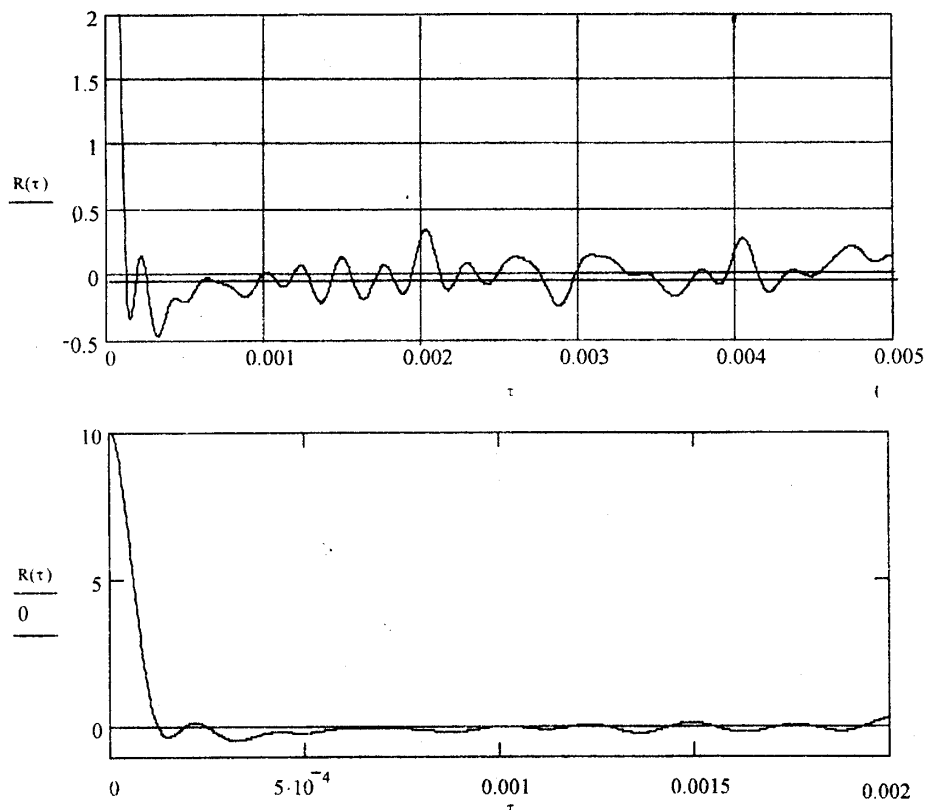


Рис. 12.65. Значення кореляційних функцій, одержані в результаті перетворення математичної моделі експериментально визначеного спектра віброприскорень (графіки мають різні масштаби)



### 12.4. Спектральні характеристики мікро профілю поверхні, одержаної обробкою фрезою косокутного різання на фрезерному верстаті

Поверхня оброблена на верстаті з використанням розробленої прогресивної конструкції фрези з рухомим чистовим ножем. При обробці плоских поверхонь використовуються різні схеми торцевого фрезерування, при яких видалення припуску здійснюється нерухомими відносно корпусу фрези ножами, а також ножами, що змінюють своє положення відносно корпусу фрези (рис. 12.73) [10–16].

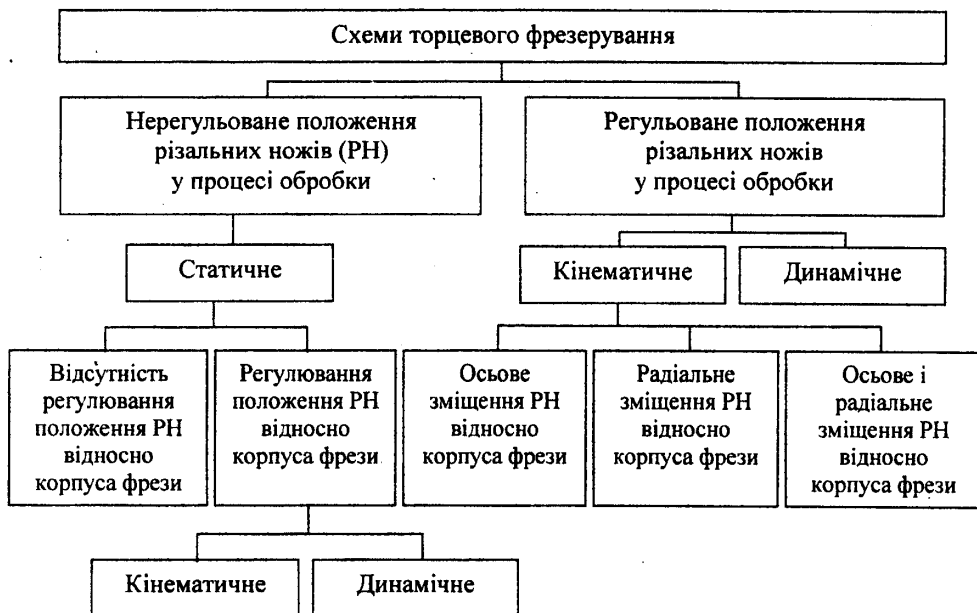


Рис. 12.73. Схеми торцевого фрезерування

До статичних схем фрезерування можна віднести такі, при яких різальні ножі (РН) торцевих фрез нерухомі в процесі обробки, а до кінематичних і динамічних – схеми фрезерування, при яких ножі рухаються в процесі обробки, при цьому рух ножа здійснюється за допомогою регулюючих пристроїв, які здійснюють зворотний зв'язок.

Підвищення продуктивності та якості обробки в сучасних конструкціях чистових торцевих фрез, в яких використані статичні схеми різання, досягається:

- збільшенням можливого числа ножів при зменшенні габаритів механізмів їх кріплення та регулювання, а також підвищення надійності фіксації ножів у корпусі фрези;
- перерозподілом подач на:  $S_1$  – для чорнових ножів,  $S_2$  – для чистових РН, де  $S_1 > S_2$ , що забезпечує менше навантаження чистових ножів;
- забезпеченням одночасного регулювання кутів у плані та осьового вильоту ножів;
- використанням фрезерування торцевими фрезами з полікристалічними надтвердими матеріалами (ПНТМ), для яких відмічається малий розмірний знос і висока стійкість інструмента (до 100 мкм – при обробці сталей, до 200 мкм – при обробці чавунів).

Недоліком статичних схем фрезерування є те, що за рахунок існуючих похибок базування та закріплення фрез і заготовок виникають похибки розташування ножів фрез відносно координатних осей верстата. Це призводить до нерівномірного навантаження рухомих ножів і сприяє їх підвищеному зношуванню. Крім цього, погіршена динаміка процесу фрезерування не дає можливості забезпечити очікувану якість оброблених поверхонь.

Існують конструкції торцевих фрез, де використані кінематичні схеми фрезерування.

В торцевій фрезі [18–20], яка реалізує спосіб плоского фрезерування з кінематичною схемою фрезерування, підвищення продуктивності торцевого фрезерування відбувається установкою нерухомих чорнових ножів на більшому радіусі і з меншим осьовим вильотом, ніж рухомих по копію чистових ножів, що встановлені з більшим осьовим вильотом (рис. 12.74).

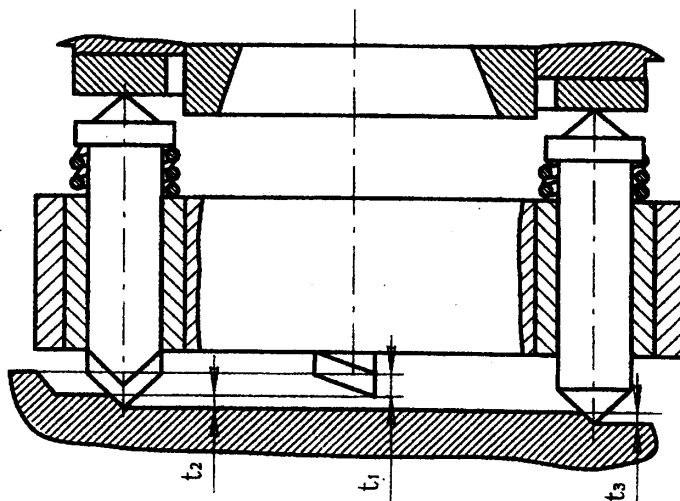
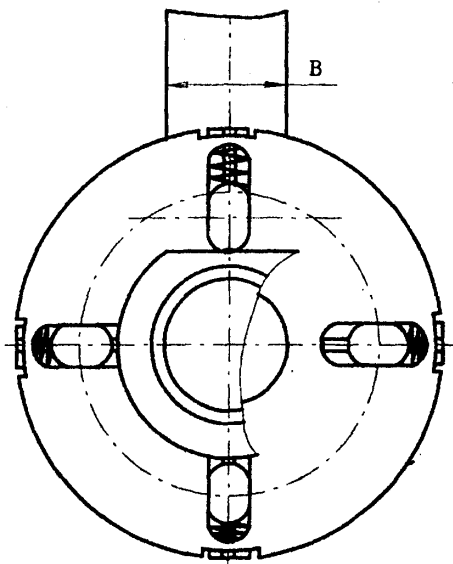


Рис. 12.74. Конструкція торцевої фрези згідно з А.с. 971591, МКИ В 23 С 5/06s

При цьому реалізується колова траєкторія контакту рухомого ножа фрези із заготовкою. Шорсткість поверхні змінюється по ширині заготовки: мінімальна – в точках входу ножа у зону різання та виходу його з неї, максимальна – при миттєвому куті контакту, рівному  $90^\circ$ .

Відома також конструкція фрези, яка реалізує спосіб плоского фрезерування, де підвищення стійкості різального інструменту здійснюється завдяки тому, що в корпусі фрези встановлені РН, підпружинені до нерухомого відносно корпусу фрези кулачка, встановленого співвісно з корпусом. Кулачок виконаний у вигляді циліндра з плоскою, паралельною осі лискою, а рухомі ножі підпружинені до нього в радіальному напрямку (рис. 12.75).



*Рис. 12.75. Конструкція торцевої фрези згідно з А.с. 1641523, МКИ В 23 С 5/06*

Недоліком такої конструкції є розташування ножів торцевої фрези на однаковому радіусі. Це збільшує вимоги до точності їх взаємного розташування, оскільки існуючі радіальні биття призводять до схем різання лише окремими ножами. За рахунок прямолінійної траєкторії рухомого ножа різання відбувається з постійною в часі товщиною зрізу. Це призводить до виникнення удару при врзанні ножа, що негативно впливає на динаміку процесу фрезерування.

Подальшим напрямком вдосконалення торцевих фрез є використання динамічних схем. Для ряду конструкцій торцевих фрез можуть бути використані динамічні схеми фрезерування з:

- врівноваженням осьових сил різання та стабілізацією сил закріплення;
- підвищенням стійкості інструменту при саморегулюванні радіального положення ножа за величиною сили різання безпосередньо у процесі роботи інструменту.

Недостатність теоретичних та експериментальних даних не дозволяє повною мірою використовувати ці схеми.

Тому в подальшому розглянемо можливість використання більш поширених кінематичних схем фрезерування для підвищення якості оброблених поверхонь.

Шорсткість обробленої поверхні є одним із найважливіших показників якості.

Дослідженнями встановлено, що дійсна висота мікронерівностей значно відрізняється від теоретичної, розрахункової шорсткості та визначається за формулою:

$$Rz = Rz_{\text{розр}} + \Delta Rz + \Delta Rz_{\text{в}} + \Delta Rz_{\Sigma}, \quad (12.221)$$

де  $Rz_{\text{розр}}$  – розрахункова висота мікронерівностей;

$\Delta Rz$  – складова, яка враховує вплив фізико-механічних явищ при різанні;

$\Delta Rz_{\text{в}}$  – складова, яка враховує вплив динамічних явищ при різанні;

$\Delta Rz_{\Sigma}$  – складова, яка враховує вплив похибок технологічної системи:

$$\Delta Rz_{\Sigma} = \Delta_{\text{уст}} + \Delta_{\text{пр}} + \Delta_{\text{фр}} + \Delta_{\text{ел}} + \Delta_{\text{геом}} + \Delta_{\text{кін}} + \Delta_{\text{дин}}, \quad (12.222)$$

де  $\Delta_{\text{уст}}$ ,  $\Delta_{\text{пр}}$  – зміна висоти мікронерівностей за рахунок похибок встановлення та закріплення заготовки на верстаті та нерівномірності припуску заготовки;

$\Delta_{\text{фр}}$ ,  $\Delta_{\text{ел}}$  – зміна висоти мікронерівностей за рахунок похибок встановлення і закріплення фрези на верстаті та взаємного розташування ножів фрези;

$\Delta_{\text{геом}}$ ,  $\Delta_{\text{кін}}$ ,  $\Delta_{\text{дин}}$  – зміна висоти мікронерівностей за рахунок похибок та мінливості геометричних, кінематичних та динамічних параметрів верстата.

Розрахункова висота мікронерівностей може бути визначена за формулою:

$$Rz_{\text{розр}} = \frac{S_z^2}{8r} \left( 1 - \frac{x^2}{R^2} \right), \quad (12.223)$$

де  $S_z$  – подача на зуб;

$r$  – радіус при вершині ножа;

$x$  – відстань зсуву площини, в якій вимірюється шорсткість;

$R$  – радіус фрези.

Розрахункова висота мікронерівностей для торцевої фрези  $R = 157$  мм,  $r = 12$  мм при  $S_z = 0,25$  мм/зуб в залежності від зсуву площини, в якій вимірюється шорсткість, показана на рис. 12.76.

Таким чином, отримуємо змінну шорсткість обробленої поверхні по дузі контакту ножа із заготовкою, а коливання товщини зрізу призводить до періодичних коливань складових сили різання.

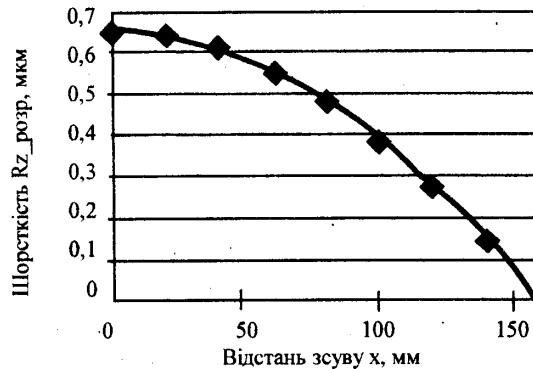


Рис. 12.76. Розрахункова висота мікронерівностей в залежності від зсуву площини, в якій вимірюється шорсткість

При традиційній схемі розташування фрези відносно заготовки з коловою траєкторією руху ножа товщина зрізу є також змінною і може бути розрахована за залежністю [10]:

$$a = S_z \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi_i, \quad (12.224)$$

де  $a$  – товщина зрізу;  
 $S_z$  – подача на зуб;  
 $\varphi$  – кут у плані;  
 $\psi_i$  – миттєвий кут.

Періодичні коливання товщини зрізу призводять до деформацій в системі ВПІД, що також негативно впливає на якість обробленої поверхні.

Для стабілізації шорсткості обробленої поверхні та збільшення стійкості фрез запропоноване наступне.

При обертанні фрези ножі рухаються по незалежній траєкторії, де чорнові та напівчистові ножі знімають припуск по коловій траєкторії, а чистовий ніж, що формує оброблювану поверхню, розташований в радіальному напрямку на найменшій відстані від осі фрези з найбільшим вильотом відносно корпусу фрези, рухається по прямолінійній траєкторії за рахунок підпружинення в радіальному напрямку до нерухомого відносно корпусу фрези шаблону, який має плоску лиску, перпендикулярну до вектора подачі.

Зрізання припуску чистовими ножами відбувається з максимальною товщиною зрізу:

$$a = S_z \cdot \sin \varphi \cdot \sin 90^\circ = S_z \cdot \sin \varphi. \quad (12.225)$$

Таким чином, збільшується стійкість чорнових ножів фрези за рахунок зменшення товщини перерізу на ділянках входу і виходу різального ножа із зони обробки при коловій траєкторії різання, а якість обробленої поверхні підвищується за рахунок використання лінійної траєкторії різання чистовим

ножем, що призводить до стабільної висоти мікронерівностей вздовж ширини оброблюваної поверхні. Прогнозована теоретична висота мікронерівностей буде становити 0,65 мкм.

Для реалізації вищевказаного пропонується конструкція торцевої фрези з рухомих плунжером (рис. 12.77).

В корпусі торцевої фрези встановлені різальні вузли для радіального переміщення. Ці вузли складаються з ножа та плунжера для того, щоб підвищити стійкість інструменту шляхом забезпечення регулювання радіального положення ножа. Кожен різальний вузол оснащений пружиною та регулювальним гвинтом, який взаємодіє через пружину з плунжером.

У корпусі 1 розміщений плунжер 2 з ножом 3, які утримуються конусом 4 та штирем 5 і регулюються мікрометричним гвинтом 6. У радіальних отворах корпусу між регулюючим гвинтом 7 та плунжером 2 розміщена пружина 8. Для того щоб утримувати плунжер 2 від перекосу, в корпусі запресовується штифт 9. У плунжері 2 кріпиться за допомогою гвинта бронзовий штир 10, на якому встановлений підшипник 11. В процесі різання штир 10 рухається по шаблону 12 та змушує рухатися плунжер 2 у радіальному напрямку. За рахунок цього ніж 3 описує необхідну прямолінійну траєкторію в зоні обробки. Різальні ножі фрези розташовані за спірално-ступінчастою схемою, що сприяє підвищенню якості та продуктивності обробки. Для чорнових, напівчистових та чистових ножів використовується одне й теж саме закріплення, що дає можливість підвищити технологічність та спростити складення фрези.

Закріплення ножа відбувається наступним чином.

У плунжері 2 виконаний отвір для штиря 5, на якому з обох кінців нарізані різьби. На штир 5 насаджується конус 4 та загвинчується гайкою 13 і контргайкою 14 для запобігання відгвинчування гайки 13. Потім зібраний вузол вставляють у отвір плунжера 2. РН 3 закріплюється за рахунок переміщення вправо штиря 5 при загвинчуванні гайки 15. РН затягується після його кінцевого виставлення на необхідну глибину різання.

Використання запропонованого способу фрезерування плоских поверхонь забезпечує порівняно з відомими наступні переваги:

- отримання стабільної шорсткості поверхні вздовж ширини обробки за рахунок використання лінійної траєкторії різання чистовим ножом;
- збільшення стійкості чорнових ножів фрези за рахунок зменшення товщини зрізу на ділянках входу і виходу ножа із зони обробки при колійній траєкторії різання.

В подальшому, використовуючи запроповану конструкцію торцевої фрези, планується перехід до динамічної схеми різання, яка дозволить за рахунок зворотних зв'язків стабілізувати силові фактори фрезерування, зменшити вібрації системи і, таким чином, досягти оптимального співвідношення продуктивності та якості чистової обробки плоских і криволінійних поверхонь.

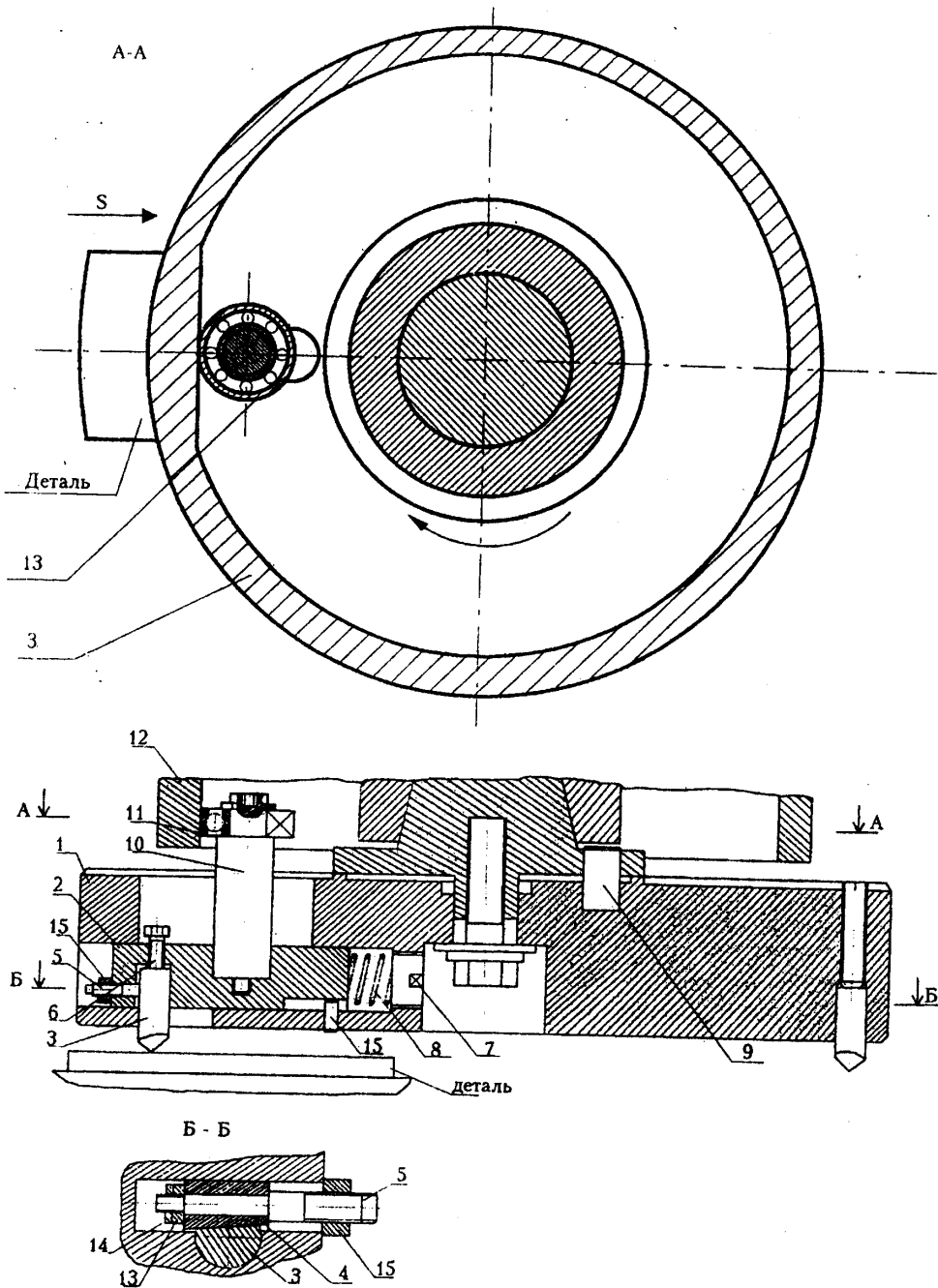


Рис. 12.77. Запропонована конструкція торцевої фрези з рухомим чистовим ножем

Для перевірки ефективності обробки заготовки фрезою запропонованої конструкції виконана обробка контрольних зразків заготовок і досліджені параметри обробленої поверхні. Для цього проведений комплекс експериментальних досліджень, які включали обробку спеціальних заготовок із наступним визначенням параметрів обробленої поверхні. Для контрольної обробки використані спеціальні призматичні заготовки з різних матеріалів (рис. 12.78).

