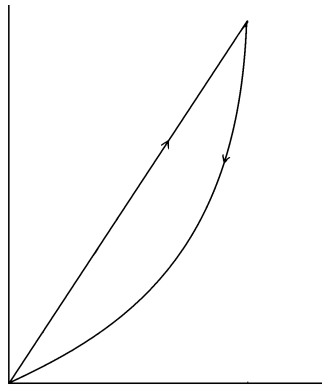


І.Й.Попадюк, І.П.Шацький, В.М.Шопа

**МЕХАНІКА ФРИКЦІЙНОГО
КОНТАКТУ ОБОЛОНОК
З ДЕФОРМІВНИМ
ЗАПОВНЮВАЧЕМ**



2003

**Національна академія наук України
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С.Підстригача**

**Міністерство освіти і науки України
Івано-Франківський національний технічний
університет нафти і газу**

І.Й.Попадюк, І.П.Шацький, В.М.Шопа

**МЕХАНІКА ФРИКЦІЙНОГО
КОНТАКТУ ОБОЛОНОК
З ДЕФОРМІВНИМ
ЗАПОВНЮВАЧЕМ**

**Івано-Франківськ
Факел
2003**

ББК 22.251

П 57

УДК 539.3

Попадюк І.Й., Шацький І.П., Шопа В.М. Механіка фрикційного контакту оболонок з деформівним заповнювачем: Монографія. – Івано-Франківськ: Факел, 2003. – 180 с.

ISBN 966-7327-76-0

Викладено результати механіко-математичного моделювання поведінки оболонок в умовах фрикційного контакту з деформівним заповнювачем. Подано розв'язки ряду неконсервативних мішаних контактних задач, на основі яких вивчено міцність, жорсткість та демпфувальну здатність оболонкових віброзахисних систем.

The results of the mechanical and mathematical modeling of the shells during the friction contact with the deformative filler have been represented. The solutions of a number of unconservative mixed contacting problems have been represented as well. It helped the strength, the stiffness and the dumping ability of the shell vibro-protectional systems being studied.

Бібліогр.: 206 назв.

Рецензенти:

чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. Г.С.Кіт

д-р фіз.-мат. наук, проф. В.А.Осадчук

д-р техн. наук, проф. Я.М.Дрогомирецький

© Попадюк І.Й.,
Шацький І.П.,
Шопа В.М., 2003

Наукове видання

**Попадюк Ігор Йосипович
Шацький Іван Петрович
Шопа Василь Михайлович**

**МЕХАНІКА ФРИКЦІЙНОГО КОНТАКТУ
ОБОЛОНОК З ДЕФОРМІВНИМ
ЗАПОВНЮВАЧЕМ**

Затверджено до друку вченою радою Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України та вченою радою Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу

Коректор
Комп'ютерна верстка

Н.Ф. Будуйкевич
Лабораторія
комп'ютерної
підготовки видань

Підписано до друку _____ Формат _____ Друк офсетний
Ум. друк. арк. _____ Тираж _____ прим. Замовл. _____



Видавництво Івано-Франківського національного
технічного університету нафти і газу

76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15

ЗМІСТ

Вступ	3
Розділ 1 Фрикційна взаємодія циліндричної оболонки з деформівним заповнювачем	10
1.1. Мішана задача фрикційного контакту безмоментної оболонки та пружного заповнювача.....	10
1.2. Числово-аналітичний розв'язок контактної задачі для циліндричної оболонки Кірхгофа-Лява та деформівного заповнювача з урахуванням сухого тертя	33
1.3. Розсіювання енергії при немонотонному навантаженні пружного заповнювача в циліндричній оболонці	43
Розділ 2 Фрикційний контакт коаксіальних циліндричних оболонок з пружним заповнювачем	64
2.1. Постановка та розв'язок мішаної контактної задачі	64
2.2. Конструкційне демпфування в системі коаксіальних циліндричних оболонок, розділених заповнювачем	92
Розділ 3 Моделювання рівномірної оболонки з деформівним заповнювачем за наявності сухого тертя	96
3.1. Контактна задача про стиск деформівного заповнювача в оболонці змінної товщини.....	96
3.2. Конструкційне демпфування у рівномірній оболонці з деформівним заповнювачем	106

Розділ 4	
Фрикційний контакт пружного заповнювача з конічною обоймою	127
4.1. Моделювання фрикційної взаємодії заповнювача з конічною обоймою	127
4.2. Фрикційне проковзування пружного заповнювача в конічній обоймі при немонотонному навантаженні	136
Розділ 5	
Оптимізація багатосекційних оболонкових систем з деформівним заповнювачем	146
5.1. Оптимізація демпферів сухого тертя за критерієм мінімальної жорсткості	146
5.2. Розподіл сил тертя у багатосекційному пружному елементі бурового амортизатора.....	153
Список використаної літератури	162

РОЗДІЛ 1

ФРИКЦІЙНА ВЗАЄМОДІЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ДЕФОРМІВНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ

1.1 Мішана задача фрикційного контакту безмоментної оболонки та пружного заповнювача

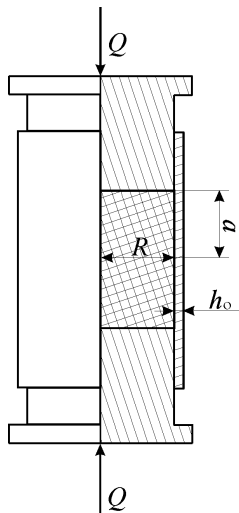


Рисунок 1.1
можливість аналітично розв'язати сформульовану проблему.

Через симетрію конструкції відносно площини, рівновіддаленої від поршнів, можна розглянути половину системи (рис. 1.2), вважаючи переріз, який належить площині симетрії, гладко впертим в жорстку перепону. Осесиметричний напружено-деформований стан конструкції досліджуємо в циліндричних координатах (рис. 1.2).

Нехай пружний деформівний циліндр (заповнювач), радіус якого R і довжина $2a$, поміщений в оболонку завтовшки h_0 (рис. 1.1). Заповнювач стискається по торцях абсолютно жорсткими поршнями, до яких прикладене навантаження величиною Q .

Тертям між заповнювачем і поршнями нехтуємо. Характер контактної взаємодії оболонки і заповнювача визначається законом сухого тертя. Слід знайти аналітичний розв'язок мішаної контактної задачі, який враховує найбільш суттєві параметри напружено-деформованого стану системи. Для цього необхідно побудувати моделі заповнювача і оболонки певного рівня строгості, які дають

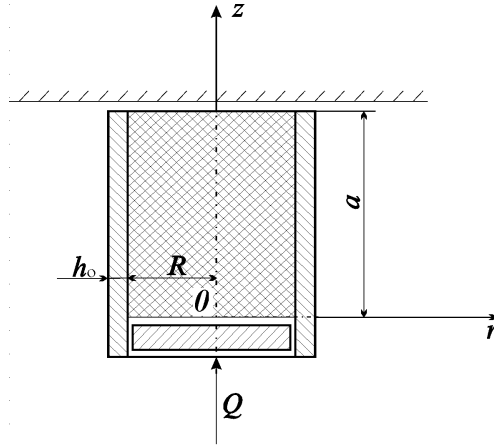


Рисунок 1.2

Для побудови моделі заповнювача використано операторний метод [103, 116]. Основні рівняння осесиметричної (вісь z) задачі теорії пружності в циліндричних координатах за відсутності масових сил включають рівняння рівноваги

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial r} + K \frac{\partial \omega}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} - K \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r\omega)}{\partial r} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

співвідношення Коші

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \omega &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

і закон Гука.

У формулах (1.1), (1.2) позначено: θ – об’ємне розширення; ω – єдиний ненульовий компонент обертання; u_r, u_z –

радіальне і осьове переміщення; $K = \frac{1-2\nu}{1-\nu}$; ν – коефіцієнт Пуассона.

Підставимо співвідношення (1.2) в рівняння (1.1) і замінимо оператор $\frac{\partial}{\partial z}$ на довільну константу p , одержимо систему звичайних диференціальних рівнянь в переміщеннях, загальний розв’язок якої виражається через циліндричні функції

$$\begin{aligned} u_r &= Z_1^*(pr) - \frac{2-K}{2} rZ_0(pr); \\ u_z &= \frac{2}{p} Z_0(pr) - Z_0^*(pr) - \frac{2-K}{2} rZ_1(pr). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Тут

$$\begin{aligned} Z_0(pr) &= AJ_0(pr) + BN_0(pr), \\ Z_0^*(pr) &= A_*J_0(pr) + B_*N_0(pr), \\ Z_1(pr) &= AJ_1(pr) + BN_1(pr), \\ Z_1^*(pr) &= A_*J_1(pr) + B_*N_1(pr), \end{aligned} \quad (1.4)$$

де: $J_0(pr)$, $J_1(pr)$ – функції Бесселя першого роду нульового і першого порядку; $N_0(pr)$, $N_1(pr)$ – функції Неймана нульового і першого порядку; A , B , A_* , B_* – довільні константи.

Використовуючи формули (1.3), із співвідношень Коші отримуємо деформації

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= -\frac{2-K}{2} [Z_0(pr) - prZ_1(pr)] + p \left[Z_0^*(pr) - \frac{1}{pr} Z_1^*(pr) \right]; \\ \varepsilon_\beta &= -\frac{2-K}{2} Z_0(pr) + \frac{1}{r} Z_1^*(pr); \\ \varepsilon_z &= -\frac{2-K}{2} prZ_1(pr) + 2Z_0(pr) - pZ_0^*(pr); \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rz} &= -(2-K)prZ_0(pr) - 2Z_1(pr) + 2pZ_1^*(pr); \\ \theta &= KZ_0(pr); \quad \omega = Z_1(pr).\end{aligned}$$

І, нарешті, за допомогою закону Гука та формул (1.5) знаходимо вирази для напружень

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1+\nu} \left[-\frac{K}{2} Z_0(pr) + \frac{2-K}{2} prZ_1(pr) + pZ_0^*(pr) - \frac{1}{r} Z_1^*(pr) \right]; \\ y_\beta &= \frac{E}{1+h} \left[-\frac{K}{2} Z_0(pr) + \frac{1}{r} Z_1^*(pr) \right]; \\ y_z &= \frac{E}{1+h} \left[\frac{2-h}{1-h} Z_0(pr) - pZ_0^*(pr) - \frac{2-K}{2} prZ_1(pr) \right]; \\ \tau_{rz} &= \frac{E}{1+\nu} \left[-\frac{2-K}{2} prZ_0(pr) - Z_1(pr) + pZ_1^*(pr) \right].\end{aligned}\quad (1.6)$$

Тут E – модуль Юнга.

Для нескінченного суцільного циліндра запишемо крайові умови на бічній поверхні $r = R$

$$\sigma_r /_{r=R} = \sigma, \quad \tau_{rz} /_{r=R} = \tau, \quad (1.7)$$

де σ, τ – задані нормальне і дотичне напруження, а також умови обмеженості переміщень при $r = 0$

$$u_r /_{r=0} = 0, \quad u_z /_{r=0} < \infty. \quad (1.8)$$

Задовольнимо умови (1.7), (1.8) і відкинемо в розкладах циліндричних функцій члени порядку $o(pr)$, одержимо шукані модельні співвідношення для заповнювача через задані на бічній поверхні напруження:

для переміщень

$$u_r = \frac{r}{E} \left[(1-h)y + \frac{2h}{R} \frac{1}{p} \phi \right];$$

$$u_z = -\frac{1}{E} \left[2n \frac{1}{p} y - \frac{2}{R} \frac{1}{p^2} \phi \right]; \quad (1.9)$$

для деформацій

$$\begin{aligned} \varepsilon_r = \varepsilon_\beta &= \frac{1}{E} \left[(1-n)\sigma + \frac{2n}{R} \frac{1}{p} \tau \right]; \\ \varepsilon_z &= -\frac{1}{E} \left[2n\sigma - \frac{2}{R} \frac{1}{p} \tau \right]; \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1+n}{E} \frac{r}{R} \tau; \end{aligned} \quad (1.10)$$

для напружень

$$\sigma_r = \sigma_\beta = \sigma, \quad \tau_{rz} = \frac{r}{R} \tau, \quad \sigma_z = -\frac{2}{R} \frac{1}{p} \tau. \quad (1.11)$$

Аналогічні модельні співвідношення можна отримати в припущенні, що у заповнювачі нормальні напруження $\sigma_r, \sigma_\beta, \sigma_z$ і осьові переміщення u_z розподілені рівномірно, а дотичні напруження τ_{rz} і радіальні переміщення u_r – лінійно по поперечному перерізу. Приймаючи сформульовану гіпотезу і переходячи до безрозмірної системи координат, зразу отримуємо

$$\sigma_\rho = \sigma_\beta = \sigma, \quad \tau_{\rho\zeta} = \tau\rho, \quad u_\zeta = u, \quad u_\rho = w\rho. \quad (1.12)$$

Рівняння рівноваги, усереднене по площі поперечного перерізу, з урахуванням формул (1.12) має вигляд

$$\frac{d\sigma}{d\zeta} + 2l\tau = 0. \quad (1.13)$$

І, нарешті, усереднений закон Гука буде

$$\varepsilon_\zeta = \frac{1}{a} \frac{du}{d\zeta} = \frac{1}{E} (\sigma_\zeta - 2n\tau), \quad (1.14)$$

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_\beta = \frac{w}{R} = \frac{1}{E} \left((1-\nu)\sigma - \nu\sigma_\zeta \right). \quad (1.15)$$

Тут $l = a/R$; $\zeta = z/a \in [0, 1]$, $\rho = r/R \in [0, 1]$ – безрозмірні координати; w – радіальне переміщення поверхні $\rho = 1$; u – осьове переміщення перерізів заповнювача.

Як видно із формул (1.9) – (1.15), модельні співвідношення, виведені операторним методом і отримані гіпотетично, абсолютно ідентичні. Відзначимо також, що ці співвідношення можна отримати суперпозицією розв’язків задач про радіальний і осьовий стиск суцільного циліндра, що доводить достатню адекватність побудованої моделі заповнювача на заданому рівні строгості.

Пружну рівновагу оболонки описуємо співвідношеннями безмоментної теорії [136]. Це:
рівняння рівноваги

$$\frac{dN_\zeta}{d\zeta} - a\tau_o = 0, \quad (1.16)$$

$$N_\beta = -R\sigma_o; \quad (1.17)$$

закон Гука (фізичні співвідношення)

$$\varepsilon_{\zeta o} = \frac{1}{a} \frac{du_o}{d\zeta} = \frac{1}{E_o h_o} (N_\zeta - h_o N_\beta), \quad (1.18)$$

$$\varepsilon_{\beta o} = \frac{w_o}{R} = \frac{1}{E_o h_o} (N_\beta - h_o N_\zeta). \quad (1.19)$$

Тут N_ζ , N_β – мембранні зусилля, σ_o , τ_o – задані на внутрішній поверхні оболонки напруження, u_o , w_o – осьове і радіальне переміщення оболонки, E_o, h_o – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона її матеріалу.

На торцях заповнювача і оболонки виконуються умови

$$\sigma_\zeta(0) = -P \equiv -\frac{Q}{\pi R^2}, \quad N_\zeta(0) = 0; \quad (1.20)$$

$$u(1) = 0, \quad u_0(1) = 0. \quad (1.21)$$

Фрикційну взаємодію оболонки і заповнювача описуємо співвідношеннями одностороннього контакту

$$w_0 = w, \quad \sigma_0 = \sigma < 0, \quad \zeta \in [0, 1] \quad (1.22)$$

і законом сухого тертя для монотонного навантаження

$$\phi = fy, \quad u > u_0, \quad m \in [0, \alpha_0); \quad (1.23)$$

$$u = u_0, \quad |\tau| < -f\sigma, \quad \zeta \in (\alpha_0, 1], \quad (1.24)$$

де: f – коефіцієнт сухого тертя пари оболонка – заповнювач, α_0 – невідома безрозмірна координата точки розмежування областей проковзування і зчеплення. Враховуючи співвідношення (1.14), (1.18) і беручи до уваги умови (1.21), закон сухого тертя (1.23), (1.24) можна переписати таким чином:

$$\tau = f\sigma, \quad \varepsilon_\zeta > \varepsilon_{\zeta_0}, \quad \zeta \in [0, \alpha_0); \quad (1.25)$$

$$\varepsilon_\zeta = \varepsilon_{\zeta_0}, \quad |\tau| < -f\sigma, \quad \zeta \in (\alpha_0, 1], \quad (1.26)$$

тобто умови рівності (чи нерівності) осьових переміщень замінити умовами сумісності (чи несумісності) осьових деформацій оболонки і заповнювача.

Таким чином, крайова задача про контактну взаємодію оболонки і заповнювача з урахуванням сил сухого тертя сформульована. Її розв'язок побудуємо окремо в кожній із областей – проковзування і зчеплення.

Нехай $\zeta \in (\alpha_0, 1]$. Зінтегрувавши рівняння (1.13), (1.16) з урахуванням крайових умов (1.20), маємо

$$\sigma_\zeta = -P - 2l \int_0^\zeta \tau d\zeta; \quad (1.27)$$

$$N_\zeta = a \int_0^\zeta \tau d\zeta. \quad (1.28)$$

Підставляючи інтеграли (1.27), (1.28) відповідно в формули (1.14), (1.15) і (1.18), (1.19), отримуємо деформації і переміщення через невідомі y , ϕ :

для заповнювача

$$\varepsilon_{\zeta} = \frac{1}{a} \frac{du}{d\zeta} = -\frac{1}{E} \left(P + 2l \int_0^{\zeta} \tau d\zeta + 2ny \right), \quad (1.29)$$

$$\varepsilon_{\rho} = \varepsilon_{\beta} = \frac{w}{R} = \frac{1}{E} \left[(1-n)\sigma + n \left(P + 2l \int_0^{\zeta} \tau d\zeta \right) \right]; \quad (1.30)$$

для оболонки

$$\varepsilon_{\infty} = \frac{1}{a} \frac{du_0}{d\zeta} = \frac{R}{E_0 h_0} \left(l \int_0^{\zeta} \tau d\zeta + n_0 \sigma \right), \quad (1.31)$$

$$\varepsilon_{\beta_0} = \frac{w_0}{R} = -\frac{R}{E_0 h_0} \left(\sigma + n_0 l \int_0^{\zeta} \tau d\zeta \right). \quad (1.32)$$

Тепер, підставляючи переміщення (1.30), (1.32) в умови одностороннього контакту (1.22) і враховуючи закон сухого тертя для зони проковзування (1.25), отримуємо ключове рівняння контактної задачі в зоні проковзування:

$$(1 - \nu + \varepsilon_0) \sigma + (2\nu + \nu_0 \varepsilon_0) fl \int_0^{\zeta} \sigma d\zeta = -\nu P, \quad (1.33)$$

де $\varepsilon_0 = \varepsilon R / h_0$, $\varepsilon = E / E_0$ – параметр безрозмірної жорсткості заповнювача.

Зокрема, при $\zeta = 0$ із рівняння (1.33) маємо

$$y(0) = -\frac{h}{1-n+e_0} P. \quad (1.34)$$

Диференціюючи інтегральне співвідношення (1.33), приходимо до звичайного диференціального рівняння

$$\frac{d\sigma}{d\zeta} + \lambda \sigma = 0, \quad \zeta \in [0, \alpha_0), \quad (1.35)$$

де $l = fl(2n + n_0 \varepsilon_0) / (1 - n + \varepsilon_0)$.

Розв'язуючи рівняння (1.35) при крайовій умові (1.34), отримуємо вираз для нормального контактного напруження

$$\sigma = -\frac{nP}{1-n} e^{-\lambda\zeta}, \quad \zeta \in [0, \alpha_0). \quad (1.36)$$

Використовуючи закон Кулона (1.25), отримуємо дотичне контактне напруження

$$\tau = -f \frac{nP}{1-n} e^{-\lambda\zeta}, \quad \zeta \in [0, \alpha_0). \quad (1.37)$$

Запишемо ще необхідний інтеграл

$$\int_0^{\zeta} \tau d\zeta = -\frac{nP}{l(2n + n_0 e_0)} (1 - e^{-\lambda\zeta}), \quad \zeta \in [0, \alpha_0). \quad (1.38)$$

Підставляючи інтеграл (1.38) в формули (1.27), (1.28), отримуємо відповідно осьові напруження в заповнювачі і зусилля в оболонці

$$y_{\zeta} = -\frac{P}{2n + n_0 e_0} (n_0 e_0 + 2ne^{-\lambda\zeta}), \quad m \in [0, \delta_0); \quad (1.39)$$

$$N_{\zeta} = -\frac{nPR}{2n + n_0 e_0} (1 - e^{-\lambda\zeta}), \quad m \in [0, \delta_0). \quad (1.40)$$

Для осьової деформації заповнювача із формули (1.29) з урахуванням співвідношень (1.36), (1.39) впливає вираз

$$e_m = -\frac{P}{E} \frac{1}{2n + n_0 e_0} \left[n_0 e_0 + \right. \\ \left. + 2n \frac{(1+n)(1-2n) + (1-nn_0)\varepsilon_0}{1-n+e_0} e^{-\lambda\zeta} \right], \quad m \in [0, \delta_0). \quad (1.41)$$

Перейдемо до побудови розв'язку задачі в області зчеплення оболонки і заповнювача. Нехай $\zeta \in (\alpha_0, 1]$. Запишемо

вирази для осьових напружень в заповнювачі і зусиль в оболонці через невідоме дотичне контактне напруження у формі

$$\sigma_{\zeta} = \sigma_{\zeta}(\alpha_0) - 2l \int_{\alpha_0}^{\zeta} \tau d\zeta, \quad (1.42)$$

$$N_m = N_m(\bar{\sigma}_0) + a \int_{\alpha_0}^{\zeta} \tau d\zeta, \quad (1.43)$$

де $\sigma_{\zeta}(\alpha_0)$, $N_{\zeta}(\alpha_0)$ – невідомі. Тепер вирази (1.14), (1.18) для осьових деформацій заповнювача і оболонки набувають вигляду

$$e_m = \frac{1}{E} \left(y_m(\bar{\sigma}_0) - 2l \int_{\bar{\sigma}_0}^m \phi dm - 2ny \right), \quad (1.44)$$

$$\varepsilon_{\zeta\omega} = \frac{R}{E_0 h_0} \left(\frac{N_{\zeta}(\alpha_0)}{R} + l \int_{\alpha_0}^{\zeta} \tau d\zeta + n_0 y \right), \quad (1.45)$$

а радіальні переміщення (1.15), (1.19) заповнювача і оболонки будуть

$$\frac{w}{R} = \frac{1}{E} \left[(1-n)y - n \left(y_m(\bar{\sigma}_0) - 2l \int_{\bar{\sigma}_0}^m \phi dm \right) \right], \quad (1.46)$$

$$\frac{w_0}{R} = -\frac{R}{E_0 h_0} \left[\sigma + n_0 \left(\frac{N_{\zeta}(\alpha_0)}{R} + l \int_{\alpha_0}^{\zeta} \tau d\zeta \right) \right]. \quad (1.47)$$

Задовольняючи з допомогою формул (1.42) – (1.47) умови одностороннього ідеального контакту (1.22), (1.26), приходимо до системи рівнянь для контактних напружень

$$(1-n+e_0)y + (2n+n_0e_0)l \int_{\bar{\sigma}_0}^m \phi dm - ny_m(\bar{\sigma}_0) - n_0e_0 \frac{N_m(\bar{\sigma}_0)}{R},$$

$$\begin{aligned}
& (2n + n_0 e_0) y + (2 + e_0) l \int_{\bar{\sigma}_0}^m \phi dm \\
& = y_{m(\bar{\sigma}_0)} - e_0 \frac{N_m(\bar{\sigma}_0)}{R}, \quad m \in (\bar{\sigma}_0, 1]. \quad (1.48)
\end{aligned}$$

Права частина отриманої системи рівнянь не залежить від ζ . Таким чином, (1.48) – система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно двох невідомих констант σ і $l \int_{\alpha_0}^{\zeta} \tau d\zeta$. Оскільки співвідношення виду

$$l \int_{\alpha_0}^{\zeta} \tau d\zeta = \text{const}$$

приводить до особливості типу δ -функції у виразі для τ , а, отже, і до розриву осьових напружень σ_{ζ} і зусиль N_{ζ} , які в даному конкретному випадку зобов'язані бути неперервними, то необхідно прийняти

$$l \int_{\alpha_0}^{\zeta} \tau d\zeta = 0.$$

Звідси

$$\tau(\zeta) = 0, \quad \zeta \in (\alpha_0, 1], \quad (1.49)$$

і система рівнянь (1.48) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
(1 - n + e_0) y &= n u_{\zeta}(\bar{\sigma}_0) - n_0 e_0 \frac{N_m(\bar{\sigma}_0)}{R}, \\
(2n + n_0 e_0) y &= y_{\zeta}(\bar{\sigma}_0) - e_0 \frac{N_m(\bar{\sigma}_0)}{R}, \quad m \in (\bar{\sigma}_0, 1]. \quad (1.50)
\end{aligned}$$

Умова розв'язальності системи (1.50) – лінійна залежність рівнянь. Виключаючи σ , маємо

$$\sigma_{\zeta}(\alpha_0) = \left[1 + \frac{(v - v_0)(2v + v_0 \varepsilon_0)}{(1 + v)(1 - 2v) + (1 - vv_0)\varepsilon_0} \right] \varepsilon_0 \frac{N_{\zeta}(\alpha_0)}{R}. \quad (1.51)$$

Співвідношення (1.51) служить для визначення невідомої координати α_0 точки розмежування областей проковзування і зчеплення. До нього необхідно додати умови неперервності осевих напружень і зусиль в точці α_0

$$\sigma_{\zeta}(\alpha_0 - 0) = \sigma_{\zeta}(\alpha_0 + 0), \quad N_{\zeta}(\alpha_0 - 0) = N_{\zeta}(\alpha_0 + 0). \quad (1.52)$$

Тепер, використовуючи вирази (1.39), (1.40) при $\zeta = \alpha_0$ і враховуючи умови неперервності (1.52), із формули (1.51) знаходимо

$$\bar{b}_0 = \frac{1}{fl} \frac{1 - n + e_0}{2n + n_0 e_0} \ln \left(\frac{n}{n - n_0} \times \frac{2(1 + v)(1 - 2v)/\varepsilon_0 + 3 - v - 4vv_0 + (1 - v_0^2)\varepsilon_0}{1 - v + \varepsilon_0} \right). \quad (1.53)$$

Зауважимо, що при $\alpha_0 \geq 1$ в рамках прийнятої моделі зона проковзування охоплює всю область контакту.

Невідоме контактне напруження σ в зоні зчеплення знайдемо підстановкою співвідношень (1.39) і (1.40) при $\zeta = \alpha_0$ в будь-яке з рівнянь системи (1.50).

Таким чином, сформульована контактна задача про фрикційну взаємодію безмоментної циліндричної оболонки і деформівного заповнювача розв'язана. Розв'язок знайдено у класі кусково-неперервних функцій

$$\sigma = -P \frac{n}{1 - n + \varepsilon_0} \begin{cases} e^{-\lambda \zeta}, & \zeta \in [0, \alpha_0) \\ e^{-\lambda \alpha_0}, & \zeta \in (\alpha_0, 1] \end{cases},$$

$$\tau = -fP \frac{n}{1 - n + \varepsilon_0} \begin{cases} e^{-\lambda \zeta}, & \zeta \in [0, \alpha_0) \\ 0, & \zeta \in (\alpha_0, 1] \end{cases}. \quad (1.54)$$

При відомих контактних напруженнях (1.54) і координаті α_0 (1.53) на основі формул (1.12), (1.17), (1.27) – (1.32) можна знайти всі характеристики напружено-деформованого стану системи. Зокрема, головні напруження, що виникають в оболонці, мають такий вигляд:

$$\sigma_1 = \frac{N_\beta}{h_0} = -P \frac{R}{h_0} \frac{n}{1-n+\varepsilon_0} \begin{cases} e^{-\lambda\zeta}, & \zeta \in [0, \alpha_0) \\ e^{-\lambda\alpha_0}, & \zeta \in (\alpha_0, 1] \end{cases}, \quad (1.55)$$

$$\sigma_2 = \frac{N_\zeta}{h_0} = -P \frac{R}{h_0} \frac{n}{2n+n_0\varepsilon_0} \begin{cases} 1-e^{-\lambda\zeta}, & \zeta \in [0, \alpha_0) \\ 1-e^{-\lambda\alpha_0}, & \zeta \in (\alpha_0, 1] \end{cases}. \quad (1.56)$$

Обчислимо ще осьові переміщення перерізів заповнювача. При цьому необхідно розрізнити два варіанти: $\alpha_0 \geq 1$ і $\alpha_0 < 1$. Нехай $\alpha_0 \geq 1$. Інтегруючи осьову деформацію (1.14) з урахуванням крайової умови (1.21) і співвідношення (1.41), послідовно отримуємо

$$u(\zeta) = -a \int_\zeta^1 \varepsilon_\zeta d\zeta = \frac{P}{E} \frac{a}{2\nu + \nu_0 \varepsilon_0} \times \\ \times \left[n_0 \varepsilon_0 (1-\zeta) + 2n \frac{(1+n)(1-2n) + (1-nn_0)\varepsilon_0}{fl(2n+n_0\varepsilon_0)} (e^{-\lambda\zeta} - e^{-\lambda}) \right]. \quad (1.57)$$

Зокрема, при $\zeta = 0$ із виразу (1.57) одержуємо формулу для осьового переміщення (осадки) поршня $\delta = u(0)$ внаслідок дії заданої сили Q

$$\delta = \frac{Ql}{pE_0 h_0} \frac{1}{2n+n_0\varepsilon_0} \times \\ \times \left[n_0 + 2n \frac{(1+n)(1-2n)/\varepsilon_0 + 1 - nn_0}{fl(2n+n_0\varepsilon_0)} (1 - e^{-\lambda}) \right]. \quad (1.58)$$

Тепер проаналізуємо випадок $\alpha_0 < 1$. Інтегруючи формулу (1.14) з урахуванням сталості осьових деформацій заповнювача в зоні зчеплення і крайової умови (1.21), маємо

$$u(\zeta) = -a(1-\zeta)\varepsilon_\zeta(\alpha_0), \quad \zeta \in (\alpha_0, 1]. \quad (1.59)$$

Підставляючи в формулу (1.59) $\zeta = \alpha_0$, одержуємо крайову умову

$$u(\bar{\delta}_0) = -a(1-\bar{\delta}_0)e_m(\bar{\delta}_0), \quad (1.60)$$

де $\varepsilon_\zeta(\alpha_0)$ в силу своєї неперервності визначається з виразу (1.41) при $\zeta = \alpha_0$.

В зоні проковзування маємо

$$u(\zeta) = u(\alpha_0) - a \int_{\zeta}^{\alpha_0} \varepsilon_\zeta d\zeta, \quad \zeta \in [0, \alpha_0). \quad (1.61)$$

Підставляючи співвідношення (1.41), (1.60) в формулу (1.61) та інтегруючи, отримуємо

$$\begin{aligned} u(\zeta) = & \frac{P}{E} \frac{a}{2n + n_0 \varepsilon_0} \times \\ & \times \left\{ n_0 \varepsilon_0 (1 - \zeta) + 2n \frac{(1+n)(1-2n) + (1-nn_0)\varepsilon_0}{fl(2n + n_0 \varepsilon_0)} \times \right. \\ & \left. \times [e^{-\lambda\zeta} - e^{-\lambda\alpha_0} + \lambda(1-\alpha_0)e^{-\alpha_0}] \right\}. \quad (1.62) \end{aligned}$$

Об'єднуючи одержані результати для обидвох випадків, маємо осьові переміщення перерізів заповнювача:

$$\begin{aligned} u(\zeta) = & \frac{P}{E} \frac{a}{2n + n_0 \varepsilon_0} \times \\ & \times \left\{ n_0 \varepsilon_0 (1 - \zeta) + 2n \frac{(1+n)(1-2n) + (1-nn_0)\varepsilon_0}{fl(2n + n_0 \varepsilon_0)} \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \left[\begin{array}{l} e^{-\lambda \varepsilon} - e^{-\lambda \alpha_0} + \lambda(1 - \alpha_0) e^{-\alpha_0}, \alpha_0 < 0 \\ e^{-\lambda \varepsilon} - e^{-\lambda}, \alpha_0 \geq 1 \end{array} \right]. \quad (1.63)$$

Зокрема, для осового переміщення (осадки) поршня одержуємо

$$\begin{aligned} \delta = u(0) &= \frac{Ql}{\pi E_0 h_0} \frac{1}{2n + n_0 \varepsilon_0} \times \\ &\times \left\{ n_0 + 2n \frac{(1+n)(1-2n)/e_0 + 1 - nn_0}{fl(2n + n_0 e_0)} \times \right. \\ &\left. \times \left[\begin{array}{l} 1 + e^{-\lambda \alpha_0} (-1 + \lambda(1 - \alpha_0)), \alpha_0 < 1 \\ 1 - e^{-\lambda}, \alpha_0 \geq 1 \end{array} \right] \right\}. \quad (1.64) \end{aligned}$$

Для найбільш часто використовуваних на практиці податливих на зсув низькомодульних слабостисливих заповнювачів доцільно провести асимптотичний аналіз отриманих результатів у припущенні $\varepsilon_0 \rightarrow 0$, $n \rightarrow 1/2$. Це дасть змогу не тільки уникнути деякої громіздкості остаточних формул, а й більш чітко проаналізувати структуру основних результатів та вплив суттєвих параметрів системи на їх змінюваність.

Введемо необхідні позначення

$$\omega_0 = \frac{1 - 2\nu}{\varepsilon_0}, \quad \lambda_0 = 2lf, \quad (1.65)$$

і проведемо граничний перехід $\varepsilon_0 \rightarrow 0$, $\nu \rightarrow 1/2$ у формулах (1.53) – (1.56), (1.64). Координата α_0 точки розділу областей проковзування і зчеплення буде

$$\alpha_0 = \frac{1}{\lambda_0} \ln \frac{6\omega_0 + 5 - 4\nu_0}{1 - 2\nu_0}. \quad (1.66)$$

Контактні напруження набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned}\sigma &= -P \begin{cases} e^{-\lambda_0 \zeta}, & \zeta \in [0, \alpha_0) \\ e^{-\lambda_0 \alpha_0}, & \zeta \in (\alpha_0, 1] \end{cases} \\ \tau &= -fP \begin{cases} e^{-\lambda_0 \zeta}, & \zeta \in [0, \alpha_0) \\ 0, & \zeta \in (\alpha_0, 1] \end{cases}.\end{aligned}\quad (1.67)$$

Значимо, що формули (1.67) при $\alpha_0 \geq 1$ (проковзування по всій довжині) збігаються з результатами роботи [99], одержаними для нестисливого заповнювача, який не опирається зсувові. Для головних напружень, які виникають в оболонці, маємо

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -P \frac{R}{h_0} \begin{cases} e^{-\lambda_0 \zeta}, & \zeta \in [0, \alpha_0) \\ e^{-\lambda_0 \alpha_0}, & \zeta \in (\alpha_0, 1] \end{cases}, \\ \sigma_2 &= -P \frac{R}{h_0} \frac{1}{2} \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_0 \zeta}, & \zeta \in [0, \alpha_0) \\ 1 - e^{-\lambda_0 \alpha_0}, & \zeta \in (\alpha_0, 1] \end{cases}.\end{aligned}\quad (1.68)$$

I, нарешті, осьове переміщення (осадка) поршня буде

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{Ql}{\pi E_0 h_0} \left\{ v_0 + \frac{3\omega_0 + 2 - v_0}{\lambda_0} \times \right. \\ &\quad \left. \times \begin{cases} 1 + e^{-\lambda \alpha_0} (-1 + \lambda_0 (1 - \alpha_0)), & \alpha_0 \leq 1 \\ 1 - e^{-\lambda}, & \alpha_0 \geq 1 \end{cases} \right\}.\end{aligned}\quad (1.69)$$

Як видно із формул (1.67), (1.68), стисливість і податливість заповнювача слабо впливають на напружений стан системи оболонка – заповнювач. Звідси випливає перший важливий висновок: при розрахунку на міцність оболонкових конструкцій із заповнювачем достатньо користуватися асимптотичними формулами типу (1.67), (1.68).