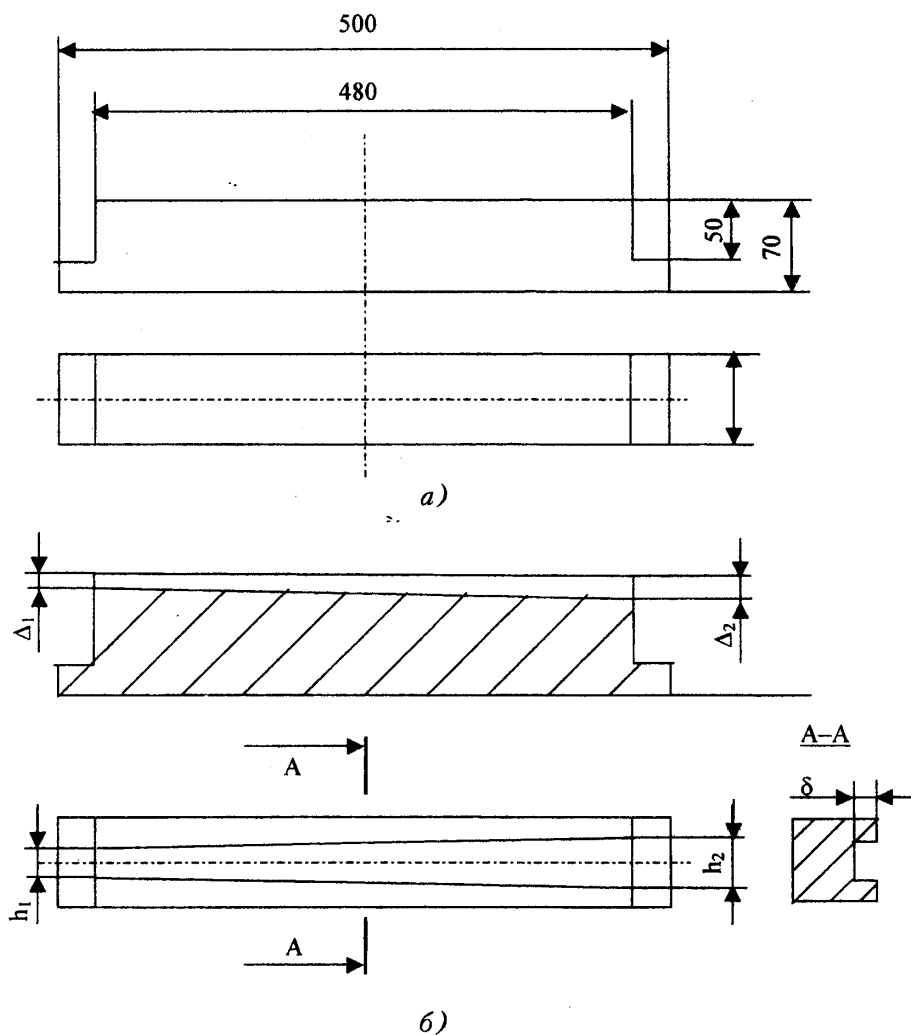


Рис. 12.78. Заготовки, які використовувались при дослідженнях процесу обробки фрезами косокутного різання: а – заготовка із суцільною поверхнею; б – заготовка з пазом



Заготовки виготовлені зі сталі Ст. 45 ГОСТ 1050-88 із термічною обробкою для забезпечення твердості обробленої поверхні 45...50HRC. Використовувались також заготовки, виготовлені з чавуну ВЧ 45-5 ГОСТ 7293-79. Твердість поверхні таких заготовок знаходилася в межах 160...220НВ.

Для визначення параметрів поверхні при обробці заготовок з виступами використана заготовка з пазом (рис. 12.78, б). Ширина та глибина паза змінювались по довжині заготовки. Використані заготовки із ширинами паза  $h_1 = 20$  мм та  $h_2 = 30$  мм при глибині паза  $\Delta_1 = 0,3$  мм,  $\Delta_2 = 0,5$  мм.

На заготовках виконані спеціальні виступи по краях, які служать для закріплення заготовки на столі верстата. Кріплення здійснене за допомогою прихоплювачів (рис. 12.79, а).

Виступи даної форми забезпечують надійне закріплення заготовки на столі та її базування по точній нижній плоскій поверхні.

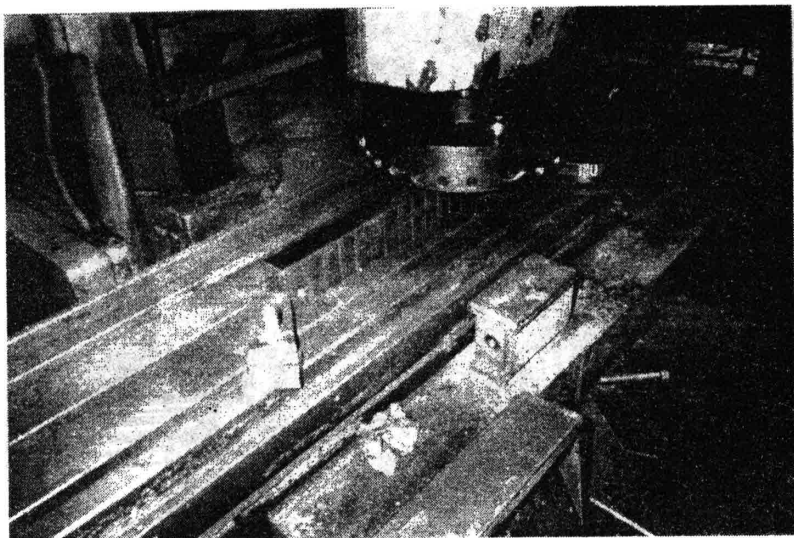
Заготовка оброблялась при різній комплектації ножів фрези. Зокрема, здійснена обробка фрезою з одним ножом (рис. 12.80, а). Проведена обробка заготовки фрезою зі всіма ножами, виключаючи рухомий чистовий ніж, і обробка заготовки фрезою з наявним рухомим чистовим ножом (рис. 12.80, б). Після обробки заготовки виконані вимірювання хвилястості обробленої поверхні.

Мікровідхилення профілю обробленої поверхні умовно поділяються на **хвилястість, шорсткість та субмікрошорсткість** поверхні.

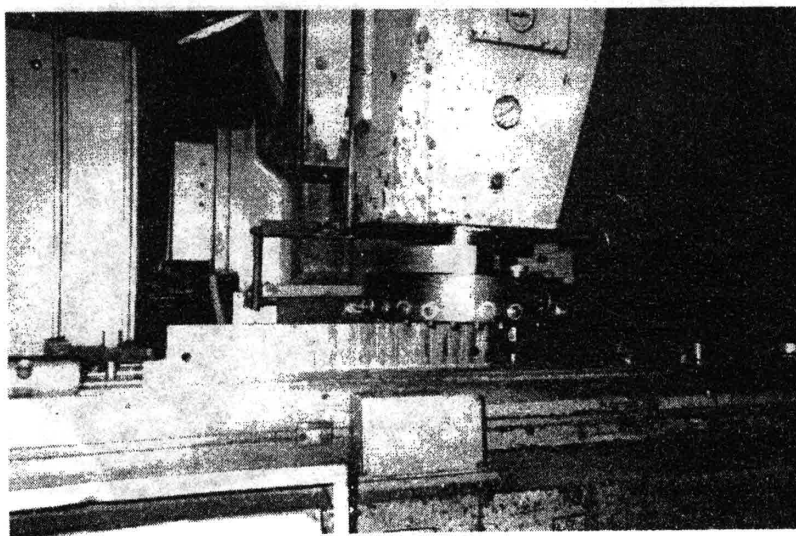
Хвилястість поверхні представляє собою відхилення реального профілю поверхні від номінального профілю, який представляє собою наближено рівні за розмірами підвищення та западини на обробленій поверхні. Для наближеного опису хвилястості форму перерізу обробленої поверхні апроксимують синусоїдою. Для характеристики хвилястості застосовують такі параметри, як крок хвилі  $S_m$  та висота хвилі  $R_t$ . Крок хвилі  $S_m$  – це відстань між сусідніми виступами на поверхні. Висота хвилі – це відстань між вершиною хвилі та її западиною. Ця відстань дорівнює подвійній амплітуді хвилі.

Наближений опис хвилястості аналітичною залежністю у вигляді синусоїди є надійним методом аналізу впливу різноманітних факторів на якість обробленої поверхні. Для більш точного опису форми поверхні використовують її розклад в ряди Фур'є і методи гармонічного та спектрального аналізу.

Оброблена поверхня має випадковий профіль. Для визначення його параметрів зроблено ряд вимірювань профілограм обробленої поверхні. Вимірювання профілограм виконані за допомогою приладу "Телесерф". Загальний вигляд приладу із контрольно-реєструючою апаратурою та процес вимірювання профілю поверхні показані на рис. 12.81.

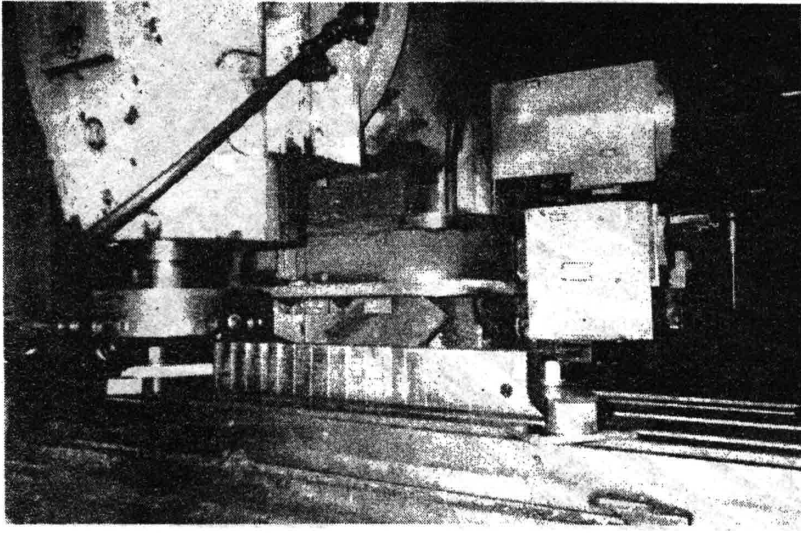


a)

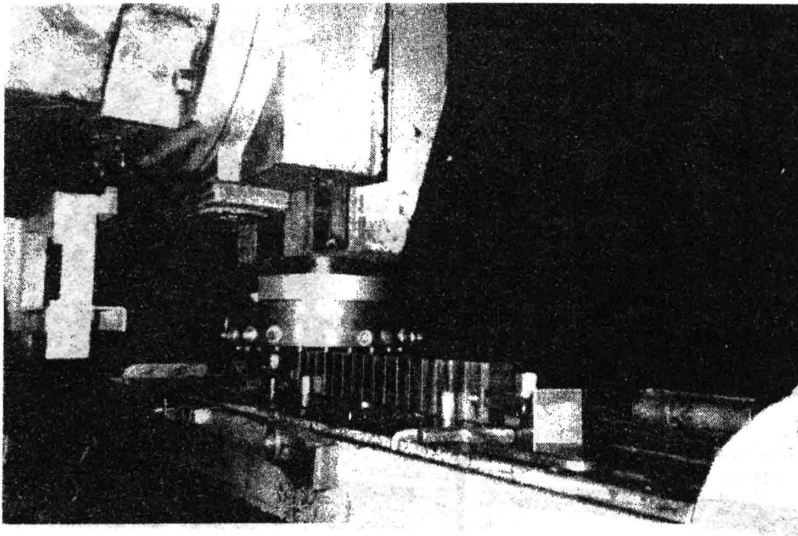


б)

Рис. 12.79. Закріплення заготовки на столі верстата: а – встановлення прихоплювача; б – форма виступу на поверхні заготовки

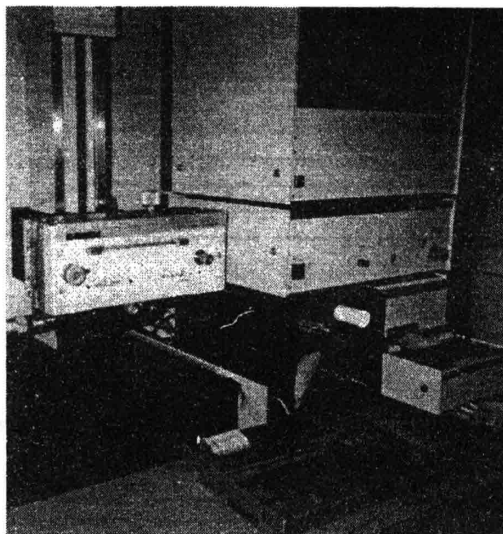


*a)*

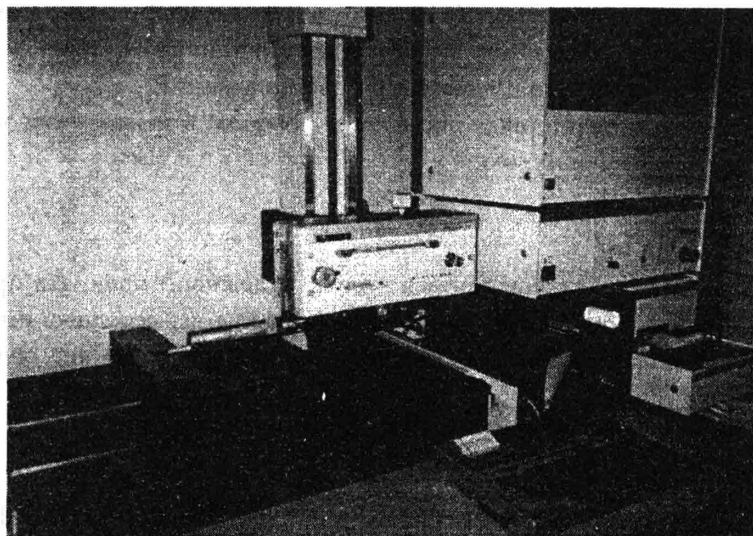


*б)*

*Рис. 12.80. Обробка заготовки фрезою з одним ножом (а)  
та зі всіма ножами (б)*



а)



б)

Рис. 12.81. Загальний вигляд апаратури та приладів (а) для вимірювання профілограм обробленої поверхні та вимірювання профілограми (б)

Профілограми одержані для різних перерізів обробленої поверхні. Перерізи, в яких зроблені вимірювання, розташовані в напрямку руху подачі (лінії 1...5) та перпендикулярно руху подачі (лінія 6) (рис. 12.82).

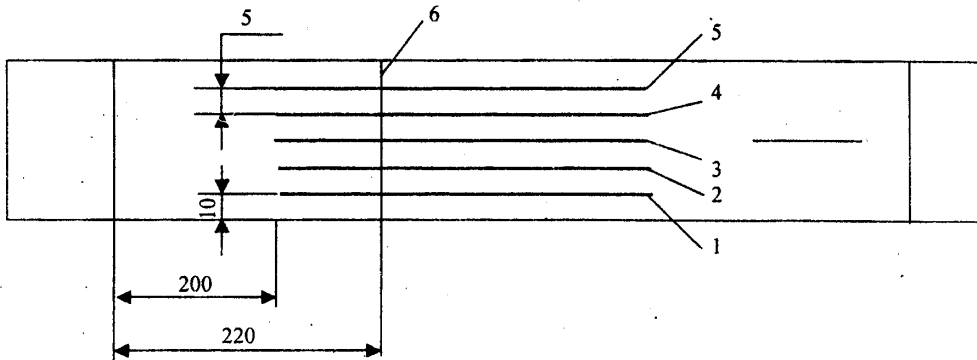


Рис. 12.82. Лінії вимірювань профілограм на обробленій поверхні деталі:  
1...5 – лінії вимірювань в напрямку подачі; 6 – лінія вимірювання  
перпендикулярно руху подачі

При вимірюваннях здійснювалась безпосередня статистична обробка профілограм апаратними засобами приладу “Телесерф”. Прилад безпосередньо записує ординати профілограм  $y(x)$  і знаходить характерні параметри хвилястості обробленої поверхні. При цьому визначаються наступні параметри:

$Rt1...Rt5$  – висота хвилі в межах базової довжини  $L$ ;

$Ra$  – середньоарифметичне відхилення профілю в межах базової довжини, яке знаходиться за формулою:

$$Ra = \frac{1}{L} \int_0^L |y(x)| dx,$$

де під знаком інтеграла знаходиться модуль залежності ординати профілю від довжини, причому ординати профілю вимірюються від середньої лінії;

$Rq$  – середньоквадратичне значення ординат профілю, яке обчислюється за формулою:

$$Rq = \frac{1}{L} \int_0^L [y(x)]^2 dx;$$

$Ry$  – максимальне значення висоти хвилі з п'яти найбільших  $Rt1...Rt5$  в межах базової довжини  $L$ ;

$Rtm$  – середньоарифметичне значення висоти хвилі з п'яти найбільших  $Rt1...Rt5$  в межах базової довжини;

$Rv$  – максимальна глибина профілю відносно середньої лінії;

$Rp$  – максимальна висота хвилі відносно середньої лінії;

$Sm$  – середня відстань між вершинами профілю, визначена вздовж середньої лінії;

$DELQ$  – кут нахилу профілю до середньої лінії;

$R_{sk}$  – коефіцієнт асиметрії закону розподілу ординат профілю;

$R_{ku}$  – коефіцієнт гостровершинності (ексцес) закону розподілу;

$S$  – середня відстань прилеглих локальних вершин, виміряна над середньою лінією профілю;

$R_{3z}$  – середня висота третьої найвищої вершини відносно третьої найнижчої западини профілю;

$R_{pm}$  – середньоарифметичне максимальної висоти профілю над середньою лінією, визначене для набору базових довжин профілю;

$R_{3y}$  – відстань від третьої найвищої вершини до третьої найнижчої западини в кожній пробній базовій довжині профілю.

Всі вищеназвані параметри обчислюються при вимірюваннях профілограм і виводяться на друк. Приклад запису профілограми і визначених параметрів профілю наведені на рис. 12.83.

R/ISO/0.25mm NORMAL  
ID: 3 27-SEP-1

PARAMETERS	
=====	
Rt1	7.5 um
Rt2	5.8 um
Rt3	7.7 um
Rt4	8.4 um
Rt5	10.9 um
Ra	1.56 um
Rq	1.90 um
Rv	10.9 um
Rtm	8.0 um
Rv	6.8 um
Rp	4.4 um
Sm	69.1 um
DELQ	13.2 deg
Rsk	-0.0
Rkv	2.8
S	19.1 um
R3z	4.9 um
Rpm	3.7 um
R3y	5.7 um

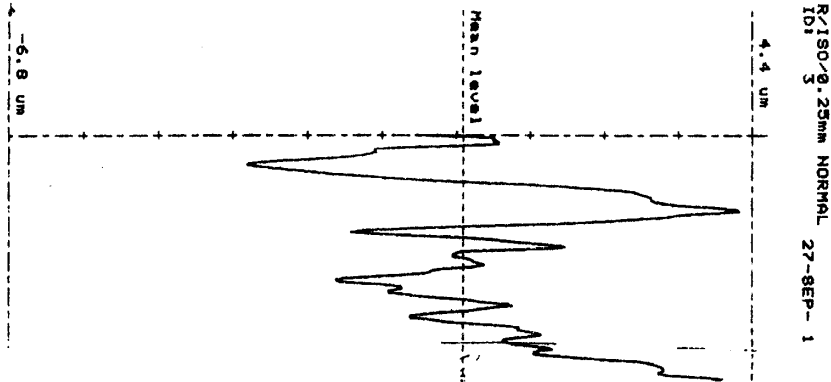


Рис. 12.83. Приклад виведення результатів вимірювань профілограми і визначення характерних параметрів профілю обробленої поверхні для фрези без чистового рухомого ножа при частоті обертання шпинделя 120 об/хв, подачі 15 мм/хв, товщині зрізаного шару 0,7 мм

Крім обчислення характерних параметрів мікропрофілю в результаті апаратурної обробки профілограми знаходяться та виводяться на друк гістограма щільності ймовірності розподілу ординат профілю та функція розподілу. Приклади визначення даних залежностей наведені на рис. 12.84.

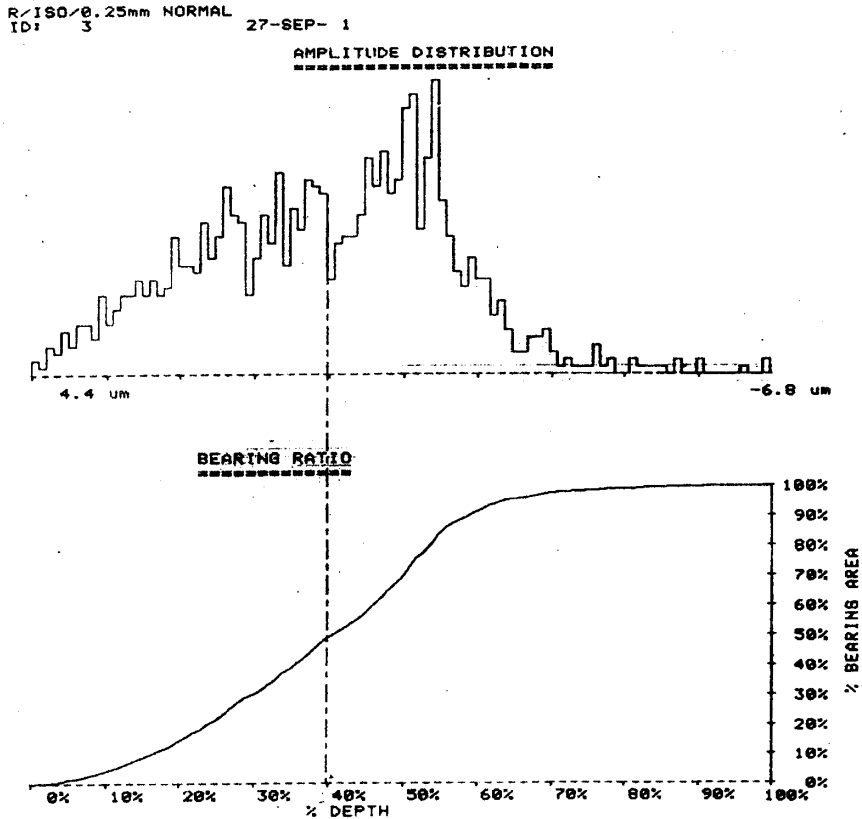


Рис. 12.84. Закон розподілу значень ординат профілю та функція розподілу, одержані в результаті апаратурної обробки профілограми фрезерованої поверхні, обробленої фрезою без рухомого чистового ножа

Апаратурна обробка профілограм дає можливість порівняти показники якості обробленої поверхні для різних інструментів або для інструментів різної комплектації. В процесі експериментальних досліджень зроблені порівняння профілограм поверхонь, оброблених фрезами з різною комплектацією різальним інструментом. Наведені вище профілограми та відповідні їм параметри обробленої поверхні, одержані при обробці фрезою без рухомого чистового ножа (див. рис. 12.76 та 12.77), порівнювались з відповідними даними профілограм поверхонь, одержаних обробкою заготовки фрезою із рухомих чистовим ножом. Фрагмент протоколу вимірювань профілограми обробленої поверхні наведений на

рис. 12.85.

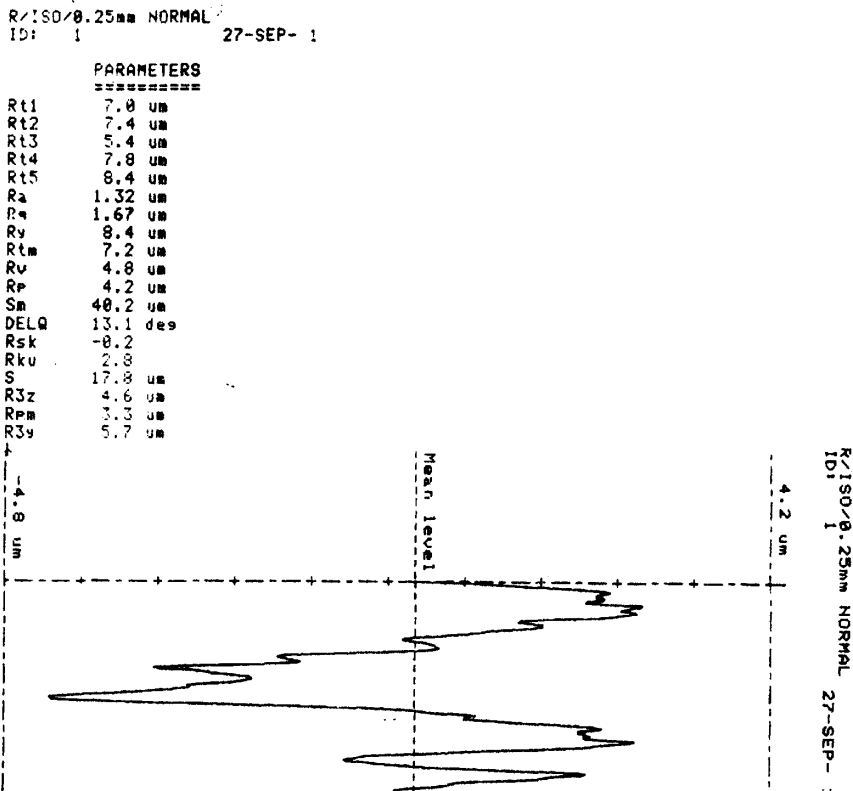


Рис. 12.85. Результати вимірювань профілограми обробленої поверхні при застосуванні фрези, оснащеної рухомим чистовим ножом, при подачі 15 мм/хв, частоті обертання шпинделя 120 об/хв, товщині зрізаного шару 0,75 мм

Поверхні, оброблені фрезою без рухомого чистового ножа та фрезою, оснащеною рухомим чистовим ножом, мають близькі значення параметрів, які характеризують хвилястість.

В цілому всі параметри хвилястості поверхні обробленою фрезою з рухомим чистовим ножом на 10...25 % менші за відповідні показники, отримані після обробки фрезою без рухомого чистового ножа. Середньоарифметична висота хвилі  $R_{tm}$  зменшується від 8 мкм до 7,2 мкм, а середньоарифметичне відхилення профілю  $R_a$  – від 1,56 мкм до 1,32 мкм. Середньоквадратичне відхилення профілю також зменшується. Його зміна складає від 1,90 мкм для поверхні, обробленої фрезою без чистового рухомого ножа, до 1,67 мкм для поверхні, обробленої фрезою з рухомим чистовим ножом.

Зменшується і період хвилястості. Середня відстань між прилеглими вершинами  $S_m$  зменшується від 69,1 мкм до 40,2 мкм, а середня відстань прилеглих локальних вершин зменшується від 19,1 мкм до 17,8 мкм.



В цілому профілограми поверхні, обробленої фрезою без рухомого чистового ножа, і поверхні, обробленої фрезою з рухомим чистовим ножем, є подібними (рис. 12.86).

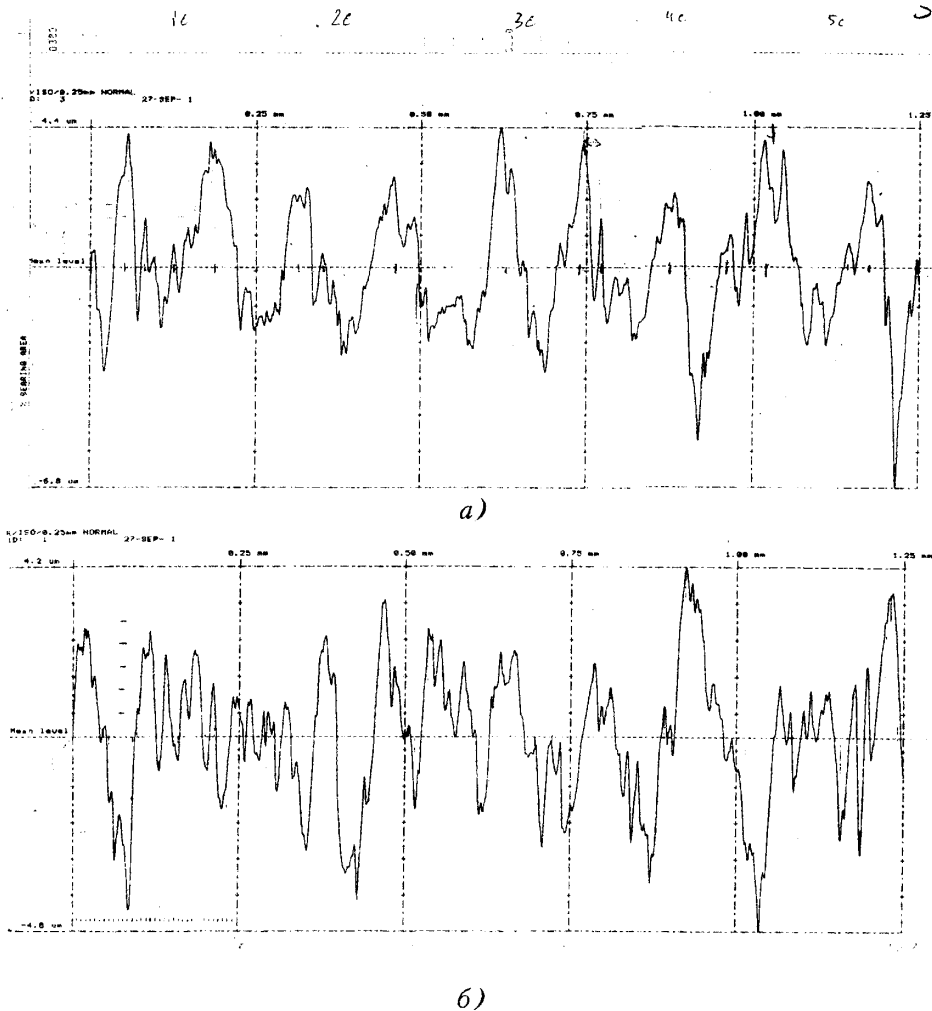


Рис. 12.86. Профілограми поверхонь, одержаних обробкою фрезою косокутного різання при частоті обертання шпинделя 120 об/хв, подачі – 15 мм/хв і товщині зрізуваного шару 0,7...0,75 мм: а – поверхня, оброблена фрезою без рухомого чистового ножа; б – поверхня, оброблена фрезою з рухомим чистовим ножем

Як впливає з аналізу рис. 12.86, обидві профілограми мають близьку кількість хвиль в межах базової довжини. Хвилі простежуються більш чітко на рис. 12.86, а. На цьому рисунку їх простежується приблизно 9. Період цих хвиль

складає приблизно 0,14 мм, що відповідає часовому проміжку 0,56 с. Цей часовий проміжок приблизно рівний часу одного оберту шпинделя – 0,5 с.

Певні зміни відбуваються і у визначених обробкою експериментальних даних законах розподілу випадкових значень ординат профілю. На рис. 12.87 наведений закон розподілу ординат у вигляді щільності ймовірності та закону розподілу.

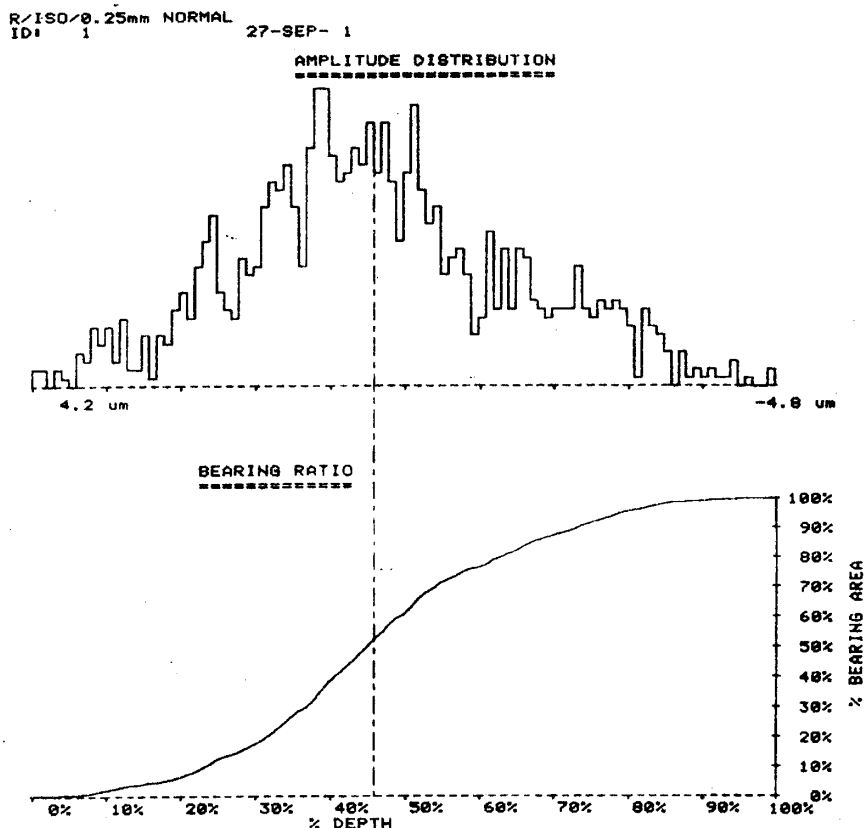


Рис. 12.87. Закон розподілу значень ординат профілю (а) та функція розподілу (б), одержані в результаті апаратної обробки профілограми поверхні, обробленої фрезею з рухомим чистовим ножем при подачі 15 мм/хв

З порівняння законів розподілу ординат профілю (див. рис. 12.84 та 12.87) впливає близькість в цілому цих законів. Дані закони мають однакові значення коефіцієнтів гостровершинності (ексцесу)  $Rku = 2,8$ . Ординати профілограми, одержані при обробці поверхні фрезею без рухомого чистового ножа, мають нульовий коефіцієнт асиметрії  $Rsk = 0$  (див. рис. 12.83). В той же час профілограма поверхні, обробленої фрезею з рухомим чистовим ножем, має коефіцієнт асиметрії  $Rsk = -0,2$  (див. рис. 12.86).

Для знаходження інтегральних показників якості обробленої поверхні проведені кореляційний та спектральний аналізи експериментально визначених профілограм обробленої поверхні. Виконана обробка випадкового процесу, що відповідає профілограмам. Профілограма обробленої поверхні, зокрема, профілограма, наведена на рис. 12.86, б, за допомогою аналого-цифрового перетворювача, приведена до набору векторів  $z_1, z_2, \dots, z_5$ . Числові значення компонент векторів, сформованих в пакеті MathCAD, наведені на рис. 12.88. Із п'яти окремих векторів формується один вектор-стовпець  $z_{12}$  розмірністю 175. Для отримання символної залежності для опису профілограми виконана інтерполяція точкових значень профілограми кубічними сплайнами. Фрагмент документу MathCAD, призначений для реалізації даної процедури, та графічна інтерпретація результатів розрахунків наведені на рис. 12.89.

Одержана неперервна символна залежність задовільно описує профілограму обробленої поверхні. Це впливає з порівняння графіків: експериментально визначеного (див. рис. 12.86, б) і розрахованого шляхом інтерполяції (див. рис. 12.89).

Неперервна символна залежність використана для одержання масиву точкових значень профілограми  $V_y$ , який нараховує 1250 складових. Це відповідає визначенню значення ординат профілю з дискретністю 1 мкм по довжині при загальній базовій довжині 1,25 мм. Одночасно формується масив аргументів профілограми  $V_x$ , який включає поздовжні координати точок в межах базової довжини, визначені з дискретністю 1 мкм.

Документ MathCAD, який включає процедуру знаходження точкових координат профілограми, наведений на рис. 12.90.

Із порівняння наведених на рисунку графіків символної залежності та стовпчастої діаграми точкових значень координат профілю впливає їх точна кількісна та якісна відповідність.

Масив точкових значень координат гістограми використаний для знаходження різноманітних статистичних характеристик профілограми. Зокрема, знайдені закони розподілу ординат профілю. Для цього використані стандартні процедури пакету MathCAD. На рис. 12.91 наведені обчислення гістограми розподілу ординат профілю за допомогою пакету MathCAD.

Одержана гістограма (див. рис. 12.91) в цілому відповідає гістограмі розподілу значень ординат профілю, наведеної на рис. 12.87. Дані гістограми мають близькі показники асиметрії та конфігурації. Розрахована гістограма (рис. 12.91) є менш детальною за визначену приладом. Це пояснюється деяким згладжуванням кривої при її виведенні за допомогою аналого-цифрового перетворювача.

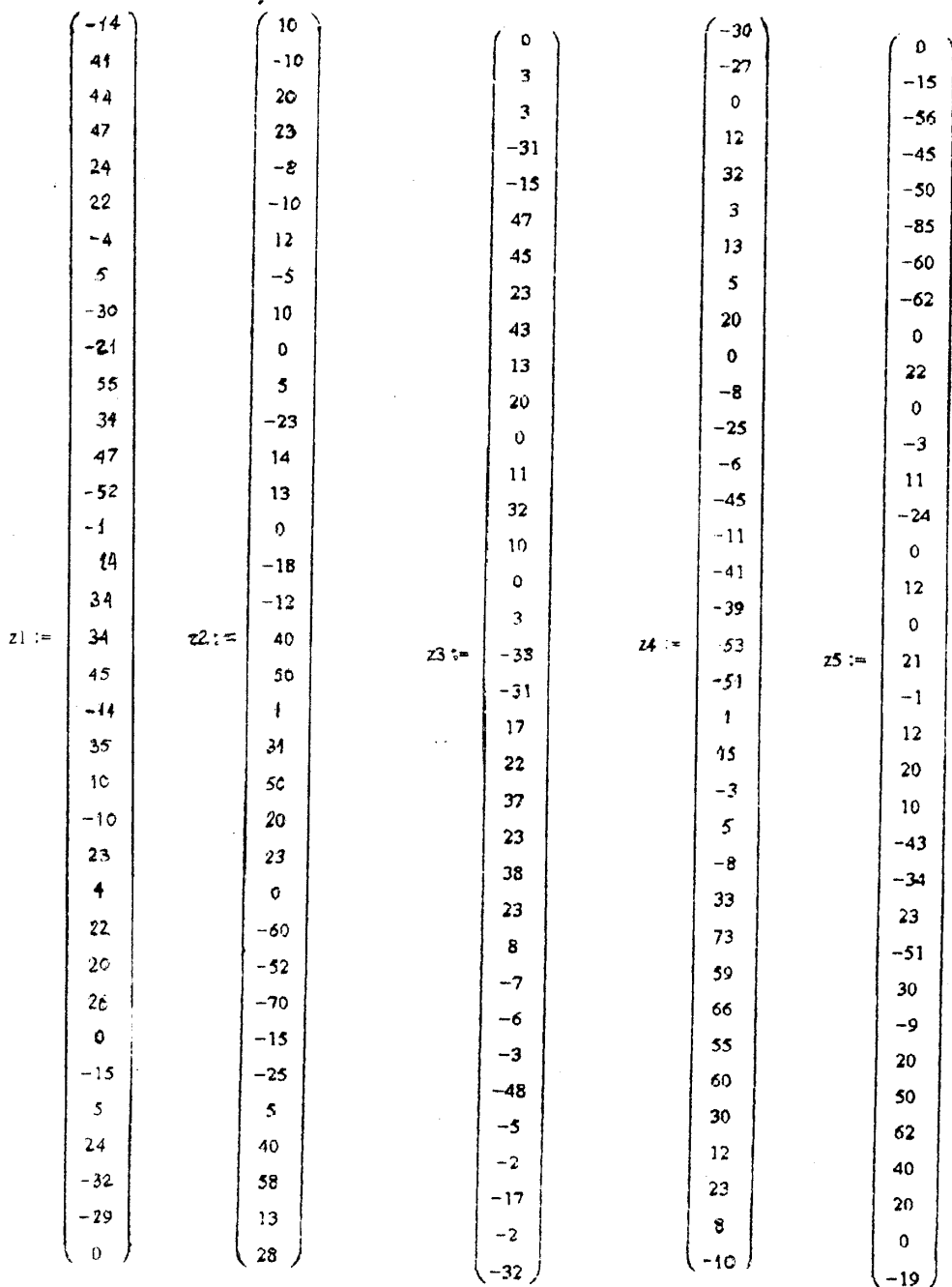


Рис. 12.88. Числові значення ординат експериментальної профілограми обробленої поверхні (в умовних одиницях), які відповідають п'яти ділянкам профілю, наведеного на рис. 12.86, б

```

z12 := stack(z1, z2, z3, z4, z5)

i := 0..174

x12i := i · 1.25 / 174    n := rows(z12)    n = 175
vs := cspline(x12, z12)    f(x) := 0.057 · interp(vs, x12, z12, x)
    
```