Інша ситуація виникає при розрахунку податливості системи, яка визначається за формулою

$$\Lambda = 2\delta/Q, \quad (1.70)$$

а також при визначенні довжини зони проковзування α_0 . Наявність скінченної величини ω_0 у співвідношенні (1.69) вказує на суттєву залежність податливості усієї системи від стисливості та податливості однієї із складових – заповнювача. Співмірний внесок у податливість системи вносить також деформативність оболонки. Для більш наочної ілюстрації сказаного запишемо формулу (1.70) з урахуванням (1.69) для випадку $\alpha_0 \geq 1$:

$$L = \frac{2l}{pE_0h_0} \left[3u_0 \frac{1 - e^{-L_0}}{L_0} + n_0 + (2 - n_0) \frac{1 - e^{-L_0}}{L_0} \right]. \quad (1.71)$$

У співвідношенні (1.71) перший доданок – це податливість заповнювача, сума другого і третього доданків – податливість оболонки. Зазначимо, що обидві податливості – і заповнювача, і оболонки – можна знайти, розв'язуючи окремо дві більш прості, ніж уже розглянута, задачі: про навантаження стисливого пружного заповнювача в жорсткій обоймі, а також про пружну рівновагу оболонки за наявності напружень (1.67) на внутрішній поверхні (розв'язок другої задачі одержано в роботі [112]). Підсумовуючи викладене, зробимо другий важливий висновок: податливість конструкцій, які складаються з пружних оболонок і деформівного заповнювача, визначається у головному як сума податливостей складових частин системи, і, таким чином, задача визначення податливості складної системи розбивається на відповідне кількості частин число спрощених задач.

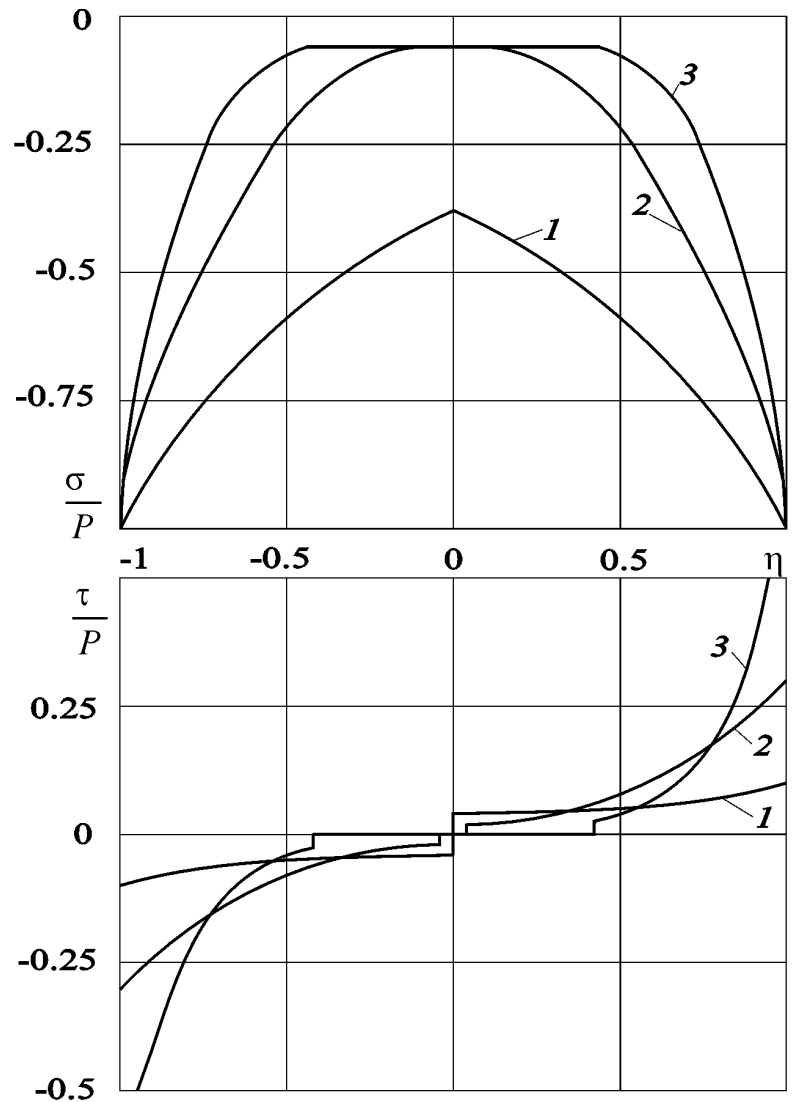
Наведений підхід до розглядуваної проблеми істотно полегшує розрахунок міцності та податливості складених конструкцій, робота котрих базується на фрикційній взаємодії пружних оболонок і низкомодульного слабостисливого заповнювача.

Для ілюстрування отриманих в рамках розробленої моделі результатів виберемо за приклад зображену на рис. 1.1 систему з параметрами: $R/a = 0,2$; $h_0/R = 0,05$; $\nu_0 = 0,3$; $\varepsilon = 0,0001$; $\nu = 0,4995$. Особливо відзначимо, що вибрані па-

раметри входять у діапазон робочих характеристик оболонкових пружних елементів, моделлю яких є розглядувана система. Введемо нову осьову безрозмірну координату $\eta \in [-1, 1]$, пов'язану з попередньою співвідношенням $\zeta = 1 - |\eta|$. На рис.1.3 подано розподіл нормальних та дотичних контактних напружень вздовж зони контакту для різних коефіцієнтів тертя контактуючої пари оболонка – заповнювач. Як видно із наведених графіків, максимальних за абсолютною величиною значень контактні напруження досягають в площинах торців заповнювача (на краях зони контакту), зменшуючись при віддаленні від цих площин. Ширина зони зчеплення збільшується з ростом коефіцієнта тертя. На її межах, у точках розділу зон, нормальні контактні напруження зазнають зламу, а дотичні контактні напруження мають розрив першого роду. При зменшенні коефіцієнта тертя межі зони зчеплення наближаються одна до одної, а сама вона стягується в точку.

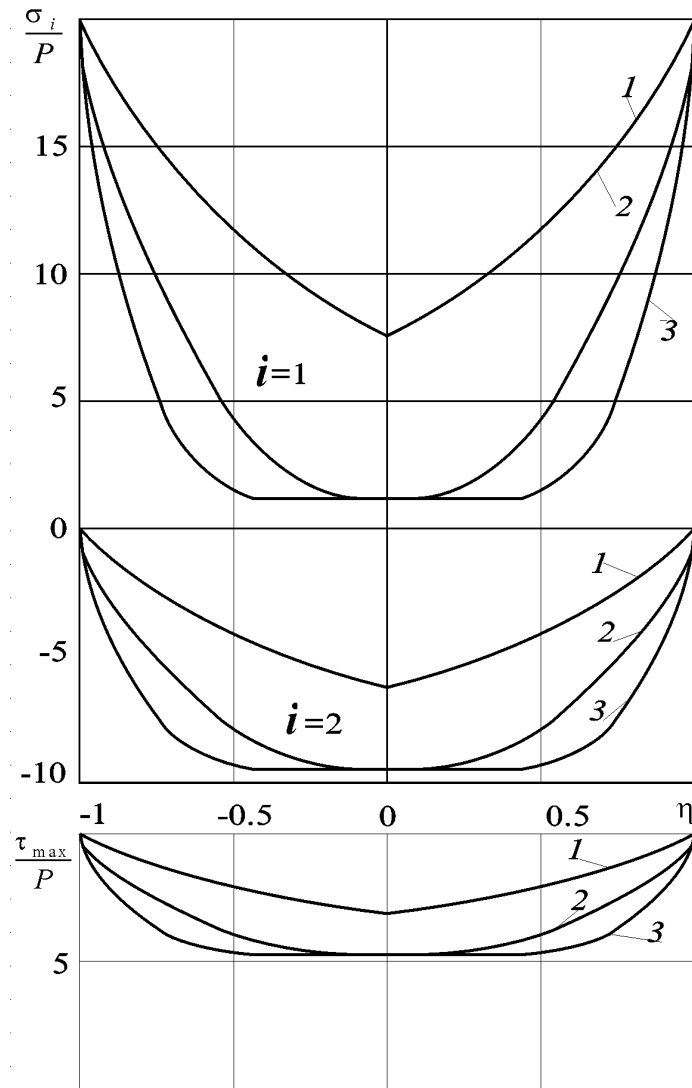
Напружений стан оболонки характеризують графіки, наведені на рис. 1.4. Максимальним за абсолютною величиною напруженням в оболонці є розтягуюче кільцеве напруження в перерізі, який належить площині торця заповнювача. Зазначимо, що темп зміни головних нормальних напружень при віддаленні від площини торця заповнювача достатньо високій. У цьому сенсі максимальні дотичні напруження вздовж оболонки розподілені більш рівномірно.

На рис. 1.5 подано розподіл осьових переміщень оболонки і заповнювача. Звертає на себе увагу більша порівняно із заповнювачем жорсткість оболонки в напрямі твірної, причому зміна коефіцієнта тертя практично не впливає на темп зміни осьових переміщень перерізів оболонки. Що стосується осьових переміщень заповнювача, то тут залежність від тертя виражена більш чітко. Зростання коефіцієнта тертя призводить до збільшення області зчеплення і тим самим до зближення величин осьових переміщень оболонки і заповнювача в області проковзування.



1 - $f=0,1$; 2 - $f=0,3$; 3 - $f=0,5$

Рисунок 1.3 – Розподіл контактних напружень



1 – $f=0,1$; 2 – $f=0,3$; 3 – $f=0,5$

Рисунок 1.4 – Розподіл головних нормальних і максимальних дотичних напружень в оболонці

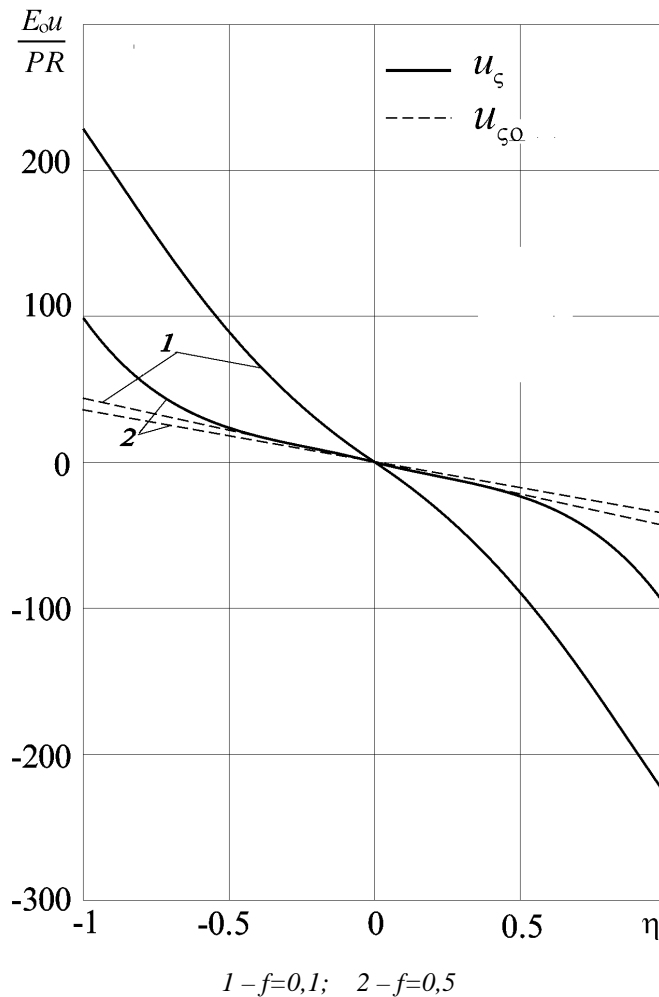


Рисунок 1.5 – Розподіл осьових переміщень заповнювача і оболонки

Залежність однієї з головних характеристик системи – осадки поршня (її можна інтерпретувати як приведену податливість системи) – від довжини заповнювача зображена на рис. 1.6. Із графіків видно, що при збільшенні довжини системи зростання податливості стабілізується, особливо після досягнення області зчеплення. Збільшення коефіцієнта тертя

призводить до зменшення осадки поршня, що, з одного боку, зменшує ефективність використання таких систем як амортизаторів, однак, з іншого боку, збільшує демпфувальну здатність такого пристрою.

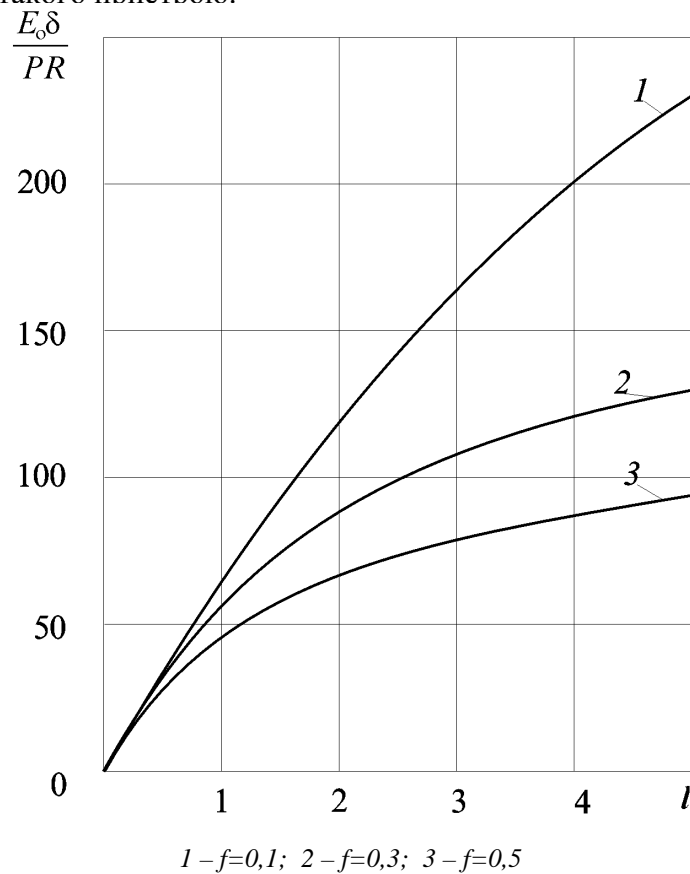


Рисунок 1.6 – Залежність осадки поршня від довжини заповнювача

І, нарешті, на рис. 1.7 зображені графіки залежностей осадки поршня від параметра ω_0 , пов'язаного тут з податливістю заповнювача. Суцільною лінією позначені лінійні ділянки, для яких $\alpha_0 \geq 1$, штриховою – ділянки, де $\alpha_0 \leq 1$ (див. формули (1.69), (1.66)). Як видно із поданої ілюстрації, осадка

поршня прямо пропорційно залежить від параметра ω_0 , причому складна залежність, позначена штриховою лінією, практично теж прямо пропорційна.

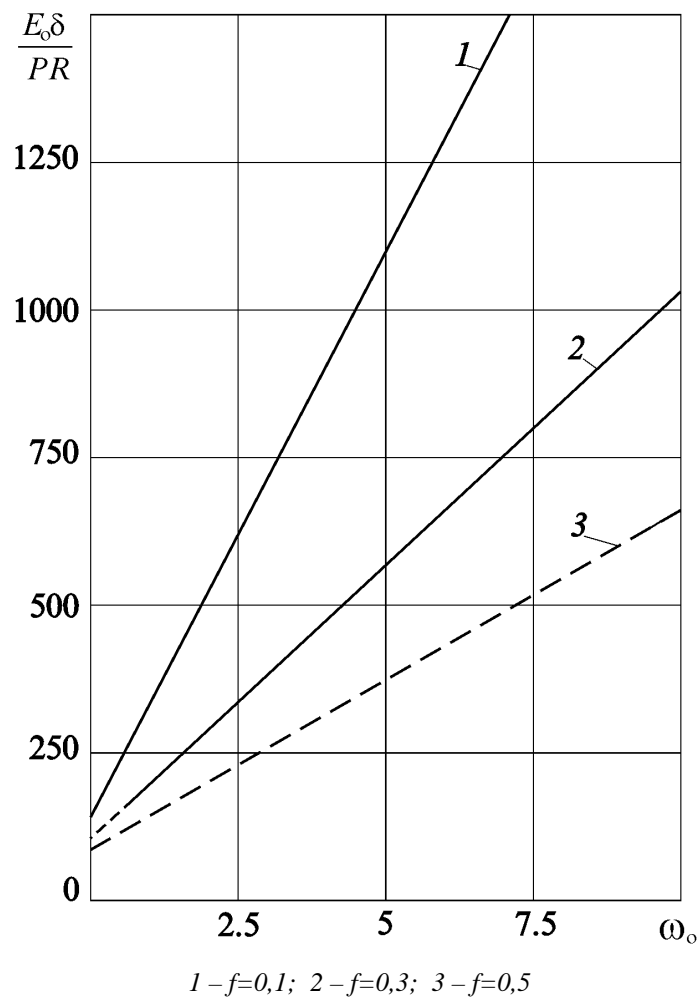


Рисунок 1.7 – Залежність осадки поршня від податливості заповнювача

1.2 Числово-аналітичний розв'язок контактної задачі для циліндричної оболонки Кірхгофа-Лява та деформівного заповнювача з урахуванням сухого тертя

Мета даного параграфу – оцінити адекватність розв'язку попередньої задачі. Для досягнення цієї мети пропонується замінити у постановці контактної задачі модель безмоментної оболонки на модель оболонки Кірхгофа-Лява (технічна теорія оболонок). Модель пружного деформівного заповнювача залишимо без змін, оскільки нас у першу чергу цікавить напружено-деформований стан оболонки, за несучою здатністю якої

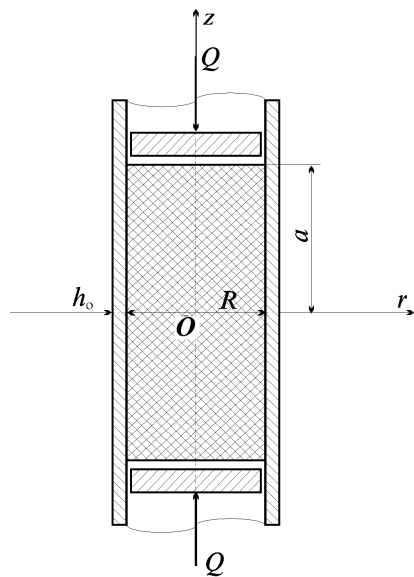


Рисунок 1.8

оцінюється працездатність усієї оболонкової конструкції. Інакше кажучи, необхідно з'ясувати, чи досить безмоментної теорії для моделювання і розрахунку на міцність оболонки, яка є основним несучим елементом системи, зображеної на рис. 1.1, чи треба застосовувати моделі вищого порядку.

Осесиметричний напружено-деформований стан системи досліджуємо в циліндричній системі координат (рис. 1.8). Система ключових диференціальних рівнянь технічної теорії оболонок у переміщеннях для даної осесиметричної задачі має такий вигляд [136]:

$$\frac{d^2 u_0}{d\bar{z}^2} + n_0 \frac{dw_0}{d\bar{z}} = \frac{R^2}{B} \phi;$$

$$h_0 \frac{du_0}{d\bar{b}} + c_0^2 \frac{d^4 w_0}{d\bar{b}^4} + w_0 = -\frac{R^2}{B} y_0. \quad (1.72)$$

Тут прийнято такі позначення:

$$B = \frac{2E_0 h_0}{1-\nu_0^2}; \quad c_0^2 = \frac{h_0^2}{3R^2}; \quad \alpha = \frac{z}{R}.$$

Осьове мембранне зусилля N_α можна виразити, використовуючи співвідношення Коші і закон Гука, через переміщення оболонки таким чином

$$N_\alpha = \frac{B}{R^2} \left(\frac{du_0}{d\bar{b}} + h_0 w_0 \right). \quad (1.73)$$

З іншого боку, має місце рівняння рівноваги

$$\frac{dN_\alpha}{d\alpha} - R\tau_0 = 0. \quad (1.74)$$

Вилучимо з рівнянь (1.72) за допомогою виразу (1.73) осьове переміщення u_0 . Урахувавши рівняння рівноваги (1.74), одержимо диференціальне рівняння на радіальні переміщення

$$\frac{d^4 w_0}{d\bar{b}^4} + t^4 w_0 = -\frac{R^4}{D} \left(y_0 + \nu_0 \frac{N_\alpha}{R} \right). \quad (1.75)$$

Тут $D = \frac{2E_0 h_0^3}{3(1-\nu_0^2)}$ – циліндрична жорсткість оболонки,

$$t = \sqrt[4]{(1-\nu_0^2) / c_0^2}.$$

Нехтуючи впливом торців, оболонку вважаємо нескінченною. Згідно з крайовими умовами задачі зусилля і моменти на безмежності прямують до нуля, зокрема

$$N_\alpha(\pm\infty) = 0. \quad (1.76)$$

Проінтегрувавши рівняння рівноваги (1.74) з урахуванням крайових умов (1.76), маємо

$$N_\alpha = \frac{R}{2} \left(\int_{-\infty}^{\alpha} - \int_{\alpha}^{\infty} \right) \phi_b(\xi) d\alpha. \quad (1.77)$$

Беручи до уваги, що зона контакту обмежена проміжком $\alpha \in [-l, l]$, співвідношення (1.77) можна подати так:

$$\frac{N_\alpha(\alpha)}{R} = \begin{cases} 0, & |\alpha| > l; \\ \frac{1}{2} \int_{-l}^l \phi_b(\xi) \operatorname{sgn}(\alpha - \xi) d\xi, & |\alpha| \leq l. \end{cases} \quad (1.78)$$

Підставляючи вираз (1.78) у формулу (1.75), одержимо вихідне модельне рівняння для тонкої пологої оболонки

$$\frac{d^4 w_o}{d\alpha^4} + t^4 w_o = -\frac{R^4}{D} \left\{ \sigma_o(\alpha) + \frac{\nu_o}{2} \int_{-l}^l \tau_o(\xi) \operatorname{sgn}(\alpha - \xi) d\xi \right\}. \quad (1.79)$$

Основні модельні співвідношення для заповнювача (1.13), (1.15), (1.20) в розглядуваній системі координат мають такий вигляд:

усереднене рівняння рівноваги

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} + 2\tau = 0, \quad |\alpha| \leq l, \quad (1.80)$$

з крайовими умовами

$$\sigma_\alpha(\pm l) = -P, \quad (1.81)$$

і закон Гука

$$\frac{w}{R} = \frac{1}{E} [(1-\nu)\sigma - \nu\sigma_\alpha]. \quad (1.82)$$

Інтегруючи рівняння (1.80) з урахуванням крайових умов (1.81), одержуємо осьове напруження в заповнювачі

$$\sigma_{\alpha}(\alpha) = -P - \int_{-l}^l \tau(\xi) \operatorname{sgn}(\alpha - \xi) d\xi, \quad |\alpha| \leq l. \quad (1.83)$$

Підставимо вираз (1.83) у формулу (1.82), отримуємо вихідне модельне рівняння для деформівного заповнювача

$$\frac{w}{R} = \frac{1}{E} \left\{ (1-\nu)\sigma + \nu \left[P + \int_{-l}^l \tau(\xi) \operatorname{sgn}(\alpha - \xi) d\xi \right] \right\}. \quad (1.84)$$

Фрикційна взаємодія оболонки і заповнювача описується співвідношеннями одностороннього контакту (1.22), які в даному випадку мають вигляд

$$w_0 = w, \quad \sigma_0 = \sigma < 0, \quad |\alpha| \leq l, \quad (1.85)$$

і законом тертя Кулона

$$\tau = -f\sigma \operatorname{sgn}\alpha, \quad |\alpha| \leq l. \quad (1.86)$$

Останнє співвідношення означає, що область проковзування збігається з областю контакту – за припущенням. Зазначимо, що за результатами попереднього параграфу напруження і переміщення в оболонці досягають максимальних значень якраз в області взаємного проковзування оболонки і заповнювача, і немає підстав вважати, що з ускладненням моделі оболонки ситуація кардинально зміниться. Таким чином, розв'язувати мішану задачу з урахуванням зони зчеплення наразі не треба.

Беручи до уваги вирази (1.85), (1.86), з рівнянь (1.79), (1.84) одержуємо систему ключових рівнянь сформульованої контактної задачі у вигляді

$$\frac{d^4 w_0}{d\alpha^4} + t^4 w = -\frac{R^4}{D} \left\{ \sigma(\alpha) - \frac{\nu_0 f}{2} \int_{-l}^l \sigma(\xi) \operatorname{sgn}(\xi) \operatorname{sgn}(\alpha - \xi) d\xi \right\},$$

$$\alpha \in [-\infty, \infty]; \quad (1.87)$$

$$w(\alpha) = \frac{R}{E} \left\{ (1-\nu)\sigma(\alpha) + \nu \left[P - f \int_{-l}^l \sigma(\xi) \operatorname{sgn}(\xi) \operatorname{sgn}(\alpha - \xi) d\xi \right] \right\},$$

$$\alpha \in [-l, l]. \quad (1.88)$$

Загальний розв'язок рівняння (1.87) з урахуванням загасання напружень на безмежності буде

$$w(\alpha) = -\frac{1}{2t^3} \frac{R^4}{D} \int_{-l}^l \left[\sigma(\eta) - \frac{v_0 f}{2} \int_{-l}^l \sigma(\xi) \operatorname{sgn}(\xi) \operatorname{sgn}(\alpha - \xi) d\xi \right] \times \\ \times e^{-\lambda|\bar{\sigma} - z|} \sin\left(\lambda|\bar{\sigma} - z| + \frac{P}{4}\right) dz, \quad (1.89)$$

де $\lambda = t/\sqrt{2}$.

Підставляючи результат (1.89) у співвідношення (1.88), одержимо інтегральне рівняння для визначення невідомого контактного напруження

$$\sigma(\alpha) + \int_{-l}^l K(\alpha, \zeta) \sigma(\xi) d\xi = -\frac{H}{1-H} P, \quad (1.90)$$

де ядро має вигляд

$$K(\alpha, \xi) = \frac{1}{2t^3} \frac{E}{1-\nu} \frac{R^3}{D} \left\{ e^{-\lambda|\alpha-\xi|} \sin\left(\lambda|\alpha-\xi| + \frac{\pi}{4}\right) + \right. \\ \left. + \frac{v_0 f}{t} \operatorname{sgn}(\xi) \operatorname{sgn}(\alpha - \xi) \left[e^{-\lambda|\alpha-\xi|} \sin\left(\lambda|\alpha-\xi| + \frac{\pi}{2}\right) - 1 \right] \right\} - \\ - \frac{\nu f}{1-\nu} \operatorname{sgn}(\xi) \operatorname{sgn}(\alpha - \xi). \quad (1.91)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (1.90) знаходимо методом квадратур [26], використовуючи формулу трапецій з рівномірною сіткою вузлів $\alpha_i = \xi_i = -1 + (i-1) \frac{b}{2a}$, $i = \overline{1, n}$. Приймемо в рівнянні (1.90) $\alpha = \alpha_i$, $i = \overline{1, n}$, і замінимо інтеграл скінченною сумою. Одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sigma_i + b \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} \sigma_j = -\frac{\nu}{1-\nu} P, \quad (1.92)$$

де: $\sigma_i = \sigma(\alpha_i)$, $K_{ij} = K(\alpha_i, \xi_j)$, $\alpha_i = \xi_i$; n – кількість вузлів; b – сталий крок інтегрування, $A_j = \begin{cases} 0,5 & \text{при } j=1, j=n \\ 1 & \text{при } j \neq 1, j \neq n \end{cases}$.

Для розв'язування системи рівнянь (1.92) застосовано метод Гауса з виділенням головного елемента.

За допомогою отриманих числових значень контактного напруження можна визначити усі характеристики напружено-деформованого стану системи. Зокрема, для радіальних переміщень та їх похідних з урахуванням парності функції $\sigma(\alpha)$ із формули (1.89) отримуємо

$$\frac{d^m w(\alpha)}{d\alpha^m} = -\frac{1}{2t^3} \frac{R^4}{D} \times \int_{-l}^l \left[\partial_\alpha^m w_*(\bar{\sigma} - z) + \nu_0 f \operatorname{sgn}(z) \partial_\eta^{-1} \partial_\alpha^m w_*(\bar{\sigma} - z) \right] y(z) dz. \quad (1.93)$$

Тут введено позначення:

$$\begin{aligned} \partial_\eta^i \partial_\eta^j w_*(\bar{\sigma} - z) &= t^{i+j} (-1)^j [\operatorname{sgn}(\bar{\sigma} - z)]^{|i+j|} \times \\ &\times \left\{ e^{-\lambda|\alpha-\eta|} \sin\left(\lambda|\alpha-\eta| + \frac{1-(i+j)\pi}{2}\right) - \Delta_{i+j} \right\}, \\ \Delta_{i+j} &= \begin{cases} 0, & i+j \geq 0; \\ 1, & i+j = -1; \\ |\alpha-\eta|, & i+j = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Осьове переміщення серединної поверхні оболонки одержимо, підставляючи осьове мембранне зусилля

$$N_\sigma(\bar{\sigma}) = -\frac{R}{2} \int_{-l}^l y(z) \operatorname{sgn}(z) \operatorname{sgn}(\bar{\sigma} - z) dz$$

і радіальне переміщення (1.93) в формулу (1.73). Інтегруючи, отримуємо

$$u_o(\alpha) = \int_{-l}^l K_1(\alpha, \eta) y(z) dz, \quad (1.94)$$

$$K_1(\alpha, \eta) = -\frac{R^2}{B} \frac{f}{2} (|\alpha - \eta| - |\eta|) \operatorname{sgn}(\eta) +$$

$$+ \frac{v_o}{2t^3} \frac{R^4}{D} \int_0^\alpha [1 + v_o f \operatorname{sgn}(\eta) \mathcal{E}_\eta^{-1}] w_*(\alpha - \eta) d\alpha.$$

Осьове переміщення заповнювача, одержане з модельних співвідношень аналогічними викладками, має такий вигляд:

$$u(\alpha) = \int_{-l}^l K_2(\alpha, \eta) \sigma(\eta) d\eta - \frac{P}{E} \alpha,$$

$$K_2(\alpha, \eta) = \frac{f}{E} (|\alpha - \eta| - |\eta|) \operatorname{sgn}(\eta) - \frac{v}{E} [\operatorname{sgn}(\alpha - \eta) + \operatorname{sgn}(\eta)]. \quad (1.95)$$

Що стосується напруженого стану оболонки, то тепер усі його характеристики легко отримати безпосередньою підстановкою виразів (1.93), (1.94) у фізичні співвідношення теорії оболонок Кірхгофа.

Проілюструємо одержані результати графічно. За приклад виберемо систему з параметрами, аналогічними параметрам системи з попереднього параграфу: $a/R = 5$; $h_o/R = 0,1$; $E/E_o = 0,0001$; $\nu = 0,499$; $\nu_o = 0,3$; $f = 0,1$. При числових розрахунках у методі квадратур використана сітка з 51 вузлом колокацій.

На рис. 1.9 подано розподіл радіальних переміщень (прогинів) по довжині оболонки. Штриховою лінією позначено прогин, отриманий за безмоментною теорією оболонок, суцільною – прогин, отриманий у результаті розв'язання задачі із застосуванням теорії пологих оболонок Кірхгофа-Лява. Аналізуючи графіки, відзначимо достатньо високу точність апроксимації прогину за технічною теорією оболонок проги-

ном за безмоментною теорією. Вплив урахування згинної деформації на радіальне переміщення оболонки помітний лише в області торця заповнювача, причому при віддаленні від торця на відстань, більшу ніж радіус оболонки, цей вплив практично зникає.

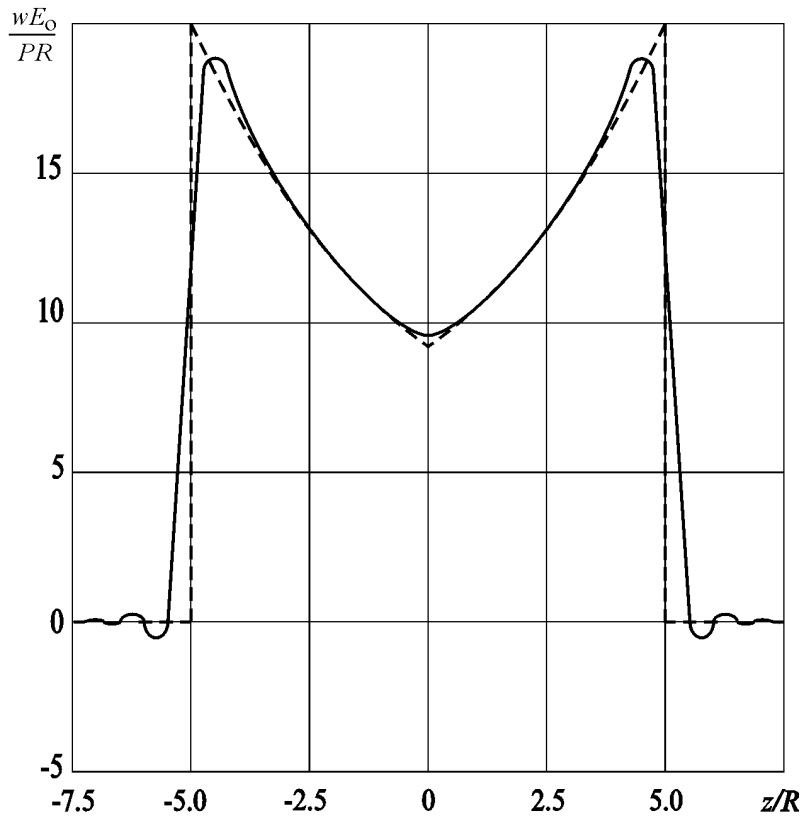


Рисунок 1.9 – Розподіл радіальних переміщень оболонки

Аналіз деформованого стану системи був би неповним без нагадування про осьові переміщення оболонки і заповнювача. Оскільки вплив урахування згинної деформації оболонки на ці характеристики несуттєвий, розподіл осьових переміщень оболонки і заповнювача якісно мало чим відрізняється від наведеного на рис. 1.5 попереднього параграфу розподілу,

визначеного за результатами безмоментної теорії. Що ж стосується кількісних відмінностей, то, зокрема, осьове переміщення (осадка) поршня δ , обчислене за формулою (1.58), перевищує осадку $u(l)$, обчислену з виразу (1.95), всього на 6,4%. Аналогічне перевищення, обчислене для осьових переміщень перерізу оболонки, що межує з торцем заповнювача, складає 5,2%.

Проведемо порівняльний аналіз напруженого стану системи за результатами обидвох параграфів. Контактні нормальні напруження, обчислені за технічною теорією, перевищують обчислені за безмоментною теорією. Максимальне перевищення досягається в площині торця заповнювача, де воно становить 0,2%, тобто результати обчислення нормальних контактних напружень за обидвома теоріями практично ідентичні.

Напружений стан оболонки характеризують графіки, подані на рис. 1.10. Значення індексу $i = 1$ відповідає напруженню σ_β , а $i = 2$ – напруженню σ_α . Суцільною лінією показані напруження на зовнішній поверхні оболонки, штрихпунктирною – на внутрішній. Для порівняння штрихами показані напруження, визначені аналітично із застосуванням безмоментної теорії оболонок. Як видно із наведених залежностей, максимальним за абсолютною величиною напруженням є розтягуюче кільцеве напруження σ_β на внутрішній поверхні оболонки в перерізі, віддаленому від площини торця заповнювача на відстань, рівну приблизно половині радіуса оболонки. Найбільші кількісні і якісні відмінності присутні в залежностях напруження σ_α на внутрішній і зовнішній поверхнях, причому на внутрішній поверхні напруження σ_α навіть змінюють знак. У цьому сенсі максимальні дотичні напруження розподілені вздовж оболонки більш рівномірно і на внутрішній, і на зовнішній поверхнях, причому найбільшої величини τ_{\max} досягають, на відміну від σ_β , на зовнішній поверхні оболонки. Однак, незважаючи на значні відмінності у характері розподілів напружень, спільною рисою є достатньо добра апроксимація напружень, що виникають на серединній поверхні оболонки (на рисунку не вказані), напруженнями, обчисленими аналітично із застосуванням безмоментної теорії

оболонки. Деяка невідповідність результатів спостерігається лише в області крайового ефекту, яка має порядок піврадіуса оболонки.