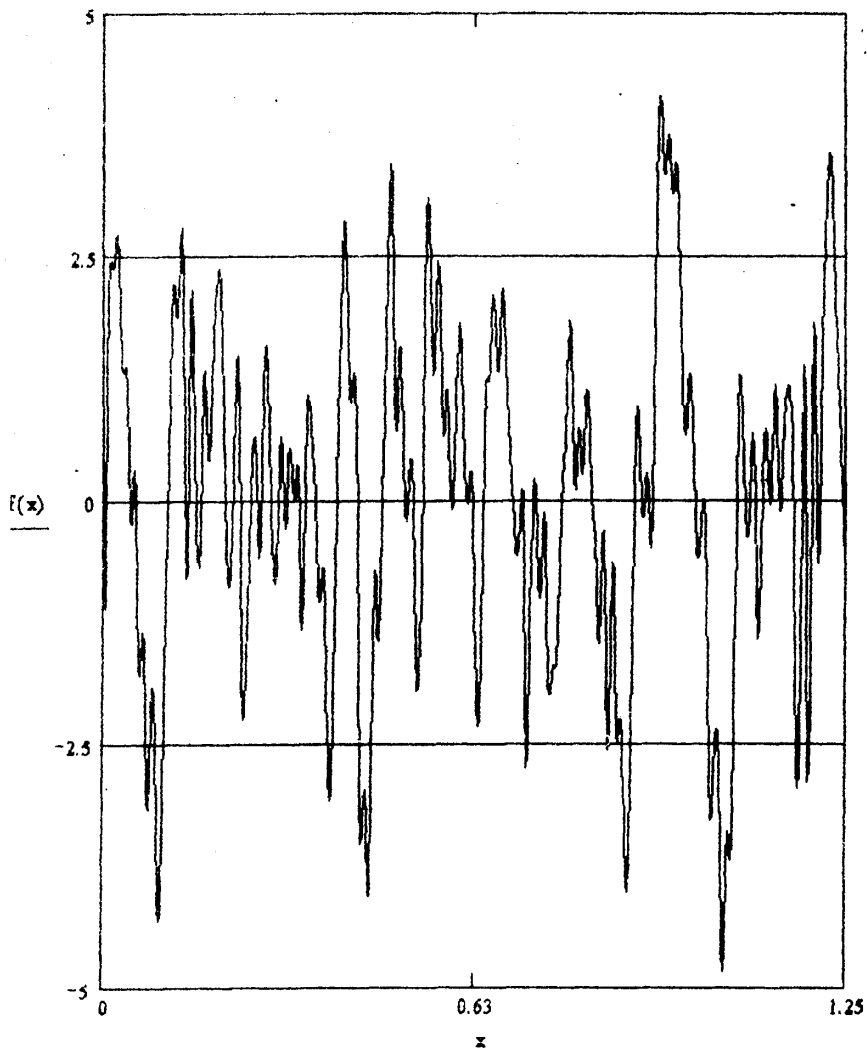
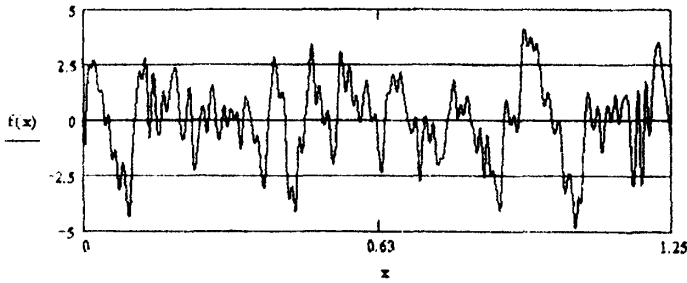


Рис. 12.89. Фрагмент документа MathCAD, в якому формується вектор точкових значень профілограми  $z12$  і виконується інтерполяція точкових значень кубічними сплайнами з отриманням символічної залежності  $f(x)$ , що описує профіль обробленої поверхні, та графічне виведення результатів розрахунків

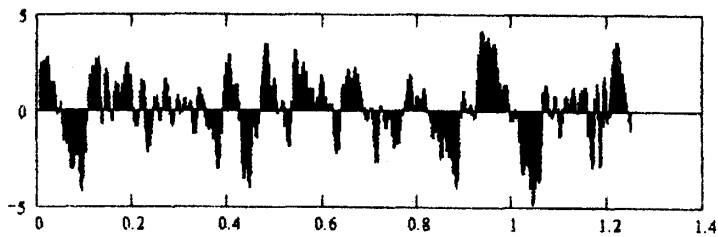


a)

```

j:= 0..1250
vx_j := j*0.001
vy_i := f(vx_j)
    
```

	0
0	-1.083
1	-0.2
2	0.625
3	1.108
4	1.564
5	1.907
6	2.152
vy =	7 2.315
	8 2.41
	9 2.451
	10 2.455
	11 2.435
	12 2.407
	13 2.386
	14 2.386
	15 2.421



б)

Рис. 12.90. Фрагмент документа MathCAD, в якому формується масив точкових координат профілограми для 1250 точок із символної залежності: а – графік неперервної символної залежності; б – стовпчаста діаграма, яка відповідає масиву точкових координат профілограми

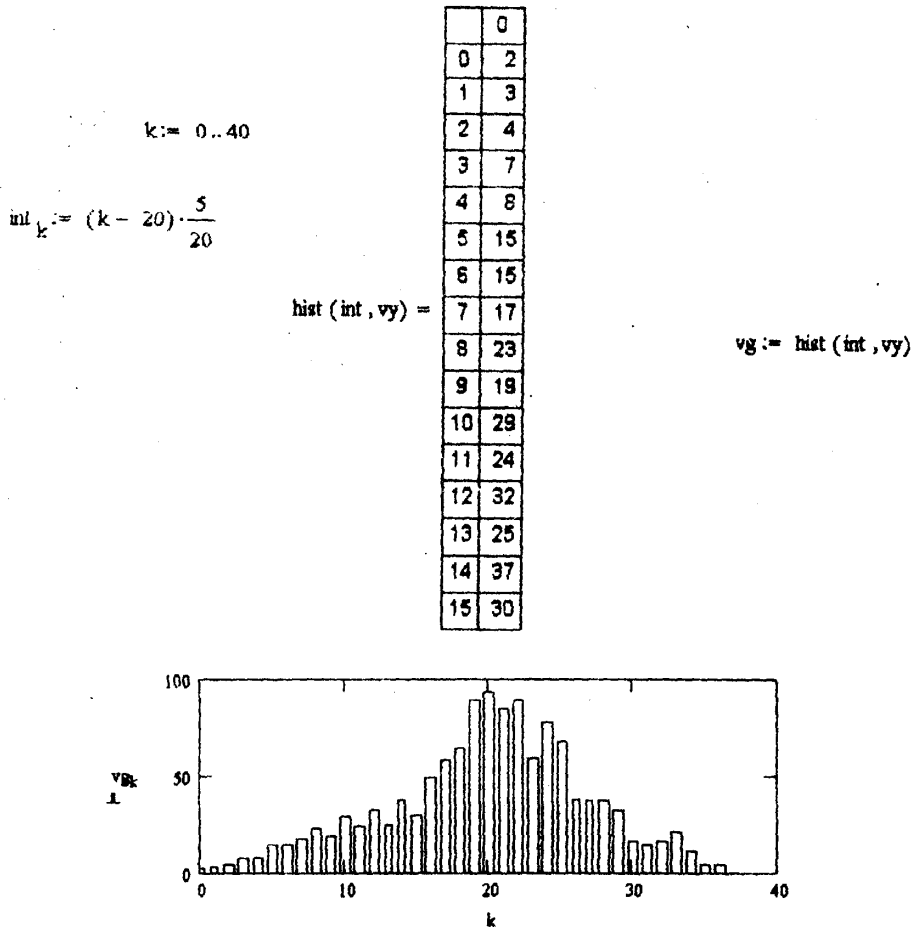


Рис. 12.91. Побудова гістограми розподілу ординат профілю обробленої поверхні засобами пакету MathCAD

Символьний опис профілограми став основою для знаходження кореляційних та спектральних характеристик перерізу профілю обробленої поверхні. Нижче наведений фрагмент документу MathCAD, який призначений для знаходження кореляційної функції профілограми обробленої поверхні (рис. 12.92).

З аналізу графіків випливає, що кореляційна функція відзначається значною коливальністю та має ряд чітко виражених коливальних складових.

Для виявлення кількісних характеристик гармонічних складових кореляційної функції розроблена її нелінійна математична модель. В результаті обробки різних варіантів моделі встановлено, що для опису кореляційної функції доцільно використати нелінійну математичну модель у

вигляді:

$$R(\tau) = \sum_{i=1}^m D_i e^{\alpha_i \tau} \cos \beta_i \tau,$$

де  $D_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  – коефіцієнти нелінійної моделі, які визначаються з умови найкращого наближення розрахованого значення кореляційної функції до експериментальних даних.

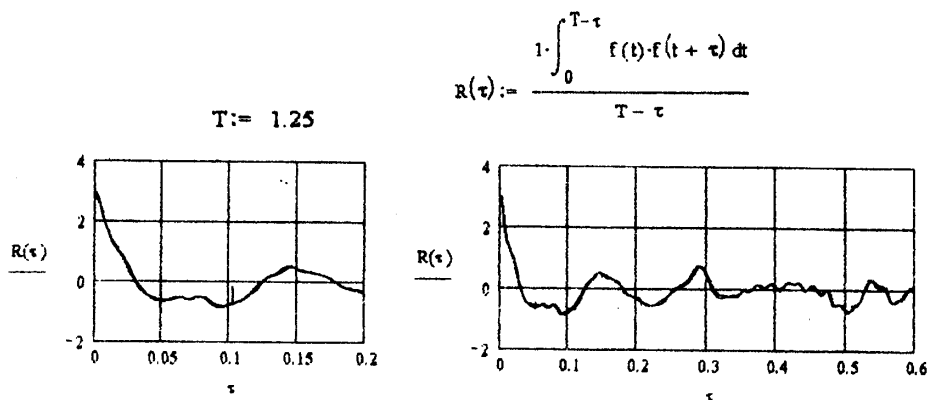


Рис. 12.92. Знаходження кореляційної функції профілограми обробленої поверхні засобами пакету MathCAD (графіки визначають кореляційну функцію в різних масштабах по осі абсцис)

Нижче наведено фрагмент документу MathCAD, в якому подана наближена нелінійна математична модель кореляційної функції та графічно інтерпретується розроблена математична модель (рис. 12.93).

$$M(\tau) := 2.5 \cdot e^{-7 \cdot \tau} \cdot \cos(\tau \cdot 40) + 0.5 \cdot e^{-7 \cdot \tau} \cdot \cos(\tau \cdot 190)$$

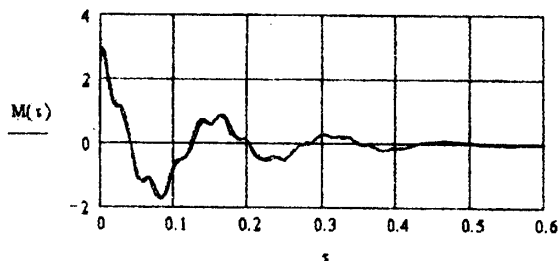


Рис. 12.93. Кореляційна функція, розрахована за допомогою нелінійної математичної моделі, яка включає два доданки в сумі



З порівняння графіків кореляційної функції (див. рис. 12.92) та її нелінійної моделі (див. рис. 12.93) випливає, що математична модель задовільно описує кореляційну функцію. Тому її можна використати для аналізу кореляційних властивостей профілограми обробленої поверхні. Зокрема, періоди складових коливань кореляційної функції визначаються як

$$T_i = \frac{2\pi}{\beta_i}$$

Для кореляційної функції, наведеної на рис. 12.93, періоди коливань складають  $T_1 = 0,157$  мм та  $T_2 = 0,033$  мм. Значення періоду  $T_1$  кореляційної функції відповідає періоду хвилястості обробленої поверхні 0,14 мм.

Дисперсія ординат профілограми визначається як сума коефіцієнтів:

$$D = \sum D_i$$

Для кореляційної функції, наведеної на рис. 12.93, дисперсія складає  $D \approx 3 \cdot \text{мкм}^2$ , що дає значення середньоквадратичного відхилення профілограми

$$\sigma_z = \sqrt{D} \approx 1,7 \text{ мкм.}$$

Це в цілому відповідає визначеному апаратною обробкою профілограми значенню  $R_q = 1,67$  мкм (див. рис. 12.92).

Кореляційний аналіз профілограми обробленої поверхні доповнено спектральним аналізом профілограми. При введенні дискретних значень профілограми кількість точок підібрана таким чином, щоб перша та остання компоненти дискретних значень ординат профілограми були однакові. Вони дорівнюють -19 умовних одиниць (див. рис. 12.88). При цьому реалізація випадкового процесу, який описує профілограму в межах базової довжини  $T = 1,25$  мм, має однакові значення на межах інтервалу, що відповідає базовій довжині. Дану реалізацію можна розглядати як періодичну (квазіперіодичну) функцію періоду  $T$ . Дану періодичну функцію подано у вигляді розкладу в ряд Фур'є виду:

$$ff(x) \cong \sum_{k=1}^K a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) = \sum_{k=1}^K A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x + \psi_k\right),$$

де коефіцієнти ряду  $a_k$ ,  $b_k$ , амплітуди  $A_k$  та початкові фази  $\psi_k$  окремих гармонік знаходяться шляхом інтегрування символічної залежності  $f(x)$ .

Фрагмент документу MathCAD, призначений для знаходження 256 коефіцієнтів ряду Фур'є, наведений на рис. 12.94.

Для перевірки правильності знаходження коефіцієнтів проведено порівняльний аналіз символічної залежності, яка описує профілограму та її розклад у вигляді відрізка ряду Фур'є (рис. 12.95).

З порівняння кривих, наведених на рис. 12.95, випливає, що відрізок ряду Фур'є задовільно описує символічну залежність. Тому він може бути використаний для спектрального аналізу профілограми обробленої поверхні.

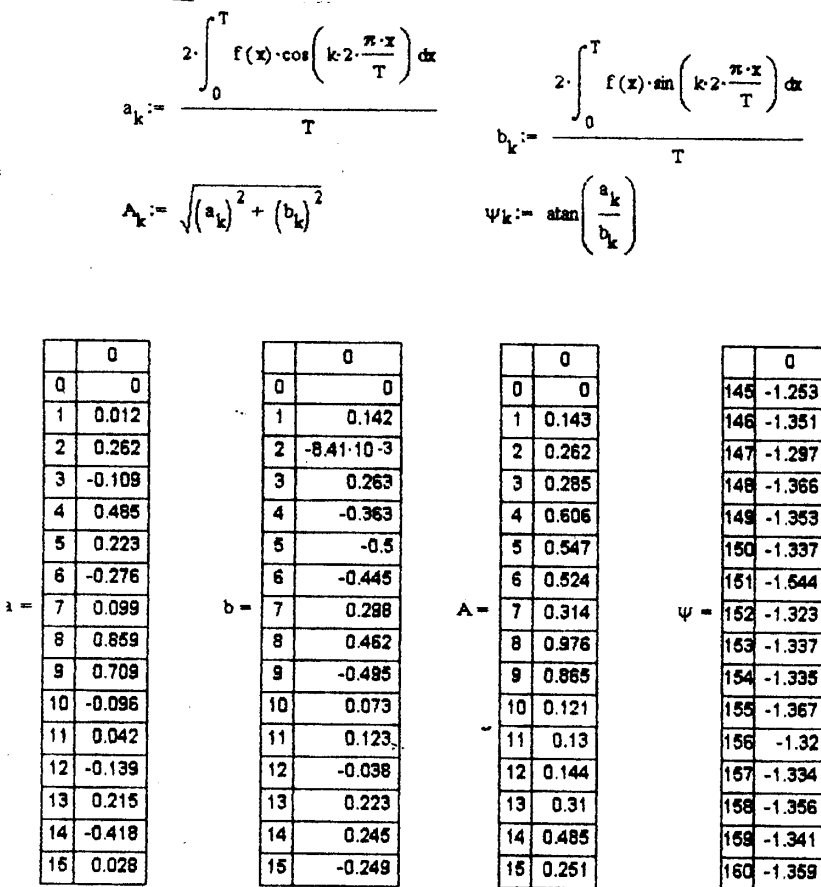


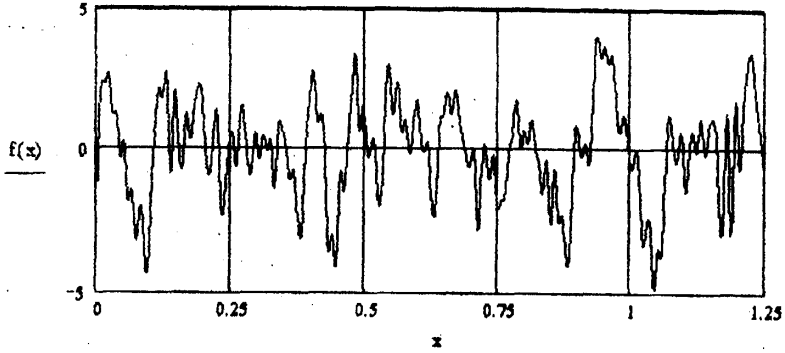
Рис. 12.94. Фрагмент документа MathCAD, призначений для розрахунку коефіцієнтів ряду Фур'є, та результати розрахунків значень коефіцієнтів для перших 15-ти складових ряду

Враховуючи наявність властивості періодичності (квазіперіодичності) профілограми, для спектрального аналізу використані лінійчаті спектри коефіцієнтів ряду Фур'є  $a_k$  та  $b_k$  і спектри амплітуд  $A_k$  складових відрізка ряду Фур'є та його початкових фаз  $\psi_k$ . Спектри коефіцієнтів ряду Фур'є наведені на рис. 12.96.

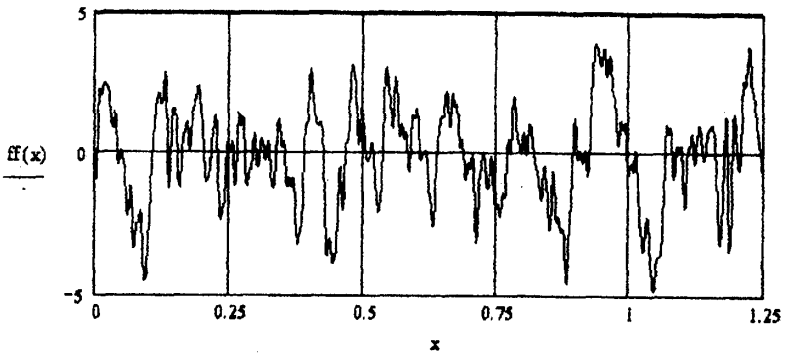
З аналізу спектрів коефіцієнтів випливає, що значення коефіцієнтів зменшуються зі збільшенням порядкового номера. Суттєвими є значення коефіцієнтів з номерами до 130-го.

Спектри амплітуд і початкових фаз складових ряду Фур'є наведені на рис. 12.97.

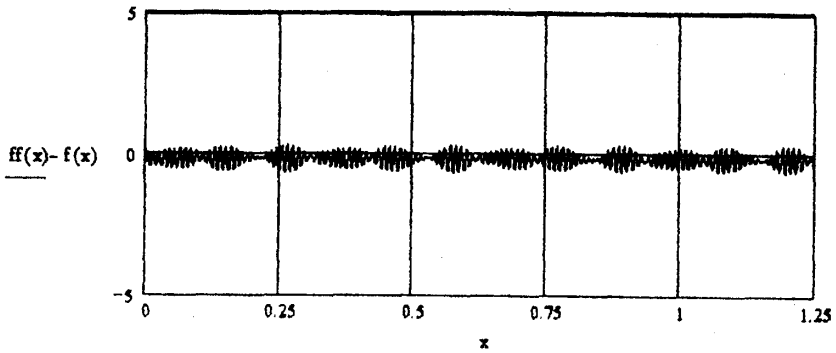
$$ff(x) := \sum_{k=1}^{160} \left( a_k \cdot \cos\left(k \cdot 2 \cdot \frac{\pi \cdot x}{T}\right) + b_k \cdot \sin\left(k \cdot 2 \cdot \frac{\pi \cdot x}{T}\right) \right)$$



a)



б)



в)

Рис. 12.95. Порівняння символічної залежності (а) та її розкладу у вигляді відрізка ряду Фур'є (б) та різниці значень функцій (в)

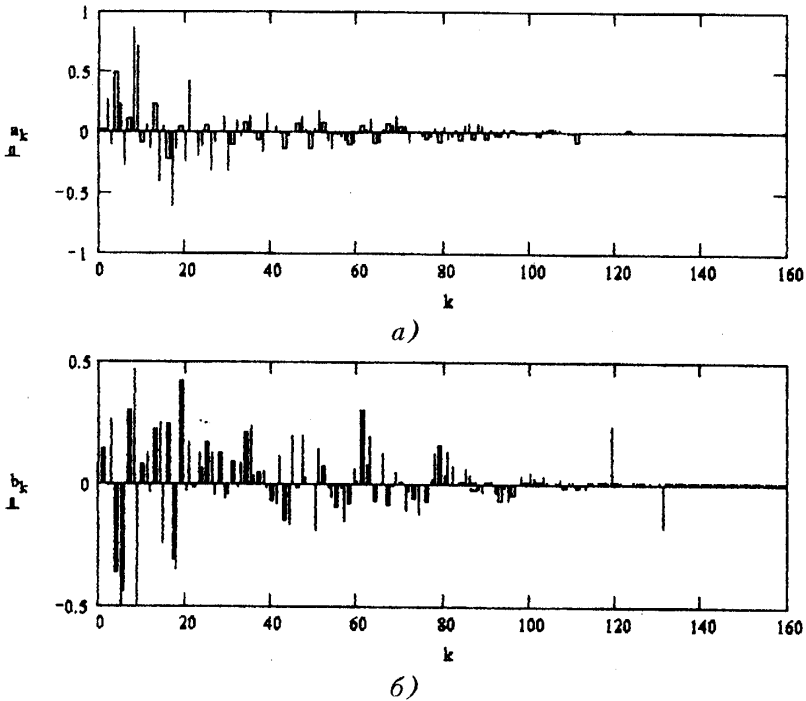


Рис. 12.96. Лінійчаті спектри коефіцієнтів ряду Фур'є профілограми обробленої поверхні: а – спектр коефіцієнтів  $a_k$ ; б – спектр коефіцієнтів  $b_k$

З аналізу спектра амплітуд (рис. 12.97, а) випливає, що в ньому присутні гармоніки з номерами до 130-го включно. Це відповідає періодам хвиль від 1,25 мм до 1 мкм. Хвилі з меншими періодами виключені з розгляду, оскільки вони мало впливають на формування профілограми обробленої поверхні.