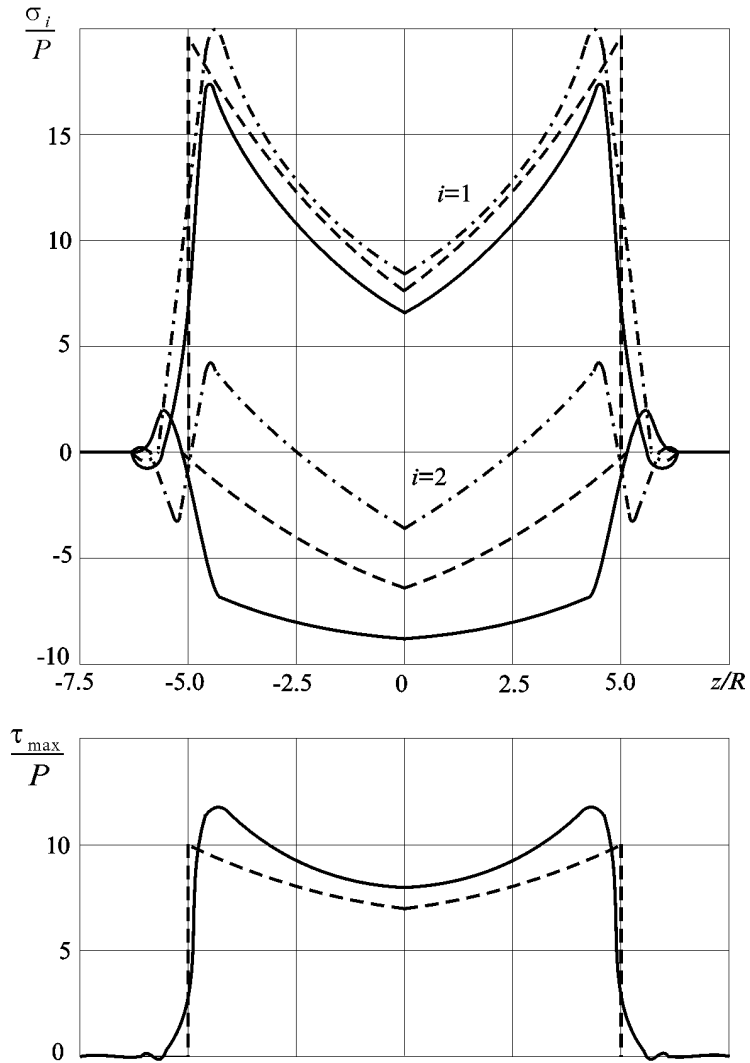


Рисунок 1.10 – Розподіл головних нормальних і максимальних дотичних напружень в оболонці

Проведений аналіз результатів даного параграфу дає можливість зробити деякі висновки щодо застосовності безмоментної теорії оболонок у розрахунках міцності і жорсткості систем зазначеного типу. При визначенні деформованого стану системи безмоментна теорія порівняно з технічною дає дещо завищені результати, особливо при обчисленні осьових переміщень заповнювача і оболонок. Однак відносна величина похибки дає підстави знехтувати нею без значної шкоди для точності визначення податливості системи і переміщень оболонки. Інша ситуація виникає при аналізі напруженого стану оболонки. Безмоментна теорія порівняно з технічною дає занижені результати при обчисленні максимальних нормальних і дотичних напружень. Відносна похибка результатів, обчислена за чебишовською нормою, не перевищує 12%. Тому розрахунок на міцність оболонки за результатами безмоментної теорії повинен обов'язково враховувати цю обставину, наприклад, шляхом збільшення коефіцієнта запасу на величину, співмірну з похибкою.

Таким чином, результати, отримані з використанням безмоментної теорії оболонок, можна з достатньою для інженерної практики точністю застосовувати при розрахунку системи оболонка-заповнювач. Беззаперечною перевагою запропонованої методики є аналітична структура використовуваних розрахункових формул, що виключає необхідність застосування громіздких числових методів і дає можливість аналізувати основні параметри системи в явному вигляді.

1.3 Розсіювання енергії при немонотонному навантаженні пружного заповнювача в циліндричній оболонці

Розглянемо оболонкову систему, зображену на рис. 1.1. У перших параграфах розділу досліджені її напружено-деформований стан і жорсткість. Зовнішнє навантаження Q вважалось сталим, або, принаймні, монотонно зростаючим. Даний параграф присвячений аналізу конструкційного гістерезису, який виникає в системі у відповідь на дію зовнішнього немонотонного навантаження. Іншими словами, необхідно

розробити методику побудови діаграми деформування (Q, δ) , з допомогою якої за відомою історією навантаження можна прогнозувати поведінку розглядуваної неконсервативної системи в будь-який момент часу після початку процесу навантаження, а також розрахувати величину розсіюваної при цьому енергії.

Процес немонотонного навантаження оболонкової системи (рис. 1.2) досліджуємо у квазістатичному наближенні, нехтуючи інерційними членами в рівняннях руху. Повна система співвідношень змішаної контактної задачі включає формули (1.12) – (1.22), а також закон сухого тертя

$$\tau = f\sigma \operatorname{sgn}[\dot{u}] = f\sigma \operatorname{sgn} \frac{\partial[u]}{\partial Q} \operatorname{sgn} \dot{Q}; \quad \frac{\partial[u]}{\partial Q} \neq 0; \quad (1.96)$$

$$\frac{\partial[u]}{\partial Q} = 0, \quad |\tau| \leq -f\sigma, \quad (1.97)$$

де $[u] = u - u_0$ – переміщення заповнювача відносно оболонки, або стрибок переміщень.

Оскільки конструкційне розсіювання енергії присутнє лише в області взаємного проковзування оболонки і заповнювача, логічно припустити, не обмежуючи загальності, що зона зчеплення при початковому навантаженні не досягається.

У процесі розв'язання мішаної задачі (1.12) – (1.22), (1.96), (1.97) встановлено, що при навантаженні системи за довільним циклом з коефіцієнтом асиметрії $s = Q_{\min}/Q_{\max} \in [0, 1]$ умови (1.97), справедливі в загальному випадку для зони зчеплення, на цей раз виконуються лише в точці розділу областей з протилежними знаками швидкості взаємного проковзування $\partial[u]/\partial Q$. Для знаходження координати цієї точки слід використовувати умови неперервності осьових напружень і мембранних зусиль, аналогічні умовам (1.52), а саме:

$$\sigma_{\zeta}(\alpha - 0) = \sigma_{\zeta}(\alpha + 0), \quad N_{\zeta}(\alpha - 0) = N_{\zeta}(\alpha + 0), \quad (1.98)$$

а також інтеграл першої умови (1.97)

$$[u](Q, \alpha) = [u](Q_m, \alpha). \quad (1.99)$$

Тут: α – шукана координата, Q_m – величина навантаження в кінці попереднього етапу. У випадку, коли режим навантаження допускає існування декількох таких точок, умови типу (1.98), (1.99) повинні бути записані в кожній із них.

При інтегруванні умови (1.97) в точці a ми знехтували конвективною похідною від стрибка переміщення. Таке наближення дає змогу уникнути громіздкого числового дослідження, пов'язаного з інфінітезімальним підходом.

У квазістатичній постановці процес немонотонного навантаження системи розбивається на етапи, де навантаження монотонне. Приступимо до отримання розв'язків мішаної задачі (1.12) – (1.22), (1.96) – (1.99) для кожного етапу окремо.

Початкове (активне) навантаження

$$0 \leq Q \leq Q_{\max}, \quad \dot{Q} > 0, \quad \frac{\partial [u]}{\partial Q} > 0. \quad (1.100)$$

Розв'язок задачі для даного етапу навантаження отримано в першому параграфі розділу. Для зручності викладу наведемо потрібні надалі вирази, зберігаючи попередні позначення

– осьові напруження і мембранні зусилля

$$\begin{aligned} \frac{N_\zeta}{R} &= -\frac{vP}{2v + v_0 \varepsilon_0} (1 - e^{-\lambda \zeta}); \\ \sigma_\zeta &= -\frac{P}{2v + v_0 \varepsilon_0} (v_0 \varepsilon_0 + 2ve^{-\lambda \zeta}); \end{aligned} \quad (1.101)$$

– осьові деформації заповнювача і оболонки

$$\varepsilon_\zeta = -\frac{P}{E} \frac{1}{2v + v_0 \varepsilon_0} \left[v_0 \varepsilon_0 + 2v \frac{(1+v)(1-2v) + (1-vv_0) \varepsilon_0}{1-v + \varepsilon_0} e^{-\lambda \zeta} \right]; \quad (1.102)$$

$$\varepsilon_{\zeta_0} = -\frac{PR}{E_0 h_0} \frac{v}{2v + v_0 \varepsilon_0} \left[1 - \left(1 - v_0 \frac{2v + v_0 \varepsilon_0}{1-v + \varepsilon_0} \right) e^{-\lambda \zeta} \right]. \quad (1.103)$$

Із виразів (1.102), (1.103) отримаємо різницю деформацій

$$\varepsilon_\zeta - \varepsilon_\infty = [\varepsilon_\zeta] = -\frac{P}{E} \frac{1}{2\nu + \nu_0 \varepsilon_0} \left\{ \varepsilon_0 (\nu_0 - \nu) + \frac{\nu}{1 - \nu + \varepsilon_0} \times \right. \\ \left. \times [(1 - \nu + \varepsilon_0)(2 + \varepsilon_0) - (2\nu + \nu_0 \varepsilon_0)^2] e^{-\lambda \zeta} \right\}. \quad (1.104)$$

Введемо позначення

$$\chi = \frac{1 - \nu + \varepsilon_0}{\nu} \times \frac{\varepsilon_0 (\nu - \nu_0)}{(1 - \nu + \varepsilon_0)(2 + \varepsilon_0) - (2\nu + \nu_0 \varepsilon_0)^2}.$$

Тепер співвідношення (1.104) буде

$$[\varepsilon_\zeta] = -\frac{P}{E} \frac{\varepsilon_0 (\nu_0 - \nu)}{2\nu + \nu_0 \varepsilon_0} (1 + \chi^{-1} e^{-\lambda \zeta}). \quad (1.105)$$

В кінці етапу $[\varepsilon_\zeta] = [\varepsilon_\zeta](Q_{\max})$. Переміщення поршня на цьому етапі є лінійною функцією від Q і обчислюється за формулою

$$\delta = \frac{Pa}{E} \frac{1}{2\nu + \nu_0 \varepsilon_0} \left[\nu_0 \varepsilon_0 + \frac{2\nu}{\lambda} \times \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu) + (1 - \nu \nu_0) \varepsilon_0}{1 - \nu + \varepsilon_0} (1 - e^{-\lambda}) \right].$$

Введемо позначення

$$\chi_1 = \frac{\nu_0 a}{\pi R h_0 E_0 (2\nu + \nu_0 \varepsilon_0)}, \\ \chi_2 = \frac{2\nu a}{\pi R h_0 E_0 (2\nu + \nu_0 \varepsilon_0)} \times \frac{(1 + \nu) \omega_0 + 1 - \nu \nu_0}{1 - \nu + \varepsilon_0}.$$

Тоді осадка приймає остаточний вигляд

$$\delta = Q [\chi_1 + \chi_2 (1 - e^{-\lambda}) / \lambda]. \quad (1.106)$$

Співвідношення (1.106) описує лінійну ділянку діаграми навантаження (чи петлі конструкційного гістерезису), яка відповідає початковому навантаженню.

Розвантаження

$$Q_{\max} \geq Q \geq 0, \quad \dot{Q} < 0 \quad . \quad (1.107)$$

На початку даного етапу на поверхні контакту виконуються умови неодностороннього проковзування. Іншими словами, проміжок $\zeta \in [0, 1]$ розділений на дві області, в яких швидкість взаємного зміщення $[\dot{u}]$, а, отже, і дотичні контактні напруження τ мають протилежні знаки. Координата точки розділу областей – шукана.

Запишемо ключові рівняння і одержимо розв’язок задачі в кожній із областей.

Область $\zeta \in [0, \alpha)$, де

$$\frac{\partial [u]}{\partial Q} > 0. \quad (1.108)$$

Враховуючи нерівності (1.107), (1.108) в законі Кулона (1.96), маємо

$$\tau = -f\sigma. \quad (1.109)$$

Ключове рівняння контактної задачі у цій області з урахуванням формули (1.109) приводиться до вигляду

$$\sigma - \lambda \int_0^{\zeta} \sigma d\zeta = -\frac{\nu P}{1 - \nu + \varepsilon_0}. \quad (1.110)$$

Його розв’язок буде

$$\sigma = -\frac{\nu P}{1 - \nu + \varepsilon_0} e^{\lambda \zeta}. \quad (1.111)$$

Осьові напруження і мембранні зусилля знаходимо підстановкою отриманого розв’язку (1.111) у формули (1.39), (1.40)

$$\sigma_{\zeta} = -\frac{P}{2\nu + \nu_0 \varepsilon_0} (\nu_0 \varepsilon_0 + 2\nu e^{\lambda \zeta});$$

$$\frac{N_{\zeta}}{R} = -\frac{\nu P}{2\nu + \nu_0 \varepsilon_0} (1 - e^{\lambda \zeta}). \quad (1.112)$$

Осьова деформація заповнювача з урахуванням виразу (1.41) буде

$$\varepsilon_{\zeta} = -\frac{P}{E} \frac{1}{2\nu + \nu_0 \varepsilon_0} \left[\nu_0 \varepsilon_0 + 2\nu \frac{(1+\nu)(1-2\nu) + (1-\nu\nu_0)\varepsilon_0}{1-\nu + \varepsilon_0} e^{\lambda \zeta} \right]. \quad (1.113)$$

I, нарешті, стрибок деформацій

$$[\varepsilon_{\zeta}] = -\frac{P}{E} \frac{\varepsilon_0 (\nu_0 - \nu)}{2\nu + \nu_0 \varepsilon_0} (1 + \chi^{-1} e^{\lambda \zeta}). \quad (1.114)$$

Область $\zeta \in (\alpha, 1]$, де

$$\frac{\partial [u]}{\partial Q} < 0. \quad (1.115)$$

Враховуючи нерівності (1.107), (1.115) в законі Кулона (1.96), маємо

$$\tau = f\sigma. \quad (1.116)$$

Ключове рівняння задачі у цій області одержується підстановкою модельних співвідношень (1.46), (1.47) в умову одностороннього контакту (1.22). З урахуванням виразу (1.116) маємо

$$\sigma + \lambda \int_{\alpha}^{\zeta} \sigma d\zeta = \frac{\nu \sigma_{\zeta}(\alpha) - \nu_0 \varepsilon_0 N_{\zeta}(\alpha)/R}{1 - \nu + \varepsilon_0}. \quad (1.117)$$

Його розв'язок запишемо у вигляді

$$\sigma = \frac{\nu \sigma_{\zeta}(\alpha) - \nu_0 \varepsilon_0 N_{\zeta}(\alpha)/R}{1 - \nu + \varepsilon_0} e^{-\lambda(\zeta - \alpha)}. \quad (1.118)$$

Враховуючи умови неперервності (1.98), маємо

$$\sigma = -\frac{\nu P}{1-\nu+\varepsilon_0} e^{-\lambda(\zeta-2\alpha)}. \quad (1.119)$$

Запишемо осьову деформацію заповнювача

$$\varepsilon_\zeta = -\frac{P}{E} \frac{1}{2\nu+\nu_0\varepsilon_0} \left[\nu_0\varepsilon_0 + 2\nu \frac{(1+\nu)(1-2\nu)+(1-\nu\nu_0)\varepsilon_0}{1-\nu+\varepsilon_0} e^{-\lambda(\zeta-2\alpha)} \right]. \quad (1.120)$$

Різниця деформацій у цій області на основі формули (1.120) буде

$$[\varepsilon_\zeta] = -\frac{P}{E} \frac{\varepsilon_0(\nu_0-\nu)}{2\nu+\nu_0\varepsilon_0} (1+\chi^{-1}e^{-\lambda(\zeta-2\alpha)}). \quad (1.121)$$

Визначимо приріст стрибка деформацій при переході від початкового навантаження до розвантаження.

$\zeta \in [0, \alpha]$; із виразів (1.104), (1.114) маємо

$$\begin{aligned} [\varepsilon_\zeta] - [\varepsilon_\zeta](Q_{\max}) &= -\frac{1}{E} \frac{\varepsilon_0(\nu_0-\nu)}{2\nu+\nu_0\varepsilon_0} \times \\ &\times [P - P_{\max} + \chi^{-1}(Pe^{\lambda\zeta} - P_{\max}e^{-\lambda\zeta})]. \end{aligned} \quad (1.122)$$

$\zeta \in (\alpha, 1]$; із виразів (1.104), (1.121) маємо

$$\begin{aligned} [\varepsilon_\zeta] - [\varepsilon_\zeta](Q_{\max}) &= -\frac{1}{E} \frac{\varepsilon_0(\nu_0-\nu)}{2\nu+\nu_0\varepsilon_0} \times \\ &\times [P - P_{\max} + \chi^{-1}(Pe^{-\lambda(\zeta-2\alpha)} - P_{\max}e^{-\lambda\zeta})]. \end{aligned} \quad (1.123)$$

Тепер, інтегруючи отримані співвідношення, запишемо приріст стрибка переміщень

$$[u](Q) - [u](Q_{\max}) = -a \int_{\zeta}^1 \{ [\varepsilon_\zeta](Q) - [\varepsilon_\zeta](Q_{\max}) \} d\zeta. \quad (1.124)$$

Підставляючи вирази (1.122), (1.123) у співвідношення (1.124), отримуємо

$\zeta \in [0, \alpha]$:

$$\begin{aligned}
 [u](Q) - [u](Q_{\max}) &= \frac{a}{E} \frac{\varepsilon_0 (v_0 - v)}{2v + v_0 \varepsilon_0} \left\{ (P - P_{\max}) (1 - \zeta) + \right. \\
 &+ (\chi \lambda)^{-1} \left[P (e^{\lambda \alpha} - e^{\lambda \zeta}) + P_{\max} (e^{-\lambda \alpha} - e^{-\lambda \zeta}) - \right. \\
 &\left. \left. - (P e^{2\lambda \alpha} - P_{\max}) (e^{-\lambda} - e^{-\lambda \alpha}) \right] \right\}; \quad (1.125)
 \end{aligned}$$

$\zeta \in (\alpha, 1]$:

$$\begin{aligned}
 [u](Q) - [u](Q_{\max}) &= \frac{a}{E} \frac{\varepsilon_0 (v_0 - v)}{2v + v_0 \varepsilon_0} \left[(P - P_{\max}) (1 - \zeta) - \right. \\
 &\left. - (\chi \lambda)^{-1} (P e^{2\lambda \alpha} - P_{\max}) (e^{-\lambda} - e^{-\lambda \zeta}) \right]. \quad (1.126)
 \end{aligned}$$

Умова (1.99) в даному випадку набуває вигляду

$$\{[u](Q) - [u](Q_{\max})\}_{\zeta=\alpha} = 0. \quad (1.127)$$

Підставляючи $\zeta = \alpha$ в будь-яке із співвідношень (1.125) або (1.126) і враховуючи умову (1.127), отримуємо рівняння, яке пов'язує координату α і зовнішнє навантаження Q

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{(1 - \alpha) \chi + e^{-\lambda} - e^{-\lambda \alpha}}{(1 - \alpha) \lambda \chi + (e^{-\lambda} - e^{-\lambda \alpha}) e^{2\lambda \alpha}}. \quad (1.128)$$

Беручи до уваги, що

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad (1.129)$$

запишемо цю умову неодностороннього проковзування за допомогою рівняння (1.128) в термінах навантажень таким чином

$$s_* Q_{\max} \leq Q \leq Q_{\max}, \quad (1.130)$$

тут $s_* = (e^{-\lambda} - \chi)/(e^\lambda - \chi)$ – характерне значення коефіцієнта асиметрії циклу навантаження.

Інтегруючи осьові деформації (1.113), (1.120), одержимо осадку поршня

$$\delta = Q [\chi_1 + \chi_2 (2e^{\lambda\alpha} - e^{-\lambda(1-2\alpha)} - 1)/\lambda]. \quad (1.131)$$

Співвідношення (1.128), (1.131) у параметровій формі описують нелінійну ділянку петлі конструкційного демпфування, яка відповідає розвантаженню в умовах неодностороннього проковзування. Нерівності (1.129), (1.130) є відповідними еквівалентними умовами монотонності.

Коли параметр α досягне значення $\alpha = 1$ (навантаження відповідно зменшиться до величини $Q = s_* Q_{\max}$), на усій поверхні контакту ($\zeta \in [0,1]$) будуть виконуватися умови одностороннього зворотного проковзування. У цьому разі справедливі формули (1.108) – (1.114), умова монотонності для одностороннього проковзування має вигляд

$$0 \leq Q \leq s_* Q_{\max}, \quad (1.132)$$

а переміщення (осадка) поршня знаходиться інтегруванням осьової деформації (1.113)

$$\delta = Q [\chi_1 + \chi_2 (e^\lambda - 1)/\lambda]. \quad (1.133)$$

Співвідношення (1.133) описує лінійну ділянку петлі конструкційного демпфування, яка відповідає розвантаженню в умовах одностороннього проковзування. Межі застосовності формули (1.133) встановлює нерівність (1.132).

Повторне навантаження

$$Q_{\min} \leq Q \leq Q_{\max}, \quad \dot{Q} > 0. \quad (1.134)$$

Залежно від величини Q_{\min} можливі два варіанти: $s \leq s_*$ і $s > s_*$. Розглянемо по черзі кожний із них.

Варіант $0 \leq s \leq s_*$.

У цьому варіанті на початку етапу повторного навантаження виконуються умови неодностороннього проковзування.

Позначимо шукану координату точки розділу областей з протилежними знаками дотичних контактних напружень через β і запишемо розв'язок задачі в кожній із областей.

$\zeta \in [0, \beta)$; тут

$$\frac{\partial[u]}{\partial Q} > 0. \quad (1.135)$$

Враховуючи нерівності (1.134), (1.135) у законі (1.96), маємо

$$\tau = f\sigma.$$

Ключове рівняння задачі у цій області буде

$$\sigma + \lambda \int_0^{\zeta} \sigma d\zeta = -\frac{\nu P}{1 - \nu + \varepsilon_0}.$$

Його розв'язок має вигляд

$$\sigma = -\frac{\nu P}{1 - \nu + \varepsilon_0} e^{-\lambda \zeta}, \quad (1.136)$$

а осьові напруження, мембранні зусилля і деформації визначаються за формулами (1.101) – (1.105).

$\zeta \in (\beta, 1]$; тут

$$\frac{\partial[u]}{\partial Q} < 0. \quad (1.137)$$

Враховуючи нерівності (1.134), (1.137) у законі сухого тертя (1.96), маємо

$$\tau = -f\sigma. \quad (1.138)$$

Ключове рівняння задачі у цій області буде

$$\sigma - \lambda \int_{\beta}^{\zeta} \sigma d\zeta = \frac{\nu \sigma_{\zeta}(\beta) - \nu_0 \varepsilon_0 N_{\zeta}(\beta)/R}{1 - \nu + \varepsilon_0},$$

а його розв'язок має вигляд

$$\sigma = \frac{v\sigma_\zeta(\beta) - v_0\varepsilon_0 N_\zeta(\beta)/R}{1 - \nu + \varepsilon_0} e^{\lambda(\zeta - \beta)}. \quad (1.139)$$

Враховуючи умови неперервності (1.98), підставимо вирази (1.101) в результат (1.139), маємо

$$\sigma = -\frac{vP}{1 - \nu + \varepsilon_0} e^{\lambda(\zeta - 2\beta)}. \quad (1.140)$$

Запишемо осьову деформацію заповнювача

$$\varepsilon_\zeta = -\frac{P}{E} \frac{1}{2\nu + v_0\varepsilon_0} \times \\ \times \left[v_0\varepsilon_0 + 2\nu \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu) + (1 - \nu v_0)\varepsilon_0}{1 - \nu + \varepsilon_0} e^{\lambda(\zeta - 2\beta)} \right]. \quad (1.141)$$

Різниця деформацій в цій області буде

$$[\varepsilon_\zeta] = -\frac{P}{E} \frac{\varepsilon_0(v_0 - \nu)}{2\nu + v_0\varepsilon_0} \left[1 + \chi^{-1} e^{\lambda(\zeta - 2\beta)} \right]. \quad (1.142)$$

Визначимо приріст розриву деформації при переході від розвантаження до повторного навантаження для варіанту $0 \leq s \leq s_*$.

$\zeta \in [0, \beta)$; використовуючи вирази (1.114) при $Q = Q_{\min}$ і (1.105), маємо

$$[e_\zeta](Q) - [e_\zeta](Q_{\min}) = \\ = -\frac{1}{E} \frac{\varepsilon_0(v_0 - \nu)}{2\nu + v_0\varepsilon_0} \left[P - P_{\min} + \chi^{-1} (P e^{-\lambda\zeta} - P_{\min} e^{\lambda\zeta}) \right]. \quad (1.143)$$

$\zeta \in (\beta, 1]$; використовуючи вирази (1.114) при $Q = Q_{\min}$ і (1.142), маємо

$$\begin{aligned}
[\varepsilon_\zeta](Q) - [\varepsilon_\zeta](Q_{\min}) &= -\frac{1}{E} \frac{\varepsilon_0(v_0 - v)}{2v + v_0 \varepsilon_0} \times \\
&\times [P - P_{\min} + \chi^{-1}(Pe^{\lambda(\zeta-2\beta)} - P_{\min} e^{\lambda\zeta})]. \quad (1.144)
\end{aligned}$$

Тепер, інтегруючи отримані співвідношення, запишемо приріст стрибка переміщень:

$$\zeta \in [0, \beta];$$

$$\begin{aligned}
[u](Q) - [u](Q_{\min}) &= \frac{a}{E} \frac{\varepsilon_0(v_0 - v)}{2v + v_0 \varepsilon_0} \left\{ (P - P_{\min})(1 - \zeta) + \right. \\
&+ (\chi\lambda)^{-1} \left[-P(e^{-\lambda\beta} - e^{-\lambda\zeta}) - P_{\min}(e^{\lambda\beta} - e^{\lambda\zeta}) + \right. \\
&\left. \left. + (Pe^{-2\lambda\beta} - P_{\min})(e^\lambda - e^{\lambda\beta}) \right] \right\}; \quad (1.145)
\end{aligned}$$

$$\zeta \in (\beta, 1];$$

$$\begin{aligned}
[u](Q) - [u](Q_{\min}) &= \frac{a}{E} \frac{\varepsilon_0(v_0 - v)}{2v + v_0 \varepsilon_0} \left\{ (P - P_{\min})(1 - \zeta) + \right. \\
&\left. + (\chi\lambda)^{-1} \left[(Pe^{-2\lambda\beta} - P_{\min})(e^\lambda - e^{\lambda\zeta}) \right] \right\}. \quad (1.146)
\end{aligned}$$

Умова (1.99) в даному випадку набуває вигляду

$$\{[u](Q) - [u](Q_{\min})\}_{\zeta=\beta} = 0. \quad (1.147)$$

Підставляючи $\zeta = \beta$ в будь-який з виразів (1.145) або (1.146) і враховуючи умови (1.147), отримаємо рівняння, яке пов'язує координату β і зовнішнє навантаження Q

$$Q = Q_{\min} \frac{(1 - \beta)\lambda\chi + e^{\lambda\beta} - e^\lambda}{(1 - \beta)\lambda\chi + (e^{\lambda\beta} - e^\lambda)e^{-2\lambda\beta}}. \quad (1.148)$$

Беручи до уваги, що

$$0 \leq \beta \leq 1, \quad (1.149)$$

запишемо цю умову неодностороннього проковзування за допомогою виразу (1.148) так:

$$Q_{\min} \leq Q \leq Q_{\min} / s_*. \quad (1.150)$$

І, нарешті, інтегруючи осьові напруження і деформації (1.102), (1.141), отримуємо переміщення поршня

$$\delta = Q [\chi_1 + \chi_2 (1 - 2e^{-\lambda\beta} + e^{\lambda(1-2\beta)}) / \lambda]. \quad (1.151)$$

Співвідношення (1.148), (1.151) в параметровій формі описують нелінійну гілку комбінованої ділянки петлі конструкційного гистерезису, яка відповідає повторному навантаженню в умовах неодностороннього проковзування для варіанту $0 \leq s \leq s_*$. Нерівності (1.149), (1.150) є відповідними еквівалентними умовам монотонності.

Коли параметр β досягне значення $\beta = 1$ (навантаження відповідно зросте до величини $Q = Q_{\min} / s_*$), на усій поверхні контакту ($\zeta \in [0, 1]$) будуть виконуватися умови одностороннього проковзування. У цьому випадку справедливі формули (1.101) – (1.105), умова монотонності для одностороннього проковзування має вигляд

$$Q_{\min} / s_* \leq Q \leq Q_{\max}, \quad (1.152)$$

а осадка поршня визначається співвідношенням (1.106), яке в даному випадку описує лінійну гілку комбінованої ділянки (вихід на пряму активного навантаження) петлі конструкційного демпфування. Ця гілка відповідає повторному навантаженню в умовах одностороннього проковзування для варіанта $0 \leq s \leq s_*$. Межі застосовності формули (1.106) у цьому випадку встановлює нерівність (1.152).

Варіант $s_* \leq s \leq 1$.

Цей випадок складніший для аналізу, ніж розглянутий попередньо. Справа в тому, що на поверхні контакту в даному випадку присутні три області. Відмінність між ними полягає у

тому, що в кожних двох сусідніх областях дотичні контактні напруження мають протилежні знаки.

Зразу зазначимо, що кількість таких областей при довільній кількості циклів навантаження з довільною амплітудою може бути будь-якою і залежати виключно від історії навантаження. Подана методика дає змогу за відомою історією навантаження описати поведінку системи в процесі роботи і оцінити кількість розсіяної енергії.

За аналогією з попередніми варіантами позначимо шукані координати розділу областей з протилежними знаками дотичних контактних напружень через β і α і запишемо розв'язок задачі у кожній із областей.

$\zeta \in [0, \beta)$; у цій області нормальні контактні напруження мають вигляд (1.136), а осьові напруження, мембранні зусилля та деформації представляються формулами (1.101) – (1.105).

$\zeta \in (\beta, \alpha)$; тут нормальні контактні напруження мають вигляд (1.140), а осьова деформація заповнювача і скачок деформацій описуються формулами (1.141), (1.142).

$\zeta \in (\alpha, 1]$; нормальні контактні напруження у цій області мають вигляд (1.118). Дана формула на відміну від уже готових співвідношень для попередніх областей потребує розшифрування за допомогою умов неперервності осьових напружень (1.98). Спочатку нагадаємо

$$\begin{aligned}\sigma_{\zeta}(\alpha) &= \sigma_{\zeta}(\beta) - 2l \int_{\beta}^{\alpha} \tau d\zeta, \\ N_{\zeta}(\alpha) &= N_{\zeta}(\beta) + a \int_{\beta}^{\alpha} \tau d\zeta,\end{aligned}\tag{1.153}$$

де τ – контактні дотичні напруження в області $\zeta \in (\beta, \alpha)$, обчислювані підстановкою нормальних контактних напружень (1.140) в закон Кулона (1.138). Тепер, використовуючи умови неперервності (1.98), підставимо вирази (1.101) в рівності (1.153), а відтак знайдені співвідношення – у формулу (1.128), у результаті одержуємо шуканий вираз для нормальних контактних напружень в області $\zeta \in (\alpha, 1]$

$$\sigma = -\frac{\nu P}{1-\nu+\varepsilon_0} e^{-\lambda[\zeta-2(\alpha-\beta)]}. \quad (1.154)$$

Осьова деформація заповнювача буде:

$$\varepsilon_\zeta = -\frac{P}{E} \frac{1}{2\nu+\nu_0\varepsilon_0} \times \\ \times \left[\nu_0\varepsilon_0 + 2\nu \frac{(1+\nu)(1-2\nu)+(1-\nu\nu_0)\varepsilon_0}{1-\nu+\varepsilon_0} e^{-\lambda[\zeta-2(\alpha-\beta)]} \right]. \quad (1.155)$$

Розрив деформації має такий вигляд:

$$[\varepsilon_\zeta] = -\frac{P \varepsilon_0 (\nu_0 - \nu)}{E 2\nu + \nu_0 \varepsilon_0} \left[1 + \chi^{-1} e^{-\lambda[\zeta-2(\alpha-\beta)]} \right]. \quad (1.156)$$

Запишемо приріст розриву деформацій при переході від розвантаження до повторного навантаження для варіанту $s_* \leq s \leq 1$.

$\zeta \in [0, \beta)$; тут шуканий приріст визначається формулою (1.143).

$\zeta \in (\beta, \alpha)$; у цій області для приросту стрибка деформацій маємо вираз (1.144).

$\zeta \in (\alpha, 1)$; використовуючи стрибки (1.114) при $\zeta < \alpha_m$ і (1.121) при $\zeta > \alpha_m$ для $Q = Q_{\min}$, а також формулу (1.156), приходимо до співвідношення

$$[\varepsilon_\zeta](Q) - [\varepsilon_\zeta](Q_{\min}) = -\frac{1}{E} \frac{\varepsilon_0 (\nu_0 - \nu)}{2\nu + \nu_0 \varepsilon_0} \times \left[P - P_{\min} + \right. \\ \left. + \chi^{-1} \left(P e^{-\lambda[\zeta-2(\alpha-\beta)]} - P_{\min} \left\{ \begin{array}{l} e^{\lambda\zeta}, \zeta < \alpha_m \\ e^{-\lambda(\zeta-2\alpha_m)}, \zeta > \alpha_m \end{array} \right\} \right) \right]. \quad (1.157)$$

Тут α_m – значення параметра α , яке визначається із рівняння (1.128) при $Q = Q_{\min}$, або, іншими словами, координата точки розмежування областей з протилежними знаками доти-

чних контактних напружень, що відповідає закінченню попереднього етапу навантаження (розвантаження) і, що одне й те ж, початку розглядуваного етапу (повторного навантаження). Встановлено, що на даному етапі значення α_m однозначно належить інтервалу $(\alpha, 1]$.

Тепер, інтегруючи співвідношення (1.143), (1.144), (1.157), одержимо приріст стрибка переміщень.

$$\zeta \in [0, \beta);$$

$$\begin{aligned} [u](Q) - [u](Q_{\min}) = & \frac{a}{E} \frac{\varepsilon_0 (v_0 - v)}{2v + v_0 \varepsilon_0} \left\{ (P - P_{\min})(1 - \zeta) + \right. \\ & + (\chi\lambda)^{-1} \left[-P(e^{-\lambda\beta} - e^{-\lambda\zeta}) - P_{\min}(e^{\lambda\beta} - e^{\lambda\zeta}) + \right. \\ & + (Pe^{-2\lambda\beta} - P_{\min})(e^{\lambda\alpha} - e^{\lambda\beta}) - Pe^{2\lambda(\alpha-\beta)}(e^{-\lambda} - e^{-\lambda\alpha}) + \\ & \left. \left. + P_{\min}(e^{\lambda\alpha} + e^{-\lambda(1-2\alpha_m)} - 2e^{\lambda\alpha_m}) \right] \right\}; \quad (1.158) \end{aligned}$$

$$\zeta \in (\beta, \alpha);$$

$$\begin{aligned} [u](Q) - [u](Q_{\min}) = & \frac{a}{E} \frac{\varepsilon_0 (v_0 - v)}{2v + v_0 \varepsilon_0} \left\{ (P - P_{\min})(1 - \zeta) + \right. \\ & + (\chi\lambda)^{-1} \left[(Pe^{-2\lambda\beta} - P_{\min})(e^{\lambda\beta} - e^{\lambda\zeta}) - Pe^{2\lambda(\alpha-\beta)} \times \right. \\ & \left. \left. \times (e^{-\lambda} - e^{-\lambda\alpha}) + P_{\min}(e^{\lambda\alpha} + e^{-\lambda(1-2\alpha_m)} - 2e^{\lambda\alpha_m}) \right] \right\}; \quad (1.159) \end{aligned}$$

$$\zeta \in (\alpha, 1];$$

$$\begin{aligned} [u](Q) - [u](Q_{\min}) = & \frac{a}{E} \frac{\varepsilon_0 (v_0 - v)}{2v + v_0 \varepsilon_0} \left\{ (P - P_{\min})(1 - \zeta) + \right. \\ & \left. + (\chi\lambda)^{-1} \left[-Pe^{2\lambda(\alpha-\beta)}(e^{-\lambda} - e^{-\lambda\zeta}) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ P_{\min} \left\{ \begin{array}{l} -2e^{\lambda\alpha_m} + e^{\lambda\zeta} + e^{-\lambda(1-2\alpha_m)}, \zeta < \alpha_m \\ e^{2\lambda\alpha_m} (e^{-\lambda} - e^{-\lambda\zeta}), \zeta > \alpha_m \end{array} \right\}. \quad (1.160)$$

Запишемо умови типу (1.99) у кожній із точок розмежування областей

$$\{[u](Q) - [u](Q_{\min})\}_{\zeta=\beta} = 0, \quad (1.161)$$

$$\{[u](Q) - [u](Q_{\min})\}_{\zeta=\alpha} = 0. \quad (1.162)$$

Підставимо $\zeta = \beta$ у один з виразів (1.158) або (1.159) і врахуємо умову (1.161), одержимо перше рівняння, що пов'язує параметри α і β із зовнішнім навантаженням Q

$$\frac{Q}{Q_{\min}} = \frac{(1-\beta)\lambda\chi + e^{2\lambda\alpha_m}(e^{-\lambda} - e^{-\lambda\alpha_m}) + e^{\lambda\beta} - e^{\lambda\alpha_m}}{(1-\beta)\lambda\chi + e^{2\lambda(\alpha-\beta)}(e^{-\lambda} - e^{-\lambda\alpha}) + e^{-2\lambda\beta}(e^{\lambda\beta} - e^{\lambda\alpha})}. \quad (1.163)$$

Для одержання другого рівняння використаємо співвідношення (1.159) або (1.160), а також (1.162), маємо

$$\frac{Q}{Q_{\min}} = \frac{(1-\alpha)\lambda\chi + e^{2\lambda\alpha_m}(e^{-\lambda} - e^{-\lambda\alpha_m}) + e^{\lambda\alpha} - e^{\lambda\alpha_m}}{(1-\alpha)\lambda\chi + e^{2\lambda(\alpha-\beta)}(e^{-\lambda} - e^{-\lambda\alpha})}. \quad (1.164)$$

І, нарешті, інтегруючи осьові деформації (1.102), (1.141), (1.155), одержимо осадку поршня

$$\delta = Q[\chi_1 + \chi_2(1 - 2e^{-\lambda\beta} + 2e^{\lambda(\alpha-2\beta)} - e^{-\lambda[1-2(\alpha-\beta)]})/\lambda]. \quad (1.165)$$

Отож, розв'язок мішаної задачі (1.12) – (1.22), (1.96) – (1.99) отриманий. Тепер можна для довільного ($s \in [0,1]$) циклу навантаження побудувати петлю конструкційного демпфування (діаграму циклічного навантаження). Її характерний вигляд схематично зображений на рис. 1.11.

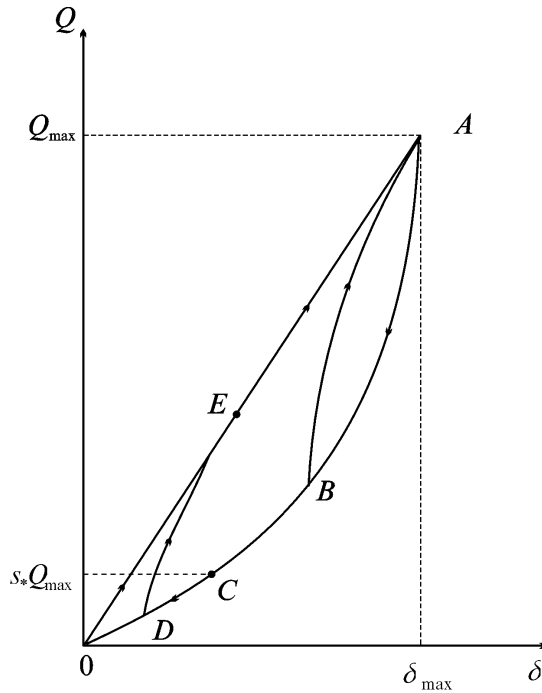


Рисунок 1.11

Для зручності аналізу результатів доцільно зібрати разом вирази, які описують цикл навантаження за етапами і діаграму навантаження за ділянками.

1. Активне (початкове) навантаження – лінійна ділянка OA ($0 \leq Q \leq Q_{\max}$, $\dot{Q} > 0$);

$$\delta = Q[\chi_1 + \chi_2(1 - e^{-\lambda})] / \lambda. \quad (1.166)$$

2. Розвантаження ($Q_{\max} \geq Q \geq 0$, $\dot{Q} < 0$):

а) нелінійна ділянка ABC ($Q_{\max} \geq Q \geq s_* Q_{\max}$)

$$Q = Q_{\max} \frac{(1-\alpha)\lambda\chi + e^{-\lambda} - e^{-\lambda\alpha}}{(1-\alpha)\lambda\chi + (e^{-\lambda} - e^{-\lambda\alpha}) e^{2\lambda\alpha}};$$

$$\delta = Q[\chi_1 + \chi_2(2e^{\lambda\alpha} - e^{-\lambda(1-2\alpha)} - 1)/\lambda], \quad 0 \leq \alpha \leq 1; \quad (1.167)$$

б) лінійна ділянка CO ($s_* Q_{\max} \geq Q \geq 0$)

$$\delta = Q[\chi_1 + \chi_2(e^\lambda - 1)/\lambda]. \quad (1.168)$$

3. Повторне навантаження ($Q_{\min} \leq \dot{Q} \leq Q_{\max}$, $\dot{Q} > 0$):

а) комбінована ділянка DEA ($0 \leq s \leq s_*$):

– нелінійна гілка DE ($Q_{\min} \leq Q \leq Q_{\max}/s_*$)

$$Q = Q_{\min} \frac{(1-\beta)\lambda\chi + e^{\lambda\beta} - e^\lambda}{(1-\beta)\lambda\chi + (e^{\lambda\beta} - e^\lambda)e^{-2\lambda\beta}}; \quad (1.169)$$

$$\delta = Q[(\chi_1 + \chi_2(1 - 2e^{-\lambda\beta} + e^{\lambda(1-2\beta)}))/\lambda], \quad 0 \leq \beta \leq 1;$$

– лінійна гілка EA (вихід на пряму активного навантаження) ($Q_{\min}/s_* \leq Q \leq Q_{\max}$)

$$\delta = Q[\chi_1 + \chi_2(1 - e^{-\lambda})/\lambda]; \quad (1.170)$$

б) нелінійна ділянка BA ($s_* \leq s \leq 1$):

$$Q = Q_{\min} \frac{(1-\beta)\lambda\chi + e^{2\lambda\alpha_m}(e^{-\lambda} - e^{-\lambda\alpha_m}) + e^{\lambda\alpha} - e^{\lambda\alpha_m}}{(1-\beta)\lambda\chi + e^{2\lambda(\alpha-\beta)}(e^{-\lambda} - e^{-\lambda\alpha}) + e^{-2\lambda\beta}(e^{\lambda\beta} - e^{\lambda\alpha})};$$

$$Q = Q_{\min} \frac{(1-\alpha)\lambda\chi + e^{2\lambda\alpha_m}(e^{-\lambda} - e^{-\lambda\alpha_m}) + e^{\lambda\alpha} - e^{\lambda\alpha_m}}{(1-\alpha)\lambda\chi + e^{2\lambda(\alpha-\beta)}(e^{-\lambda} - e^{-\lambda\alpha})};$$

$$\delta = Q[\chi_1 + \chi_2(1 - 2e^{-\lambda\beta} + 2e^{\lambda(\alpha-2\beta)} - e^{-\lambda[1-2(\alpha-\beta)]})/\lambda];$$

$$0 \leq \beta \leq \alpha_m. \quad (1.171)$$

Зауважимо, що у формулах (1.166), (1.168), (1.170) результат записаний у явному вигляді. Рівняння (1.167), (1.169) є однопараметровим зображенням кривих, причому α, β – мо-

нотонно зростаючі координати нулів швидкості взаємного проковзування на поверхні контакту, що відіграють роль внутрішнього часу. У формулах (1.171) результат поданий у дво-параметровій формі. Тут β – незалежний монотонно зростаючий параметр, $\alpha = \alpha(\beta, \alpha_m)$ – корінь трансцендентного рівняння, яке отримується виключенням Q із перших двох співвідношень (1.171).

Як і в попередніх розділах, достатнє для інженерної практики наближення розв'язку розглянутої задачі можна одержати, прийнявши у формулах (1.166) – (1.171) $\varepsilon_0 \ll 1, 1/2 - \nu \ll 1$, що справедливо для податливих на зсув слабостисливих заповнювачів. Така асимптотика дає змогу позбутися від параметричного запису результатів (1.167), (1.169), (1.171) і з точністю до $O(\varepsilon)$, $O(1/2 - \nu)$ одержати в явному вигляді вирази $\delta(Q)$ на всіх етапах навантаження

$$\delta^I = Q[B_1 + B_2(1 - e^{-\lambda_0})/\lambda_0], \quad 0 \leq Q \leq Q_{\max};$$

$$\delta^{II} = \begin{cases} \delta_{\max}^I - [B_1(Q_{\max} - Q) + B_2(\sqrt{Q_{\max}} - \sqrt{Q})^2/\lambda_0], \\ e^{-2\lambda_0} Q_{\max} \leq Q \leq Q_{\max}; \\ Q[B_1 + B_2(e^{\lambda_0} - 1)/\lambda_0], \quad 0 \leq Q \leq e^{-2\lambda_0} Q_{\max}. \end{cases}$$

$$\delta^{III} = \begin{cases} \delta_{\min}^{II} + B_1(Q - Q_{\min}) + B_2(\sqrt{Q} - \sqrt{Q_{\min}})^2/\lambda_0, \\ Q_{\min} \leq Q \leq \min\{e^{2\lambda_0} Q_{\min}, Q_{\max}\}; \\ \delta^I, \min\{e^{2\lambda_0} Q_{\min}, Q_{\max}\} \leq Q \leq Q_{\max}. \end{cases} \quad (1.172)$$

Тут індекси *I*, *II*, *III* відповідають активному навантаженню, розвантаженню і повторному навантаженню;

$$B_1 = \frac{\nu_0 a}{\pi R h_0 E_0}; B_2 = \frac{a}{\pi R h_0 E_0} (3\omega_0 + 2 - \nu_0); \quad \lambda_0 = 2f \frac{a}{R}. \quad (1.173)$$

Величину розсіяної за цикл енергії визначаємо як площу петлі конструкційного демпфування шляхом інтегрування співвідношень (1.172). У результаті маємо

$$\Psi = \begin{cases} \frac{B_2 Q_{\max}^2}{3\lambda_0} (1-s)(1-\sqrt{s})^2, & e^{-2\lambda_0} \leq s \leq 1; \\ B_2 Q_{\max}^2 \left[(2+e^{-\lambda_0})(1-e^{-\lambda_0})^2 - s^2(e^{\lambda_0}-1)(2+e^{\lambda_0}) \right], & (1.174) \\ 0 \leq s \leq e^{-2\lambda_0}. \end{cases}$$

На рис. 1.12 наведена характерна залежність величини приведеної розсіяної енергії $\tilde{\Psi} = \Psi/A$ від коефіцієнта асиметрії циклу; $A = (B_1 + B_2)Q_{\max}^2/2$ – енергія пружного деформування консервативної системи.

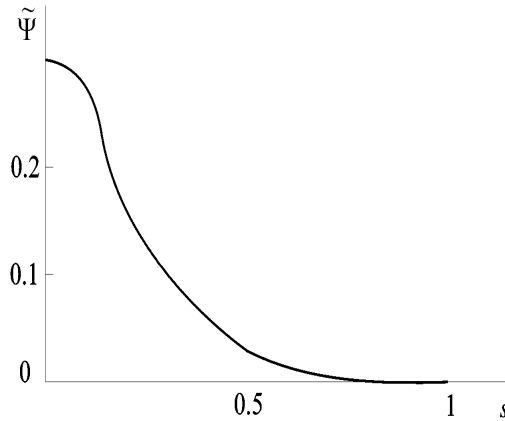


Рисунок 1.12

Підсумуємо викладене. У даному параграфі поставлена і розв'язана задача, що складається, по суті, із ряду мішаних контактних задач, розв'язок кожної з яких, отриманий окремо, описує конкретну ділянку діаграми деформування неконсервативної системи циліндрична оболонка – деформівний заповнювач. Проведено асимптотичний аналіз результатів, визначено величину розсіяної за цикл енергії.

РОЗДІЛ 2

ФРИКЦІЙНИЙ КОНТАКТ КОАКСІАЛЬНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З ПРУЖНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ

2.1 Постановка і розв'язання мішаної контактної задачі

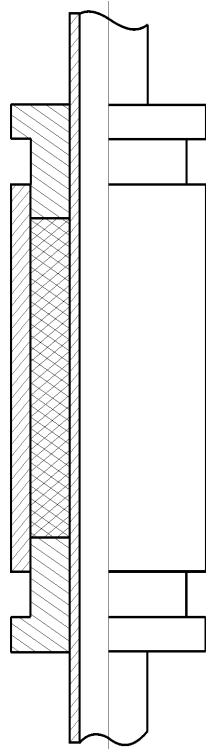


Рисунок 2.1

Розглянемо складнішу, ніж в попередньому розділі, оболонкову систему з деформівним заповнювачем (рис. 2.1). Необхідність постановки і розв'язання контактної задачі для цієї системи продиктована доволі значною поширеністю конструкцій подібного типу у багатьох засобах віброзахисту (в бурінні, на транспорті і т.д.).

В силу симетрії конструкції відносно площини, рівновіддаленої від поршнів, розглянемо половину вихідної системи, зображену на рис. 2.2. Маємо пружний порожнистий циліндр зовнішнього R_1 і внутрішнього R_2 радіусів і довжини a , який заповнює простір між коаксіально встановленими зовнішньою (радіуса R_1 і товщини h_1) і внутрішньою (радіуса R_2 і товщини h_2) тонкими оболонками. На один із торців циліндра через абсолютно жорсткий гладкий поршень передається зовнішнє навантаження Q ;

другий торець циліндра разом із оболонками гладко впирається в жорстку перепону. Заповнювач і оболонки взаємодіють із сухим тертям.

Дослідження проводимо у вказаних на рис. 2.2 циліндричних координатах. Модель заповнювача будемо, використовуючи результати (1.3), (1.5), (1.6) операторного методу. Аналогічно крайовим умовам (1.7) для суцільного циліндра запишемо крайові умови в напруженнях для порожнистого нескінченного циліндра

$$\sigma_r|_{r=R_i} = \sigma_i, \quad \phi_{rz}|_{r=R_i} = \phi_i, \quad i = 1, 2. \quad (2.1)$$

Тут σ_i, τ_i – задані на поверхнях $r = R_i$ нормальні і дотичні напруження.

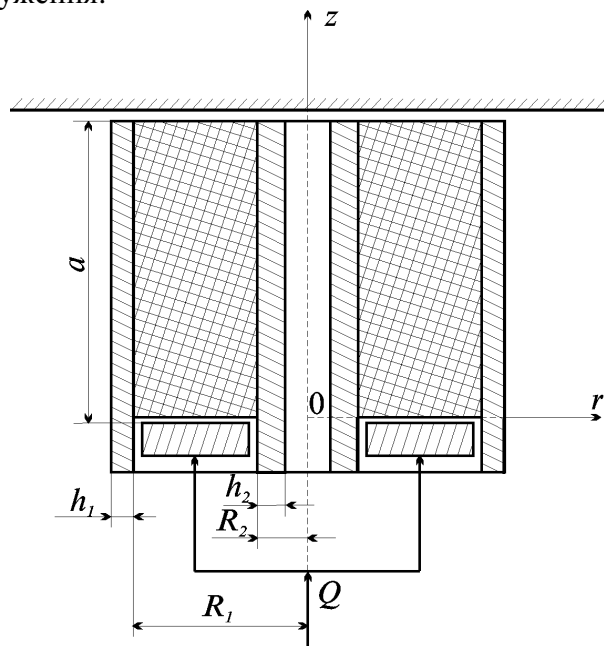


Рисунок 2.2

Розкладаючи у формулах (1.3), (1.5), (1.6) циліндричні функції в ряд Маклорена, відкидаючи члени порядку $O(pr)$ і

враховуючи умови (2.1), отримуємо модельні співвідношення для заповнювача:

переміщення

$$u_r = \frac{1}{E(R_1^2 - R_2^2)} \left(-\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^2 R_2^2}{r} (1 + \nu) + (\sigma_1 R_1^2 - \sigma_2 R_2^2) (1 - \nu) r + \nu \frac{2}{p} (\tau_1 R_1 - \tau_2 R_2) r \right), \quad (2.2)$$

$$u_z = -\frac{1}{p E (R_1^2 - R_2^2)} \left(2\nu (\sigma_1 R_1^2 - \sigma_2 R_2^2) - \frac{2}{p} (\tau_1 R_1 - \tau_2 R_2) \right);$$

напруження

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{R_1^2 - R_2^2} \left(\sigma_1 R_1^2 - \sigma_2 R_2^2 - \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) R_1^2 R_2^2}{r^2} \right), \\ \sigma_\beta &= \frac{1}{R_1^2 - R_2^2} \left(\sigma_1 R_1^2 - \sigma_2 R_2^2 + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) R_1^2 R_2^2}{r^2} \right), \\ \sigma_z &= -\frac{2}{p} \frac{1}{R_1^2 - R_2^2} (\tau_1 R_1 - \tau_2 R_2), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\tau_{rz} = \frac{1}{R_1^2 - R_2^2} \left[r (\tau_1 R_1 - \tau_2 R_2) - \frac{R_1^2 R_2^2}{r} \left(\frac{\tau_1}{R_1} - \frac{\tau_2}{R_2} \right) \right];$$

деформації

$$e_r = \frac{1}{E(R_1^2 - R_2^2)} \left((1 - \nu) (y_1 R_1^2 - y_2 R_2^2) + \nu \frac{2}{p} (\phi_1 R_1 - \phi_2 R_2) - (1 + \nu) \frac{(y_1 - y_2) R_1^2 R_2^2}{r^2} \right),$$

$$e_\beta = \frac{1}{E(R_1^2 - R_2^2)} \left((1-h)(y_1 R_1^2 - y_2 R_2^2) + h \frac{2}{p} (\phi R_1 - \phi_2 R_2) + (1+h) \frac{(y_1 - y_2) R_1^2 R_2^2}{r^2} \right),$$

$$e_z = \frac{1+h}{E(R_1^2 - R_2^2)} \left[2h(y_1 R_1^2 - y_2 R_2^2) - \frac{2}{p} (\phi R_1 - \phi_2 R_2) \right], \quad (2.4)$$

$$e_{rz} = \frac{1+h}{E} \frac{1}{R_1^2 - R_2^2} \left[r(\phi R_1 - \phi_2 R_2) - \frac{R_1^2 R_2^2}{r} \left(\frac{\phi}{R_1} - \frac{\phi_2}{R_2} \right) \right].$$

Зазначимо, що співвідношення для суцільного циліндра (1.9) – (1.11), використані в першому розділі, отримуються із формул (2.2) – (2.4) у частковому випадку $R_2 = 0$.

Модельні співвідношення для порожнистого циліндра, аналогічні вже отриманим вище за допомогою операторного методу, можна записати зразу, вважаючи що в кожному поперечному ($z = \text{const}$) перерізі заповнювача переміщення визначаються як суперпозиція розв'язків задачі Ламе про радіальний стиск порожнистого циліндра і задачі про осьовий стиск стержня при дії дотичних напружень на циліндричних поверхнях. Маємо

$$u_r = \frac{1}{E(R_1^2 - R_2^2)} \left(\frac{(y_1 - y_2) R_1^2 R_2^2}{r} (1+h) + (y_1 R_1^2 - y_2 R_2^2) (1-h) r - h(R_1^2 - R_2^2) r y_z \right), \quad (2.5)$$

$$u_z = \frac{-2h(y_1 R_1^2 - y_2 R_2^2)}{E(R_1^2 - R_2^2)} (z - a) + \frac{1}{E} (z - a) y_z. \quad (2.6)$$

Рівняння рівноваги заповнювача має вигляд

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} = 0. \quad (2.7)$$

Запишемо співвідношення (2.5) на поверхнях $r = R_i$, продиференціюємо (2.6) по z і усереднимо рівняння рівноваги (2.7) по поперечному перерізу за допомогою оператора

$$\frac{1}{\pi(R_1^2 - R_2^2)} \int_0^{2\pi} \int_{R_2}^{R_1} r dr d\beta,$$

одержимо необхідні початкові співвідношення для заповнювача, записані у зручному для подальшого дослідження вигляді

$$\frac{w_1}{R_1} = \frac{1}{E(R_1^2 - R_2^2)} \left([R_2^2(1+h) + R_1^2(1-h)]y_1 - 2R_2^2y_2 \right) - \frac{h}{E}y_\zeta; \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{w_2}{R_2} &= \frac{1}{E(R_1^2 - R_2^2)} \times \\ &\times \left(-[R_1^2(1+v) + R_2^2(1-v)]\sigma_2 + 2R_1^2\sigma_1 \right) - \frac{v}{E}\sigma_\zeta; \quad (2.9) \end{aligned}$$

$$e_\zeta = -\frac{2h(y_1R_1^2 - y_2R_2^2)}{E(R_1^2 - R_2^2)} + \frac{1}{E}y_\zeta; \quad (2.10)$$

$$\frac{d\sigma}{d\zeta} + \frac{2a}{R_1^2 - R_2^2} (R_1\tau_1 - R_2\tau_2) = 0. \quad (2.11)$$

Тут $\zeta = z/a \in [0,1]$; w_i – радіальні переміщення на поверхнях $r = R_i$, $i = 1,2$; решта позначень відповідає прийнятим попередньо.

Пружну рівновагу оболонок описуємо співвідношеннями безмоментної теорії:

рівняння рівноваги

$$\frac{dN_\zeta^{(i)}}{d\zeta} + (-1)^i a\tau_i = 0; \quad (2.12)$$

$$N_\beta^{(i)} = (-1)^i R_i\sigma_i; \quad (2.13)$$

фізичні співвідношення (закон Гука)

$$e_{\zeta}^{(i)} = \frac{1}{a} \frac{du_i}{d_{\zeta}} = \frac{1}{E_i h_i} \left[N_{\zeta}^{(i)} - h_i N_{\beta}^{(i)} \right]; \quad (2.14)$$

$$e_{\beta}^{(i)} = \frac{w^{(i)}}{R_i} = \frac{1}{E_i h_i} \left[N_{\beta}^{(i)} - h_i N_{\zeta}^{(i)} \right], \quad i = 1, 2. \quad (2.15)$$

Тут: $N_{\zeta}^{(i)}, N_{\beta}^{(i)}$ – мембранні зусилля; $u_i, w^{(i)}$ – осьові та радіальні переміщення оболонок; E_i, ν_i – пружні характеристики їх матеріалів; σ_i, τ_i – нормальні і дотичні контактні напруження, задані на внутрішній поверхні першої і на зовнішній поверхні другої оболонок.

На торцях заповнювача і оболонок виконуються умови

$$\sigma_{\zeta}(0) = -P \equiv -\frac{Q}{\pi(R_1^2 - R_2^2)}, \quad N_{\zeta}^{(i)}(0) = 0; \quad (2.16)$$

$$u(1) = 0, \quad u_i(1) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.17)$$

де u – осьове переміщення заповнювача.

Фрикційну взаємодію оболонок і заповнювача описуємо співвідношеннями одностороннього контакту

$$w = w^{(i)}, \quad \sigma_i < 0, \quad i = 1, 2, \quad \zeta \in [0, 1]. \quad (2.18)$$

і законом сухого тертя, записаним у такій формі:

область проковзування на обидвох поверхнях контакту

$$\tau_i = (-1)^j f_i \sigma_i, \quad u > u_i, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad \zeta \in [0, \alpha_k]; \quad (2.19)$$

область проковзування-зчеплення (проковзування на одній контактуючій поверхні, зчеплення – на другій)

$$u = u_k, \quad u > u_m, \quad |\tau_k| < -f_k \sigma_k, \quad \tau_m = (-1)^k f_m \sigma_m, \\ k \neq m, \quad \zeta \in (\alpha_k, \alpha_m); \quad (2.20)$$

область зчеплення на обидвох поверхнях контакту

$$u = u_i, \quad |\tau_i| < -f_i \sigma_i, \quad i = 1, 2, \quad \zeta \in (\alpha_m, 1). \quad (2.21)$$

Тут: f_i – коефіцієнти тертя на поверхнях $r = R_i$; α_k – координата кінця області загального проковзування; α_m – координата початку області загального зчеплення. Координати точок будемо знаходити, задовольняючи умови неперервності осьових напружень. Позначимо для зручності

$$\sigma^{(3)} = \sigma_\zeta; \sigma^{(s)} = \frac{N_\zeta^{(s)}}{R_s}, \quad s = 1, 2. \quad (2.22)$$

Умови неперервності в цих позначеннях будуть

$$\sigma^{(s)}(\alpha_k - 0) = \sigma^{(s)}(\alpha_k + 0), \quad s = \overline{1, 3}; \quad (2.23)$$

$$\sigma^{(s)}(\alpha_m - 0) = \sigma^{(s)}(\alpha_m + 0), \quad s = \overline{1, 3}. \quad (2.24)$$

Записаний у формі (2.19) – (2.21) закон сухого тертя потребує деяких пояснень. Індекс k тут може приймати значення 1 або 2 (індекс m відповідно значення 2 або 1) залежно від того, на якій із контактуючих поверхонь швидше досягається початок області зчеплення. Наприклад, якщо $k = 1$, то $m = 2$, і в області проковзування – зчеплення цей варіант буде означати зчеплення на зовнішній поверхні заповнювача і проковзування на внутрішній. Якщо, навпаки, $m = 1$, $k = 2$, то маємо другий варіант: зчеплення на внутрішній поверхні заповнювача і проковзування на зовнішній. Критерій для вибору варіанта в явному вигляді безпосередньо в процесі розв'язування задачі отримати не вдалося. Знаходження координат точок α_k , α_m розділу областей пов'язане з умовами (2.23), (2.24) неперервності осьових напружень, що приводить до числового пошуку коренів трансцендентних рівнянь. Отже, і критерій вибору варіанта буде отриманий в результаті розв'язування трансцендентних рівнянь.

Проінтегруємо рівняння рівноваги заповнювача (2.11) і оболонки (2.12). З урахуванням крайових умов (2.16) маємо

$$\sigma_{\zeta} = -P - \frac{2a}{R_1^2 - R_2^2} \int_0^{\zeta} (R_1 \tau_1 - R_2 \tau_2) d\zeta; \quad (2.25)$$

$$N_{\zeta}^{(i)} = (-1)^j a \int_0^{\zeta} \tau_i d\zeta, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (2.26)$$

Підставляючи вирази для мембранних зусиль (2.13), (2.26) в закон Гука (2.14), (2.15), отримуємо осьові деформації і радіальні переміщення оболонок через невідомі напруження

$$\varepsilon_{\zeta}^{(i)} = (-1)^j \frac{R_i}{E_i h_i} \left(\nu_i \sigma_i + \frac{a}{R_i} \int_0^{\zeta} \tau_i d\zeta \right), \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j; \quad (2.27)$$

$$\frac{w^{(i)}}{R_i} = (-1)^j \frac{R_i}{E_i h_i} \left(\sigma_i + \nu_i \frac{a}{R_i} \int_0^{\zeta} \tau_i d\zeta \right), \quad i = 1, 2. \quad (2.28)$$

Підставляючи вираз (2.25) для осьових напружень заповнювача в формулу (2.10), отримуємо осьові деформації заповнювача

$$\varepsilon_{\zeta} = -\frac{1}{E} \left[\frac{2\nu(\sigma_1 R_1^2 - \sigma_2 R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} + P + \frac{2a}{R_1^2 - R_2^2} \int_0^{\zeta} (R_1 \tau_1 - R_2 \tau_2) d\zeta \right]. \quad (2.29)$$

Введемо позначення деяких безрозмірних величин

$$\varepsilon_i = \frac{ER_i}{E_i h_i}, \quad r_i^2 = \frac{R_i^2}{R_1^2 - R_2^2}, \quad l_i = \frac{a}{R_i}, \quad (2.30)$$

$$\nu_i = (-1)^j (1 + \nu) + \nu_i, \quad i = 1, 2.$$

Підставляючи вирази для радіальних переміщень заповнювача (2.8), (2.9) і оболонок (2.28) в умови одностороннього контакту (2.18), з урахуванням позначень (2.30) отримуємо

$$(2r_i^2 + \chi_i)\sigma_i - 2r_j^2\sigma_j + l_i(2vr_i^2 + v_i\varepsilon_i)\int_0^\zeta \tau_i d\zeta - 2vl_jr_j^2\int_0^\zeta \tau_j d\zeta + (-1)^j vP = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad \zeta \in [0, 1]. \quad (2.31)$$

Тепер перейдемо до запису ключових рівнянь і отримання розв'язків контактної задачі окремо в кожній області.

Область проковзування на обидвох поверхнях контакту $\zeta \in [0, \alpha_k)$. Беручи до уваги закон Кулона (2.19), із рівнянь (2.31) отримуємо

$$(2r_i^2 + \chi_i)\sigma_i - 2r_j^2\sigma_j + f_i l_i(2vr_i^2 + v_i\varepsilon_i)(-1)^j \int_0^\zeta \sigma_i d\zeta - 2nf_j l_j r_j^2 (-1)^j \int_0^\zeta \sigma_j d\zeta + (-1)^j nP = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (2.32)$$

Продиференціюємо рівняння (2.32) і приведемо отриману систему звичайних диференціальних рівнянь до нормального вигляду

$$\frac{d\sigma_i}{d\zeta} = \sum_n a_{in} \sigma_n; \quad i, n = 1, 2. \quad (2.33)$$

Крайові умови для системи (2.33) отримаємо, покладаючи у рівнянні (2.32) $\zeta = 0$

$$\sigma_i(0) = (-1)^j \frac{\chi_j v}{\chi_0} P; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j. \quad (2.34)$$

У формулах (2.33), (2.34) введені позначення

$$\chi_0 = -\chi_1 \chi_2 - 2r_1^2 \chi_2 - 2r_2^2 \chi_1; \quad (2.35)$$

$$a_{mm} = (-1)^n f_m l_m [(2vr_m^2 + v_m \varepsilon_m) \chi_n + 2v_m r_n^2 \varepsilon_m] / \chi_0;$$

$$a_{nm} = (-1)^n 2r_m^2 f_m l_m (v_m \varepsilon_m - v \chi_m) / \chi_0; \quad n, m = 1, 2; \quad n \neq m.$$

Розв'язок задачі (2.33), (2.34) має такий вигляд:

$$\sigma_i = P \sum_n K_{in} e^{\lambda_n \zeta},$$

$$\tau_i = (-1)^j f_i P \sum_n K_{in} e^{\lambda_n \zeta}; i, j, n = 1, 2; i \neq j. \quad (2.36)$$

Тут введені позначення

$$\lambda_n = \left[a_{11} + a_{22} + (-1)^n \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{21}a_{12}} \right] / 2; \quad (2.37)$$

$$K_{in} = \left(-\frac{a_{11} - \lambda_n}{a_{12}} \right)^{\delta_{2i}} (a_{11}\chi_2 - a_{12}\chi_1 - \lambda_n\chi_2) (-1)^m \frac{\nu}{\chi_0(t_1 - t_2)};$$

δ_{ij} – символ Кронекера; $m, n, i = 1, 2; m \neq n$.

Напружено-деформований стан системи в області проковзування визначається підстановкою знайдених контактних напружень у вихідні співвідношення. Для радіальних переміщень і осьових деформацій на основі формул (2.27) – (2.29) маємо

$$\frac{w_i}{R_i} = \frac{PR_i}{E_i h_i} \sum_n K_{in} \left[(-1)^i e^{\lambda_n \zeta} - \frac{\nu_i f_i l_i}{\lambda_n} (e^{\lambda_n \zeta} - 1) \right], \quad (2.38)$$

$$\varepsilon_\zeta^{(i)} = \frac{PR_i}{E_i h_i} \sum_n K_{in} \left[(-1)^j \nu_i e^{\lambda_n \zeta} + \frac{f_i l_i}{\lambda_n} (e^{\lambda_n \zeta} - 1) \right], \quad (2.39)$$

$$\varepsilon_\zeta = -\frac{P}{E} \left\{ 1 + 2 \sum_i \sum_n r_i^2 K_{in} \left[\nu (-1)^j e^{\lambda_n \zeta} + \frac{f_i l_i}{\lambda_n} (e^{\lambda_n \zeta} - 1) \right] \right\},$$

$$i, j, n = 1, 2; \quad i \neq j. \quad (2.40)$$

Осьові напруження в заповнювачі і осьові мембранні зусилля в оболонках будуть

$$\sigma_\zeta = -P \left\{ 1 + 2 \sum_n \sum_m f_m l_m r_m^2 K_{mn} (e^{\lambda_n \zeta} - 1) / \lambda_n \right\}; \quad (2.41)$$

$$\frac{N_{\zeta}^{(i)}}{R_i} = P f_i l_i \sum_n K_{in} (e^{\lambda_n \zeta} - 1) / \lambda_n \quad i, m, n = 1, 2.$$

Використовуючи позначення (2.22), запишемо осьові напруження (2.41) в кінці області проковзування

$$\sigma^{(s)}(\alpha_k) = \sum_{n=1}^3 g_{sn} e^{\lambda_n \alpha_k}, \quad s = \overline{1,3}. \quad (2.42)$$

Тут $\lambda_3 = 0$;

$$g_{sn} = P \begin{cases} f_s l_s K_{sn} / \lambda_n; & n = 1, 2 \\ -f_s l_s \sum_r K_{sr} / \lambda_r; & n = 3 \end{cases}, \quad r, s = 1, 2;$$

$$g_{3n} = -P \begin{cases} 2 \sum_m f_m l_m r_m^2 K_{mn} / \lambda_n, & n = 1, 2 \\ 1 - 2 \sum_r \sum_m f_m l_m r_m^2 K_{mr} / \lambda_r, & n = 3 \end{cases}, \quad r, m = 1, 2. \quad (2.43)$$

Область проковзування-зчеплення $\zeta \in (\alpha_k, \alpha_m)$.

Як уже зазначалось в коментарях до форми запису закону сухого тертя, можливі два варіанти граничних умов у цій області. Для того, щоб уникнути зайвої громіздкості, дослідження проводимо відразу для обидвох варіантів.