В межах даного частотного діапазону амплітуди гармонік не перевищують 1 мкм. Найбільші амплітуди мають гармоніки з номерами 4, 5, 6, 8, 9, 18. Вони відповідають періодам хвиль: 0,313; 0,25; 0,208; 0,157; 0,139; 0,07 мм. Для даних гармонік амплітуди перевищують 0,5 мкм. Максимальну амплітуду має гармоніка з номером 8, яка відповідає періоду хвилі 0,157 мм. Даний період відповідає періоду коливальних змін кореляційної функції (див. рис. 12.93).

У спектрі амплітуд простежуються високочастотні гармоніки. Зокрема це гармоніки з номерами 61, 79, 120, 130. Вони відповідають хвилям з періодами: 0,0205; 0,0158; 0,0104; 0,0096 мм.

У спектрі амплітуд простежується ряд груп суттєвих гармонік близьких періодів. Це, зокрема, гармоніки з номерами 5, 6, 7 (перша група), 8, 9 (друга група), 14, 15 (третя група), 18, 19, 20 (четверта група). Ці групи

гармонік відповідають складовим процесу з наявністю биття. Спектр початкових фаз (див. рис. 12.97, б) охоплює рівномірну смугу від  $-1,57$  ( $-180^\circ$ ) до  $+1,57$  ( $+180^\circ$ ). Гармоніки з номерами вище 130-го не враховані у символічній залежності, тому вони мають рівні значення.

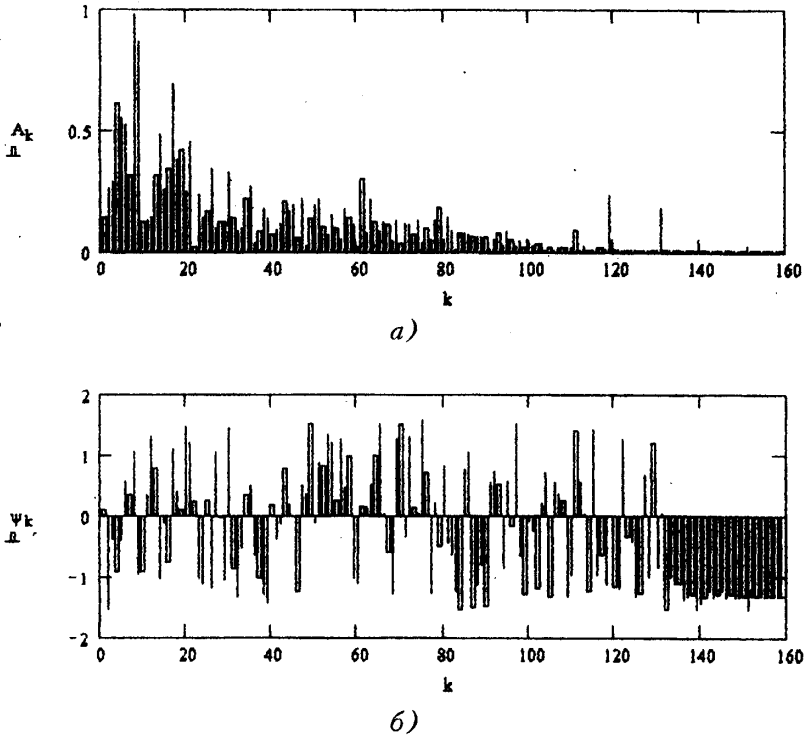


Рис. 12.97. Спектр амплітуд (а) та початкових фаз (б) профілограми обробленої поверхні

Разом зі спектром амплітуд гармонік розглянуто спектр квадратів амплітуд (рис. 12.98).

Аналіз спектра квадратів амплітуд дозволяє зробити висновок, що основна потужність процесу зосереджена на частотах коливань, гармоніки яких мають номери 4, 5, 6, 8, 9 та 18. Вплив інших гармонік не є суттєвим.

Опис профілограми обробленої поверхні відрізком ряду Фур'є дає можливість визначити характерні особливості профілю обробленої поверхні. Зокрема знайдені поточні значення кута нахилу профілю та його кривизни. Ці величини визначені через першу похідну  $(ff)'$  та другу похідну  $(ff)''$  профілограми. Поточний радіус кривизни профілограми знайдений через першу та другу похідні згідно залежності:

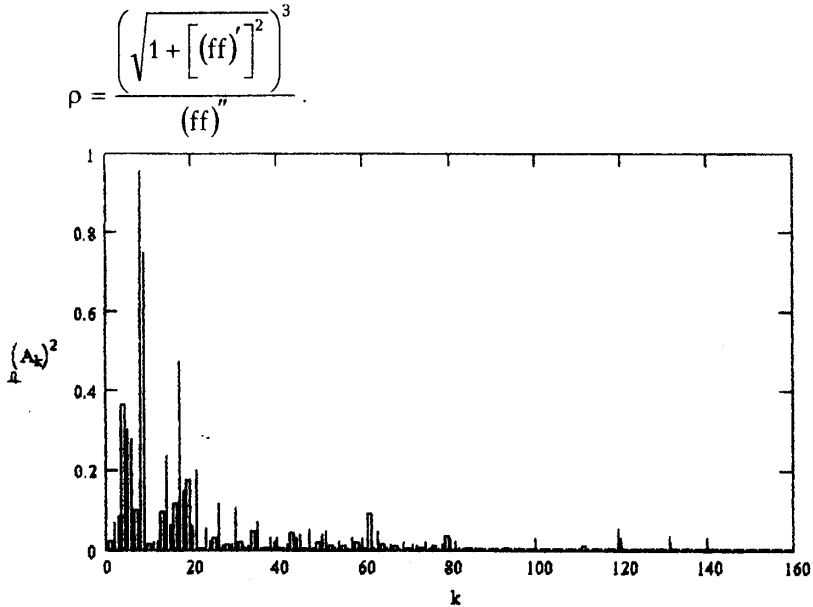


Рис. 12.98. Спектр квадратів амплітуд розкладу профілограми обробленої поверхні в ряд Фур'є

На рис. 12.99 наведений фрагмент документу MathCAD, в якому розраховані значення першої та другої похідних і поточного радіуса кривизни профілограми.

З використанням опису профілограми відрізком ряду Фур'є знайдені статистичні параметри реалізації профілю обробленої поверхні.

Результати розрахунків в пакеті MathCAD середньоарифметичного відхилення профілю  $Ra$ , дисперсії  $D2$  та середньоарифметичного відхилення  $\sigma_2$  дають значення:

$$Ra := \frac{1 \cdot \int_0^T |ff(x)| dx}{T}$$

$$Ra = 1.355$$

$$D2 := \frac{1 \cdot \int_0^T (ff(x))^2 dx}{T}$$

$$D2 = 3.001$$

$$\sigma_2 := \sqrt{D2}$$

$$\sigma_2 = 1.735$$

Це відповідає результатам апаратної обробки профілограми (див. рис. 12.85), де знайдені значення:  $Ra = 1,32$ ;  $Rq = 1,67$  ( $Ra \approx \sigma_2$ ).

$$Df(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

$$D2f(x) := \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

$$\rho(x) := \frac{\left[ \sqrt{1 + (Df(x))^2} \right]^3}{0.0000001 + D2f(x)}$$

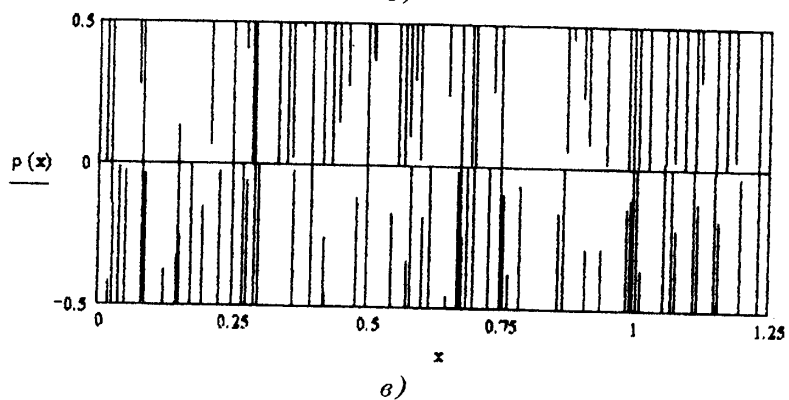
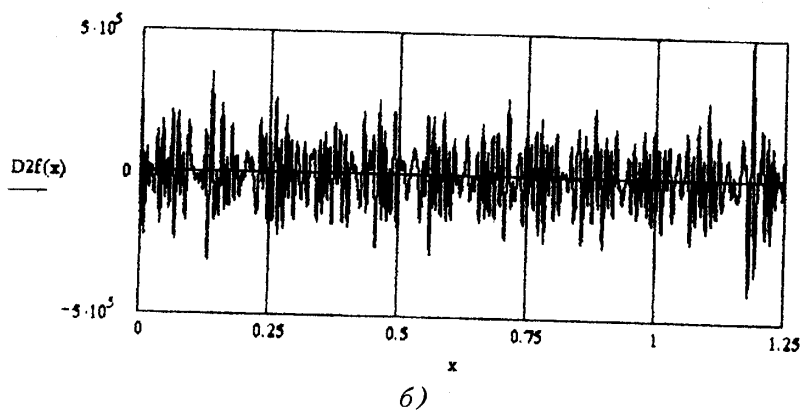
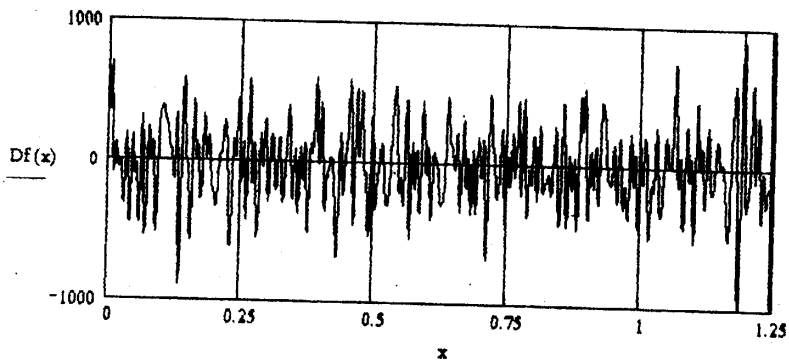


Рис. 12.99. Фрагмент документа MathCAD для визначення першої та другої похідних профілограми і поточного радіусу кривизни кривої: а – перша похідна; б – друга похідна; в – радіус кривизни

На основі комплексу експериментів визначений вплив параметрів обробки на показники якості поверхні, знайдені за вимірами профілограм в напрямку подачі. Для цього використані методи спектрального аналізу профілограм.

Спектральний аналіз профілограм дав можливість встановити вплив окремих факторів на параметри обробленої поверхні. Зокрема виявлено вплив подачі на якість обробки поверхні. На рис. 12.100 наведено протокол апаратурної обробки профілограми при швидкості подачі 5 мм/хв, яка в три рази менша швидкості подачі, при якій знята профілограма, наведена на рис. 12.85.

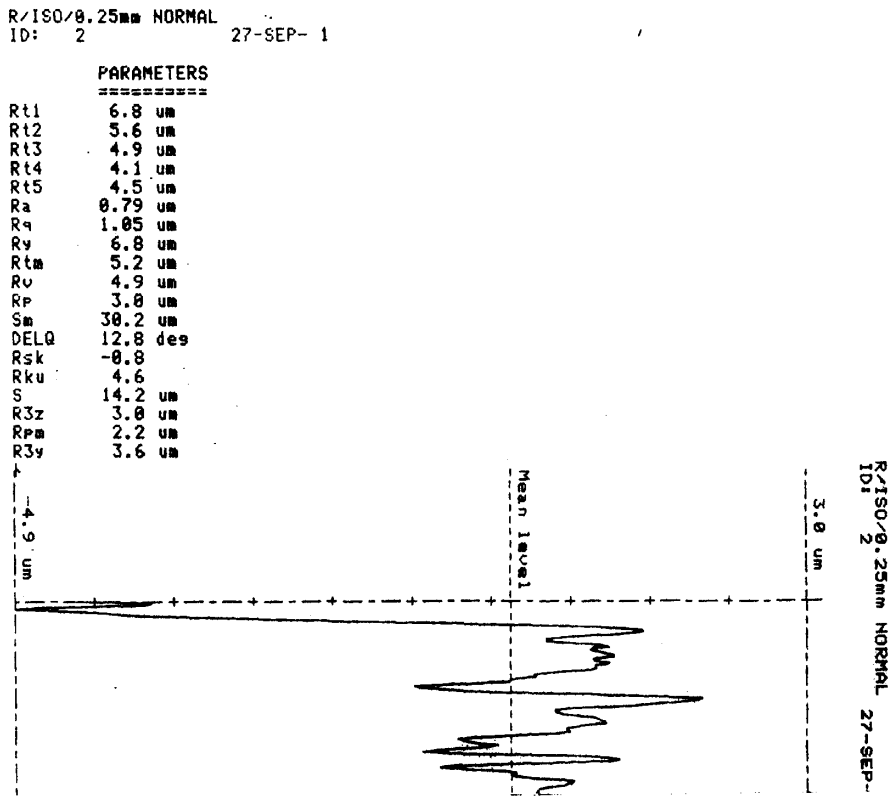


Рис. 12.100. Параметри профілограми поверхні, обробленої при частоті обертання шпинделя 120 об/хв і подачі 5 мм/хв

З порівняння статистичних параметрів профілограм, наведених на рис. 12.100 та 12.85, випливає, що зменшення швидкості подачі в три рази призвело до зниження параметра шорсткості Ra з 1,32 мкм (див. рис. 12.85) до 0,79 мкм (див. рис. 12.100). Це відображає загальну закономірність



зменшення смуги значень випадкової ординати профілограми (рис. 12.101).

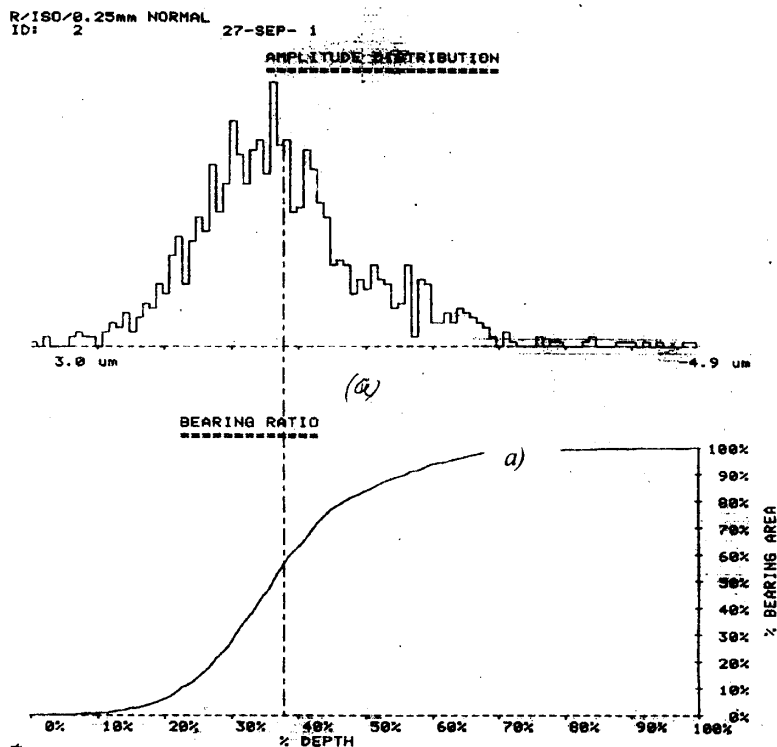


Рис. 12.101. Закон розподілу значень ординат профілю (а) та функція розподілу, одержані в результаті апаратної обробки поверхні, обробленої при подачі 5 мм/хв

Порівняння законів розподілу ординат профілограми, наведених на рис. 12.87 та 12.101, показує суттєве звуження смуги ймовірних значень ординат профілю. Аналогічні висновки впливають з порівняння гістограм розподілу ординат, одержані за викладеною раніше методикою спектрального аналізу профілограми, зробленого в програмному середовищі MathCAD. На рис. 12.102 показані розрахункові гістограми розподілу ординат профілограми.

Зменшення подачі змінює кореляційні властивості профілограми. Це впливає з порівняння розрахункових значень кореляційних функцій (рис. 12.103).

Кореляційна функція профілограми поверхні, обробленої фрезою з рухомим чистовим ножом при подачі 5 мм/хв, (рис. 12.103, б) має тенденцію більш різкого зниження, ніж кореляційна функція профілограми поверхні, обробленої при подачі 15 мм/хв. Зменшується також і період коливань кореляційної функції відносно нульового положення. Період коливань зменшується від значень приблизно 0,15 мм до значень порядку 0,05 мм.

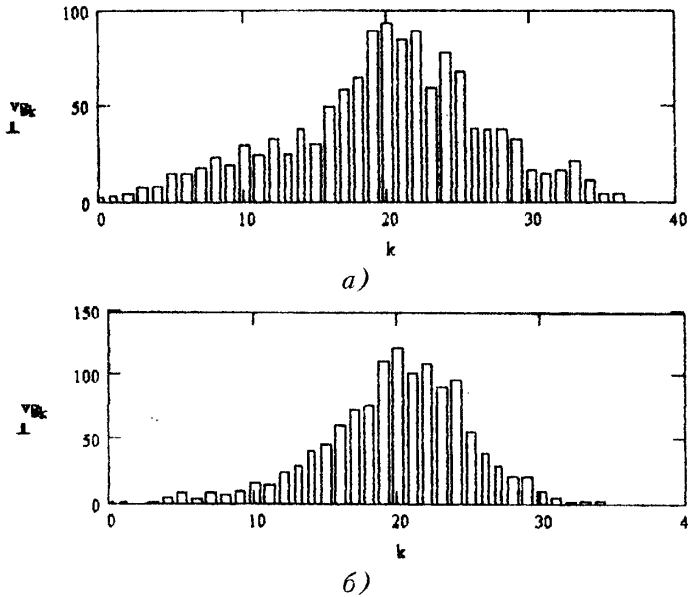


Рис. 12.102. Порівняння гістограм значень ординат профілограм, одержаних обробкою фрезею з рухомих чистовим ножом при частоті обертання шпинделя 120 об/хв та подачах 15 мм/хв (а) та 5 мм/хв (б)

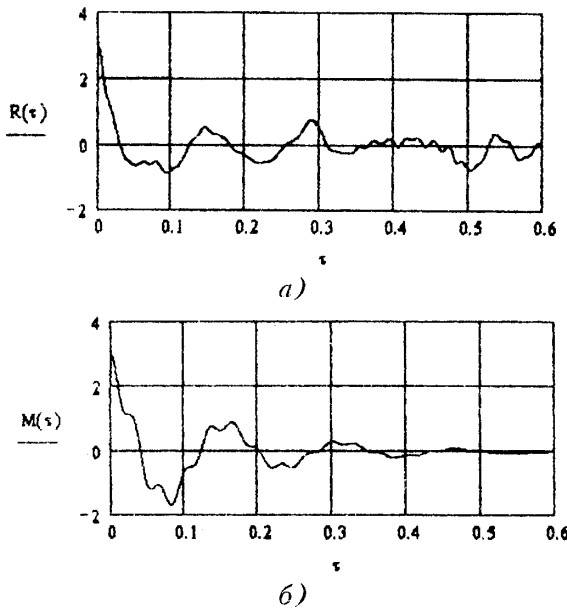


Рис. 12.103. Порівняння кореляційних функцій профілограм, одержаних обробкою фрезею з рухомих чистовим ножом при частоті обертання шпинделя 120 об/хв і подачах 15 мм/хв (а) та 5 мм/хв (б)

Зміна кореляційних властивостей профілограми відображається і на вигляді окремої реалізації профілограми. Порівняння експериментально визначених профілограм (рис. 12.104) підтверджує як зменшення смуги розташування профілограми, так і появу нових високочастотних складових профілограми поверхні, одержаної обробкою при малій подачі.