Співвідношення (2.25), (2.26) для осьових напружень і зусиль в розглядуваній області мають вигляд

$$\sigma_{\zeta} = \sigma_{\zeta}(\alpha_k) - \frac{2a}{R_1^2 - R_2^2} \int_{\alpha_k}^{\zeta} (R_1 \tau_1 - R_2 \tau_2) d\zeta; \quad (2.44)$$

$$N_{\zeta}^{(i)} = N_{\zeta}^{(s)}(\alpha_k) + (-1)^j a \int_{\alpha_k}^{\zeta} \tau_i d\zeta, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j.$$

Умови одностороннього контакту (2.18) з урахуванням закону тертя (2.20) і співвідношень (2.44) будуть

$$(2r_i^2 + \chi_i) \sigma_i - 2r_j^2 \sigma_j + l_i (2\nu r_i^2 + \nu_i \varepsilon_i) \int_{\alpha_k}^{\zeta} [\delta_{ik} \tau_i + \delta_{jk} (-1)^j f_i \sigma_i] d\zeta -$$

$$\begin{aligned}
& -2\nu l_j r_j^2 \int_{\alpha_k}^{\zeta} [\delta_{jk} \tau_j + \delta_{ik} (-1)^i f_j \sigma_j] d\zeta = \\
& = (-1)^j \left[\nu \sigma_{\zeta}(\alpha_k) - \nu_i \varepsilon_i N_{\zeta}^{(s)}(\alpha_k) / R_i \right] ; \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (2.45)
\end{aligned}$$

Оскільки на торці системи, який гладко впирається в жорстку перепону, виконуються умови (2.17), то у формулюваннях закону тертя (2.20) умови рівності осьових переміщень можна замінити умовами сумісності осьових деформацій. У даному разі маємо

$$\varepsilon_{\zeta} = \varepsilon_{\zeta}^{(k)}, \quad \zeta \in (\alpha_k, \alpha_m). \quad (2.46)$$

Осьові деформації в розглядуваній області отримаємо, підставляючи співвідношення для осьових напружень і зусиль (2.44) у вихідні формули (2.10), (2.14)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\zeta} = & -\frac{1}{E} \left[\frac{2\nu(\sigma_1 R_1^2 - \sigma_2 R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} - \sigma_{\zeta}(\alpha_k) + \right. \\
& \left. + \frac{2a}{R_1^2 - R_2^2} \int_{\alpha_k}^{\zeta} (R_1 \tau_1 - R_2 \tau_2) d\zeta \right]; \quad (2.47) \\
\varepsilon_{\zeta}^{(k)} = & \frac{R_k}{E_k h_k} \left(\frac{N_{\zeta}^{(k)}(\alpha_k)}{R_k} - (-1)^k \left(\nu_k \sigma_k + \frac{a}{R_k} \int_{\alpha_k}^{\zeta} \tau_k d\zeta \right) \right).
\end{aligned}$$

Підставляючи отримані вирази (2.47) в умову (2.46), з урахуванням прийнятих позначень маємо

$$\begin{aligned}
& (2\nu r_k^2 + \nu_k \varepsilon_k) \sigma_k - 2\nu r_m^2 \sigma_m + \\
& + l_k (2r_k^2 + \varepsilon_k) \int_{\alpha_k}^{\zeta} \tau_k d\zeta - 2l_m r_m^2 (-1)^k f_m \int_{\alpha_k}^{\zeta} \sigma_m d\zeta = \\
& = (-1)^m \left[\sigma_{\zeta}(\alpha_k) - \varepsilon_k N_{\zeta}^{(k)}(\alpha_k) / R_k \right], \quad k \neq m. \quad (2.48)
\end{aligned}$$

Таким чином, отримана система трьох ключових рівнянь – два рівняння (2.45) і одне (2.48) (залежно від варіанта k – фіксоване число).

Виключимо з двох рівнянь (2.45) з допомогою формул (2.48) невідому величину

$$\int_{\alpha_k}^{\xi} \tau_k d\zeta,$$

продиференціюємо знайдені співвідношення і зведемо отриману систему звичайних диференціальних рівнянь до нормального вигляду

$$\frac{d\sigma_i}{d\zeta} = \sum_n b_{in}^k \sigma_n; \quad i = 1, 2. \quad (2.49)$$

Тут введено позначення

$$b_{in}^k = \frac{(B_{ij}^k D_{ji}^k - C_{ij}^k A_{ji}^k) \delta_{in} + (B_{ij}^k C_{ji}^k - D_{ij}^k A_{ji}^k) \delta_{jn}}{A_{ij}^k A_{ji}^k - B_{ij}^k B_{ji}^k}$$

$$i, j, n = 1, 2; j \neq i.$$

$$A_{ij}^k = (2r_i^2 + \chi_i)(2r_k^2 + \varepsilon_k) - (2vr_k^2 + v_k \varepsilon_k) \delta_{ik} - 4v^2 r_k^2 r_i^2 \delta_{jk};$$

$$B_{ij}^k = -2r_j^2(2r_k^2 + \varepsilon_k) + 2vr_j^2(2vr_k^2 + v_k \varepsilon_k)(\delta_{jk} + \delta_{ik});$$

$$C_{ij}^k = (-1)^k f_i l_i \left[(2vr_i^2 + v_i \varepsilon_i)(2r_k^2 + \varepsilon_k) - 4vr_i^2 r_j^2 \right] \delta_{ik};$$

$$D_{ij}^k = -(-1)^i f_j l_j 2r_j^2 \varepsilon_k (v - v_k) \delta_{ik}. \quad (2.50)$$

Крайові умови для системи диференціальних рівнянь (2.49) отримаємо підстановкою в рівняння (2.45), (2.48) $\zeta = \alpha_k$

$$\begin{aligned} & (2r_i^2 + \chi_i) \sigma_i(\alpha_k) - 2r_j^2 \sigma_j(\alpha_k) = \\ & = (-1)^j \left[v \sigma_\xi(\alpha_k) - v_i \varepsilon_i N_\xi^{(i)}(\alpha_k) / R_i \right], \quad i, j = 1, 2, i \neq j. \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned}
& (2vr_k^2 + v_k \varepsilon_k) \sigma_k(\alpha_k) - 2vr_m^2 \sigma_m(\alpha_k) = \\
& = (-1)^m \left[\sigma_\zeta(\alpha_k) - \varepsilon_k N_\zeta^{(k)}(\alpha_k) / R_k \right], \quad k \neq m. \quad (2.52)
\end{aligned}$$

Розв'язок рівняння (2.51) буде

$$\begin{aligned}
\sigma_i(\alpha_k) &= \frac{(-1)^i}{\chi_0} [v\chi_j \sigma_\zeta(\alpha_k) - (2r_j^2 + \chi_j) v_i \varepsilon_i \times \\
& \times \frac{N_\zeta^i(\alpha_k)}{R_i} + 2r_j^2 v_j \varepsilon_j \frac{N_\zeta^j(\alpha_k)}{R_j}]; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j. \quad (2.53)
\end{aligned}$$

Невідомі контактні напруження знаходимо із системи (2.49) з урахуванням крайових умов (2.53):

$$\sigma_i = \sum_n C_{in}^k(\alpha_k) e^{\lambda_n^k(\zeta - \alpha_k)}; \quad i, n = 1, 2. \quad (2.54)$$

Тут позначено:

$$\lambda_n^k = \left[b_{11}^k + b_{22}^k + (-1)^n \sqrt{(b_{11}^k - b_{22}^k)^2 + 4b_{12}^k b_{21}^k} \right] / 2; \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned}
C_{in}^k(\alpha_k) &= (-1)^n \left(-\frac{b_{11}^k - \lambda_n^k}{b_{12}^k} \right)^{\delta_{2i}} \times \\
& \times \delta_{1k} \frac{\sigma_1(\alpha_k)(b_{11}^k - \lambda_s^k) + \sigma_2(\alpha_k)b_{12}^k}{\lambda_2^k - \lambda_1^k} + \\
& + (-1)^s \left(\frac{b_{22}^k - \lambda_n^k}{b_{21}^k} \right)^{\delta_{1i}} \delta_{2k} \frac{\sigma_1(\alpha_k)b_{21}^k + \sigma_2(\alpha_k)(b_{22}^k - \lambda_s^k)}{\lambda_2^k - \lambda_1^k}; \\
& i, s, n = 1, 2; \quad s \neq n.
\end{aligned}$$

Для визначення невідомої координати α_k підставимо співвідношення (2.53) в невикористану крайову умову (2.52), з урахуванням позначення (2.22) отримаємо

$$\sum_{s=1}^3 d_{ks} \sigma^{(s)}(\alpha_k) = 0, \quad (2.56)$$

де:

$$\begin{aligned} d_{k1} &= \varepsilon_k \left[2r_k^2 \chi_m (1 - v_k v) + (2r_m^2 + \chi_m) (\chi_k - v_k^2 \varepsilon_k) \right]; \\ d_{k2} &= (v_k \varepsilon_k - v \chi_k) 2r_m^2 v_m \varepsilon_m; \\ d_{k3} &= (1 - v^2) \chi_o + (v_k \varepsilon_k - v \chi_k) v \chi_m; \quad k \neq m. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Тепер використаємо умову неперервності осьових напружень в точці α_k . З урахуванням виразів (2.23) підставимо формулу (2.42) в співвідношення (2.56). Маємо трансцендентне рівняння відносно невідомої α_k

$$\sum_{s=1}^3 \sum_{n=1}^3 d_{ks} g_{sn} e^{L_n^k \bar{\sigma}_k} = 0, \quad (2.58)$$

яке розв'язується лише числово.

Отриманий розв'язок контактної задачі в області проковзування-зчеплення дає можливість визначити всі характеристики напружено-деформованого стану системи при $\zeta \in (\alpha_k, \alpha_m)$. Запишемо спочатку необхідні інтеграли. Ураховуючи закон Кулона (2.20) та інтегруючи контактні напруження (2.54), маємо

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_k}^{\zeta} \tau_m d\zeta &= (-1)^k f_m \int_{\alpha_k}^{\zeta} \sigma_m d\zeta = (-1)^k f_m \sum_n C_{mn}^k(\alpha_k) \times \\ &\times \left[e^{\lambda_n^k (m - \bar{\sigma}_k)} - 1 \right] / L_n^k; \quad n = 1, 2; \quad k \neq m. \end{aligned} \quad (2.59)$$

З рівняння (2.48) підстановкою розв'язку (2.54) і формули (2.59) отримаємо

$$\begin{aligned} l_k \int_{\alpha_k}^{\zeta} \phi_k d\zeta &= \frac{1}{2r_k^2 + e_k} \sum_n \left\{ - (2vr_k^2 + v_k e_k) C_{kn}^k(\bar{\sigma}_k) + \right. \\ &\left. + 2r_m^2 (v + (-1)^k f_m l_m) / \lambda_n^k \right\} C_{mn}^k(\alpha_k) \left] e^{\lambda_n^k (\zeta - \alpha_k)} - \right. \end{aligned}$$

$$-2r_m^2 f_m l_m (-1)^k C_{mn}^k(\alpha_k) / \lambda_n^k \}; \quad n=1,2; \quad k \neq m. \quad (2.60)$$

Формули (2.44), за якими визначаються осьові напруження і мембранні зусилля в даній області, запишемо у формі:

$$\sigma_\zeta = \sigma_\zeta(\alpha_k) - (-1)^m 2 \int_{\alpha_k}^{\zeta} (l_k r_k^2 \tau_k - l_m r_m^2 \tau_m) d\zeta; \quad (2.61)$$

$$\frac{N_\zeta^{(i)}}{R_i} = \frac{N_\zeta^{(i)}(\alpha_k)}{R_i} - (-1)^i l_i \left[\delta_{ik} \int_{\alpha_k}^{\zeta} \tau_k d\zeta + \delta_{im} (-1)^k f_m \int_{\alpha_k}^{\zeta} \sigma_m d\zeta \right];$$

$$i=1,2; \quad k \neq m.$$

Згадаємо позначення (2.22) і запишемо осьові напруження в області проковзування-зчеплення

$$\sigma^{(s)} = \sum_{n=1}^3 h_{sn}(\alpha_k) e^{\lambda_n^k (\zeta - \alpha_k)}, \quad s = \overline{1,3},$$

де $\lambda_3^k = 0$;

$$h_{sn}(\alpha_k) = \left\{ \begin{array}{l} (-1)^s \left\{ \frac{\delta_{sk}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} (2\nu r_k^2 + \nu_k \varepsilon_k) C_{kn}^k(\alpha_k) - \right. \\ \left. - \left[2\nu r_m^2 \frac{\delta_{sk}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} + \left(\frac{\delta_{sk} 2r_m^2}{2r_k^2 + \varepsilon_k} + \delta_{sm} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (-1)^k f_m l_m / \lambda_n^k \right] C_{mn}^k(\alpha_k) \right\} n=1,2; \\ \frac{N_\zeta^{(s)}(\alpha_k)}{R_s} + \sum_j (-1)^s (-1)^k \left(\frac{2r_m^2 \delta_{sk}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} + \delta_{sm} \right) \times \\ \times \frac{f_m l_m}{\lambda_j^k} C_{mj}^k(\alpha_k), \quad n=3; \quad j=1,2; \quad s=1,2. \end{array} \right\}, \quad (2.63)$$

$$h_{3n}(\alpha_k) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{(-1)^m}{2r_k^2 + \varepsilon_k} [2r_k^2(2vr_k^2 + v_k \varepsilon) C_{kn}^k(\alpha) + 2r_m^2 \times \\ \times (-2vr_k^2 + \varepsilon_k f_m l_m (-1)^k / \lambda_n^k)], n = 1, 2; \\ \sigma_\varsigma(\alpha_k) + \frac{\varepsilon_k}{2r_k^2 + \varepsilon_k} 2r_m^2 f_m l_m \sum_j C_{mj}^k(\alpha_k) / \lambda_j^k, \\ n = 3; j = 1, 2; k \neq m. \end{array} \right\}.$$

Радіальні переміщення і осьові деформації оболонок у досліджуваній області подаються виразами

$$\begin{aligned} \frac{w_i}{R_i} = \frac{R_i}{E_i h_i} & \left\{ -v_i \frac{N_\varsigma^{(i)}(\alpha_k)}{R_i} + \right. \\ & + (-1)^i \sum_{n=1}^3 \left[\left\{ \left[1 - \frac{v_i \delta_{ik}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} (2vr_k^2 + v_k \varepsilon_k) \right] \times C_{in}^k(\alpha_k) + \right. \right. \\ & + v_i \left[\frac{2vr_m^2 \delta_{ik}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} + \left(\frac{2r_m^2}{2r_k^2 + \varepsilon_k} \delta_{ik} + \delta_{im} \right) (-1)^k f_m l_m / \lambda_n^k \right] \times \\ & \left. \left. \times C_{mn}^k(\alpha_k) \right\} \cdot e^{\lambda_n^k (\varsigma - \alpha_k)} - \left(\frac{2r_m^2 \delta_{ik}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} + \delta_{im} \right) \times \right. \\ & \left. \left. \times (-1)^k v_i f_m l_m C_{mn}^k(\alpha_k) / \lambda_n^k \right] \right\}; \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varsigma^{(i)} = \frac{R_i}{E_i h_i} & \left\{ \frac{N_\varsigma^{(i)}(\alpha_k)}{R_i} - (-1)^i \sum_{n=1}^3 \left[\left[v_i - \frac{\delta_{ik}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} (2vr_k^2 + v_k \varepsilon_k) \right] \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times C_{in}^k(\alpha_k) + \left[\frac{2vr_m^2 \delta_{ik}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} + \left(\frac{2r_m^2}{2r_k^2 + \varepsilon_k} + \delta_{im} \right) (-1)^k f_m l_m / \lambda_n^k \right] \times C_{mn}^k(\alpha_k) \right] \times \right. \end{aligned}$$

$$\times e^{\lambda_n^k(\zeta-\alpha_k)} - \left(\frac{2r_m^2 \delta_{ik}}{2r_k^2 + \varepsilon_k} + \delta_{im} \right) (-1)^k f_m l_m C_{mm}^k(\alpha_k) / \lambda_n^k \Bigg] \Bigg\};$$

$$i = 1, 2; \quad k \neq m. \quad (2.65)$$

Осьова деформація заповнювача має такий вигляд:

$$\varepsilon_\zeta = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_\zeta(\alpha_k) + \sum_{n=1}^3 \left[\left\{ 2\nu \sum_i (-1)^i r_i^2 C_{in}^k(\alpha_k) + \right. \right. \right.$$

$$+ \frac{(-1)^k 2r_k^2 (2\nu r_k^2 + \nu_k \varepsilon_k) C_{kn}^k(\alpha_k) + \left[(-1)^k \frac{4r_k^2 r_m^2 \nu}{2r_k^2 + \varepsilon_k} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{2r_m^2 \varepsilon_k}{2r_k^2 + \varepsilon_k} f_m l_m / \lambda_n^k \right] C_{mm}^k(\alpha_k) \right\} e^{\lambda_n^k(\zeta-\alpha_k)} +$$

$$\left. \left. + \frac{2r_m^2 \varepsilon_k}{2r_k^2 + \varepsilon_k} f_m l_m C_{mm}^k(\alpha_k) / \lambda_n^k / \lambda_n^k \right] \right\}; \quad k \neq m. \quad (2.66)$$

Область зчеплення на обидвох поверхнях контакту
 $\zeta \in (\alpha_m, 1]$. Співвідношення (2.25), (2.26) для осьових напружень і зусиль у цій області мають вигляд:

$$\sigma_\zeta = \sigma_\zeta(\alpha_m) - \frac{2a}{R_1^2 - R_2^2} \int_{\alpha_m}^{\zeta} (R_1 \tau_1 - R_2 \tau_2) d\zeta;$$

$$N_\zeta^{(i)} = N_\zeta^{(i)}(\alpha_m) - (-1)^i a \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau d\zeta; \quad i = 1, 2. \quad (2.67)$$

Співвідношення одностороннього контакту (2.18) з урахуванням виразів (2.67) будуть

$$(2r_i^2 + \chi_i) \sigma_i - 2r_j^2 \sigma_j + l_i (2\nu r_i^2 + \nu_i \varepsilon_i) \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau_i d\zeta - 2\nu l_j r_j^2 \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau_j d\zeta =$$

$$(-1)^j \left[\nu \sigma_\zeta(\alpha_m) - \nu_i \varepsilon_i N_\zeta^{(i)}(\alpha_m) / R_i \right]; \quad i, j = 1, 2, i \neq j. \quad (2.68)$$

Нагадаємо, що крайові умови (2.17) дозволяють у формулах (2.20) умови рівності осьових переміщень замінити умовами сумісності осьових деформацій. В даному випадку маємо

$$\varepsilon_\zeta = \varepsilon_\zeta^{(i)}; \quad i=1,2, \quad \zeta \in (\alpha_m, 1]. \quad (2.69)$$

Осьові деформації в розглядуваній області одержимо, підставляючи співвідношення для осьових напружень і зусиль (2.67) у вихідні формули (2.10), (2.14)

$$\varepsilon_\zeta = -\frac{1}{E} \left[\frac{2\nu(\sigma_1 R_1^2 - \sigma_2 R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} - \sigma_\zeta(\alpha_m) + \frac{2a}{R_1^2 - R_2^2} \int_{\alpha_m}^{\zeta} (R_1 \tau_1 - R_2 \tau_2) d\zeta \right]; \quad (2.70)$$

$$\varepsilon_\zeta^{(i)} = \frac{R_i}{E_i h_i} \left(\frac{N_\zeta^{(i)}(\alpha_m)}{R_i} - (-1)^i \left(v_i \sigma_i + \frac{a}{R_i} \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau_i d\zeta \right) \right); \quad i=1,2.$$

Підставляючи отримані вирази (2.70) в умови (2.69), з урахуванням прийнятих позначень маємо

$$\begin{aligned} & (2\nu r_i^2 + v_i \varepsilon_i) \sigma_i - 2\nu r_j^2 \sigma_j + l_i^2 (2r_i^2 + \varepsilon_i) \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau_i d\zeta - 2l_j r_j^2 \times \\ & \times \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau_j d\zeta = (-1)^j \left[\sigma_\zeta(\alpha_m) - \varepsilon_i N_\zeta^{(k)}(\alpha_m) / R_i \right], \quad i, j=1,2; \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Таким чином, отримана система чотирьох ключових рівнянь (2.68), (2.71). Права частина отриманої системи рівнянь не залежить від ζ , тобто (2.68), (2.71) – система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно чотирьох невідомих констант σ_i , $l_i \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau_i d\zeta$; $i=1,2$. Нагадаємо, що співвідношення вигляду

$$l_i \int_{\alpha_m}^{\zeta} \varphi dm = \text{const}$$

призводять до особливостей типу δ - функції у виразах для τ_i , а тому і до розриву осьових напружень σ_ζ і зусиль $N_\zeta^{(i)}$, які в даному конкретному випадку зобов'язані бути неперервними. Тому необхідно прийняти

$$l_i \int_{\alpha_m}^{\zeta} \tau_i d\zeta = 0,$$

звідки випливає

$$\tau_i(\zeta) = 0; i = 1, 2; \zeta \in (\alpha_m, 1],$$

і система рівнянь (2.68), (2.71) набуває вигляду

$$(2r_i^2 + \chi_i) \sigma_i - 2r_j^2 \sigma_j = (-1)^j \times \\ \times \left[v \sigma_\zeta(\alpha_m) - v_i \varepsilon_i N_\zeta^{(i)}(\alpha_m) / R_i \right]; i, j = 1, 2; i \neq j; \quad (2.72)$$

$$(2vr_i^2 + v_i \varepsilon_i) \sigma_i - 2vr_j^2 \sigma_j = (-1)^j \times \\ \times \left[\sigma_\zeta(\alpha_m) - \varepsilon_i N_\zeta^{(k)}(\alpha_m) / R_i \right]; i, j = 1, 2; i \neq j. \quad (2.73)$$

Знайдемо із рівняння (2.72) контактні напруження

$$\sigma_i = \frac{(-1)^i}{\chi_0} \left[v \chi_j \sigma_m(\alpha_m) - (2r_j^2 + \chi_j) v_i \varepsilon_i \frac{N_\zeta^{(i)}(\alpha_m)}{R_i} + \right. \\ \left. + 2r_j^2 v_j \varepsilon_j \frac{N_\zeta^{(j)}(\alpha_m)}{R_j} \right]; i, j = 1, 2; i \neq j, \quad (2.74)$$

і підставимо їх в рівняння (2.73), з урахуванням позначень (2.22), (2.57) отримаємо

$$\sum_{s=1}^3 d_{is} \sigma^{(s)}(\alpha_m) = 0; i = 1, 2. \quad (2.75)$$

Маємо дві умови, з яких одна ($i = k$) виконується автоматично, оскільки вона відповідає рівнянню (2.56), котре вже використане в аналізі області проковзування-зчеплення при виводі трансцендентного рівняння (2.58) для визначення невідомої α_k . Таким чином, для визначення невідомої α_m маємо одне з двох рівнянь (2.75) для $i = m$

$$\sum_{s=1}^3 d_{ms} y^{(s)}(\bar{\sigma}_m) = 0. \quad (2.76)$$

Використовуючи умови (2.24) неперервності осьових напружень в точці α_m , із виразів (2.62) отримуємо

$$y^{(s)}(\bar{\sigma}_m) = \sum_{n=1}^3 h_{sn}(\bar{\sigma}_k) e^{\lambda_n^k(\bar{\sigma}_m - \bar{\sigma}_k)}, \quad s = \overline{1,3}. \quad (2.77)$$

Підставляючи (2.77) в (2.76), маємо

$$\sum_{s=1}^3 \sum_{n=1}^3 d_{ms} h_{sn}(\bar{\sigma}_k) e^{\lambda_n^k(\alpha_m - \alpha_k)} = 0, \quad k \neq m. \quad (2.78)$$

Звідси за умови, що координата α_k уже відома (знайдена чисельно з трансцендентного рівняння (2.58)), можна вирахувати величину α_m , причому якщо варіант в зоні проковзування-зчеплення вже вибрано, тобто індекси k, m мають конкретні значення, то координата початку зони зчеплення α_m знаходиться аналітично.

Контактні нормальні напруження при відомій α_m можна отримати підстановкою осьових напружень (2.77) у формули (2.74). Маючи контактні напруження, із вихідних формул легко визначити всі характеристики напружено-деформованого стану системи в області $\zeta \in (\alpha_m, 1]$. З іншого боку, враховуючи сталість усіх напружень і деформацій в області зчеплення і беручи до уваги умову неперервності осьових напружень для цілої області контакту $\zeta \in [0, 1]$ всі компоненти напружено-деформованого стану можна отримати з формул (2.64) – (2.66), записаних для області проковзування-зчеплення, якщо

покласти в них $\zeta = \alpha_m$. Враховуючи об'ємність цих формул і очевидність результату, тут відтворювати їх не будемо.

Таким чином, в даному параграфі отримано розв'язок змішаної контактної задачі про фрикційну взаємодію коаксіальних безмоментних оболонок з деформівним заповнювачем. Визначено контактні напруження – формули (2.36), (2.54), (2.74), з використанням яких отримано основні характеристики напружено-деформованого стану системи – вирази (2.39) – (2.49), (2.62) – (2.66). Тепер, маючи ці результати, можна приступити до формулювання критерію вибору варіанта граничних умов на контактуючих поверхнях в області проковзування-зчеплення.

Як видно з отриманих результатів, контактні напруження σ_i , а, значить, і колові мембранні зусилля $N_\beta^{(i)}$ неперервні вздовж всієї області контакту. Враховуючи умови (2.23), (2.24) неперервності осьових напружень, неперервність контактних напружень і мембранних зусиль, із формул (2.10), (2.14) можна зробити висновок про неперервність осьових деформацій при $\zeta \in [0, 1]$. Конкретно для точки α_k маємо

$$\varepsilon_\zeta(\alpha_k - 0) = \varepsilon_\zeta(\alpha_k + 0); \quad \varepsilon_\zeta^{(i)}(\alpha_k - 0) = \varepsilon_\zeta^{(i)}(\alpha_k + 0).$$

Таким чином, координату точки розділу зон проковзування ($\zeta \in [0, \alpha_k)$) і проковзування-зчеплення ($\zeta \in (\alpha_k, \alpha_m)$) можна знайти з розв'язку задачі для області проковзування – формули (2.39), (2.40). Для цього достатньо прирівняти осьові деформації заповнювача (2.40) до осьових деформацій кожної оболонки окремо. Отримаємо два трансцендентних рівняння відносно $\alpha_k, k = 1, 2$, кожне з яких в силу монотонності осьових деформацій оболонок і заповнювача має єдиний, причому додатний, корінь. Ці рівняння будуть

$$\sum_n \{ [(2\nu r_1^2 + \nu_1 e_1) K_{1n} - 2\nu r_2^2 K_{2n}] e^{\lambda_n \bar{\sigma}_1} +$$

$$\left\{ \left[(2r_1^2 + e_1) f_1 l_1 K_{1n} + 2 f_2 l_2 r_2^2 K_{2n} \right] \frac{e^{\mathcal{L}_n \bar{\theta}_1} - 1}{\mathcal{L}_n} \right\} = -1; \quad (2.79)$$

$$\sum_n \left\{ \left[2 v r_1^2 K_{1n} - (2 v r_2^2 + v_2 e_2) K_{2n} \right] e^{\mathcal{L}_n \bar{\theta}_2} + \left[2 f_1 l_1 r_1^2 K_{1n} + \right. \right. \\ \left. \left. + (2 r_2^2 + e_2) f_2 l_2 K_{2n} \frac{e^{\mathcal{L}_n \bar{\theta}_2} - 1}{\mathcal{L}_n} \right] \right\} = -1. \quad (2.80)$$

У результаті розв'язування цих рівнянь отримуємо дві величини – α_1 і α_2 , причому більша з них нас не цікавить, оскільки знайдена з некоректної умови. Дійсно, якщо на одній із оболонок уже досягнута точка α_k , тобто виконано умови ідеального контакту, то координату α_m точки початку області зчеплення на другій оболонці потрібно шукати з розв'язку задачі для області проковзування-зчеплення. Беручи до уваги умови неперервності осьових деформацій

$$\varepsilon_\zeta(\alpha_m - 0) = \varepsilon_\zeta(\alpha_m + 0); \varepsilon_\zeta^{(i)}(\alpha_m - 0) = \varepsilon_\zeta^{(i)}(\alpha_m + 0),$$

підставляючи у формули (2.65), (2.66) $\zeta = \alpha_m$ і вже знайдене α_k та прирівнюючи отримані співвідношення, будемо мати трансцендентне рівняння на невідому координату α_m . Розв'язок цього рівняння при відомому номері варіанта знаходиться аналітично.

Тепер, нарешті, сформулюємо шуканий критерій. Номер варіанта (або значення індексу k) відповідає значенню індексу меншого з коренів трансцендентних рівнянь (2.79), (2.80).

Підсумовуючи викладене, зазначимо, що деяка громіздкість отриманих результатів не дає можливості явно проаналізувати вплив основних параметрів складових елементів системи на міцність і жорсткість конструкції загалом. Враховуючи необхідність застосування комп'ютера, всі формули записані в зручній для програмування формі.

Одним із головних завдань даного розділу є визначення напружено-деформованого стану системи коаксіальні оболонки – деформівний заповнювач. Ця мета, взагалі вже досягнута. Однак податливість системи доцільніше визначати з використанням більш простих формул, ніж отримані вище. Беручи також до уваги, що конструкційне розсіювання енергії присутнє лише в області проковзування складових елементів конструкції, при аналізі демпфуючої здатності системи немає сенсу розв'язувати настільки громіздку мішану задачу. Достатньо обмежитися розв'язком задачі для випадку, коли область повного проковзування збігається з областю контакту, тобто $\alpha_i \geq 1, i = 1, 2$ – зони зчеплення на обидвох контактних поверхнях не досягаються.

Тепер нагадаємо важливий висновок, зроблений в параграфі 1.1: задачу визначення міцності і податливості складної системи, до якої входять пружні оболонки і деформівний низькомодульний слабостисливий заповнювач, можна розділити на відповідне кількості частин число спрощених задач. Причому податливість системи визначається у цьому випадку як сума податливостей складових частин, а напруження в кожній частині визначаються окремо.

Використовуючи сформульований принцип, розглядувану задачу для випадку низькомодульного слабостисливого заповнювача можна розділити на дві більш прості: 1) деформівний заповнювач у жорсткій обоймі з двох коаксіальних оболонок; 2) пружні коаксіальні оболонки, розділені низькомодульним нестисливим заповнювачем. Розглянемо по черзі кожен з них.

Деформівний заповнювач у жорсткій обоймі. Вихідні співвідношення цієї задачі отримуємо, приймаючи у формулах (2.30), (2.31) $\varepsilon_i = 0$ (або $E_i \rightarrow \infty, i = 1, 2$) – умова жорсткості обойми. Після деяких перетворень знаходимо, що контактні нормальні напруження на зовнішній і внутрішній циліндричних поверхнях заповнювача рівні між собою ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$), а система ключових рівнянь (2.33) з крайовими умовами (2.34) зводиться до одного диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dm} + \frac{n}{1-n} L_3 y = 0 \quad (2.81)$$

з крайовою умовою

$$y(0) = -\frac{h}{1-h}P. \quad (2.82)$$

У рівнянні (2.81) введено позначення

$$l_3 = \frac{2a}{R_1^2 - R_2^2}(f_1R_1 + f_2R_2).$$

Розв'язок рівняння (2.81) з урахуванням крайової умови (2.82) буде

$$y = -\frac{hP}{1-h}e^{\frac{v}{1-v}\lambda_3\zeta}. \quad (2.83)$$

Дотичні контактні напруження визначимо підстановкою нормального контактного напруження (2.83) в закон Кулона (2.19)

$$\phi = (-1)^i f_i \frac{hP}{1-h} e^{\frac{v}{1-v}\lambda_3\zeta}; \quad i = 1, 2. \quad (2.84)$$

Підставляючи знайдені контактні напруження (2.83), (2.84) у вихідні модельні співвідношення (2.10), (2.25), отримуємо осьові напруження і деформації заповнювача

$$y_\zeta = -Pe^{\frac{v}{1-v}\lambda_3\zeta}; \quad (2.85)$$

$$e_\zeta = -\frac{P(1+h)(1-2h)}{E(1-h)} e^{\frac{v}{1-v}\lambda_3\zeta}.$$

Введемо позначення $\varepsilon = 1 - 2h \ll 1$ і зробимо у формулах (2.85) граничний перехід $h \rightarrow 1/2$ із збереженням члена ε , остаточно для слабостисливого заповнювача в жорсткій обоймі маємо

$$y_\zeta = -Pe^{-\lambda_3\zeta}; \quad e_\zeta = -\frac{P}{E}3\varepsilon e^{-\lambda_3\zeta}. \quad (2.86)$$

Як видно із формули (2.86), осьова деформація заповнювача тут залежить виключно від його пружних констант.

Осьове переміщення перерізів заповнювача одержимо, інтегруючи осьову деформацію із формул (2.86) таким чином:

$$u(\zeta) = -a \int_{\zeta}^1 e_{\zeta} dm = \frac{P}{E} 3ga \frac{e^{-\lambda_3 \zeta} - e^{-\lambda_3}}{l_3}. \quad (2.87)$$

Зокрема, при $\zeta = 0$ із співвідношення (2.87) отримуємо формулу для осьового переміщення (осадки) поршня, який стискає заданим тиском P деформівний заповнювач в жорсткій обоймі

$$\partial_3 = u(0) = \frac{P}{E} 3ga \frac{1 - e^{-\lambda_3}}{l_3}. \quad (2.88)$$

Пружні коаксіальні оболонки, розділені низькомодульним нестисливим заповнювачем. Вихідні співвідношення цієї задачі отримуємо, приймаючи у формулах (2.30), (2.31) $\varepsilon_i = 0$ (це означає, що модуль зсуву G заповнювача дуже малий порівнянно з модулями зсуву оболонок), а також $\nu = 0,5$ (заповнювач нестисливий). За аналогією із співвідношеннями (2.81), (2.82) отримуємо диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dm} + l_3 y = 0 \quad (2.89)$$

з крайовою умовою

$$y(0) = -P. \quad (2.90)$$

Розв'язуючи рівняння (2.89) з урахуванням умови (2.90), а також беручи до уваги закон Кулона (2.19), запишемо нормальні і дотичні контактні напруження

$$y = -P e^{-\lambda_3 \zeta}, \quad \phi = (-1)^i f_i P e^{-\lambda_3 \zeta}, \quad i = 1, 2. \quad (2.91)$$

Осьові деформації і радіальні переміщення оболонок знайдемо підстановкою розв'язку (2.91) у формули (2.26), (2.28)

$$\frac{w_i}{R_i} = -\frac{PR_i}{E_i h_i} \left((-1)^i e^{-\lambda_3 \zeta} - n_i f_i l_i \frac{1 - e^{-\lambda_3 \zeta}}{l_3} \right); \quad (2.92)$$

$$e_{\zeta}^{(i)} = \frac{PR_i}{E_i h_i} \left((-1)^i n_i e^{-\lambda_3 \zeta} - f_i l_i \frac{1 - e^{-\lambda_3 \zeta}}{\lambda_3} \right), \quad i = 1, 2. \quad (2.93)$$

Головні напруження в оболонках будемо обчислювати за формулами

$$y_1^{(i)} = \frac{N_{\beta}^{(i)}}{h_i} = (-1)^i \frac{R_i}{h_i} y;$$

$$y_2^{(i)} = \frac{N_{\zeta}^{(i)}}{h_i} = -(-1)^i \frac{a}{h_i} \int_0^{\zeta} \phi dm.$$

Підставляючи сюди контактні напруження (2.91), отримуємо

$$y_1^{(i)} = -(-1)^i P \frac{R_i}{h_i} e^{-\lambda_3 \zeta}; \quad y_2^{(i)} = -P f_i \frac{a}{h_i} \frac{1 - e^{-\lambda_3 \zeta}}{\lambda_3}. \quad (2.94)$$

Для визначення осрової деформації заповнювача використаємо рівняння нестисливості

$$e_{\zeta} = -\frac{2}{R_1^2 - R_2^2} (R_1 w_1 - R_2 w_2). \quad (2.95)$$

Підставляючи сюди радіальні переміщення із формул (2.92), маємо

$$e_{\zeta} = \frac{-2P}{R_1^2 - R_2^2} \left[\left(\frac{R_1^3}{E_1 h_1} + \frac{R_2^3}{E_2 h_2} \right) e^{-\lambda_3 \zeta} + \right.$$

$$\left. + a \left(\frac{R_1^2}{E_1 h_1} n_1 f_1 - \frac{R_2^2}{E_2 h_2} n_2 f_2 \right) \frac{1 - e^{-\lambda_3 \zeta}}{\lambda_3} \right]. \quad (2.96)$$

Як видно із рівняння (2.95), осрова деформація заповнювача тут залежить лише від прогинів оболонок. Іншими словами, оболонки, що деформуються, дозволяють деформуватися і заповнювачу.