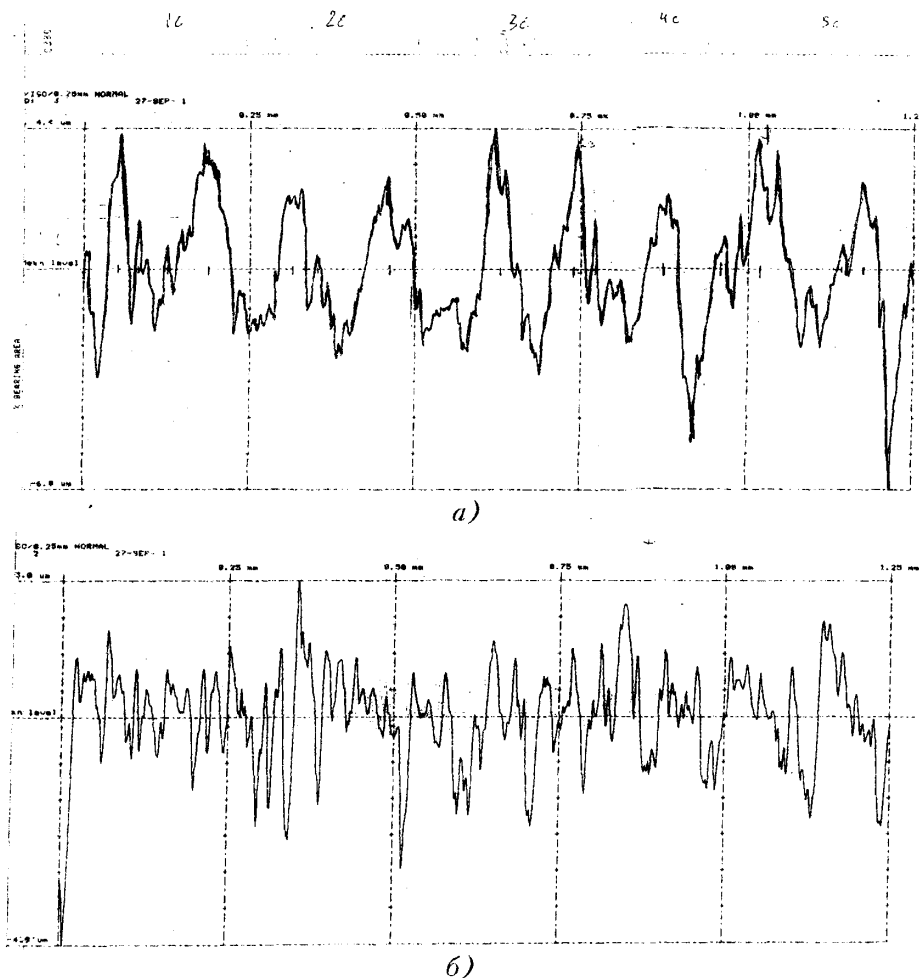


Рис. 12.104. Експериментально визначені профілограми поверхонь, одержаних при обробці заготовки фрезою з рухомим чистовим ножем при подачі: а – 15 мм/хв; б – 5 мм/хв

Поява високочастотних складових підтверджується порівнянням спектрів амплітуд експериментально визначених профілограм. На рис. 12.105 наведені спектри коефіцієнтів  $a_k$  розкладів у ряди Фур'є профілограм оброблених

поверхонь при різних значеннях подачі.

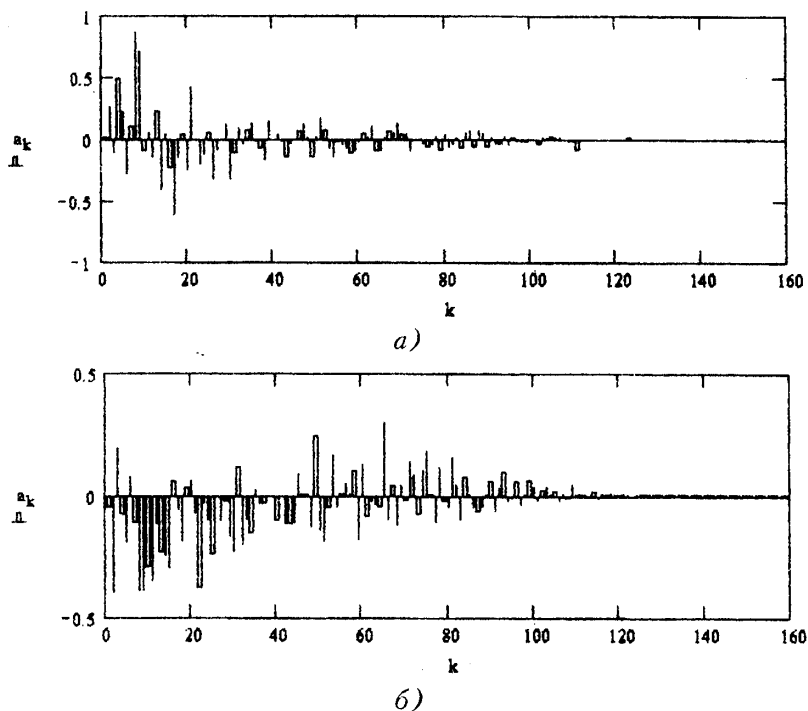


Рис. 12.105. Порівняння спектрів коефіцієнтів  $a_k$  розкладів у ряди Фур'є профілограм поверхонь, оброблених при подачах 15 мм/хв (а) та 5 мм/хв (б)

З порівняння спектрограм випливає, що зменшення швидкості подачі збільшує відносну інтенсивність високочастотних гармонік. Значення коефіцієнтів  $a_k$  з номерами  $k = 40 \dots 80$  збільшуються в 2...10 разів. Відповідно, змінам коефіцієнтів ряду Фур'є відповідають зміни амплітуд окремих гармонік (рис. 12.106).

У спектрі амплітуд поверхні, обробленої при малих подачах, простежуються високочастотні складові з номерами 50...70, що відповідає появі у профілографі хвиль з періодами 0,025...0,018 мм. Збільшення інтенсивності високочастотних гармонік призводить до перерозподілу потужності процесу. Це особливо проявляється при порівнянні спектрів квадратів амплітуд профілограм (рис. 12.107).

З порівняння спектрів потужності випливає, що при малих подачах найсуттєвішими у відношенні впливу на формування потужності процесу є гармоніки з номерами 21 та 22. Значна частина потужності процесу зосереджується у високочастотній області (гармоніки з номерами 55 та 64).

Залишається вагомим вклад низькочастотних гармонік (номери 10...15) у формування загальної потужності процесу.

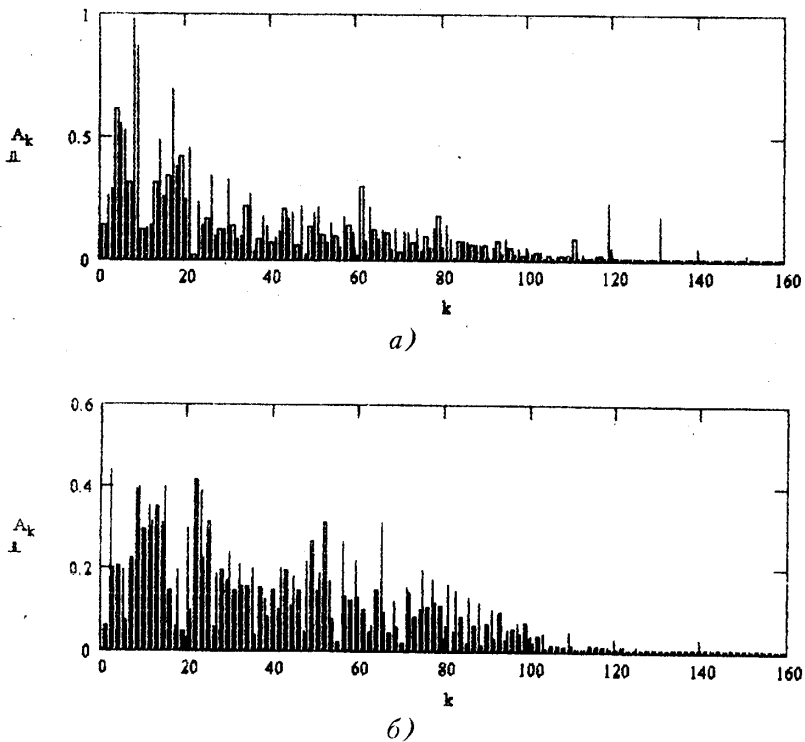


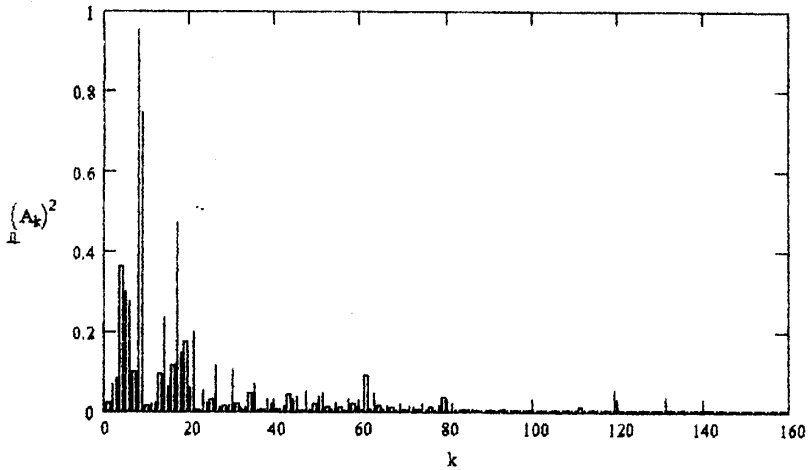
Рис. 12.106. Порівняння спектрів амплітуд  $A_k$  розкладів у ряди Фур'є профілограм поверхонь, оброблених при подачах 15 мм/хв (а) та 5 мм/хв (б)

Таким чином, зменшення подачі зміщує процес у високочастотну область. При цьому закономірних змін початкових фаз складових гармонік не простежується. Це впливає з порівняння спектрів початкових фаз профілограм поверхонь, оброблених при різних значеннях подачі (рис. 12.108).

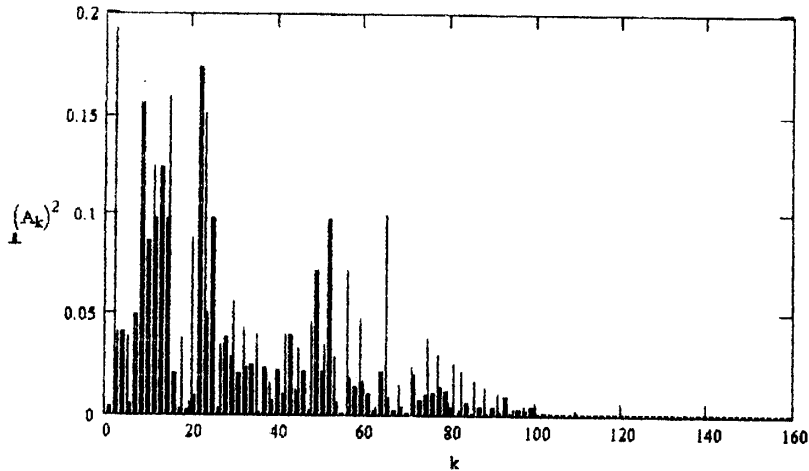
Експериментальні профілограми обробленої поверхні взяті за основу при дослідженні рівномірності обробки поверхні фрезою косокутного різання. Для цього проведено ряд вимірювань профілограм в різних точках обробленої поверхні та в різних напрямках. Виміряні профілограми обробленої поверхні при різних частотах обертання шпинделя та при різних подачах. З метою узагальнення результатів проведений комплексно-груповий аналіз одержаних профілограм. На рис. 12.109 наведені профілограми поверхні, виміряні в напрямку подачі в 5-ти характерних точках (див. рис. 12.82).

З аналізу набору профілограм можна зробити висновок, що характер

випадкових змін ординат профілю є загалом подібним в різних точках. Для даних профілограм апаратним методом знайдені статистичні характеристики профілограм обробленої поверхні (табл. 12.1). Встановлено, що середньоарифметичне відхилення профілю в різних точках відрізняється на 0,5 мкм (до 15 %).



а)



б)

Рис. 12.107. Порівняння спектрів квадратів амплітуд (спектрів потужності процесів), що відповідають розкладам у ряди Фур'є профілограм поверхонь, оброблених при різних подачах: а – 15 мм/хв; б – 5 мм/хв

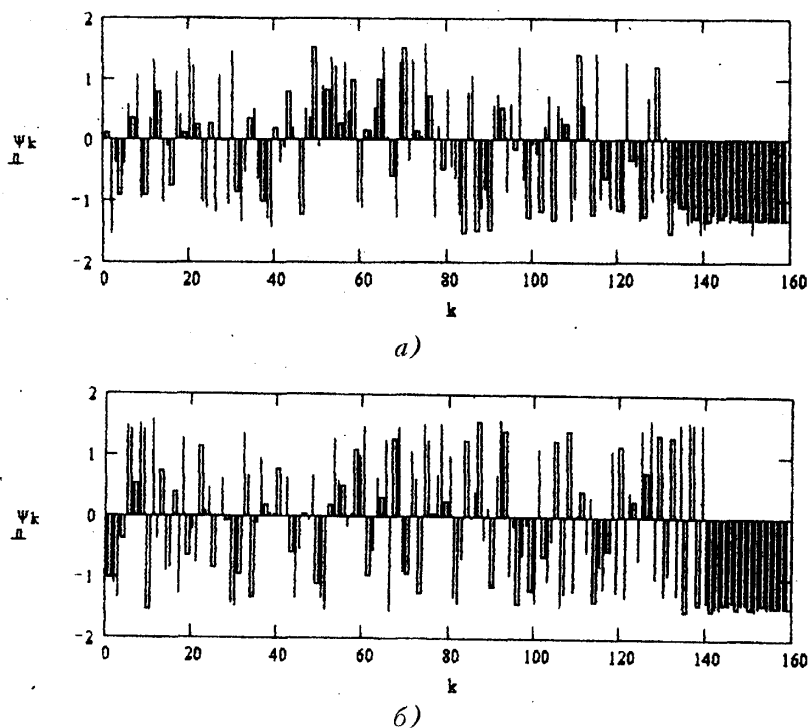


Рис. 12.108. Спектри початкових фаз, що відповідають розкладам у ряди Фур'є профілограм поверхонь, оброблених при різних подачах: а – 15 мм/хв; б – 5 мм/хв

Таблиця 12.1

Порівняння статистичних параметрів профілограм, визначених в п'яти точках поверхні, обробленої при частоті обертання 80 об/хв та подачі 15 мм/хв

Точка вимірювання	Параметр							
	Ra, мкм	Rq, мкм	Ry, мкм	Rtm, мкм	Rv, мкм	Rp, мкм	Sm, мкм	S, мкм
1	2,8	3,38	16,3	15,1	8,9	7,9	99	29
2	2,77	3,37	18,7	15,3	10,2	8,6	112	32
3	2,36	2,84	14,2	12,9	7,8	7,2	107	32
4	2,57	3,06	14,3	12,6	9,7	6,4	140	33
5	2,83	3,48	19,7	16,4	11,4	8,3	116	35
Перпендикулярно напрямку подачі	1,77	2,42	12,5	11,8	13,9	8,6	113	48

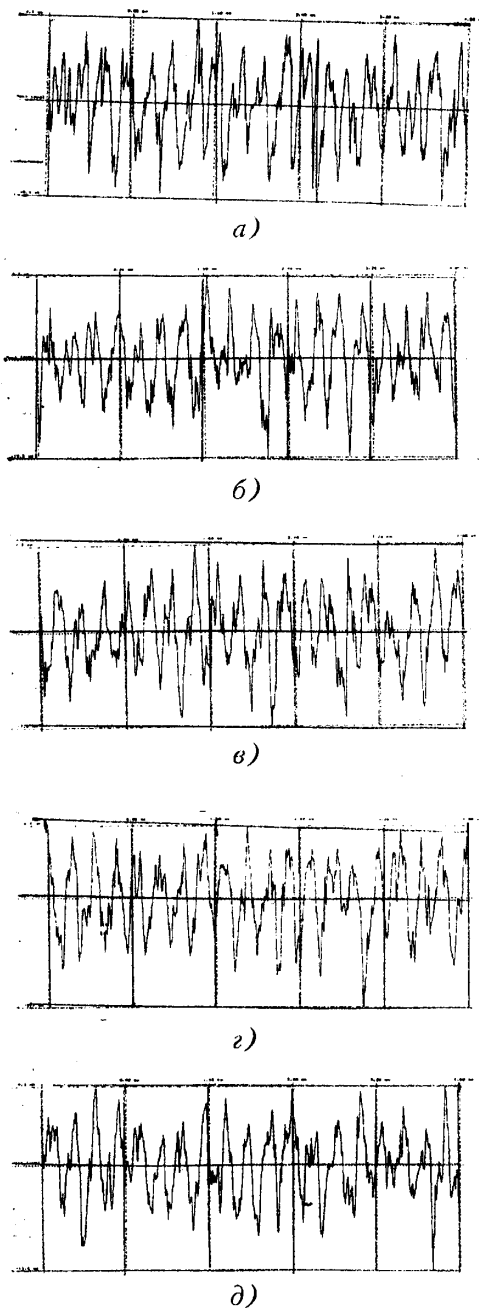
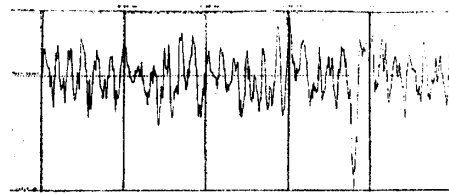
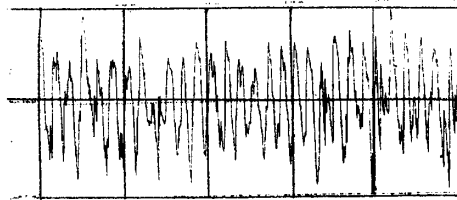


Рис. 12.109. Профілограми поверхні, обробленої фрезою без рухомого чистового ножа при частоті обертання шпинделя 80 мм/хв і подачі 15 мм/хв: позиції а–д відповідають точкам, наведеним на рис. 12.82

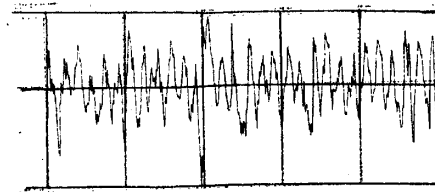




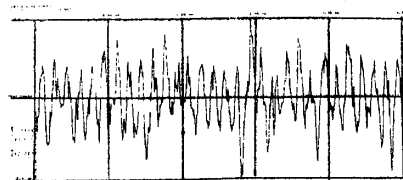
a)



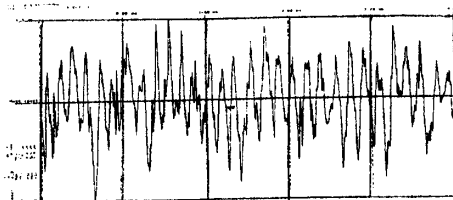
б)



в)



г)



д)

Рис. 12.110. Профілограми поверхні, обробленої фрезою без рухомого чистового ножа при частоті обертання шпинделя 120 об/хв і подачі 15 мм/хв: позиції а–д відповідають точкам 1–5 (див. рис. 12.82)

Аналогічно змінюються й інші статистичні параметри профілограми.

Середньоквадратичне відхилення змінюється в межах 20 %.

При збільшенні частоти обертання шпинделя циклічність профілограми підвищується. Це проявляється на ущільненні загального коливального характеру профілограми (рис. 12.110). Профілограми для різних точок загалом подібні між собою. Статистичні параметри профілограм наведені в табл. 12.2.

Таблиця 12.2

Статистичні параметри оброблених поверхонь при частоті обертання шпинделя 120 об/хв і подачі 15 мм/хв (в чисельнику – параметри поверхні, обробленої без рухомого чистового ножа, у знаменнику – параметри поверхні, обробленої фрезою з чистовим ножем)

Точка вимірювання	Параметр							
	Ra, мкм	Rq, мкм	Ry, мкм	Rtm, мкм	Rv, мкм	Rp, мкм	Sm, мкм	S, мкм
1	<u>2,6</u>	<u>2,35</u>	<u>25,6</u>	<u>15,9</u>	<u>17,0</u>	<u>9,3</u>	<u>110</u>	<u>36</u>
	1,21	1,56	9,4	7,8	5,2	5,0	57	22
2	<u>2,2</u>	<u>2,61</u>	<u>12,9</u>	<u>11,1</u>	<u>6,7</u>	<u>6,5</u>	<u>96</u>	<u>33</u>
	1,34	1,72	12,3	8,6	7,9	4,4	74	25
3	<u>2,09</u>	<u>2,61</u>	<u>15,8</u>	<u>12,0</u>	<u>10,1</u>	<u>6,9</u>	<u>95</u>	<u>32</u>
	1,58	2,07	12,2	10,1	7,7	5,6	68	27
4	<u>2,15</u>	<u>2,67</u>	<u>15,9</u>	<u>12,7</u>	<u>8,3</u>	<u>7,6</u>	<u>111</u>	<u>32</u>
	1,62	2,07	12,9	9,5	8,9	4,6	77	25
5	<u>2,20</u>	<u>2,71</u>	<u>13,5</u>	<u>12,8</u>	<u>8,6</u>	<u>6,9</u>	<u>104</u>	<u>31</u>
	2,03	2,66	15,7	12,9	11,3	5,6	77	24
Перпендикулярно напрямку подачі	<u>1,79</u>	<u>2,25</u>	<u>13,9</u>	<u>10,9</u>	<u>7,7</u>	<u>6,5</u>	<u>134</u>	<u>36</u>
	0,60	0,76	4,5	3,2	2,1	2,7	100	29

З порівняння загальних статистичних параметрів профілограм (див. табл. 12.1 та табл. 12.2) випливає, що підвищення частоти обертання шпинделя зменшує хвилястість обробленої поверхні. Середньоарифметичне значення відхилення профілю зменшується на 15...25 %. Дещо суттєвіше зменшується середньоквадратичне відхилення. Останні параметри також мають стійкі тенденції зменшення на 10...20 %.

При обробці поверхні фрезою з рухомим чистовим ножем одержані профілограми набувають згладженого вигляду (рис. 12.111). Застосування рухомого чистового ножа суттєво зменшує шорсткість профілю поверхні. При цьому середньоарифметичне відхилення зменшується в 2 і більше разів і досягає значень  $Ra = 0,6...1,2$ .

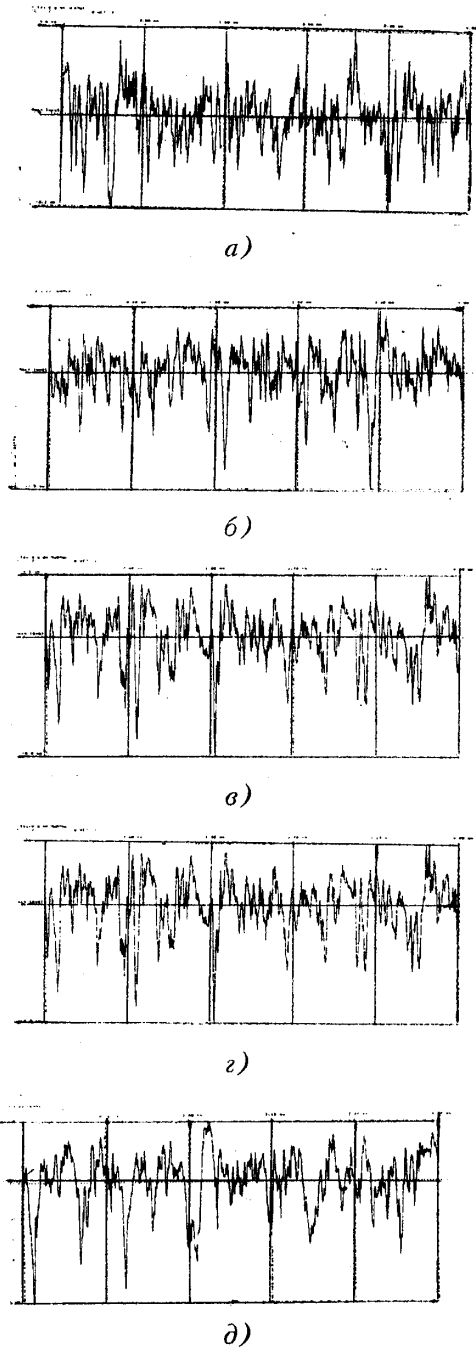


Рис. 12.111. Профілограми поверхні, обробленої фрезою з рухомим чистовим ножом при частоті обертання шпинделя 120 об/хв та подачі 15 мм/хв: позиції а–д відповідають точкам 1–5 (див. рис. 12.82)

Суттєво зменшуються й інші параметри хвилястості.

Середня довжина хвиль зменшується у 1,5...2 рази.

Тенденція підвищення якості обробленої поверхні має місце при зменшенні подачі. Профілограми обробленої поверхні при цьому стають більш заповненими, в них проявляються високочастотні складові (рис. 12.112). Простежується певна асиметрія графіка реалізації профілограми. Верхня половина графіка є більш рівномірною. На цій половині знаходиться менше ізольованих викидів, ніж на нижній половині.

При такому значенні подачі статистичні параметри, що характеризують якість обробки, є значно кращими, ніж при інших режимах обробки. Параметр шорсткості  $R_a$  досягає значень 0,9...1,2 і нижче (табл. 12.3). Середньоквадратичне значення ординат профілю знаходиться в межах 1,0...1,5 мкм. Ці параметри суттєво (приблизно у 2 рази) менші за аналогічні параметри з подачею 15 мм/хв. Значно зменшуються (у 1,5...2 рази) висота і глибина профілю, а також середня довжина хвилі.

Таблиця 12.3

Статистичні параметри обробленої поверхні при подачі 5 мм/хв і частоті обертання шпинделя 120 об/хв

Точка вимірювання	Параметр							
	$R_a$ , мкм	$R_q$ , мкм	$R_y$ , мкм	$R_{tm}$ , мкм	$R_v$ , мкм	$R_p$ , мкм	$S_m$ , мкм	$S$ , мкм
1	0,91	1,13	7,6	5,7	3,7	3,9	44	21
2	1,01	1,27	8,0	6,5	4,7	4,9	45	21
3	0,83	1,09	7,4	5,9	4,3	5,1	43	21
4	1,15	1,45	8,8	7,4	6,0	3,3	50	21
5	1,23	1,57	10,2	8,3	6,4	3,8	49	23
Перпендикулярно напрямку подачі	0,511	0,668	3,68	2,96	2,23	2,52	105	29

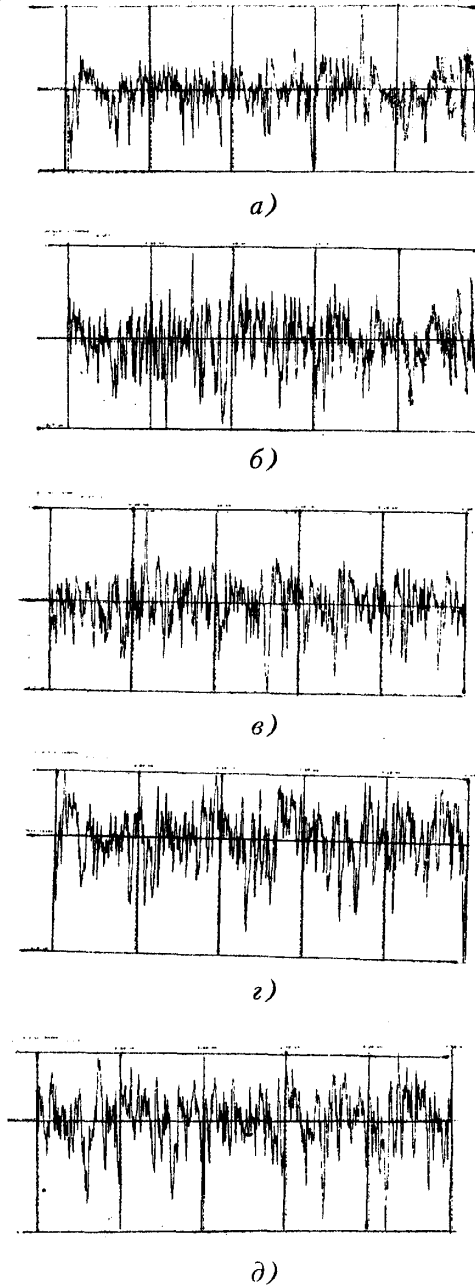


Рис. 12.112. Профілограми поверхні, обробленої фрезою з рухомим чистовим ножом при частоті обертання шпинделя 120 об/хв та подачі 5 мм/хв

Показники якості оброблених поверхонь залежать від напрямку вимірювань. В процесі досліджень визначені показники якості обробленої поверхні в напрямку, перпендикулярному подачі. У напрямку, який співпадає з напрямком подачі, статистичні параметри якості профілограми значно нижчі за показники якості в напрямку, перпендикулярному подачі. Це впливає з аналізу даних, наведених в останніх рядках табл. 12.1–12.3. У всіх випадках середньоарифметичне значення відхилень профілю  $R_a$  при вимірюваннях у напрямку, перпендикулярному подачі, менше приблизно у 2 рази за значення, виміряне у напрямку поздовжньої подачі.

Аналогічним чином змінюються й інші параметри профілю.

Характер профілограм, виміряних в напрямку, перпендикулярному подачі, суттєво відрізняється від профілограм, виміряних в напрямку подачі. На профілограмах простежуються ділянки нерегулярності, різномірні за характером процесу, наявні суттєві викиди (рис. 12.113).

Для виявлення особливостей профілограм, виміряних в напрямку, перпендикулярному подачі, проведено кореляційний та спектральний аналізи профілограм. Зокрема, зроблено аналіз профілограми, наведеної на рис. 12.113, *в*.

На рис. 12.114 наведена гістограма частоти появи точкових значень ординат профілограми.

Гістограма точкових значень відповідає нормальному закону розподілу випадкових значень ординат профілограми.

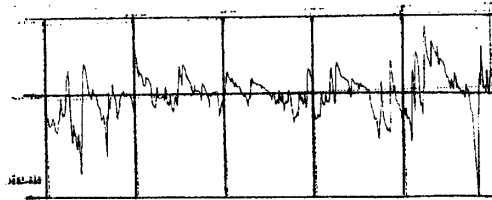
Згідно з раніше викладеною методикою, проведено кореляційний аналіз профілограми. Знайдена кореляційна функція (рис. 12.115) має ряд періодів коливальності. Довгоперіодичний рівний приблизно 0,6 мм, а короткоперіодичні – 0,1 та 0,014 мм.

Порівняння кореляційних функцій профілограм, визначених у взаємно перпендикулярних напрямках, (див. рис. 12.92 та 12.115) показує їх подібність у відношенні наявності складових близьких періодів.

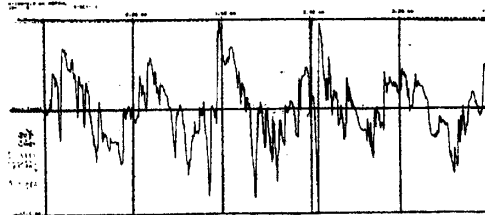
Спектр коефіцієнтів ряду Фур'є профілограми, виміряної в напрямку, перпендикулярному подачі, наведений на рис. 12.116.

В цілому спектри коефіцієнтів ряду, наведені на рис. 12.116, подібні спектрам профілограми, визначеної в напрямку подачі (див. рис. 12.96). Ця подібність має місце і для спектрів амплітуд та початкових фаз. На рис. 12.117 наведені спектри амплітуд і початкових фаз профілограми.

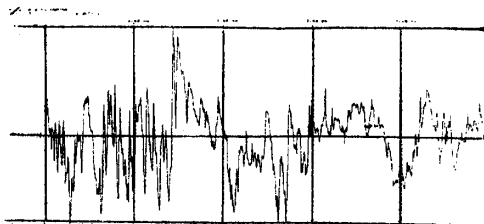
В цілому дані спектри дуже подібні зі спектрами профілограми, визначеної в напрямку подачі (див. рис. 12.90). Подібність має місце як у частотному діапазоні, так і в характері зміни амплітуд гармонік в залежності від частоти.



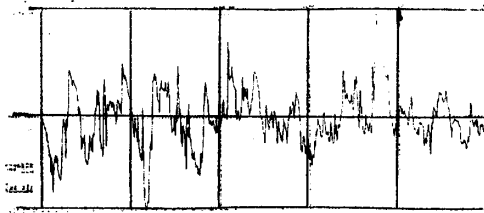
a)



б)



в)



г)

Рис. 12.113. Профілограми поверхні, виміряні в напрямку, перпендикулярному подачі, при обробці фрезою: а – без рухомого чистового ножа при частоті обертання 80 об/хв і подачі 15 мм/хв; б – без чистового ножа при частоті обертання 120 об/хв і подачі 15 мм/хв; в – з рухомих чистовим ножом при частоті обертання 120 об/хв і подачі 15 мм/хв; г – з чистовим ножом при частоті обертання 1200 об/хв і подачі 5 мм/хв

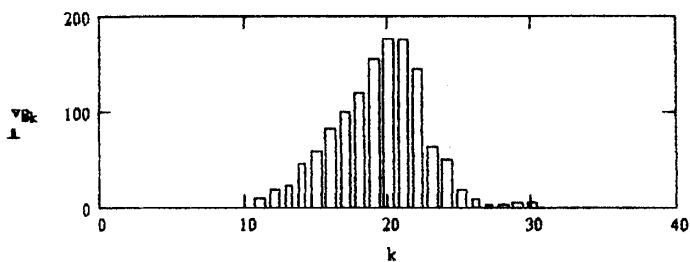


Рис. 12.114. Гістограма точкових значень ординат профілограми поверхні, виміряної в напрямку, перпендикулярному подачі при частоті обертання шпинделя 120 об/хв і подачі 15 мм/хв

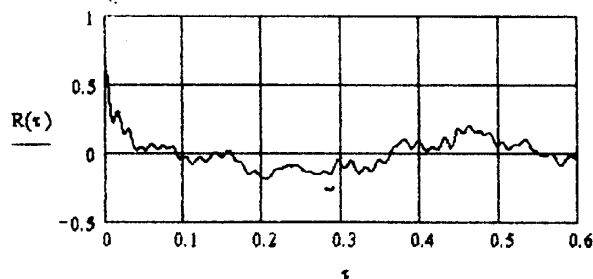


Рис. 12.115. Кореляційна функція профілограми поверхні, виміряної у напрямку, перпендикулярному подачі при частоті обертання шпинделя 120 об/хв і подачі 15 мм/хв

На рис. 12.118 наведений спектр потужності профілограми (спектр квадратів амплітуд гармонік).

Порівняння спектрів потужності профілограм, визначених у взаємно перпендикулярних напрямках (див. рис. 12.118 і 12.98) показує їх подібність у відношенні частотних діапазонів суттєвих гармонік. Це гармоніки з номерами 3...8 та 15...20. Деяка відмінність полягає в наявності суттєвих височастотних гармонік з номерами 70...90 у профілограми, визначеної в напрямку, перпендикулярному подачі.



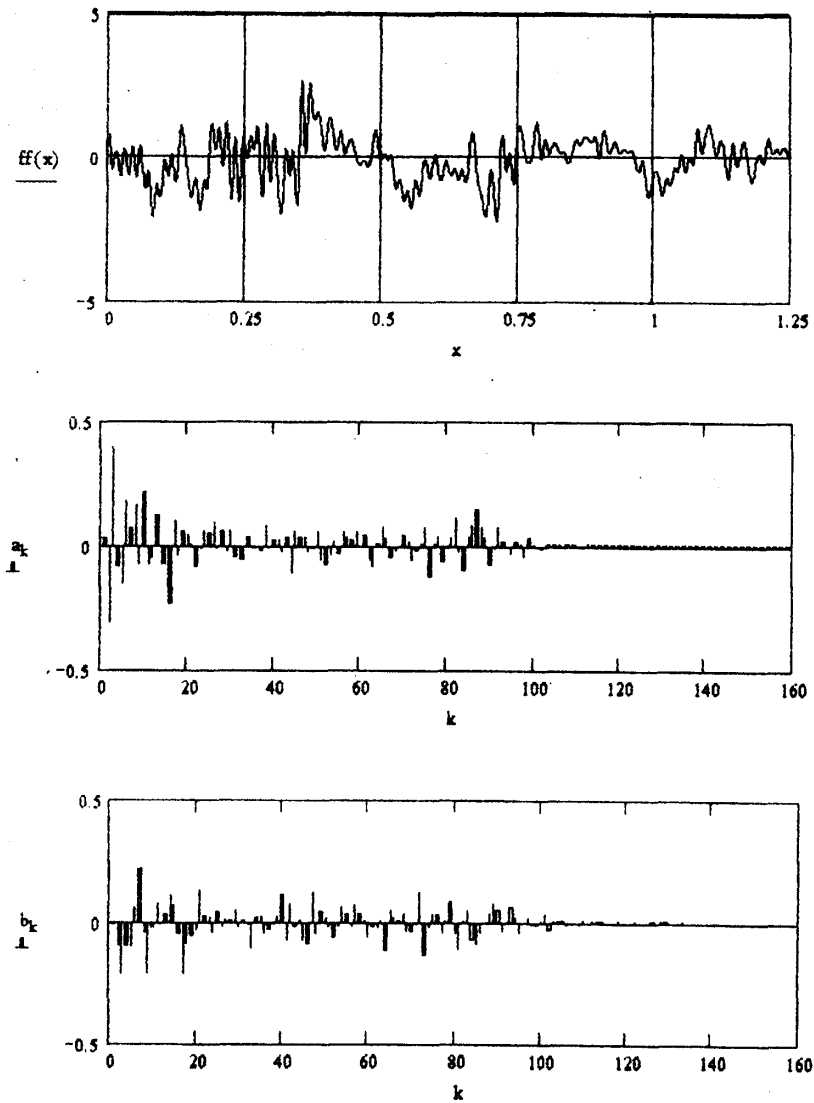


Рис. 12.116. Опис експериментально визначеної профілограми відрізком ряду Фур'є та спектри коефіцієнтів  $a_k$  і  $b_k$  розкладу в ряд Фур'є профілограми поверхні, виміряної в напрямку, перпендикулярному подачі

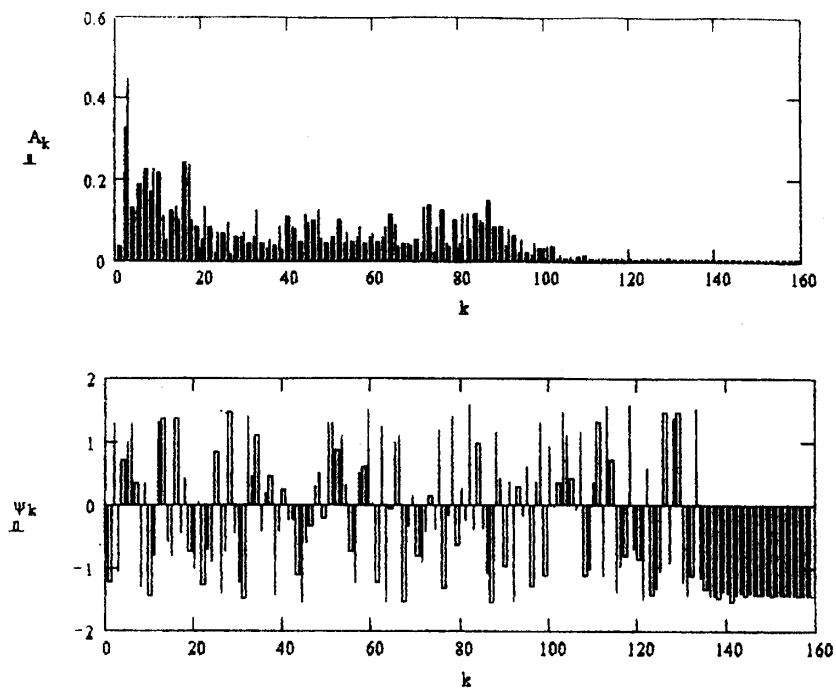


Рис. 12.117. Спектри амплітуд і початкових фаз профілограми обробленої поверхні, визначеної в напрямку, перпендикулярному подачі

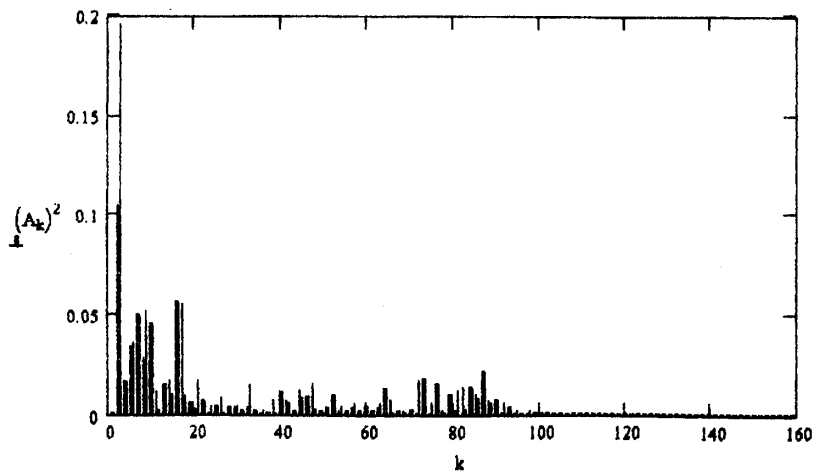


Рис. 12.118. Спектр квадратів амплітуд гармонік (спектр потужності) профілограми, виміряної у напрямку, перпендикулярному подачі

## ЛІТЕРАТУРА

1. Анго А. Математика для електро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1965. – 778 с.
2. Аверченков В.І., Горленко О.О., Ільцький В.Б., Мельничук П.П. Збірник задач і вправ з технології машинобудування. – Житомир: ЖІТІ, 2001. – 315 с.
3. Афтаназів І.С., Гавриш А.П., Киричок П.О., Мельничук П.П. та ін. Підвищення надійності деталей машин поверхневим пластичним деформуванням. – Житомир: ЖІТІ, 2001. – 516 с.
4. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1972. – 768 с.
5. Василюк Г.Д., Лоев В.Ю., Мельничук П.П. Конструювання, розрахунок та експлуатація токарних верстатів з ЧПК. – Житомир: ЖІТІ, 2001. – 400 с.
6. Василюк Г.Д., Лещенко М.І., Мельничук П.П. Рациональна експлуатація технологічного обладнання. – Житомир: ЖІТІ, 1999. – 328 с.
7. Василюк Г.Д., Лещенко М.І., Мельничук П.П. Технологія обробки глибоких отворів. – Житомир: ЖІТІ, 2001. – 301 с.
8. Василюк Г.Д., Мельничук П.П. Досвід удосконалення технологічних наладок токарно-револьверних верстатів з ЧПК // Вісник ЖІТІ. – 1998. – № 8. – 6 с.
9. Венцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
10. Виговський Г.М., Мельничук П.П. Процес різання торцевими ступінчастими фрезами з косокутною геометрією різальних частин, що оснащені надтвердими матеріалами // Вісник ЖІТІ. – 1998. – № 7. – С. 73–81.
11. Виговський Г.М., Мельничук П.П. Безвершинне косокутне фрезерування. Шорсткість поверхні // Вестник НТУУ “КПИ”. – 1999. – № 37. – С. 262–275.
12. Виговський Г.М., Мельничук П.П. Особливості косокутного безвершинного різання // Вісник ЖІТІ. – 1999. – № 10. – 10 с.
13. Виговський Г.М., Мельничук П.П. Громовий О.А. Розрахунок сил різання при обробці деталей ступінчастими торцевими фрезами // Вісник ЖІТІ. – 1999. – № 11.
14. Виговський Г.М., Мельничук П.П., Громовий О.А. Косокутне різання. Деформація та напрямок сходу стружки // Вісник ЖІТІ. – 1999. – № 12.
15. Виговський Г.М., Мельничук П.П., Громовий О.А., Ольшевський В.С.