Осьові переміщення перерізів заповнювача отримаємо, інтегруючи вираз (2.96),

$$u(\zeta) = \frac{2Pa}{R_1^2 - R_2^2} \left[\left(\frac{R_1^2}{E_1 h_1} + \frac{R_2^2}{E_2 h_2} \right) \frac{e^{-\lambda_3 m} - e^{-\lambda_3}}{\lambda_3} + \frac{a}{\lambda_3} \left(\frac{R_1^2}{E_1 h_1} h_1 f_1 - \frac{R_2^2}{E_2 h_2} h_2 f_2 \right) \left(1 - m - \frac{e^{-\lambda_3 m} - e^{-\lambda_3}}{\lambda_3} \right) \right]. \quad (2.97)$$

Зокрема, при $\zeta = 0$ із (2.97) отримуємо формулу для осадки поршня, який деформує через низькомодульний нестисливий заповнювач пружні коаксіальні оболонки,

$$\partial_0 = u(0) = \frac{2Pa}{R_1^2 - R_2^2} \left[\left(\frac{R_1^3}{E_1 h_1} + \frac{R_2^3}{E_2 h_2} \right) \frac{1 - e^{-\lambda_3}}{\lambda_3} + \frac{a}{\lambda_3} \left(\frac{R_1^2}{E_1 h_1} h_1 f_1 - \frac{R_2^2}{E_2 h_2} h_2 f_2 \right) \left(1 - \frac{1 - e^{-\lambda_3}}{\lambda_3} \right) \right]. \quad (2.98)$$

Тепер, маючи розв'язки двох формально незалежних задач, можна перейти до визначення податливості системи загалом. Запишемо повну податливість пружного елемента бурового амортизатора

$$J_k = 2 \frac{\partial + \partial_0}{Q}. \quad (2.99)$$

Підставимо у формулу (2.99) вирази для осадок (2.88), (2.98), остаточно одержуємо

$$J_k = \frac{6a}{p(R_1^2 - R_2^2)} \frac{2}{E} \frac{1 - e^{-\lambda_3}}{\lambda_3} + \frac{4a}{p(R_1^2 - R_2^2)^2} \left[\left(\frac{R_1^3}{E_1 h_1} + \frac{R_2^3}{E_2 h_2} \right) \frac{1 - e^{-\lambda_3}}{\lambda_3} + \frac{a}{\lambda_3} \left(\frac{R_1^2}{E_1 h_1} h_1 f_1 - \frac{R_2^2}{E_2 h_2} h_2 f_2 \right) \left(1 - \frac{1 - e^{-\lambda_3}}{\lambda_3} \right) \right].$$

$$+ \frac{a}{l_3} \left(\frac{R_1^2}{E_1 h_1} n_1 f_1 - \frac{R_2^2}{E_2 h_2} n_2 f_2 \right) \left(1 - \frac{1 - e^{-l_3}}{l_3} \right) \Big]. \quad (2.100)$$

Отриманий вираз доволі громіздкий, але, тим не менше, дає достатню можливість проаналізувати вплив пружних і геометричних характеристик оболонок і заповнювача на податливість системи. Слід також відзначити, що і формули (2.86) – (2.88), (2.92) – (2.94) дають достатнє уявлення про залежність напружено-деформованого стану оболонок і заповнювача від фізико-механічних параметрів системи.

Таким чином, мета даного параграфу досягнута. Отримані прості аналітичні вирази, які описують напружено-деформований стан системи коаксіальні циліндричні оболонки – деформівний заповнювач. Використаний в цьому параграфі асимптотичний спосіб дасть змогу ефективно проаналізувати конструкційне розсіяння енергії в досліджуваній системі.

2.2 Конструкційне демпфування в системі коаксіальних циліндричних оболонок, розділених заповнювачем

Розрахунок напружено-деформованого стану і податливості системи коаксіальні циліндричні оболонки – деформівний заповнювач, наведений у параграфі 2.1, пов'язаний із значними труднощами, які полягають у громіздкості як постановки, так і розв'язання задачі уже на етапі початкового (активного) навантаження. Тому розв'язок задачі для випадку низкомодульного слабостисливого заповнювача отриманий асимптотичним способом, сформульованим і вже використаним ще в параграфах 1.1, 1.3 першого розділу. Застосований вже на етапі постановки задачі цей асимптотичний спосіб виявив повну ідентичність структури ключових диференціальних рівнянь і крайових умов задачі про стиснення деформівного заповнювача в циліндричній оболонці (параграф 1.1, співвідношення (1.34), (1.35)) і задачі про стиснення низкомодульного слабостисливого заповнювача між циліндричними коаксіальними оболонками (параграф 2.1, співвідношення (2.81), (2.82) і (2.89), (2.90)). Відрізняються лише коефіцієнти диференціа-

льних рівнянь і тиски під поршнями в крайових умовах. Тепер логічно порівняти і результати розв'язання досліджуваних крайових задач. Оскільки в даному розділі нас цікавить виключно залежність осадки від зовнішнього навантаження, запишемо, користуючись формулами (2.88), (2.98), осадку системи коаксіальні оболонки – деформівний заповнювач

$$\delta_k = Q[A_1 + A_2(1 - e^{-\lambda_3})/\lambda_3]. \quad (2.101)$$

Тут введені позначення:

$$A_1 = \frac{2a^2}{p\lambda_3(R_1^2 - R_2^2)^2} \left(\frac{R_1^2 v_1 f_1}{E_1 h_1} - \frac{R_2^2 v_2 f_2}{E_2 h_2} \right);$$

$$A_2 = \frac{a}{p(R_1^2 - R_2^2)^2} \left\{ \frac{3z}{E} + \frac{2}{R_1^2 - R_2^2} \left[\frac{R_1^3}{E_1 h_1} + \frac{R_2^3}{E_2 h_2} - \frac{a}{\lambda_3} \left(\frac{R_1^2 v_1 f_1}{E_1 h_1} - \frac{R_2^2 v_2 f_2}{E_2 h_2} \right) \right] \right\}. \quad (2.102)$$

Нагадаємо, що

$$\lambda_3 = \frac{2a}{R_1^2 - R_2^2} (f_1 R_1 + f_2 R_2).$$

Тепер, порівнюючи перше із співвідношень (1.172) з виразом (2.101), приходимо до висновку про абсолютну схожість їх структури. Більш того, із виразу (2.101) для осадки δ_k , а також позначень (2.102), покладаючи в них $R_2 = 0$, можна безпосередньо отримати перший із виразів (1.172), а також позначення (1.173).

Таким чином, проведено порівняльний аналіз поведінки систем циліндрична оболонка – деформівний заповнювач і коаксіальні циліндричні оболонки – деформівний заповнювач між ними на етапі початкового навантаження. Виявлено повну якісну відповідність між постановками і розв'язками контактних задач. Подальший квазістатичний аналіз поведінки розглядуваних систем при немонотонному навантаженні підтвердив схо-

жість постановок і розв'язків мішаних контактних задач на всіх етапах навантаження і розвантаження. Діаграми навантаження в обидвох випадках описуються якісно ідентично, з точністю до сталих коефіцієнтів. Таким чином, тут немає необхідності відтворювати весь довгий процес розв'язання, детально проведеного в параграфі 1.3. Для опису діаграми деформування системи коаксіальні циліндричні оболонки – деформівний заповнювач достатньо скористатися структурою співвідношень (1.172). Запишемо шуканий результат

$$\begin{aligned} d_k^I &= Q \left[A_1 + A_2 (1 - e^{-\lambda_3}) / L_3 \right], \quad 0 \leq Q \leq Q_{\max}. \\ d_k^{II} &= \begin{cases} d_{k,\max}^I - \left[A_1 (Q_{\max} - Q) + A_2 (\sqrt{Q_{\max}} - \sqrt{Q})^2 \right] / L_3, \\ e^{-2\lambda_3} Q_{\max} \leq Q \leq Q_{\max}; \\ Q \left[A_1 + A_2 (e^{\lambda_3} - 1) / L_3 \right], \quad 0 \leq Q \leq e^{-2\lambda_3} Q_{\max}. \end{cases} \\ d_k^{III} &= \begin{cases} d_{k,\min}^{II} + A_1 (Q - Q_{\min}) + A_2 (\sqrt{Q} - \sqrt{Q_{\min}})^2 / L_3, \\ Q_{\min} \leq Q \leq \min \{ e^{2\lambda_3} Q_{\min}, Q_{\max} \}; \\ d_k^I, \quad \min \{ e^{2\lambda_3} Q_{\min}, Q_{\max} \} \leq Q \leq Q_{\max}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.103)$$

Петля конструкційного демпфування, описана співвідношеннями (2.103), має вигляд, схематично зображений на рис. 1.11.

Величину розсіяної за цикл енергії визначаємо як площу петлі конструкційного гістерезису аналогічно до співвідношень (1.174) інтегруванням виразів (2.103). Маємо

$$\Psi = \begin{cases} \frac{A_2 Q_{\max}^2}{3\lambda_3} (1-s)(1-\sqrt{s})^2, \quad e^{-2\lambda_3} \leq s \leq 1; \\ A_2 Q_{\max}^2 \left[(2 + e^{-\lambda_3})(1 - e^{-\lambda_3})^2 - \right. \\ \left. - s^2 (e^{\lambda_3} - 1)(2 + e^{\lambda_3}) \right], \quad 0 \leq s \leq e^{-2\lambda_3}. \end{cases} \quad (2.104)$$

Як уже зазначалось у попередньому розділі, отримані асимптотичним способом наближені розв'язки розглянутих задач мають ряд переваг порівняно з громіздкими так званими точними результатами. Вони записані в явному вигляді, враховують усі суттєві параметри задач, зручні в практичних розрахунках.

РОЗДІЛ 3

МОДЕЛЮВАННЯ РІВНОМІЦНОЇ ОБОЛОНКИ З ДЕФОРМІВНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ ЗА НАЯВНОСТІ СУХОГО ТЕРТЯ

Як вже було зазначено у вступі, наведені в даній роботі результати механіко-математичного моделювання і розв'язки розглядуваних задач мають безпосереднє застосування при розрахунку міцності, податливості і демпфування оболонкових пружних елементів [81]. Відомо, що підвищення ефективності роботи пружного елемента як робочого органа віброзахисної системи передбачає максимально можливе збільшення його податливості без шкоди для міцності [27, 109]. У цьому розділі розглядається один з основних способів збільшення податливості оболонкових пружних елементів, сконструйованих на базі циліндричних оболонок, – застосування рівномічної оболонки як несучого елемента.

3.1 Контактна задача про стиск деформівного заповнювача в оболонці змінної товщини

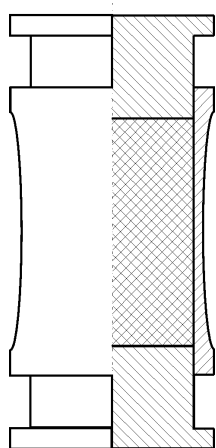


Рисунок 3.1

Нехай пружний деформівний циліндр (заповнювач) радіуса R і довжини $2a$ вміщений в оболонку змінної товщини h (рис. 3.1). Заповнювач навантажений по торцях жорсткими поршнями. Треба визначити закон зміни вздовж твірної товщини рівномічної оболонки, дослідити напружено-деформований стан і визначити податливість рівномічного пружного елемента.

Як і в попередніх розділах, враховуючи симетрію системи відносно площини, рівновіддаленої від поршнів, можна розглядати половину пружного елемента (рис. 3.2), вважаючи переріз, який належить площині симетрії, гладко

впертим в жорстку перепону. Осесиметричний напружено-деформований стан системи досліджуємо в циліндричній системі координат. З метою отримання аналітичного розв'язку сформульованої задачі дослідження проводимо на базі одновимірних моделей заповнювача і оболонки, розроблених в першому розділі.

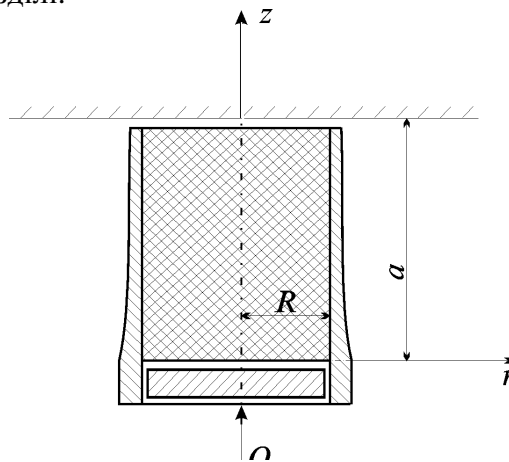


Рисунок 3.2

Вважаємо, що зона проковзування охоплює всю область контакту, тобто

$$\tau = f\sigma, \quad u > u_0, \quad \zeta \in [0, 1]. \quad (3.1)$$

Ключове рівняння розглядуваної контактної задачі відповідає отриманому в першому розділі ключовому рівнянню для зони проковзування

$$(1 - \nu + \varepsilon R/h)\sigma + (2\nu + \nu_0 \varepsilon R/h)fl \int_0^{\zeta} \sigma d\zeta = -\nu P. \quad (3.2)$$

Єдина відмінність рівняння (3.2) від рівняння (1.33) полягає у наявності двох невідомих функцій – контактної напруженості $\sigma(\zeta)$ і товщини оболонки $h(\zeta)$. Тому для замкнутості задачі потрібно приєднати до рівняння (3.2) умову рівної міцності оболонки. Використаємо для цього критерій Треска-Сен-Венана

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_T. \quad (3.3)$$

Тут σ_T – межа текучості матеріалу оболонки, σ_1, σ_2 – головні напруження в оболонці.

Для безмоментної оболонки головні напруження подаються через мембранні зусилля формулами

$$\sigma_1 = \frac{N_\beta}{h}, \quad \sigma_2 = \frac{N_\xi}{h}. \quad (3.4)$$

Підставляючи сюди вирази (1.17), (1.28) з першого розділу, одержимо зображення головних напружень через контактні напруження

$$\sigma_1 = -\frac{R}{h}\sigma, \quad \sigma_2 = \frac{a}{h_0} \int_0^\xi \tau d\zeta. \quad (3.5)$$

На підставі формул (3.5), (3.1) умова (3.3) набуде вигляду

$$\sigma + fl \int_0^\xi \sigma d\zeta + \sigma_T h / R = 0. \quad (3.6)$$

Для податливих на зсув слабостисливих заповнювачів, які переважно використовуються в оболонкових пружних елементах, справедливі такі сильні нерівності: $e \ll 1$; $1/2 - n \ll 1$. Для лінеаризації системи рівнянь (3.2), (3.6) розвинемо невідомі σ, h в ряд за малим параметром ε

$$\sigma = \sigma^{(0)} + \sigma^{(1)}\varepsilon + \dots; \quad h = h^{(0)} + h^{(1)}\varepsilon + \dots \quad (3.7)$$

В нульовому наближенні (ε^0) система рівнянь (3.2), (3.6) буде

$$\left. \begin{aligned} (1-\nu)\sigma^{(0)} + 2\nu fl \int_0^\xi \sigma^{(0)} d\zeta &= -\nu P; \\ \sigma^{(0)} fl \int_0^\xi \sigma^{(0)} d\zeta + \frac{\sigma_T h^{(0)}}{R} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Розв'язок системи (3.8) визначається формулами

$$\sigma^{(0)} = -\frac{\nu}{1-\nu} P e^{-\lambda\zeta}; \quad h^{(0)} = \frac{PR}{2\sigma_T} \left(1 + \frac{3\nu-1}{1-\nu} e^{-\lambda\zeta} \right). \quad (3.9)$$

Тут $\lambda = 2\nu fl / (1-\nu)$.

Запишемо ще інтеграл, необхідний надалі для визначення напружено-деформованого стану оболонки

$$fl \int_0^{\zeta} \sigma^{(0)} d\zeta = -\frac{P}{2} (1 - e^{-\lambda\zeta}). \quad (3.10)$$

У першому наближенні (ε^1) система вихідних рівнянь буде

$$\left. \begin{aligned} (1-\nu)\sigma^{(1)} + 2\nu fl \int_0^{\zeta} \sigma^{(1)} d\zeta + \frac{R}{h^{(0)}} \left(\sigma^{(0)} + \nu_0 fl \int_0^{\zeta} \sigma^{(0)} d\zeta \right) &= 0; \\ \sigma^{(1)} + fl \int_0^{\zeta} \sigma^{(1)} d\zeta + \sigma_T h^{(1)} / R &= 0. \end{aligned} \right\} (3.11)$$

Розв'язок системи (3.11) має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} &= -\frac{\sigma_T}{1-\nu} \left[\nu_0 (1 - e^{-\lambda\zeta}) + 2\nu \frac{1-\nu_0}{1-\nu} e^{-\lambda\zeta} \times \right. \\ &\quad \left. \times \ln \frac{3\nu-1+(1-\nu)e^{\lambda\zeta}}{2\nu} - \frac{2\nu+\nu_0(1-\nu)(e^{\lambda\zeta}-1)}{2\nu+(1-\nu)(e^{\lambda\zeta}-1)} \right]; \\ h^{(1)} &= \frac{R}{1-\nu} \left\{ \frac{3\nu-1}{2\nu} e^{-\lambda\zeta} \left[\nu_0 (e^{\lambda\zeta}-1) + 2\nu \frac{1-\nu_0}{1-\nu} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \ln \frac{3\nu-1+(1-\nu)e^{\lambda\zeta}}{2\nu} \right] - \frac{2\nu+\nu_0(1-\nu)(e^{\lambda\zeta}-1)}{2\nu+(1-\nu)(e^{\lambda\zeta}-1)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Для того, щоб оцінити величину поправки, яку вносить перше наближення $h^{(1)}$ у формулу (3.7) для товщини оболонки h , виконаємо у другому співвідношенні (3.12) граничний перехід $\nu \rightarrow 1/2$. Маємо

$$\frac{h^{(1)}}{R} = v_0(1 - e^{-\lambda_0 \zeta}) + 2(1 - v_0)e^{-\lambda_0 \zeta} \ln \frac{1 + e^{\lambda_0 \zeta}}{2} - \frac{2 - v_0 + v_0 e^{\lambda_0 \zeta}}{1 + e^{\lambda_0 \zeta}}. \quad (3.13)$$

Тут $\lambda_0 = 2fl$.

Із (3.13) отримуємо

$$\frac{h^{(1)}(0)}{R} = -2; \quad \frac{h^{(1)}(\infty)}{R} = -v_0.$$

Таким чином, врахування першого наближення $h^{(1)}$ у другій з формул (3.7) означає зменшення товщини оболонки h на величину, яка не перевищує за модулем 2ε . Відносячи цю поправку на рахунок деякого запасу міцності, для визначення змінної товщини оболонки обмежимося нульовим наближенням $h^{(0)}$. Остаточно для товщини рівномірної оболонки маємо

$$h(\zeta) = \frac{h_0}{2} \left(1 + \frac{3v - 1}{1 - v} e^{-\lambda \zeta} \right), \quad (3.14)$$

де $h_0 = Q/\pi R \sigma_T$; Q – максимальне експлуатаційне навантаження на поршень. Зазначимо, що h_0 можна інтерпретувати як товщину оболонки сталого перерізу, здатної витримати навантаження Q .

Аналіз мішаної задачі для оболонки, товщина якої визначається формулою (3.14), проведений за схемою першого розділу, засвідчив, що припущення (3.1) справедливе при виконанні нерівності

$$\frac{1}{\lambda} \ln \left[\frac{\frac{v}{v - v_0} \left(\frac{h_0(1+v)(1-2v)}{\varepsilon R} + 3 - v - 4vv_0 + 2(1 - v_0^2) \frac{\varepsilon R}{h_0} \right)}{\left(1 - v + \frac{2\varepsilon R}{h_0} \right)} \right] \geq 1.$$

Слід зауважити, що дана нерівність встановлює межі застосовності формули (3.14). Вона є доволі сильною для рівномірної оболонки, оскільки справедлива і для оболонки завтовшки $h_0/2$.

Результати аналізу першого наближення $h^{(1)}$ для товщини рівномірної оболонки дають підстави стверджувати, що і для дослідження напружено-деформованого стану оболонки достатньо нульового наближення.

Запишемо вирази для головних напружень, які виникають у рівномірній оболонці. Підставляючи нульове наближення (3.9) в співвідношення (3.5) і враховуючи формули (3.1), (3.14), маємо

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{RP}{h_0} \frac{2ve^{-\lambda\zeta}}{1-\nu+(3\nu-1)e^{-\lambda\zeta}}; \\ \sigma_2 &= -\frac{RP}{h_0} \frac{(1-\nu)(1-e^{-\lambda\zeta})}{1-\nu+(3\nu-1)e^{-\lambda\zeta}}.\end{aligned}\quad (3.15)$$

Деформації рівномірної оболонки визначаються з використанням формул (1.18), (1.19). Враховуючи співвідношення (3.4), маємо

$$\varepsilon_{\zeta 0} = \frac{1}{E_0}(\sigma_2 - \nu_0 \sigma_1), \quad \varepsilon_{\beta 0} = \frac{1}{E_0}(\sigma_1 - \nu_0 \sigma_2). \quad (3.16)$$

Підставляючи сюди формули (3.15), остаточно отримуємо

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\zeta 0} &= -\frac{PR}{E_0 h_0} \frac{1-\nu-[1-\nu(1+2\nu_0)]e^{-\lambda\zeta}}{1-\nu+(3\nu-1)e^{-\lambda\zeta}}; \\ \varepsilon_{\beta 0} &= -\frac{PR}{E_0 h_0} \frac{\nu_0(1-\nu)+[2\nu-\nu_0(1-\nu)]e^{-\lambda\zeta}}{1-\nu+(3\nu-1)e^{-\lambda\zeta}}.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Співвідношення (3.15), (3.17) визначають напружено-деформований стан рівномірної оболонки.

Тепер приступимо до визначення податливості рівномірного оболонкового пружного елемента. Особливістю розра-

хунку податливості системи з деформівним заповнювачем є необхідність урахування першого наближення, чого не було потрібно при визначенні напруженого стану рівномірної оболонки.

Запишемо формулу для осьових деформацій заповнювача. Вираз (1.29) із першого розділу з урахуванням закону сухого тертя Кулона (3.1) набуває вигляду

$$\varepsilon_{\zeta} = -\frac{1}{E} \left(P + 2fl \int_0^{\zeta} \sigma d\zeta + 2\nu\sigma \right),$$

або, беручи до уваги розклади (3.7), запишеться таким чином:

$$\varepsilon_{\zeta} = -\frac{1}{E_0 \varepsilon} \left[P + 2fl \int_0^{\zeta} (\sigma^{(0)} + \sigma^{(1)} \varepsilon) d\zeta + 2\nu(\sigma^{(0)} + \sigma^{(1)} \varepsilon) \right]. \quad (3.18)$$

Формулу (3.18), використовуючи принцип рядів (3.7), можна подати і так:

$$\varepsilon_{\zeta} = \varepsilon_{\zeta}^{(-1)} / \varepsilon + \varepsilon_{\zeta}^{(0)}, \quad (3.19)$$

де

$$\varepsilon_{\zeta}^{(-1)} = -\frac{1}{E_0} \left(P + 2fl \int_0^{\zeta} \sigma^{(0)} d\zeta + 2\nu\sigma^{(0)} \right); \quad (3.20)$$

$$\varepsilon_{\zeta}^{(0)} = -\frac{1}{E_0} \left(2fl \int_0^{\zeta} \sigma^{(1)} d\zeta + 2\nu\sigma^{(1)} \right). \quad (3.21)$$

Підставляючи перший із виразів (3.9) у формулу (3.20), маємо

$$\varepsilon_{\zeta}^{(-1)} = -\frac{P}{E_0} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} e^{-\lambda\zeta}. \quad (3.22)$$

Підстановкою першого із виразів (3.12) у співвідношення (3.21) одержимо

$$\varepsilon_{\zeta}^{(0)} = -\frac{2\sigma_{\tau}}{E_0} \frac{1}{1-\nu} \left\{ \nu \frac{2\nu + \nu_0(1-\nu)(e^{\lambda\zeta} - 1)}{2\nu + (1-\nu)(e^{\lambda\zeta} - 1)} + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\nu} \right\} \times$$

$$\times e^{-\lambda\zeta} \left[v_0 (e^{\lambda\zeta} - 1) + 2v \frac{1-v_0}{1-v} \ln \frac{3v-1+(1-v)e^{\lambda\zeta}}{2v} \right] \}. \quad (3.23)$$

Введемо необхідні позначення

$$\omega = \frac{1-2v}{\varepsilon}, \quad \omega_0 = \frac{\omega h_0}{R}. \quad (3.24)$$

Тепер підставимо вирази (3.22), (3.23) у співвідношення (3.19) і проведемо граничний перехід $v \rightarrow 1/2$, $\varepsilon \rightarrow 0$ із збереженням нерегулярної величини $\omega \sim 1$. Враховуючи, що $\sigma_\tau = PR/h_0$, отримуємо

$$\varepsilon_\zeta = -\frac{PR}{E_0 h_0} \left(3\omega_0 e^{-\lambda_0 \zeta} + 2 \frac{2-v_0+v_0 e^{\lambda_0 \zeta}}{1+e^{\lambda_0 \zeta}} \right). \quad (3.25)$$

За означенням переміщення поршня визначається формулою

$$\delta_p = -a \int_0^1 \varepsilon_\zeta d\zeta. \quad (3.26)$$

Підставляючи сюди вираз (3.25) та інтегруючи, маємо

$$\delta_p = \frac{PR^2}{E_0 h_0} \left(2v_0 l + 2 \frac{v_0-1}{f} \ln \frac{1+e^{-\lambda_0}}{2} + 3\omega_0 \frac{1-e^{-\lambda_0}}{2f} \right). \quad (3.27)$$

Податливість усієї системи визначимо підстановкою виразу (3.24) у формулу (1.70)

$$A_p = \frac{2l}{\pi E_0 h_0} \left(2v_0 + 4 \frac{v_0-1}{\lambda_0} \ln \frac{1+e^{-\lambda_0}}{2} + 3\omega_0 \frac{1-e^{-\lambda_0}}{\lambda_0} \right). \quad (3.28)$$

Отож, мета даного параграфа досягнута: визначено закон зміни вздовж твірної товщини рівномірної оболонки – формула (3.14); досліджено напружено-деформований стан рівномірної оболонки – співвідношення (3.15), (3.17); визначено податливість рівномірного пружного елемента – вираз (3.28). Залишилось оцінити переваги застосування рівномірної обо-

лонки порівняно із звичайною циліндричною оболонкою сталої товщини. Згадаємо формулу (1.71) із першого розділу для податливості системи з оболонкою сталої товщини і запишемо її з урахуванням позначень, прийнятих у цьому розділі

$$\Lambda_p = \frac{2l}{\pi E_0 h_0} \left(\nu_0 + (2 - \nu_0 + 3\omega_0) \frac{1 - e^{-\lambda_0}}{\lambda_0} \right). \quad (3.29)$$

Значимо, що усі параметри оболонки сталої товщини $h_0 = \text{const}$ ідентичні з параметрами рівномірної оболонки. Однакова також і несуча здатність порівнюваних оболонок.

Оцінимо також зниження матеріаломісткості пружного елемента внаслідок застосування рівномірної оболонки. Об'єм рівномірної оболонки визначається формулою

$$V_p = 2\pi R^2 h_0 l \left(1 + \frac{1 - e^{-\lambda_0}}{\lambda_0} \right). \quad (3.30)$$

Об'єм циліндричної оболонки сталої товщини h_0 буде:

$$V_{\Pi} = 4\pi R^2 h_0 l. \quad (3.31)$$

На рис. 3.3 наведені графіки, які характеризують вигреш у податливості і зниження матеріаломісткості від використання рівномірної оболонки у пружному елементі порівняно з пружним елементом тієї ж несучої здатності, спроектованим на базі циліндричної оболонки сталої товщини. Залежності $\Lambda_p / \Lambda_{\Pi}$ від параметра λ_0 побудовані при $\nu_0 = 0,3$ для різних значень приведеної податливості заповнювача ω_0 . Крива, що відповідає нульовому значенню величини ω_0 , характеризує чистий вигреш у податливості від застосування рівномірної оболонки. Зауважимо, що з ростом параметра ω_0 вигреш в податливості від застосування рівномірної оболонки зменшується. На нижньому графіку показана крива, яка характеризує зниження матеріаломісткості пружного елемента, одержане від застосування рівномірної оболонки.

Як видно із наведених на рис. 3.3 залежностей, при збільшенні параметра λ_0 вигреш в податливості системи, а та-

кож вигреш від зниження матеріаломісткості збільшується. При зміні параметра λ_0 в межах від 1 до 4 вигреш в податливості становить від 21 до 47%, а зниження матеріаломісткості – від 18 до 37%.

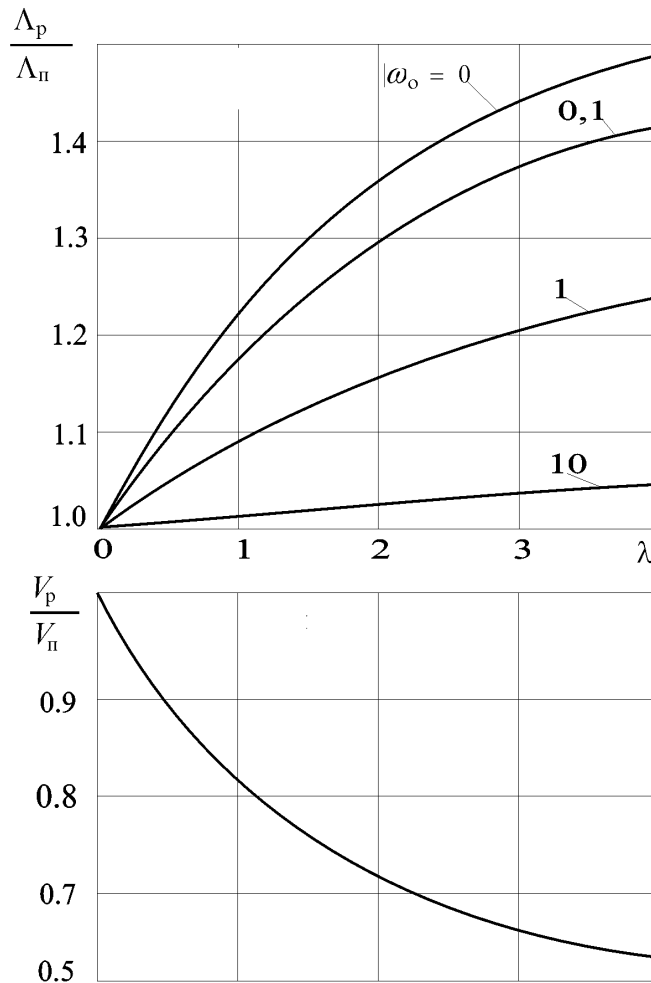


Рисунок 3.3 – Вигреш в податливості і зниження матеріаломісткості від використання рівномірної оболонки

3.2 Конструкційне демпфування у рівномічній оболонці з деформівним заповнювачем

Метою даного параграфу є дослідження поведінки показаної на рис. 3.2 системи деформівний заповнювач – рівномічна оболонка при немонотонному навантаженні і побудова діаграми деформування (Q, δ) (петлі конструкційного демпфування).

Повна система співвідношень змішаної контактної задачі включає формули (1.12) – (1.22), вираз (3.14), за яким визначається товщина рівномічної оболонки, а також закон сухого тертя (1.96), (1.97). Бачимо майже повну (за винятком виразу (3.14)) аналогію з вихідними співвідношеннями із параграфу 1.3. Підтверджуючи справедливість наведених в параграфі 1.3 міркувань і для розглядуваної мішаної задачі, приступимо до одержання розв'язків для кожного етапу навантаження окремо. Беручи до уваги, що методика побудови петлі конструкційного гістерезису детально викладена в параграфі 1.3, тут не будемо зупинятися на тонкощах її застосування. Замість цього спробуємо акцентувати на особливостях досліджуваної задачі.

Початкове (активне) навантаження

$$0 \leq Q \leq Q_{\max}, \quad \dot{Q} > 0, \quad \partial[u]/\partial Q > 0.$$

Розв'язок задачі для даного етапу навантаження отримано в параграфі 3.1. Запишемо потрібні в подальшому вирази. Осьові мембранні зусилля в оболонці знаходимо підстановкою контактного напруження (3.9) (нульове наближення) в формулу (1.40)

$$\frac{N_{\xi}}{R} = -P \frac{1 - e^{-\lambda_{\xi}}}{2}. \quad (3.32)$$

Вираз для осьових напружень в заповнювачі запишемо з урахуванням першого наближення. Підставимо контактні напруження (3.9), (3.12) в розклад (3.7), а відтак у формулу (1.39), маємо

$$\sigma_{\zeta} = -Pe^{-\lambda\zeta} \left\{ 1 + \varepsilon_0 \left[\frac{v_0}{v} (e^{\lambda\zeta} - 1) + 2 \frac{1-v_0}{1-v} \ln \frac{3v-1+(1-v)e^{\lambda\zeta}}{2v} \right] \right\}. \quad (3.33)$$

Осьову деформацію оболонки одержимо із формули (3.17) виконанням в ній граничного переходу $v \rightarrow 1/2$

$$\varepsilon_{\zeta_0} = -\frac{PR}{E_0 h_0} \frac{1 + (2v_0 - 1)e^{-\lambda_0\zeta}}{1 - e^{-\lambda_0\zeta}}. \quad (3.34)$$

Осьова деформація заповнювача визначаються співвідношенням (3.25). Із виразів (3.34), (3.25) одержуємо розрив деформації

$$[\varepsilon_{\zeta}] = -\frac{PR}{E_0 h_0} \left[3\omega_0 e^{-\lambda_0\zeta} + \frac{2v_0 - 1 + (5 - 4v_0)e^{-\lambda_0\zeta}}{1 + e^{-\lambda_0\zeta}} \right]. \quad (3.35)$$

Осадка поршня вираховується за формулою (3.27). Запишемо її таким чином:

$$\delta = QK \left(2v_0 + 3\omega_0 \frac{1 - e^{-\lambda_0}}{\lambda_0} - 4 \frac{1 - v_0}{\lambda_0} \ln \frac{1 + e^{-\lambda_0}}{2} \right) \quad (3.36)$$

Тут введено позначення

$$K = \frac{l}{\pi E_0 h_0}.$$

Співвідношення (3.36) описує лінійну ділянку петлі конструкційного гістерезису, яка відповідає початковому навантаженню.

Розвантаження

$$Q_{\max} \geq Q \geq 0, \quad \dot{Q} < 0.$$

Запишемо ключове рівняння і одержимо розв'язок задачі в кожній із двох областей, де дотичні контактні напруження мають протилежні знаки.

Область $\zeta \in [0, \alpha)$. Тут закон сухого тертя має вигляд (1.109), а ключове рівняння контактної задачі буде

$$(1 - \nu + \varepsilon R/h)\sigma - (2\nu + \nu_0 \varepsilon R/h)fl \int_0^{\zeta} \sigma d\zeta = -\nu P. \quad (3.37)$$

У нульовому наближенні (ε^0) рівняння (3.37) набуває вигляду

$$(1 - \nu)\sigma^{(0)} - 2\nu fl \int_0^{\zeta} \sigma^{(0)} d\zeta = -\nu P. \quad (3.38)$$

Його розв'язок

$$\sigma^{(0)} = -\frac{\nu P}{1 - \nu} e^{\lambda \zeta}. \quad (3.39)$$

Запишемо перше наближення (ε^1) рівняння (3.37)

$$(1 - \nu)\sigma^{(1)} - 2\nu fl \int_0^{\zeta} \sigma^{(1)} d\zeta = -\frac{1}{h} \left[\sigma^{(0)} - \nu_0 fl \int_0^{\zeta} \sigma^{(0)} d\zeta \right]. \quad (3.40)$$

Підставляючи у праву частину рівняння (3.40) вирази (3.14), (3.39) і розв'язуючи, одержуємо перше наближення для контактного напруження

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} = P \frac{R}{h_0} e^{\lambda \zeta} & \left\{ \frac{\nu_0}{3\nu - 1} \lambda \zeta + \left[\frac{2\nu - \nu_0(1 - \nu)}{(1 - \nu)^2} - \frac{\nu_0}{3\nu - 1} \right] \times \right. \\ & \left. \times \ln \frac{3\nu - 1 + (1 - \nu)e^{\lambda \zeta}}{2\nu} + \frac{[2\nu - \nu_0(1 - \nu)] e^{\lambda \zeta} + \nu_0(1 - \nu)}{(1 - \nu)[3\nu - 1 + (1 - \nu)e^{\lambda \zeta}]} \right\}. \quad (3.41) \end{aligned}$$

Осьові напруження в заповнювачі і мембранні зусилля в оболонці знаходимо, підставляючи вирази (3.39), (3.41) у формулу (3.7), а відтак у модельні співвідношення (1.3), (1.40)

(для осьового мембранного зусилля обмежимося нульовим наближенням)

$$\frac{N_{\zeta}}{R} = -P \frac{1 - e^{\lambda \zeta}}{2};$$

$$\sigma_{\zeta} = -P e^{\lambda \zeta} \left[1 - \varepsilon_0 \left(\frac{\nu_0}{3\nu - 1} \zeta + \left[\frac{2\nu - \nu_0 [1 - \nu]}{(1 - \nu)^2} - \frac{\nu_0}{3\nu - 1} \right] \frac{1}{\lambda} \ln \frac{3\nu - 1 + (1 - \nu) e^{\lambda \zeta}}{2\nu} \right) \right]. \quad (3.42)$$

Осьові деформації оболонки одержимо, використовуючи модельні співвідношення (1.31) з урахуванням закону тертя (1.109) (нагадаємо, що для оболонки достатньо нульового наближення)

$$\varepsilon_{\zeta 0} = \frac{R}{E_0 h} \left[\nu_0 \sigma^{(0)} - fl \int_0^{\zeta} \sigma^{(0)} d\zeta \right].$$

Підставляючи сюди вирази (3.14), (3.39), при $\nu \rightarrow 1/2$ маємо

$$\varepsilon_{\zeta 0} = -\frac{PR}{E_0 h_0} \frac{1 + (2\nu_0 - 1)e^{\lambda_0 \zeta}}{1 + e^{-\lambda_0 \zeta}}. \quad (3.43)$$

Приступимо до визначення осьових деформацій заповнювача. Використовуючи модельне співвідношення (1.29), закон тертя (1.109), вирази (3.7), за аналогією з формулами (3.20), (3.21) запишемо

$$\varepsilon_{\zeta}^{(-1)} = -\frac{1}{E_0} \left[P - 2fl \int_0^{\zeta} \sigma^{(0)} d\zeta + 2\nu \sigma^{(0)} \right], \quad (3.44)$$

$$\varepsilon_{\zeta}^{(0)} = -\frac{1}{E_0} \left[-2fl \int_0^{\zeta} \sigma^{(1)} d\zeta + 2\nu \sigma^{(1)} \right]. \quad (3.45)$$

Підставляючи вирази (3.39), (3.41) в формули (3.44), (3.45) відповідно, одержуємо

$$\varepsilon_{\zeta}^{(-1)} = -\frac{P}{E_0} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} e^{\lambda_{\zeta}}; \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\zeta}^{(0)} = \frac{PR}{E_0 h_0} e^{\lambda_{\zeta}} & \left\{ -\frac{2\nu}{1-\nu} \frac{[2\nu - \nu_0(1-\nu)] e^{\lambda_{\zeta}} + \nu_0(1-\nu)}{(1-\nu)e^{\lambda_{\zeta}} + 3\nu - 1} + \right. \\ & + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\nu} \left[\frac{\nu_0}{3\nu-1} \lambda_{\zeta} + \left(\frac{2\nu - \nu_0(1-\nu)}{(1-\nu)^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\nu_0}{3\nu-1} \right) \ln \frac{3\nu-1 + (1-\nu)e^{\lambda_{\zeta}}}{2\nu} \right] \left. \right\}. \quad (3.47) \end{aligned}$$

Підставимо формули (3.46), (3.47) у співвідношення (3.19) і виконаємо граничний перехід $\varepsilon \rightarrow 0$, $\nu \rightarrow 1/2$. З урахуванням виразів (3.24) маємо

$$\varepsilon_{\zeta} = -\frac{PR}{E_0 h_0} \left[3\omega_0 e^{\lambda_0 \zeta} + 2 \frac{\nu_0 + (2-\nu_0)e^{\lambda_0 \zeta}}{1+e^{-\lambda_0 \zeta}} \right]. \quad (3.48)$$

Із формул (3.43) і (3.48) одержуємо розрив деформацій

$$[\varepsilon_{\zeta}] = -\frac{PR}{E_0 h_0} \left[3\omega_0 e^{\lambda_0 \zeta} + \frac{2\nu_0 - 1 + (5-4\nu_0)e^{\lambda_0 \zeta}}{1+e^{-\lambda_0 \zeta}} \right]. \quad (3.49)$$

Область $\zeta \in (\alpha, 1]$. Тут закон сухого тертя має вигляд (1.116), а ключове рівняння контактної задачі одержимо за допомогою модельних співвідношень (1.46), (1.47), умови одностороннього контакту (1.22), а також формули (1.116)

$$\begin{aligned} (1-\nu + \varepsilon R h^{-1}) \sigma + (2\nu + \nu_0 \varepsilon R h^{-1}) f l \int_{\alpha}^{\zeta} \sigma d\zeta = \\ = \nu \sigma_{\zeta}(\alpha) - \nu_0 \varepsilon h^{-1} N_{\zeta}(\alpha). \quad (3.50) \end{aligned}$$

У нульовому наближенні (ε^0) рівняння (3.50) буде

$$(1-\nu)\sigma^{(0)} + 2\nu fl \int_{\alpha}^{\zeta} \sigma^{(0)} d\zeta = \nu \sigma_{\zeta}^{(0)}(\alpha). \quad (3.51)$$

Його розв'язок

$$\sigma^{(0)} = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{\zeta}^{(0)}(\alpha) e^{-\lambda(\zeta-\alpha)}.$$

Враховуючи умови неперервності осьових напружень (1.98), а також другий із виразів (3.42), остаточно для нульового наближення контактного напруження маємо

$$\sigma^{(0)} = -\frac{\nu P}{1-\nu} e^{-\lambda(\zeta-2\alpha)}. \quad (3.52)$$

Перше наближення рівняння (3.50) має вигляд

$$(1-\nu)\sigma^{(1)} + 2\nu fl \int_{\alpha}^{\zeta} \sigma^{(1)} d\zeta + \frac{1}{h} \left[\sigma^{(0)} + \nu_0 fl \int_{\alpha}^{\zeta} \sigma^{(0)} d\zeta + \nu_0 N_{\zeta}^{(0)}(\alpha)/R \right] = \nu \sigma_{\zeta}^{(1)}(\alpha). \quad (3.53)$$

Підставляючи сюди відомі величини із формул (3.14), (3.42), (3.52) і розв'язуючи отримане рівняння, знаходимо

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} = & -\frac{PR}{h_0} \left\{ \frac{\nu}{1-\nu} e^{-\lambda(\zeta-2\alpha)} [2\nu_0 (e^{-\lambda\alpha} - 1) + \right. \\ & \left. + 4(1-\nu_0) \ln \frac{1+e^{-\lambda\alpha}}{2}] - \frac{\nu_0(1-\nu) + [2\nu - \nu_0(1-\nu)] e^{-\lambda(\zeta-2\alpha)}}{(1-\nu)[1-\nu + (3\nu-1)e^{-\lambda\zeta}]} + \right. \\ & \left. + e^{-\lambda\zeta} \left[\frac{\nu_0}{1-\nu} (e^{\lambda\zeta} - e^{\lambda\alpha}) + \frac{[2\nu - \nu_0(1-\nu)] e^{2\lambda\alpha} - \nu_0(3\nu-1)}{(1-\nu)^2} \right] \right\} \times \end{aligned}$$

$$\times \ln \frac{3\nu - 1 + (1 - \nu)e^{\lambda\zeta}}{3\nu - 1 + (1 - \nu)e^{\lambda\alpha}} \Bigg\}. \quad (3.54)$$

Осьові деформації оболонки (нульове наближення) знаходимо, використовуючи модельне співвідношення (1.45) з урахуванням закону тертя (1.116)

$$\varepsilon_{\zeta 0} = \frac{R}{E_0 h_0} \left[\frac{N_{\zeta}^{(0)}(\alpha)}{R} + fl \int_0^{\zeta} \sigma^{(0)} d\zeta + \nu_0 \sigma^{(0)} \right].$$

Підставляючи сюди вирази (3.14), (3.52), при $\nu \rightarrow 1/2$ маємо

$$\varepsilon_{\zeta 0} = -\frac{PR}{E_0 h_0} \frac{1 + (2\nu_0 - 1)e^{-\lambda_0(\zeta - 2\alpha)}}{1 + e^{-\lambda_0\zeta}}. \quad (3.55)$$

Осьові деформації заповнювача знаходимо, використовуючи модельне співвідношення (1.44), закон тертя (1.116) та вирази (3.7). За аналогією з формулами (3.44), (3.45) запишемо

$$\varepsilon_{\zeta}^{(-1)} = -\frac{1}{E_0} \left[2fl \int_0^{\zeta} \sigma^{(0)} d\zeta + 2\nu \sigma^{(0)} - \sigma_{\zeta}^{(0)}(\alpha) \right], \quad (3.56)$$

$$\varepsilon_{\zeta}^{(0)} = -\frac{1}{E_0} \left[2fl \int_0^{\zeta} \sigma^{(1)} d\zeta + 2\nu \sigma^{(1)} - \sigma_{\zeta}^{(1)}(\alpha) \right]. \quad (3.57)$$

Підставимо вирази (3.52), (3.54) у формули (3.56), (3.57) відповідно. Враховуючи умову неперервності осьових напружень (1.98) і другий із виразів (3.42), підставимо знайдені співвідношення у формулу (3.19) і проведемо граничний перехід $\varepsilon \rightarrow 0$, $\nu \rightarrow 1/2$, з урахуванням виразів (3.24) маємо

$$\varepsilon_{\zeta} = -\frac{PR}{E_0 h_0} \left[3\omega_0 e^{-\lambda_0(\zeta - 2\alpha)} + 2 \frac{\nu_0 + (2 - \nu_0)e^{-\lambda_0(\zeta - 2\alpha)}}{1 + e^{-\lambda_0\zeta}} \right]. \quad (3.58)$$

Із (3.55) і (3.58) одержуємо розрив деформацій

$$[\varepsilon_\zeta] = -\frac{PR}{E_0 h_0} \left[3\omega_0 e^{-\lambda_0(\zeta-2\alpha)} + \frac{2\nu_0 - 1 + (5-4\nu_0) e^{-\lambda_0(\zeta-2\alpha)}}{1 + e^{-\lambda_0\zeta}} \right]. \quad (3.59)$$

Визначимо приріст розриву деформацій при переході від початкового навантаження до розвантаження.

$$\zeta \in [0, \alpha];$$

із формули (3.35) при $Q = Q_{\max}$ і виразу (3.49) маємо

$$[\varepsilon_\zeta](Q) - [\varepsilon_\zeta](Q_{\max}) = -\frac{R}{E_0 h_0} \left[3\omega_0 (P e^{\lambda_0\zeta} - P_{\max} e^{\lambda_0\zeta}) + \frac{2\nu_0 - 1 + (5-4\nu_0) e^{\lambda_0\zeta}}{1 + e^{-\lambda_0\zeta}} P - \frac{2\nu_0 - 1 + (5-4\nu_0) e^{-\lambda_0\zeta}}{1 + e^{-\lambda_0\zeta}} P_{\max} \right]. \quad (3.60)$$

$$\zeta \in (\alpha, 1];$$

із формули (3.35) при $Q = Q_{\max}$ і виразу (3.59) маємо

$$[\varepsilon_\zeta](Q) - [\varepsilon_\zeta](Q_{\max}) = -\frac{R}{E_0 h_0} \left[3\omega_0 (P e^{-\lambda_0(\zeta-2\alpha)} - P_{\max} e^{-\lambda_0\zeta}) + \frac{2\nu_0 - 1 + (5-4\nu_0) e^{-\lambda_0(\zeta-2\alpha)}}{1 + e^{-\lambda_0\zeta}} P - \frac{2\nu_0 - 1 + (5-4\nu_0) e^{-\lambda_0\zeta}}{1 + e^{-\lambda_0\zeta}} P_{\max} \right]. \quad (3.61)$$

Інтегруючи співвідношення (3.60), (3.61) з урахуванням формули (1.124), одержуємо приріст стрибка переміщень

$$\zeta \in [0, \alpha) :$$

$$[u](Q) - [u](Q_{\max}) = \frac{aR}{E_0 h_0 \lambda_0} \left\{ P \left[3\omega_0 (e^{\lambda_0\alpha} - e^{\lambda_0\zeta} - e^{\lambda_0} + e^{-\lambda_0\alpha}) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (2\nu_0 - 1) \ln \frac{1+e^{\lambda_0}}{1+e^{\lambda_0\zeta}} + (5-4\nu_0) \left(e^{\lambda_0\alpha} - e^{\lambda_0\zeta} - \ln \frac{1+e^{\lambda_0\alpha}}{1+e^{\lambda_0\zeta}} - \right. \\
& \quad \left. - e^{2\lambda_0\alpha} \ln \frac{1+e^{-\lambda_0}}{1+e^{-\lambda_0\alpha}} \right) - P_{\max} \left[-3\omega_0 (e^{-\lambda_0} - e^{-\lambda_0\zeta}) + \right. \\
& \quad \left. + (2\nu_0 - 1) \ln \frac{1+e^{\lambda_0}}{1+e^{\lambda_0\zeta}} - (5-4\nu_0) \ln \frac{1+e^{-\lambda_0}}{1+e^{-\lambda_0\zeta}} \right] \Bigg\}; \quad (3.62)
\end{aligned}$$

$\zeta \in (\alpha, 1]$:

$$\begin{aligned}
[u](Q) - [u](Q_{\max}) &= \frac{aR}{E_0 h_0 \lambda_0} \left\{ P \left[-3\omega_0 (e^{-\lambda_0} - e^{-\lambda_0\zeta}) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (2\nu_0 - 1) \ln \frac{1+e^{\lambda_0}}{1+e^{\lambda_0\zeta}} - (5-4\nu_0) e^{2\lambda_0\alpha} \ln \frac{1+e^{-\lambda_0}}{1+e^{-\lambda_0\zeta}} \right] - \right. \\
& \quad \left. - P_{\max} \left[3\omega_0 (e^{-\lambda_0} - e^{-\lambda_0\zeta}) + (2\nu_0 - 1) \ln \frac{1+e^{\lambda_0}}{1+e^{\lambda_0\zeta}} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (5-4\nu_0) \ln \frac{1+e^{-\lambda_0}}{1+e^{-\lambda_0\zeta}} \right] \right\}. \quad (3.63)
\end{aligned}$$

Для визначення координати α точки розмежування областей з протилежними знаками швидкостей взаємного проковзування скористаємося умовою (1.127), а також будь-яким із співвідношень (3.62), (3.63). В результаті одержуємо рівняння, яке пов'язує координату α і зовнішнє навантаження Q

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{K_1(\alpha) + K_0(\alpha)}{K_1(\alpha)e^{2\lambda_0\alpha} + K_0(\alpha)}. \quad (3.64)$$

У формулі (3.64) введені функції однієї змінної

$$K_0(x) = (2\nu_0 - 1) \ln \frac{1+e^{\lambda_0}}{1+e^{\lambda_0 x}};$$

$$K_1(x) = -3\omega_0(e^{-\lambda_0} - e^{-\lambda_0 x}) - (5 - 4\nu_0) \ln \frac{1 + e^{-\lambda_0}}{1 + e^{-\lambda_0 x}}. \quad (3.65)$$

Беручи до уваги, що $0 \leq \alpha \leq 1$, запишемо цю умову не-одностороннього проковзування таким чином:

$$s_* Q_{\max} \leq Q \leq Q_{\max}, \quad (3.66)$$

де

$$s_* = \frac{e^{-\lambda_0} - \chi}{e^{\lambda_0} - \chi}; \quad \chi = \frac{1 - 2\nu_0}{3\omega_0(1 + e^{-\lambda_0}) + 5 - 4\nu_0}. \quad (3.67)$$

Осадку поршня визначимо, інтегруючи осьові деформації заповнювача (3.48), (3.58)

$$\delta = Q K m_1(\alpha). \quad (3.68)$$

Тут введена функція однієї змінної

$$m_1(x) = \frac{1}{\lambda_0} \left\{ 3\omega_0 [2e^{\lambda_0 x} - 1 - e^{-\lambda_0(1-2x)}] + 2 \left[\nu_0 \ln \frac{1 + e^{\lambda_0 x}}{2} + (2 - \nu_0) \left(e^{\lambda_0 x} - 1 - \ln \frac{1 + e^{\lambda_0 x}}{2} - e^{2\lambda_0 x} \ln \frac{1 + e^{-\lambda_0}}{1 + e^{-\lambda_0 x}} \right) \right] \right\}. \quad (3.69)$$

Співвідношення (3.64), (3.68) у параметричній формі описують нелінійну ділянку петлі конструкційного демпфування, яка відповідає розвантаженню в умовах неодностороннього проковзування.

Коли навантаження Q зменшиться до величини $s_* Q_{\max}$, на всій поверхні контакту будуть виконуватися умови одностороннього проковзування. У цьому випадку справедливі формули (3.37), (3.49), умова монотонності для одностороннього проковзування має вигляд

$$0 \leq Q \leq s_* Q_{\max}, \quad (3.70)$$

а переміщення поршня знаходиться інтегруванням осьової деформації (3.48)

$$\delta = QK \left[(4 - 2\nu_0 + 3\omega_0) \frac{e^{\lambda_0} - 1}{\lambda_0} - 4 \frac{1 - \nu_0}{\lambda_0} \ln \frac{1 + e^{\lambda_0}}{2} \right]. \quad (3.71)$$

Співвідношення (3.71) описує лінійну ділянку петлі конструкційного демпфування, яка відповідає розвантаженню в умовах одностороннього проковзування.

Повторне навантаження

$$Q_{\min} \leq Q \leq Q_{\max}, \quad \dot{Q} > 0.$$

Варіант $0 \leq s \leq s_*$.

Область $\zeta \in [0, \beta)$. Тут закон сухого тертя має вигляд (1.116), а осьові напруження, мембранні зусилля і деформації подаються формулами (3.32) – (3.35).

Область $\zeta \in (\beta, 1]$. Тут закон сухого тертя має вигляд (1.109), а ключове рівняння контактної задачі одержимо за допомогою модельних співвідношень (1.46), (1.47), умови одностороннього контакту (1.22) і згаданого закону тертя (1.109)

$$\begin{aligned} (1 - \nu + \varepsilon R h^{-1}) \sigma - (2\nu + \nu_0 \varepsilon R h^{-1}) f l \int_{\beta}^{\zeta} \sigma d\zeta = \\ = \nu \sigma_{\zeta}(\beta) - \nu_0 \varepsilon h^{-1} N_{\zeta}(\beta). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Процес розв'язання даного рівняння аналогічний до процесу розв'язання ідентичного за структурою рівняння (3.50). Уникаючи повторення громіздких проміжних викладок, запишемо відразу осьові деформації оболонки і заповнювача:

$$\varepsilon_{\zeta_0} = - \frac{PR}{E_0 h_0} \frac{1 + (2\nu_0 - 1) e^{\lambda_0(\zeta - 2\beta)}}{1 + e^{-\lambda_0 \zeta}}; \quad (3.73)$$

$$\varepsilon_{\zeta} = - \frac{PR}{E_0 h_0} \left[3\omega_0 e^{\lambda_0(\zeta - 2\beta)} + 2 \frac{\nu_0 + (2 - \nu_0) e^{\lambda_0(\zeta - 2\beta)}}{1 + e^{-\lambda_0 \zeta}} \right]. \quad (3.74)$$

Розрив деформацій

$$\begin{aligned} [\varepsilon_\zeta] = & -\frac{PR}{E_0 h_0} \left[3\omega_0 e^{\lambda_0(\zeta-2\beta)} + \right. \\ & \left. + \frac{2\nu_0 - 1 + (5 - 4\nu_0) e^{\lambda_0(\zeta-2\beta)}}{1 + e^{-\lambda_0\zeta}} \right]. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Відзначимо ідентичність структури формул (3.59) і (3.75).

Визначимо приріст стрибка деформацій при переході від розвантаження до повторного навантаження (варіант $0 \leq s \leq s_*$):

$$\zeta \in [0, \beta);$$

із формули (3.35) і співвідношення (3.49) при $Q = Q_{\min}$ маємо

$$\begin{aligned} [\varepsilon_\zeta](Q) - [\varepsilon_\zeta](Q_{\min}) = & -\frac{R}{E_0 h_0} \left[3\omega_0 (P e^{-\lambda_0\zeta} - P_{\min} e^{\lambda_0\zeta}) + \right. \\ & \left. + \frac{2\nu_0 - 1 + (5 - 4\nu_0) e^{-\lambda_0\zeta}}{1 + e^{-\lambda_0\zeta}} P - \frac{2\nu_0 - 1 + (5 - 4\nu_0) e^{\lambda_0\zeta}}{1 + e^{-\lambda_0\zeta}} P_{\min} \right]; \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\zeta \in (\beta, 1];$$

із формули (3.75) і співвідношення (3.49) при $Q = Q_{\min}$ маємо:

$$\begin{aligned} [\varepsilon_\zeta](Q) - [\varepsilon_\zeta](Q_{\min}) = & -\frac{R}{E_0 h_0} \left\{ 3\omega_0 [P e^{\lambda_0(\zeta-2\beta)} - P_{\min} e^{\lambda_0\zeta}] + \right. \\ & \left. + \frac{2\nu_0 - 1 + (5 - 4\nu_0) e^{\lambda_0(\zeta-2\beta)}}{1 + e^{-\lambda_0\zeta}} P - \frac{2\nu_0 - 1 + (5 - 4\nu_0) e^{\lambda_0\zeta}}{1 + e^{-\lambda_0\zeta}} P_{\min} \right\}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Інтегруючи співвідношення (3.76), (3.77), одержуємо приріст стрибка переміщень

$$\zeta \in [0, \beta);$$

$$[u](Q) - [u](Q_{\min}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{aR}{E_0 h_0 \lambda_0} \left\{ P \left[3\omega_0 \left(-2e^{-\lambda_0 \beta} + e^{-\lambda_0 \zeta} + e^{\lambda_0(1-2\beta)} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (2\nu_0 - 1) \ln \frac{1+e^{\lambda_0}}{1+e^{\lambda_0 m}} - (5-4\nu_0) \left(\ln \frac{1+e^{-\lambda_0 \beta}}{1+e^{-\lambda_0 m}} + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \left(\ln \frac{1+e^{\lambda_0}}{1+e^{\lambda_0 \beta}} + e^{\lambda_0 \beta} - e^{\lambda_0} \right) e^{-2\lambda_0 \beta} \right] - P_{\min} \left[3\omega_0 \left(e^{\lambda_0} - e^{\lambda_0 \zeta} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (2\nu_0 - 1) \ln \frac{1+e^{\lambda_0}}{1+e^{\lambda_0 \zeta}} + (5-4\nu_0) \left(e^{\lambda_0} - e^{\lambda_0 \zeta} - \ln \frac{1+e^{\lambda_0}}{1+e^{\lambda_0 \zeta}} \right) \right] \right\}; \quad (3.78) \\
&\zeta \in (\beta, 1];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[u](Q) - [u](Q_{\min}) &= \frac{aR}{E_0 h_0 \lambda_0} \left\{ P \left[3\omega_0 e^{-2\lambda_0 \beta} \left(e^{\lambda_0} - e^{\lambda_0 \zeta} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (2\nu_0 - 1) \ln \frac{1+e^{\lambda_0}}{1+e^{\lambda_0 \zeta}} + (5-4\nu_0) e^{-2\lambda_0 \beta} \left(e^{\lambda_0} - e^{\lambda_0 \zeta} - \ln \frac{1+e^{\lambda_0}}{1+e^{\lambda_0 \zeta}} \right) \right] - \right. \\
&\quad \left. - P_{\min} \left[3\omega_0 \left(e^{\lambda_0} - e^{\lambda_0 \zeta} \right) + (2\nu_0 - 1) \ln \frac{1+e^{\lambda_0}}{1+e^{\lambda_0 \zeta}} + (5-4\nu_0) \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left(e^{\lambda_0} - e^{\lambda_0 \zeta} - \ln \frac{1+e^{\lambda_0}}{1+e^{\lambda_0 \zeta}} \right) \right] \right\}. \quad (3.79)
\end{aligned}$$

Використовуючи умову (1.147) і будь-який із виразів (3.78), (3.79), знаходимо рівняння, яке зв'язує параметр β і зовнішнє навантаження Q

$$\frac{Q}{Q_{\min}} = \frac{K_2(\beta) + K_0(\beta)}{K_2(\beta) e^{-2\lambda_0 \beta} + K_0(\beta)}. \quad (3.80)$$

У формулі (3.80) введена функція однієї змінної

$$K_2(x) = 3\omega_0 \left(e^{\lambda_0} - e^{\lambda_0 x} \right) + (5-4\nu_0) \times$$

$$\times \left(e^{\lambda_0} - e^{\lambda_0 x} - \ln \frac{1 + e^{\lambda_0}}{1 + e^{\lambda_0 x}} \right). \quad (3.81)$$

Беручи до уваги, що $0 \leq \beta \leq 1$, запишемо цю умову не-одностороннього проковзування з допомогою рівняння (3.80) таким чином:

$$Q_{\min} \leq Q \leq Q_{\min} / s_*. \quad (3.82)$$

І, нарешті, інтегруючи осьові деформації (3.25), (3.74), одержимо переміщення поршня:

$$\delta = Q K m_2(\beta). \quad (3.83)$$

Тут введена функція однієї змінної

$$\begin{aligned} m_2(x) = \frac{1}{\lambda_0} \left\{ 3\omega_0 \left[-2e^{-\lambda_0 x} + 1 + e^{-\lambda_0(1-2x)} \right] + 2\nu_0 \ln \frac{1 + e^{\lambda_0}}{2} + \right. \\ \left. + 2(2 - \nu_0) \left[-\ln \frac{1 + e^{-\lambda_0 x}}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + e^{-2\lambda_0 x} \left(e^{\lambda_0} - e^{\lambda_0 x} - \ln \frac{1 + e^{\lambda_0}}{1 + e^{\lambda_0 x}} \right) \right] \right\}. \quad (3.84) \end{aligned}$$

Співвідношення (3.80), (3.83) у параметричній формі описують нелінійну гілку комбінованої ділянки петлі конст-рукційного демпфування, яка відповідає повторному навантаженню в умовах неодностороннього проковзування (варіант $0 \leq s \leq s_*$).

Коли навантаження Q досягне величини Q_{\min} / s_* , на усій поверхні контакту будуть виконуватися умови одностороннього проковзування. У цьому випадку справедливі формули (3.32) – (3.35), умова монотонності має вигляд

$$Q_{\min} / s_* \leq Q \leq Q_{\max}, \quad (3.85)$$

а осадка поршня визначається співвідношенням (3.36), яке в даному випадку описує лінійну гілку комбінованої ділянки діаграми навантаження (вихід на пряму початкового навантаження).

Варіант $s_* \leq s \leq 1$.

Область $\zeta \in [0, \beta)$. Тут закон тертя має вигляд (1.116), а осьові напруження, мембранні зусилля і деформації описуються формулами (3.32) – (3.35).

Область $\zeta \in (\beta, \alpha)$. Тут закон тертя має вигляд (1.109), а осьова деформація заповнювача і стрибок деформацій описуються формулами (3.74), (3.75).

Область $\zeta \in (\alpha, 1]$. Тут закон тертя подається формулою (1.116), а ключове рівняння задачі має вигляд (1.105). У результаті розв'язання цього рівняння з необхідним для даної області врахуванням виразів (1.153) отримуємо, опускаючи проміжні результати, осьову деформацію заповнювача і розрив деформацій

$$\varepsilon_\zeta = -\frac{PR}{E_0 h_0} \left[3\omega_0 e^{-\lambda_0 [\zeta - 2(\alpha - \beta)]} + 2 \frac{v_0 + (2 - v_0) e^{-\lambda_0 [\zeta - 2(\alpha - \beta)]}}{1 + e^{-\lambda_0 \zeta}} \right]; \quad (3.86)$$

$$[\varepsilon_\zeta] = -\frac{PR}{E_0 h_0} \left[3\omega_0 e^{-\lambda_0 [\zeta - 2(\alpha - \beta)]} + \frac{2v_0 - 1 + (5 - 4v_0) e^{-\lambda_0 [\zeta - 2(\alpha - \beta)]}}{1 + e^{-\lambda_0 \zeta}} \right]. \quad (3.87)$$

Визначимо приріст розриву деформацій при переході від розвантаження до повторного навантаження (варіант $s_* \leq s \leq 1$):

$\zeta \in [0, \beta)$; тут шуканий приріст визначається формулою (3.76).

$\zeta \in (\beta, \alpha)$; у цій області для приросту розриву деформацій маємо вираз (3.77).

$\zeta \in (\alpha, 1]$; використовуючи вирази (3.49) при $\zeta < \alpha_m$ і (3.59) при $\zeta > \alpha_m$ для $Q = Q_{\min}$, а також формулу (3.87), приходимо до співвідношення

$$[\varepsilon_\zeta](Q) - [\varepsilon_\zeta](Q_{\min}) = -\frac{R}{E_0 h_0} \left[3\omega_0 (P e^{-\lambda_0 [\zeta - 2(\alpha - \beta)]}) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -P_{\min} \left\{ \begin{array}{l} e^{\lambda_0 \zeta}, \zeta < \alpha_m \\ e^{-\lambda_0(\zeta - 2\alpha_m)}, \zeta > \alpha_m \end{array} \right\} + \\
& + P \frac{2v_0 - 1 + (5 - 4v_0)e^{-\lambda_0[\zeta - 2(\alpha - \beta)]}}{1 + e^{-\lambda_0 \zeta}} - \\
& - P_{\min} \frac{1}{1 + e^{-\lambda_0 \zeta}} \left[2v_0 - 1 + (5 - 4v_0) \left\{ \begin{array}{l} e^{\lambda_0 \zeta}, \zeta < \alpha_m \\ e^{-\lambda_0(\zeta - 2\alpha_m)}, \zeta > \alpha_m \end{array} \right\} \right] \Big\}. \quad (3.88)
\end{aligned}$$

Тут α_m – значення параметра α , яке визначається із рівняння (3.64) при $Q = Q_{\min}$.