Особливості процесу торцевого фрезерування одно- і багатоступінчастими фрезами // Вісник Сумського державного університету. – 2000. – № 15. – 6 с.

16. Виговський Г.М., Мельничук П.П., Громовий О.А. Використання кінематичних схем різання при чистовому фрезеруванні // Вісник ЖІТІ. – 2000. – № 13. – 6 с.

17. Vigovsky G.M., Melnichuk P.P., Gromovoy O.A. How to increase and quality of machining of nousing and plane. The Second International Scientific Conference Scientific Bulletins of Rzeszow University of Technolohy. No 179, Mechanics 2000. – 3 с.

18. Выговский Г.Н., Громовой А.А., Мельничук П.П., Курьята П.В. Компьютерное моделирование процесса торцевого фрезерования одно- и многоступенчатыми фрезами. – ZBORNIK RADOVA PROCEESINGS 26<sup>th</sup>. Jupiter konferencija 22. Simpozijum. – Beograd 2000 NU ROBONIFTS. – 6 с.

19. Виговський Г.М., Громовий О.А., Мельничук П.П., Бушля В.М. Комп'ютерне моделювання процесу обробки ступінчастими торцевими фрезами // Резание и инструмент в технологических системах. – 2001. – № 60. – С. 144–153.

20. Виговський Г.М., Мельничук П.П., Громовий О.А. Дослідження процесу чистового торцевого фрезерування косокутними фрезами // Вестник НТУУ “КПИ”, Машиностроение. – 2001. – № 40. – 6 с.

21. Гордієнко А.І., Полонський Л.Г., Мельничук П.П., Хейфець М.Л. Математичне моделювання технологічних процесів у машинобудуванні. – Житомир: ЖІТІ, 2001. – 190 с.

22. Громовий О.А., Мельничук П.П., Ольшевський В.С. Безвершинне косокутне фрезерування. Зношення та стійкість // Вісник ЧІТІ. – 1999. – № 4. – 5 с.

23. Громовий О.А., Мельничук П.П., Ольшевський В.С. Прогресивні напрямлення торцевих фрез для чистової обробки плоских поверхонь // Матеріали 15 Ежегодной Международной научно-технической конференции “Прогрессивные технологии в машиностроении” (ТЕХНОЛОГИЯ–2000). – Одесса, 2000. – 3 с.

24. Громовий О.А., Виговський Г.М., Мельничук П.П. Вплив похибок верстата на площинність оброблених поверхонь при чистовому торцевому фрезеруванні // Вестник НТУУ “КПИ”. – 2000. – № 39. – 3 с.

25. Громовий О.А., Виговський Г.М., Мельничук П.П. Дослідження процесу чистового торцевого фрезерування косокутними фрезами. – II-а Міжнародна конференція “Прогресивна техніка і технологія – 2001”. – Київ–Севастополь. – 2 с.

26. Громовий О.А., Виговський Г.М., Мельничук П.П., Лоєв В.Ю. Спосіб плоского фрезерування торцевими фрезами. – Рішення на видачу

деклар. патенту на винахід від 15.05.2001, № 2000074236.

27. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1983. – 172 с.

28. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1975. – 408 с.

29. Дьяконов В.П., Абраменкова И.В. MATLAB 5.0/5.3 Система символьной математики. – М.: Нолидж, 1999. – 633 с.

30. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

31. Кирилович В.А., Мельничук П.П., Яновський В.А. Нормування часу та режимів різання для токарних верстатів з ЧПУ. – Житомир: ЖІТІ, 2001. – 599 с.

32. Клименко С.А., Муковоз Ю.А., Полонський Л.Г., Мельничук П.П. Точение износостойких защитных покрытий. – К.: “Техніка”, 1997. – 142 с.

33. Кудинов В.А. Динамика станков. – М.: Машиностроение, 1967. – 360 с.

34. Купкін Є.С., Мельничук П.П. Метрологічні параметри пристроїв введення первинної інформації // Вісник Тернопільського технічного університету. Том 6. – 2001. – № 3. – С. 95–103.

35. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1973. – 831 с.

36. Левин А.И. Математическое моделирование в исследованиях и проектировании станков. – М.: Машиностроение, 1978. – 184 с.

37. Мэнли Р. Анализ и обработка записей колебаний. – М.: Машиностроение, 1972. – 368 с.

38. Мельничук П.П. Математична модель деформативності пружної системи шпинделя // Вісник Житомирського інженерно-технологічного інституту. – 2001. – № 19. – 15 с.

39. Мельничук П.П., Камінський Д.Б. Оптимізація режимів в умовах квазістаціонарного процесу різання лезовим інструментом // Вісник ЖІТІ. – 1998. – № 8. – 5 с.

40. Мельничук П.П., Крижановський В.Б., Курьята П.В., Виговський Г.М. Температурні поля при обробці металів фрезами із надтвердих матеріалів: фізична постановка задачі, її математичне і програмне забезпечення // Вісник ЖІТІ. – 2001. – № 16. – 2 с.

41. Металлорежущие станки: Учебник / Под ред. В.Э. Пуша. – М.: Машиностроение, 1985. – 256 с.

42. Орликов М.Л. Динамика станков. – К.: Вища школа, 1989. – 272 с.

43. Попов В.И., Локтев В.И. Динамика станков. – К.; Техніка, 1975. – 136 с.

44. Пугачев В.С. Введение в теорию вероятностей. – М.: Наука, 1968. – 368 с.

45. Плис А.И., Сливина Н.А. МATHCAD 2000: математический практикум для экономистов и инженеров. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 655 с.
46. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування. – К.: Либідь, 1977. – 544 с.
47. Петраков Ю.В., Мельничук П.П. Автоматизація технологічних процесів у машинобудуванні засобами мікропроцесорної техніки. – Житомир: ЖІТІ, 2001. – 194 с.
48. Радченко С.Г. Математическое моделирование технологических процессов в машиностроении. – К.: ЗАО “Укрспецмонтажпроект”, 1998. – 258 с.
49. Равська Н.С., Родін П.Р., Ніколаєнко Т.П., Мельничук П.П., Виговський Г.М. Геометрія спряжених поверхонь: Збірник задач. – Житомир: ЖІТІ, 2001. – 315 с.
50. Равська Н.С., Мельничук П.П., Касьянов А.Г., Родін Р.П. Технологія інструментального виробництва. – Житомир: ЖІТІ, 2001. – 548 с.
51. Решетов Д.Н., Портман В.Т. Точность металлорежущих станков. – М.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
52. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. – К.: “Техніка”, 1975. – 768 с.
53. Скочко Є.В., Мельничук П.П. Наукові дослідження в машинобудуванні: проблеми та рішення. – Вісник ЖІТІ. – 2001. – № 15. – 7 с.
54. Струтинський В.Б. Комплексна математична модель детермінованих та стохастичних динамічних процесів у технічних системах // Вісник Національного технічного університету України “КПІ”. Серія “Машинобудування”. – 1998. – № 33. – С. 15–135.
55. Струтинський В.Б. Математична модель спектральних характеристик флуктуацій кутової швидкості шпинделя металорізального верстата // Вісник Житомирського інженерно-технологічного інституту. – 1999. – № 9. – 5 с.
56. Струтинский В.Б., Гейчук В.Н., Даниленко А.В., Лепетюк А.Л. Методические указания к лабораторной работе “Математическое моделирование гидропривода металлорежущего станка” по курсу “Математическое моделирование станков и станочных комплексов”. – К.: КПИ, 1991. – 28 с.
57. Струтинский В.Б., Гейчук В.Н., Даниленко А.В., Чикин С.В., Протасов С.В. Методические указания к лабораторной работе “Расчет на ЭВМ частотных характеристик динамической системы токарного станка” по курсу “Математическое моделирование станков и станочных комплексов”. – К.: КПИ, 1991. – 40 с.

58. Струтинський В.Б., Гуржій А.М. Математичне моделювання стохастичних коливальних процесів у динамічній системі токарного верстата // Тези доповідей II-го міжнародного симпозіуму українських інженерів-механіків у Львові. – 1995. – С. 78–85.

59. Струтинський В.Б., Гуржій А.М., Лопаткіна Н.Н. Математическая модель случайного процесса позиционирования прецизионного механического привода // Вестник НТУУ “КПИ”, серия “Машиностроение”. – 1999. – № 32. – С. 44–56.

60. Струтинський В.Б., Гуржій А.М., Лопаткіна Н.Н. Аналіз стохастичних динамічних процесів у технічних системах методом Монте-Карло з використанням частотних характеристик // Вестник НТУУ “КПИ”, серия “Машиностроение”. – С. 108–112.

61. Струтинський В.Б., Гуржій А.М., Лопаткіна Н.Н. Стохастическая математическая модель для исследования динамических процессов позиционных приводов металлорежущих станков // Праці міжнародної науково-технічної конференції, присвяченої 100-річчю механіко-машинобудівного факультету КПІ “Прогресивна техніка і технологія машинобудування, приладобудування зварювального виробництва”. Том 1. – 1998. – С. 124–129.

62. Струтинський В.Б., Даниленко О.В., Дем'яненко С.К. Аналіз точності вертикально-фрезерного верстата з ЧПК // Вестник НТУУ “КПИ”. Серия “Машиностроение”. – 2000. – № 39. – С. 48–54.

63. Струтинський В.Б., Даниленко О.В. Визначення динамічних властивостей пружної системи супорта токарного верстата за допомогою стохастичної математичної моделі // Вісник ЖІТІ. – 1999. – № 10. – С. 22–27.

64. Струтинський В.Б., Даниленко А.В. Стохастична математична модель гідравлічного приводу металорізального верстата // Вестник НТУУ “КПИ”. Серия “Машиностроение”. – 1999. – № 36. – С. 14–19.

65. Струтинський В.Б., Кравець А.М., Дем'яненко С.К. Спектральний аналіз форми поверхні, одержаної при обробці заготовок зі спеціальним профілем // Вісник ЖІТІ. – 2000. – № 14. – С. 54–63.

66. Струтинський В.Б., Мельничук П.П. Структурна стохастична математична модель биття шпинделя вертикально-фрезерного верстата // Вісник ЖІТІ. Спец. випуск. – 2001. – С. 223–228.

67. Струтинський В.Б., Мельничук П.П. Стохастична математична модель биття шпиндельних опор металорізального верстата // Збірник наукових праць Кіровоградського державного технічного університету. Випуск 10. – Кіровоград, 2001. – С. 183–192.

68. Струтинський В.Б., Петренко В.А. Закономірності виникнення

резонансних режимів під дією випадкових ударних навантажень (статистичні резонанси) і їх негативний вплив на роботу верстатного обладнання // Вісник ЖІТІ. – 1998. – № 7. – С. 60–66.

69. Струтинський В.Б., Саленко О.Ф., Приходько В.П., Загорянський Г.М. Математичне моделювання електрогідравлічних приводів подач верстатів з ЧПУ: Навч. посібник для студентів спеціальностей 1201 та 12.02 “Технологія машинобудування” та “Металорізальні верстати і інструмент”. – Кременчук, 1994. – 138 с.

70. Струтинский В.Б., Турусбеков Э.Т. Оценка параметров случайных ударных нагрузок в динамических системах металлорежущих станков // Вестник НТУУ “КПИ”. Серия “Машиностроение”. – 1997. – № 32. – С. 44–47.

71. Струтинський В.Б., Турусбеков Э.Т. Статистические характеристики случайных нагрузок, возникающих в динамической системе токарного многшпиндельного автомата // Вестник НТУУ “КПИ”. Серия “Машиностроение”. – 1997. – № 32. – С. 98–103.

72. Струтинский В.Б., Шевченко А.В., Даниленко А.В. Джаалук Али. Исследование виброакустических характеристик токарно-винторезных станков // Вестник НТУУ “КПИ”. Серия “Машиностроение”. – 2000. – № 34. – С. 112–121.

73. Струтинський В.Б., Шевченко О.В., Кравець О.М., Джаалук Алі. Математичне моделювання вібраційних характеристик токарно-гвинторізного верстата КА-280 на основі імітаційного стохастичного навантаження // Вестник НТУУ “КПИ”. Серия “Машиностроение”. – 2000. – № 39. – С. 133–146.

74. Светлицкая В.А., Стасенко И.В. Сборник задач по теории колебаний. – М.: Высшая школа, 1973. – 454 с.

75. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле: Пер. с англ. Л.Г. Корнейчука. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.

76. Тихонов А.Н., Кальнер В.Д., Гласко В.Б. Математическое моделирование технологических процессов и метод обработки задач в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1990. – 354 с.



## ЗМІСТ

Вступ .....	3
<b>ЧАСТИНА I. Математичний апарат моделювання .....</b>	<b>5</b>
<b>РОЗДІЛ 1. Математичні моделі процесів на основі символічних функціональних залежностей .....</b>	<b>5</b>
1.1. Обчислення та перетворення символічних функціональних залежностей .....	5
1.2. Побудова та аналіз плоских графіків .....	12
1.3. Символьні залежності із диференціальними операціями ..	22
<b>РОЗДІЛ 2. Функціональні ряди у математичному моделюванні .....</b>	<b>40</b>
2.1. Ряди Фур'є. Загальні положення .....	40
2.2. Ряди Фур'є розривних функцій. Явище Гібса .....	49
2.3. Некоректно поставлені задачі щодо нескінченного ряду Фур'є та їх регуляризація .....	57
2.4. Спектральний аналіз процесів .....	62
<b>РОЗДІЛ 3. Система SIMULINK пакету MATLAB для моделювання процесів та систем .....</b>	<b>78</b>
3.1. Загальна характеристика системи .....	78
3.1.1. Принципи побудови системи, приклади S-моделей ..	78
3.1.2. Бібліотека модулів (блоків) SIMULINK .....	83
3.2. Основні розділи бібліотеки, характеристика модулів .....	84
3.2.1. Sources – вхідні модулі (джерела) .....	84
3.2.2. Розділ Sinks – вихідні модулі (отримувачі) .....	86
3.2.3. Continuous – аналогові блоки .....	88
3.2.4. Discrete та Function & Tables – дискретні модулі, функції та таблиці .....	92
3.2.5. Math – модулі для реалізації математичних операцій .....	95
3.2.6. Nonlinear – модулі, що реалізують нелінійні функції ..	98
3.2.7. Signal & System – модулі для формування структури системи .....	101
3.2.8. Control System Toolbox, Stateflow та Simulink Extras – модулі зв'язку між системами, візуалізація процедури моделювання та модулі обробки сигналів ..	108
<b>РОЗДІЛ 4. Операції з векторами і матрицями в пакеті MathCAD .....</b>	<b>110</b>
4.1. Алгебраїчні операції з векторами і матрицями .....	110
4.2. Вбудовані функції пакету MathCAD для роботи з матрицями та векторами .....	124

<b>ЧАСТИНА II. Моделювання статичних і квазістатичних систем металорізальних верстатів . . . . .</b>	<b>138</b>
<b>РОЗДІЛ 5. Математичне моделювання геометричних параметрів фрези косокутного різання . . . . .</b>	<b>138</b>
5.1. Математичний опис і програмна реалізація визначення положення осей ножів в корпусі фрези . . . . .	138
5.2. Геометричні параметри різальних поверхонь ножів фрез косокутного різання . . . . .	153
5.3. Встановлення закономірностей зносу різальних поверхонь ножів . . . . .	164
5.4. Математичне моделювання силових характеристик процесу різання . . . . .	179
<b>РОЗДІЛ 6. Геометричний аналіз системи “шпиндель – інструмент” . . . . .</b>	<b>188</b>
6.1. Визначення закономірностей биття передньої та задньої підшипникових опор шпинделя верстата . . . . .	188
6.2. Ідентифікація стохастичних параметрів кінематичної точності шпиндельного вузла верстата . . . . .	203
6.3. Аналіз геометричної точності вузла кріплення фрези . . . . .	231
<b>РОЗДІЛ 7. Визначення статичних деформацій при згині шпинделя під дією сил різання . . . . .</b>	<b>242</b>
7.1. Аналіз деформативності окремих підсистем статично невизначеної пружної системи шпинделя . . . . .	242
7.2. Формування умов сумісності деформацій шпинделя із врахуванням випадкових змін його параметрів і нелінійних характеристик жорсткості підшипників . . . . .	254
7.3. Структурна математична модель для розрахунку деформацій, що виникають при згині шпинделя під дією сил різання . . . . .	265
<b>РОЗДІЛ 8. Визначення зміни положення фрези і заготовки, яке має місце в процесі обробки . . . . .</b>	<b>279</b>
8.1. Алгоритмічне забезпечення процедури розрахунку статичних і динамічних переміщень стола верстата . . . . .	279
8.2. Структурна математична модель для розрахунків динамічних переміщень стола верстата, результати моделювання та порівняння їх з експериментальними даними . . . . .	289
8.3. Визначення динамічних переміщень фрези під дією сил різання загального виду . . . . .	304
8.4. Загальна математична модель процесу механічної обробки поверхні на фрезерному верстаті, оснащеному фрезою косокутного різання, та результати моделювання . . . . .	315

<b>ЧАСТИНА III. Моделювання динамічних випадкових процесів у металорізальних верстатах . . . . .</b>	<b>337</b>
<b>РОЗДІЛ 9. Загальні символічні математичні моделі динамічних систем верстатів . . . . .</b>	<b>337</b>
9.1. Математичні моделі детермінованих динамічних систем . . . . .	337
9.2. Узагальнені математичні моделі стохастичних процесів та систем . . . . .	347
9.3. Математичне моделювання позиційних приводів металорізальних верстатів з використанням символічної математичної моделі . . . . .	360
<b>РОЗДІЛ 10. Спрощена математична модель динамічної системи верстата . . . . .</b>	<b>373</b>
10.1. Структурна математична модель динамічної системи шпіндельно-супортної групи верстата . . . . .	373
10.2. Модель супортної групи та процесу різання . . . . .	382
10.3. Загальна структурна математична модель шпіндельно-супортної групи . . . . .	388
10.4. Спрощена математична модель привода головного руху . . . . .	393
10.5. Структурна математична модель динамічної системи верстата . . . . .	398
10.6. Результати математичного моделювання верстата . . . . .	410
<b>РОЗДІЛ 11. Уточнена структурна математична модель силової частини привода головного руху токарного верстата . . . . .</b>	<b>418</b>
11.1. Математична модель динамічної системи електродвигуна . . . . .	418
11.2. Математична модель динамічної системи вала I зі шківом і муфтою . . . . .	432
11.3. Математична модель зубчастої передачі від вала I до вала II . . . . .	441
11.4. Математична модель зубчастих передач групи реверса . . . . .	446
11.5. Загальна математична модель віброактивної частини привода головного руху верстата та результати математичного моделювання . . . . .	457
<b>РОЗДІЛ 12. Математичні моделі на основі спектрального аналізу динамічних процесів металорізальних верстатів . . . . .</b>	<b>463</b>
12.1. Спектральні характеристики стохастичних динамічних ударних навантажень в ланцюговій крутильній системі привода головного руху верстата . . . . .	463
12.2. Спектральний аналіз форми поверхні, одержаної в результаті обробки на токарному верстаті . . . . .	482
12.3. Теоретичне узагальнення експериментально визначених спектральних характеристик стохастичних динамічних процесів верстатів . . . . .	498
12.4. Спектральні характеристики мікро профілю поверхні, одержаної обробкою фрезею косокутного різання на фрезерному верстаті . . . . .	512
<b>Література . . . . .</b>	<b>564</b>