Тепер, інтегруючи співвідношення (3.76), (3.77), (3.88), одержимо приріст стрибка переміщень

$$\zeta \in [0, \beta);$$

$$\begin{aligned}
& [u](Q) - [u](Q_{\min}) = \\
& = \frac{aR}{E_0 h_0 \lambda_0} \left\{ P \left[3\omega_0 \left(-2e^{-\lambda_0 \beta} + e^{-\lambda_0 \zeta} + e^{\lambda_0(\alpha - 2\beta)} \right) + \right. \right. \\
& + (2v_0 - 1) \ln \frac{1 + e^{\lambda_0}}{1 + e^{\lambda_0 \zeta}} - (5 - 4v_0) \left(\ln \frac{1 + e^{-\lambda_0 \beta}}{1 + e^{-\lambda_0 \zeta}} + \right. \\
& \left. \left. + \left(\ln \frac{1 + e^{\lambda_0 \alpha}}{1 + e^{\lambda_0 \beta}} + e^{\lambda_0 \beta} - e^{\lambda_0 \alpha} \right) e^{-2\lambda_0 \beta} + e^{2\lambda_0(\alpha - \beta)} \ln \frac{1 + e^{-\lambda_0}}{1 + e^{-\lambda_0 \alpha}} \right) \right] - \\
& - P_{\min} \left[3\omega_0 \left(2e^{\lambda_0 \alpha_m} - e^{-\lambda_0(1 - 2\alpha_m)} - e^{\lambda_0 \zeta} \right) + (2v_0 - 1) \ln \frac{1 + e^{\lambda_0}}{1 + e^{\lambda_0 \zeta}} + \right. \\
& + (5 - 4v_0) \left(e^{\lambda_0 \alpha_m} - e^{\lambda_0 \zeta} - \ln \frac{1 + e^{\lambda_0 \alpha_m}}{1 + e^{\lambda_0 \zeta}} - \right. \\
& \left. \left. \left. - e^{2\lambda_0 \alpha_m} \ln \frac{1 + e^{-\lambda_0}}{1 + e^{-\lambda_0 \alpha_m}} \right) \right] \right\}; \quad (3.89)
\end{aligned}$$

$\zeta \in (\beta, \alpha)$;

$$\begin{aligned}
& [u](Q) - [u](Q_{\min}) = \\
& = \frac{aR}{E_0 h_0 \lambda_0} \left\{ P \left[3\omega_0 \left(2e^{\lambda_0(\alpha-2\beta)} - e^{\lambda_0\zeta} + e^{-\lambda_0[1-2(\alpha-\beta)]} \right) + \right. \right. \\
& \quad + (2\nu_0 - 1) \ln \frac{1+e^{\lambda_0}}{1+e^{\lambda_0\zeta}} + (5-4\nu_0) e^{-2\lambda_0\beta} \times \\
& \quad \times \left. \left. \left(e^{\lambda_0\alpha} - e^{\lambda_0\zeta} - \ln \frac{1+e^{\lambda_0\alpha}}{1+e^{\lambda_0\zeta}} - e^{2\lambda_0\alpha} \ln \frac{1+e^{-\lambda_0}}{1+e^{-\lambda_0\alpha}} \right) \right] - \right. \\
& \quad - P_{\min} \left[3\omega_0 \left(2e^{\lambda_0\alpha_m} - e^{\lambda_0\zeta} - e^{-\lambda_0(1-2\alpha_m)} \right) + (2\nu_0 - 1) \ln \frac{1+e^{\lambda_0}}{1+e^{\lambda_0\zeta}} + \right. \\
& \quad \quad + (5-4\nu_0) \left(e^{\lambda_0\alpha_m} - e^{\lambda_0\zeta} - \right. \\
& \quad \quad \left. \left. - \ln \frac{1+e^{\lambda_0\alpha_m}}{1+e^{\lambda_0\zeta}} - e^{2\lambda_0\alpha_m} \ln \frac{1+e^{-\lambda_0}}{1+e^{-\lambda_0\alpha_m}} \right) \right] \left. \right\}; \quad (3.90)
\end{aligned}$$

$\zeta \in (\alpha, 1]$;

$$\begin{aligned}
& [u](Q) - [u](Q_{\min}) = \frac{aR}{E_0 h_0 \lambda_0} \left\{ P \left[-3\omega_0 \left(e^{-\lambda_0(1-2(\alpha-\beta))} - e^{-\lambda_0\zeta} \right) + \right. \right. \\
& \quad + (2\nu_0 - 1) \ln \frac{1+e^{\lambda_0}}{1+e^{\lambda_0\zeta}} - (5-4\nu_0) e^{2\lambda_0(\alpha-\beta)} \ln \frac{1+e^{-\lambda_0}}{1+e^{-\lambda_0\zeta}} \left. \right] - \\
& \quad - P_{\min} \left[3\omega_0 \left\{ \begin{array}{l} 2e^{\lambda_0\alpha_m} - e^{\lambda_0\zeta} - e^{-\lambda_0(1-2\alpha_m)}, \zeta < \alpha_m \\ -e^{2\lambda_0\alpha_m} (e^{-\lambda_0} - e^{-\lambda_0\zeta}), \zeta > \alpha_m \end{array} \right\} + \right. \\
& \quad \quad \left. + (2\nu_0 - 1) \ln \frac{1+e^{\lambda_0}}{1+e^{\lambda_0\zeta}} + (5-4\nu_0) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} e^{\lambda_0 \alpha_m} - e^{\lambda_0 \zeta} - \ln \frac{1+e^{\lambda_0 \alpha_m}}{1+e^{\lambda_0 \zeta}} - e^{2\lambda_0 \alpha_m} \ln \frac{1+e^{-\lambda_0}}{1+e^{-\lambda_0 \alpha_m}}, \zeta < \alpha_m \\ -e^{-2\lambda_0 \alpha_m} \ln \frac{1+e^{-\lambda_0}}{1+e^{-\lambda_0 \zeta}}, \zeta > \alpha_m \end{array} \right\}. \quad (3.91)$$

Використовуючи умову (1.161) і будь-яке із співвідношень (3.89), (3.90), одержимо перше рівняння, що пов'язує параметри α і β із зовнішнім навантаженням Q

$$\frac{Q}{Q_{\min}} = \frac{K_3(\alpha_m, \beta) + K_0(\beta)}{K_3(\alpha_m, \beta)e^{-2\lambda_0 \beta} + K_0(\beta)}. \quad (3.92)$$

Використовуючи умову (1.172) та будь-яке із співвідношень (3.90), (3.91), одержимо друге рівняння

$$\frac{Q}{Q_{\min}} = \frac{K_3(\alpha_m, \alpha) + K_0(\alpha)}{K_3(\alpha, \alpha)e^{-2\lambda_0 \beta} + K_0(\alpha)}. \quad (3.93)$$

І, нарешті, інтегруючи осьові деформації (3.25), (3.74), (3.86), одержимо переміщення поршня

$$\delta = QK m_3(\alpha, \beta). \quad (3.94)$$

У формулах (3.92) – (3.94) введені функції двох змінних

$$\begin{aligned} K_3(x, y) &= 3\omega_0 \left[2e^{\lambda_0 x} - e^{\lambda_0 y} - e^{-\lambda_0(1-2x)} \right] + \\ &+ (5-4\nu_0) \left(e^{\lambda_0 x} - e^{\lambda_0 y} - \ln \frac{1+e^{\lambda_0 x}}{1+e^{\lambda_0 y}} - e^{2\lambda_0 x} \ln \frac{1+e^{-\lambda_0}}{1+e^{-\lambda_0 x}} \right); \\ m_3(x, y) &= \frac{1}{\lambda_0} \left\{ 3\omega_0 \left[1 - 2e^{-\lambda_0 y} + 2e^{\lambda_0(x-2y)} - e^{-\lambda_0[1-2(x-y)]} \right] + \right. \\ &+ 2\nu_0 \ln \frac{1+e^{\lambda_0}}{2} + 2(2-\nu_0) \left[-\ln \frac{1+e^{-\lambda_0 y}}{2} + e^{-2\lambda_0 y} (e^{\lambda_0 x} - e^{\lambda_0 y} - \right. \end{aligned}$$

$$\left. -\ln \frac{1+e^{\lambda_0 x}}{1+e^{\lambda_0 y}} \right) - e^{2\lambda_0(x-y)} \ln \frac{1+e^{-\lambda_0}}{1+e^{-\lambda_0 x}} \left. \right]. \quad (3.95)$$

Таким чином, розв'язок змішаної задачі (1.12) – (1.22), (3.14), (1.96) – (1.99) отримано. Для зручності аналізу зведемо до купи вирази, які описують петлю конструкційного демпфування в рівномірній оболонці з деформівним заповнювачем. Для опису діаграми за етапами використаємо рис. 1.11.

1. Активне (початкове) навантаження – лінійна ділянка OA ($0 \leq Q \leq Q_{\max}$, $\dot{Q} > 0$):

$$\delta = QK \left(2v_0 + 3\omega_0 \frac{1-e^{-\lambda_0}}{\lambda_0} - 4 \frac{1-v_0}{\lambda_0} \ln \frac{1+e^{\lambda_0}}{2} \right). \quad (3.96)$$

2. Розвантаження ($Q_{\max} \geq Q \geq 0$, $\dot{Q} < 0$):

а) нелінійна ділянка ABC ($Q_{\max} \geq Q \geq s_* Q_{\max}$):

$$Q = Q_{\max} \frac{K_1(\alpha) + K_0(\alpha)}{K_1(\alpha)e^{2\lambda_0\alpha} + K_0(\alpha)};$$

$$\delta = QK m_1(\alpha); \quad 0 \leq \alpha \leq 1; \quad (3.97)$$

б) лінійна ділянка CO ($s_* Q_{\max} \geq Q \geq 0$):

$$\delta = QK \left[(4 - 2v_0 + 3\omega_0) \frac{e^{\lambda_0} - 1}{\lambda_0} - 4 \frac{1-v_0}{\lambda_0} \ln \frac{1+e^{\lambda_0}}{2} \right]. \quad (3.98)$$

3. Повторне навантаження ($Q_{\min} \leq Q \leq Q_{\max}$, $\dot{Q} > 0$):

а) комбінована ділянка DEA ($0 \leq s \leq s_*$):

нелінійна гілка DE ($Q_{\min} \leq Q \leq Q_{\min}/s_*$):

$$Q = Q_{\min} \frac{K_2(\beta) + K_0(\beta)}{K_2(\beta)e^{-2\lambda_0\beta} + K_0(\beta)};$$

$$\delta = QK m_2(\beta); \quad 0 \leq \beta \leq 1; \quad (3.99)$$

лінійна гілка EA (вихід на пряму активного навантаження) ($Q_{\min}/s_* \leq Q \leq Q_{\max}$);

$$\delta = QK \left(2\nu_0 + 3\omega_0 \frac{1 - e^{-\lambda_0}}{\lambda_0} - 4 \frac{1 - \nu_0}{\lambda_0} \ln \frac{1 + e^{-\lambda_0}}{2} \right); \quad (3.100)$$

б) нелінійна ділянка BA ($s_* \leq s \leq 1$):

$$Q = Q_{\min} \frac{K_3(\alpha_m, \beta) + K_0(\beta)}{K_3(\alpha, \beta)e^{-2\lambda_0\beta} + K_0(\beta)};$$

$$Q = Q_{\min} \frac{K_3(\alpha_m, \alpha) + K_0(\alpha)}{K_3(\alpha, \alpha)e^{-2\lambda_0\beta} + K_0(\alpha)};$$

$$\delta = QK m_3(\alpha, \beta); \quad 0 \leq \beta \leq \alpha_m. \quad (3.101)$$

Використані в наведених співвідношеннях функції розшифровуються за допомогою формул (3.65), (3.69), (3.81), (3.84), (3.95).

Зауважимо, що у формулах (3.96), (3.98), (3.100) результат записаний у явному вигляді. Рівняння (3.97), (3.99) є однопараметровим зображенням кривих, причому α, β – монотонно зростаючі координати нулів швидкості взаємного проковзування на поверхні контакту, що відіграють роль внутрішнього часу. У формулах (3.101) результат поданий у двопараметровій формі. Тут β – незалежний монотонно зростаючий параметр, $\alpha = \alpha(\beta, \alpha_m)$ – корінь трансцендентного рівняння, яке отримується виключенням Q із перших двох співвідношень (3.101).

Відзначимо ідентичність структури розв'язку розглянутої задачі та розв'язку, отриманого для оболонки сталої товщини. Спостерігається якісна подібність результатів (3.96) – (3.101) і (1.166) – (1.171).

Порівняємо гістерезисні та деформативні властивості рівномірної оболонки товщини, обчисленої за формулою (3.14), і циліндричної оболонки сталої товщини h_0 . Зазначимо, що за несучою здатністю обидві оболонки ідентичні. Введемо приведені безрозмірні переміщення поршня $\bar{\delta} = \delta/a$ і навантаження

$\bar{Q} = Q/\pi R^2 h_0 E_0$ а також приймемо $\lambda_0 = 1; 2$; $\nu_0 = 0,3$; $\omega_0 = 1$. На рис. 3.4 наведені діаграми деформування (петлі конструкційного демпфування): штриховою лінією – для оболонки завтовшки h_0 , суцільною – для рівномірної оболонки.

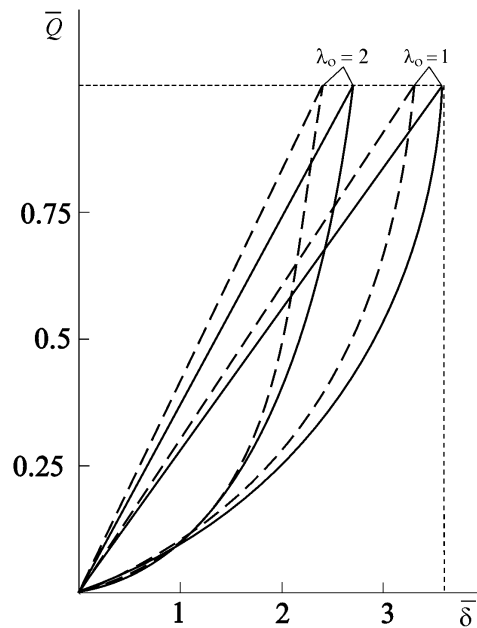


Рисунок 3.4

Маємо очевидний (у даному випадку 8,7%) вигреш у деформативності рівномірної оболонки при фактичному збереженні гістерезисних властивостей системи. Не можна також ігнорувати і вигреш у матеріаломісткості рівномірної оболонки порівняно з оболонкою сталюї товщини, який у даному випадку становить 18,4%.

Підсумовуючи викладене у даному розділі, можна зробити висновок, що запропонована методика розрахунку конструкційного демпфування у поєднанні із асимптотичним способом розв'язування задач дає змогу аналізувати деформативні та гістерезисні властивості доволі складних оболонкових систем з деформівним заповнювачем.

РОЗДІЛ 4

ФРИКЦІЙНИЙ КОНТАКТ ПРУЖНОГО ЗАПОВНЮВАЧА З КОНІЧНОЮ ОБОЙМОЮ

4.1 Моделювання фрикційної взаємодії заповнювача з конічною обоймою

З усього класу механіко-математичних моделей, що описують фрикційну взаємодію тонкостінних елементів конструкцій з деформівними заповнювачами, найширше розроблені моделі об'єктів, несучими ланками в яких фігурують циліндричні оболонки. В даній роботі представлені результати перших спроб математичного моделювання фрикційної взаємодії нециліндричних оболонок обертання з деформівним заповнювачем. Метою досліджень є вивчення впливу форми поверхні оболонок на деформативні і демпфувальні властивості оболонок систем із заповнювачем.

Розглянемо пружний зрізаний конус довжиною a , який заповнює абсолютно жорстку обойму (рис. 4.1). На вільний торець конуса через абсолютно жорсткий гладкий поршень передається зовнішнє навантаження Q . Характер контактної взаємодії бічних поверхонь обойми і заповнювача визначається законом сухого тертя.

Осесиметричний напружено-деформований стан системи досліджуємо в циліндричній системі координат, вказаній на рис. 4.1.

Введемо операцію усереднення по поперечному перерізу для загального випадку тіла обертання

$$\langle f(z) \rangle \stackrel{def}{=} \frac{2}{R^2(z)} \int_0^{R(z)} f(r, z) r dr, \quad (4.1)$$

де f – довільна функція (в даному випадку напруження або деформації); $R(z)$ – змінний радіус бічної поверхні тіла обертання.

Намагаючись аналітично оцінити суттєві параметри розглядуваної задачі, використаємо одновимірну модель запов-

нювача [158]. Вважаємо, що в заповнювачі нормальні напруження $\sigma_r, \sigma_\beta, \sigma_z$ і осьові переміщення u_z розподілені рівномірно, а дотичні напруження τ_{rz} і радіальні переміщення u_r – лінійно по поперечному перерізу.

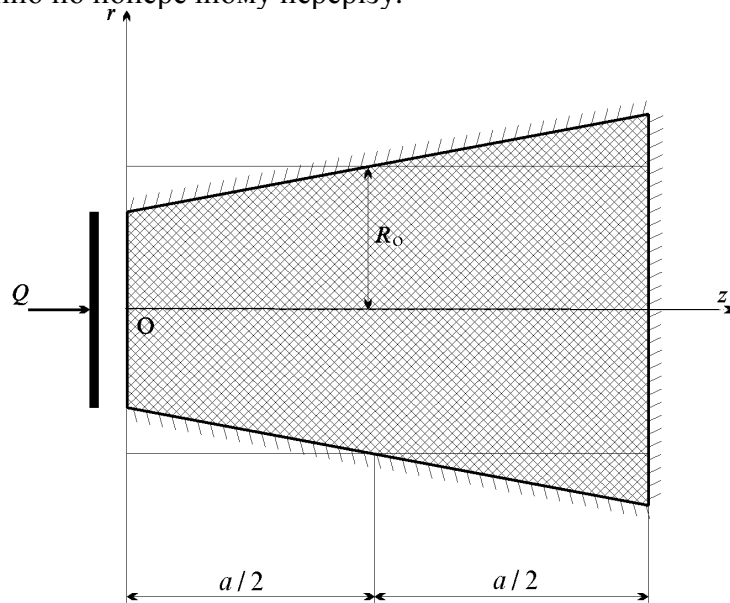


Рисунок 4.1

Застосуємо операцію усереднення (4.1) до ключових рівнянь для тіла обертання. Враховуючи наведені гіпотези, маємо: усереднене друге рівняння рівноваги

$$\frac{d\sigma_z}{dz} + \frac{2}{R(z)}\tau_{rz} = 0; \quad (4.2)$$

усереднений закон Гука

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{du_z}{dz} = \frac{1}{E}(\sigma_z - 2\nu\sigma_r), \\ \varepsilon_\beta &= \frac{u_r(R)}{R(z)} = \frac{1}{E}((1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_z). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Тут E, ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу заповнювача. Під τ_{rz} у формулі (4.2) та нижче розумітимемо його значення на поверхні контакту $\tau_{rz}(R)$.

На вільному торці заповнювача виконується умова

$$\sigma_z(0) = -Q/\pi R^2(0). \quad (4.4)$$

Фрикційну взаємодію обойми і заповнювача описуємо співвідношенням одностороннього контакту (в даному випадку це умова жорсткості обойми)

$$u_n = 0, \quad (4.5)$$

де u_n – нормальне переміщення поверхні контакту, а також законом тертя Кулона

$$\tau_n - f\sigma_n = 0, \quad (4.6)$$

де f – коефіцієнт тертя; τ_n, σ_n – дотичні та нормальні напруження на поверхні контакту.

Перейдемо у формулах (4.5), (4.6) до переміщень та напружень, орієнтованих в циліндричній системі координат. Співвідношення для переміщень мають вигляд

$$\begin{aligned} u_n &= u_r \cos \varphi - u_z \sin \varphi; \\ u_\tau &= u_z \cos \varphi + u_r \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Тут: u_z, u_r – складові повних переміщень точок заповнювача у вихідних циліндричних координатах; u_τ, u_n – проекції цих же переміщень на нормаль та дотичну до бічної поверхні заповнювача; φ – кут між дотичною до бічної поверхні та віссю симетрії тіла обертання (заповнювача).

Вважаючи φ достатньо малим (форма бічної поверхні змінюється полого, тобто близька до циліндричної), одержимо

$$u_n \sim u_r - \varphi u_z; \quad (4.8)$$

$$u_\tau \sim u_z + \varphi u_r. \quad (4.9)$$

Зв'язок між напруженнями визначається формулами

$$\sigma_n = \sigma_z \sin^2 \varphi + \sigma_r \cos^2 \varphi - \tau_{rz} \sin 2\varphi \sim \sigma_r - 2\varphi \tau_{rz}; \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \tau_n &= (\sigma_r - \sigma_z) \sin \varphi \cos \varphi + \\ &+ \tau_{rz} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \sim \tau_{rz} + \varphi (\sigma_r - \sigma_z). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Підставляючи формули (4.8), (4.9) та (4.10), (4.11) відповідно у співвідношення одностороннього контакту (4.5) та закон Кулона (4.6), одержимо умови фрикційної взаємодії заповнювача з жорсткою обоймою

$$u_r(R) - \varphi u_z = 0; \quad (4.12)$$

$$\tau_{rz} + \varphi (\sigma_r - \sigma_z) - f(\sigma_r - 2\varphi \tau_{rz}) = 0. \quad (4.13)$$

Підставимо закон Гука (4.3) в умову (4.12) та приєднаємо до отриманого співвідношення рівняння рівноваги (4.2) і закон Кулона (4.13), отримаємо замкнуту систему рівнянь задачі про фрикційну взаємодію пружного заповнювача з жорсткою обоймою для загального випадку, коли поверхня контакту є поверхнею обертання змінної кривини

$$\frac{d\sigma_z}{dz} + \frac{2}{R(z)} \tau_{rz} = 0;$$

$$R(z)((1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_z) + \varphi \int_z^a (\sigma_z - 2\nu\sigma_r) dz = 0; \quad (4.14)$$

$$\tau_{rz} + \varphi (\sigma_r - \sigma_z) - f(\sigma_r - 2\varphi \tau_{rz}) = 0; z \in [0, a].$$

Розв'язок системи інтегродиференціальних рівнянь (4.14) з крайовою умовою (4.4) для кожного конкретного випадку $R=R(z)$ доцільно будувати з використанням асимптотичних методів.

У даній ситуації, коли поверхня контакту є конічною (рис.4.1), змінний радіус описується формулою

$$R(z) = R_0 \left(1 + \frac{tg \varphi}{R_0} \left(z - \frac{a}{2} \right) \right), \quad (4.15)$$

де $R_0 = R(a/2)$.

Перейдемо до безрозмірних координат $\zeta = z/R_0$, $\rho = z/R_0$ і врахуємо, що φ – малий параметр. Формула (4.15) набуває вигляду

$$R(\zeta) = R_0(1 + \varphi(\zeta - l/2)), \quad (4.16)$$

а крайова умова (4.4) буде

$$\sigma_\zeta(0) = -P(1 + \varphi l). \quad (4.17)$$

Тут $l = a/R_0$, $P = -Q/\pi R_0^2$.

Система рівнянь (4.14) з використанням формули (4.16) буде

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_\zeta}{d\zeta} + \frac{2}{1 + \varphi(\zeta - l/2)} \tau_{\rho\zeta} &= 0; \\ (1 + \varphi(\zeta - l/2))((1 - \nu)\sigma_\rho - \nu\sigma_\zeta) + \varphi \int_\zeta^l (\sigma_\zeta - 2\nu\sigma_\rho) d\zeta &= 0; \quad (4.18) \\ \tau_{\rho\zeta} + \varphi(\sigma_\rho - \sigma_\zeta) - f(\sigma_\rho - 2\varphi\tau_{\rho\zeta}) &= 0; \zeta \in [0, l]. \end{aligned}$$

Розв'язок системи рівнянь (4.18) з крайовою умовою (4.17) будемо, розвиваючи невідомі величини в асимптотичні ряди за степенями малого параметра φ . Оскільки при виводі співвідношень (4.12), (4.13) відкидалися члени $O(\varphi^2)$, достатньо обмежитись аналізом нульового та першого наближень. Таким чином, маємо

$$\begin{aligned} \sigma_\zeta &= \sigma_\zeta^{(0)} + \varphi\sigma_\zeta^{(1)} + O(\varphi^2); \\ \sigma_\rho &= \sigma_\rho^{(0)} + \varphi\sigma_\rho^{(1)} + O(\varphi^2); \\ \tau_{\rho\zeta} &= \tau_{\rho\zeta}^{(0)} + \varphi\tau_{\rho\zeta}^{(1)} + O(\varphi^2); \end{aligned} \quad (4.19)$$

Нульове наближення (φ^0). Система рівнянь (4.18) та крайова умова (4.17) в нульовому наближенні мають вигляд

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{\zeta}^{(0)}}{d\zeta} + 2\tau_{\rho\zeta}^{(0)} &= 0; \\ (1-\nu)\sigma_{\rho}^{(0)} - \nu\sigma_{\zeta}^{(0)} &= 0; \\ \tau_{\rho\zeta}^{(0)} - f\sigma_{\rho}^{(0)} &= 0;\end{aligned}\tag{4.20}$$

$$\sigma_{\zeta}^{(0)} = -P.\tag{4.21}$$

Її розв'язок уже відомий. Це частковий випадок результатів роботи [156] для циліндричного заповнювача. Наведемо його:

$$\begin{aligned}\sigma_{\zeta}^{(0)} &= -Pe^{-\lambda\zeta}; \\ \sigma_{\rho}^{(0)} &= -\frac{\nu}{1-\nu}Pe^{-\lambda\zeta}; \\ \tau_{\rho\zeta}^{(0)} &= -\frac{\nu}{1-\nu}fPe^{-\lambda\zeta}.\end{aligned}\tag{4.22}$$

Тут $\lambda = \frac{2\nu f}{1-\nu}$.

Перше наближення (φ^1). Система рівнянь (4.18) та крайова умова (4.17) в першому наближенні будуть

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{\zeta}^{(1)}}{d\zeta} - 2(\zeta - l/2)\tau_{\rho\zeta}^{(0)} + 2\tau_{\rho\zeta}^{(1)} &= 0; \\ (\zeta - l/2)((1-\nu)\sigma_{\rho}^{(0)} - \nu\sigma_{\zeta}^{(0)}) + (1-\nu)\sigma_{\rho}^{(1)} - \\ - \nu\sigma_{\zeta}^{(1)} + \int_{\zeta}^l (\sigma_{\zeta}^{(0)} - 2\nu\sigma_{\rho}^{(0)})d\zeta &= 0; \\ \tau_{\rho\zeta}^{(1)} + \sigma_{\rho}^{(0)} - \sigma_{\zeta}^{(0)} - f(\sigma_{\rho}^{(1)} - 2\tau_{\rho\zeta}^{(0)}) &= 0.\end{aligned}\tag{4.23}$$

$$\sigma_{\zeta}^{(1)}(0) = -lP.\tag{4.24}$$

Підставимо в систему (4.23) результат нульового наближення (4.22), одержимо ключові рівняння для першого наближення

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{\zeta}^{(1)}}{d\zeta} + 2\tau_{\rho\zeta}^{(1)} &= -\frac{2vf}{1-v}(\zeta - l/2)Pe^{-\lambda\zeta}; \\ (1-v)\sigma_{\rho}^{(1)} - v\sigma_{\zeta}^{(1)} &= P\frac{(1+v)(1-2v)}{1-v} \cdot \frac{e^{-\lambda\zeta} - e^{-\lambda l}}{\lambda}; \\ \tau_{\rho\zeta}^{(1)} - f\sigma_{\rho}^{(1)} &= \frac{2vf^2 - (1-2v)}{1-v}Pe^{-\lambda\zeta}.\end{aligned}\quad (4.25)$$

Роз'язок системи рівнянь (4.25) з крайовою умовою (4.24) має такий вигляд:

$$\begin{aligned}\sigma_{\zeta}^{(1)} &= -2Pe^{-\lambda\zeta}\left(\frac{l}{2} + e^{-\lambda l} \frac{(1+v)(1-2v)}{4v^2 f} + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{2vf^2}{1-v} + \frac{1-2v}{2v} - \frac{vfl}{2(1-v)}\right) \times \zeta + \frac{vf}{1-v} \cdot \frac{\zeta^2}{2} - e^{-\lambda(l-\zeta)} \frac{(1+v)(1-2v)}{4v^2 f}\right); \\ \sigma_{\rho}^{(1)} &= -\frac{2v}{1-v}Pe^{-\lambda\zeta}\left(\frac{l}{2} + e^{-\lambda l} \frac{(1+v)(1-2v)}{4v^2 f} + \left(\frac{2vf^2}{1-v} + \frac{1-2v}{2v} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{vfl}{2(1-v)}\right) \zeta + \frac{vf}{1-v} \cdot \frac{\zeta^2}{2} - \frac{(1+v)(1-2v)}{4v^2 f}\right); \\ \tau_{\rho\zeta}^{(1)} &= -\frac{2vf}{1-v}Pe^{-\lambda\zeta}\left(\frac{l}{2} + e^{-\lambda l} \frac{(1+v)(1-2v)}{4v^2 f} + \left(\frac{2vf^2}{1-v} + \frac{1-2v}{2v} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{vfl}{2(1-v)}\right) \zeta + \frac{vf}{1-v} \cdot \frac{\zeta^2}{2} - \frac{(1+v)(1-2v)}{4v^2 f} - f\right).\end{aligned}\quad (4.26)$$

Введемо позначення

$$H(\zeta, f) = l + \left(\frac{4vf^2}{1-v} + \frac{1-2v}{v} - \frac{\lambda l}{2} \right) \zeta + \frac{\lambda \zeta^2}{2}. \quad (4.27)$$

Зведемо разом результати (4.22) та (4.26) нульового та першого наближень. З урахуванням позначення (4.27) напруження в заповнювачі матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_\zeta &= -Pe^{-\lambda\zeta} \left(1 + \varphi \left(H(\zeta, f) - \frac{(1+v)(1-2v)}{v(1-v)} \frac{e^{-\lambda l}}{\lambda} (e^{\lambda\zeta} - 1) \right) + \right. \\ &\quad \left. + O(\varphi^2) \right), \\ \sigma_\rho &= -\frac{v}{1-v} Pe^{-\lambda\zeta} \left(1 + \varphi \left(H(\zeta, f) - \frac{(1+v)(1-2v)}{v(1-v)} \frac{1-e^{-\lambda l}}{\lambda} \right) + \right. \\ &\quad \left. + O(\varphi^2) \right), \\ \tau_{\rho\zeta} &= -\frac{vf}{1-v} Pe^{-\lambda\zeta} \left(1 + \varphi \left(H(\zeta, f) - \frac{(1+v)(1-2v)}{v(1-v)} \frac{e^{-\lambda l}}{\lambda} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(1+v)(1-2v)}{2v^2 f} - 2f \right) + O(\varphi^2) \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Знаючи напружений стан заповнювача, за допомогою співвідношень закону Гука (4.3) можна знайти переміщення та деформації. Зокрема, з точки зору аналізу жорсткості та демпфуючої здатності системи найбільший інтерес викликають осьові переміщення заповнювача. Інтегруючи перше із співвідношень (4.3), одержимо

$$\begin{aligned} u_\zeta &= -\frac{1}{E_\zeta} \int_0^l (\sigma_\zeta - 2v\sigma_\rho) d\zeta = \frac{P}{E} \frac{(1+v)(1-2v)}{1-v} \left(\frac{e^{-\lambda\zeta} - e^{-\lambda l}}{\lambda} + \right. \\ &\quad \left. + \varphi \left(\frac{e^{-\lambda\zeta} - e^{-\lambda l}}{\lambda} \left(\frac{1}{v\lambda} + l + \frac{(1+v)(1-2v)}{v(1-v)\lambda} (e^{-\lambda l} - 1) \right) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{4\nu f^2}{1-\nu} + \frac{1-2\nu}{\nu} - \frac{\lambda l}{2} \right) \left(e^{-\lambda \zeta} (\lambda \zeta + 1) - e^{-\lambda l} (\lambda l + 1) \right) + \\
& + \frac{1}{2\lambda^2} \left(e^{-\lambda \zeta} (\lambda^2 \zeta^2 + 2\lambda \zeta + 2) - e^{-\lambda l} (\lambda^2 l^2 + 2\lambda l + 2) \right) - \\
& - \frac{e^{-\lambda l} (l - \zeta)}{\nu \lambda} \Big) + O(\varphi^2) \Big). \tag{4.29}
\end{aligned}$$

Вираз для переміщення поршня має вигляд

$$\begin{aligned}
\delta \equiv u_{\zeta}(0) = & - \frac{P(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \left(\frac{1-e^{-\lambda l}}{\lambda} + \varphi \left(\frac{1-e^{-\lambda l}}{\lambda} \times \right. \right. \\
& \times \left. \left(\frac{1}{\nu \lambda} + l - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)(1-e^{-\lambda l})}{\nu(1-\nu)\lambda} \right) + \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{4\nu f^2}{1-\nu} + \frac{1-2\nu}{\nu} - \frac{\lambda l}{2} \right) \times \right. \\
& \times \left. \left(1 - e^{-\lambda l} (\lambda l + 1) \right) + \frac{1}{2\lambda^2} \left(2 - e^{-\lambda l} (\lambda^2 l^2 + 2\lambda l + 2) \right) - \right. \\
& \left. \left. - \frac{l e^{-\lambda l}}{\nu \lambda} \right) + O(\varphi^2) \right). \tag{4.30}
\end{aligned}$$

У результаті числового дослідження аналітичного розв'язку задачі в напруженнях (4.28) отримано розподіл напружень по довжині зони контакту оболонки і заповнювача при $f = 0,5$; $\nu = 0,495$; $l = 2$. З метою порівняння наведено графіки для трьох різних значень параметра конусності: $\varphi = 0,1$ (поршень у вузькому торці оболонки), $\varphi = 0$ (циліндричний заповнювач), $\varphi = -0,1$ (поршень у ширшому торці оболонки). На рис. 4.2 наведено розподіл безрозмірних нормальних напружень σ_n/P на поверхні контакту.

Числовий аналіз формули (4.30) засвідчив, що податливість кінцевого амортизатора з поршнем у вузькому торці ($\varphi = 0,1$) перевищує податливість циліндричного амортизатора ($\varphi = 0$) на 38%, і більш як удвічі перевищує податливість

конічного амортизатора з поршнем у широкому торці ($\varphi = -0,1$), що доводить доцільність використання належним чином встановленої конічної оболонки при проектуванні віброзахисних пристроїв з деформівним заповнювачем.

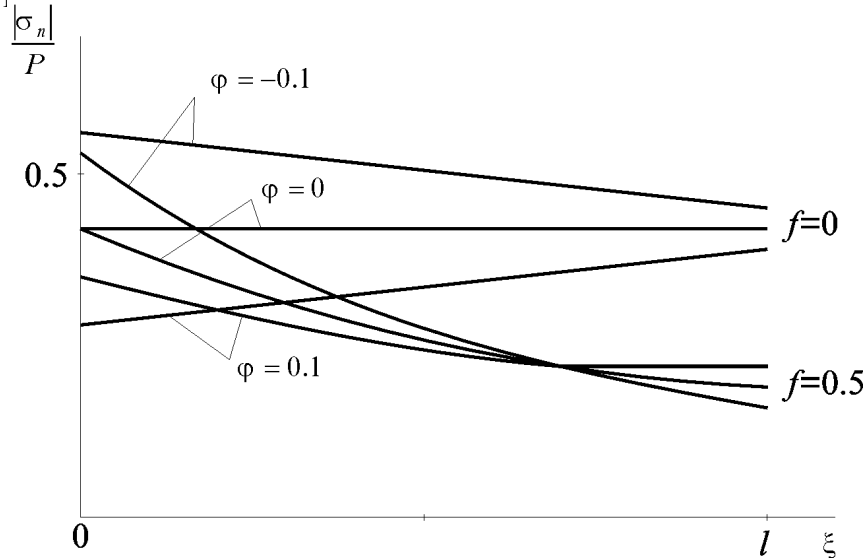


Рисунок 4.2

4.2 Фрикційне проковзування пружного заповнювача в конічній обоймі при немонотонному навантаженні

Результати попереднього параграфу, враховуючи заявлену немонотонність навантаження, можна трактувати, як опис стану активного навантаження, яке характеризується нерівностями

$$0 \leq Q \leq Q_{\max}, \quad \dot{Q} > 0. \quad (4.30)$$

Формула (4.30) описує лінійну ділянку OA діаграми деформування (Q, δ) , схематичний вигляд якої наведено на рис.

1.11 з першого розділу. Тут s_* – характерне значення коефіцієнта асиметрії циклу навантаження.

З більшими труднощами пов'язаний аналіз етапу розвантаження, якому на діаграмі деформування відповідають нелінійна AC та лінійна CO ділянки. Процес розвантаження описується нерівностями

$$Q_{\max} \geq Q \geq 0, \quad \dot{Q} < 0. \quad (4.31)$$

Закон Кулона при немонотонному навантаженні для зони проковзування має вигляд

$$\phi_n = fy_n \operatorname{sgn} \dot{u}_\tau. \quad (4.32)$$

Враховуючи в формулі (4.9) умову (4.12), одержимо

$$u_\tau = u_z(1 + \varphi)^2 \sim u_z. \quad (4.33)$$

Підставимо формулу (4.33) у співвідношення (4.32) та розшифруємо похідну за часом, одержимо остаточно закон Кулона при немонотонному навантаженні для усієї поверхні контакту

$$\begin{aligned} \phi_n &= fy_n \operatorname{sgn} \frac{\partial u_z}{\partial Q} \operatorname{sgn}(\dot{Q}); \quad \frac{\partial u_z}{\partial Q} \neq 0; \\ \frac{\partial u_z}{\partial Q} &= 0, \quad |\tau_n| \leq -f\sigma_n. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Розглянемо окремо розвантаження в умовах неповного та повного проковзування на поверхні контакту обійми і заповнювача.

Розвантаження в умовах неповного проковзування. На поверхні контакту присутні дві зони, розділені біжучою точкою з координатою α , яка відіграє роль внутрішнього часу. Розглянемо по черзі кожен з них.

Область $\zeta \in [0, \alpha]$ – зона зворотного проковзування, для якої справедливі нерівності

$$\frac{\partial u_\zeta}{\partial Q} > 0, \quad \dot{Q} < 0. \quad (4.35)$$

Підставляючи нерівності (4.35) у співвідношення (4.34), одержимо вигляд закону Кулона в цій зоні

$$\tau_n = -f\sigma_n. \quad (4.36)$$

Система ключових рівнянь в зоні зворотного проковзування отримується за аналогією до системи рівнянь (4.18) етапу активного навантаження. Потрібно лише змінити вигляд закону Кулона і замість формули (4.13) використовувати залежність (4.36).

Таким чином, маємо

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_\zeta}{d\zeta} + \frac{2}{1 + \varphi(\zeta - l/2)} \tau_{\rho\zeta} &= 0; \\ (1 + \varphi(\zeta - l/2))((1 - \nu)\sigma_\rho - \nu\sigma_\zeta) + \varphi \int_\zeta^l (\sigma_\zeta - 2\nu\sigma_\rho) d\zeta &= 0; \\ \tau_{\rho\zeta} + \varphi(\sigma_\rho - \sigma_\zeta) + f(\sigma_\rho - 2\varphi\tau_{\rho\zeta}) &= 0; \quad \zeta \in [0, \alpha]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Розв'язок системи рівнянь (4.37) з крайовою умовою (4.17) будемо аналогічно до розв'язку системи рівнянь (4.18) асимптотичним методом. Використовуючи формули (4.19), запишемо систему (4.37) в нульовому наближенні (φ^0)

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_\zeta^{(0)}}{d\zeta} + 2\tau_{\rho\zeta}^{(0)} &= 0; \\ (1 - \nu)\sigma_\rho^{(0)} - \nu\sigma_\zeta^{(0)} &= 0; \\ \tau_{\rho\zeta}^{(0)} + f\sigma_\rho^{(0)} &= 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Розв'язок системи рівнянь (4.38) з крайовою умовою (4.21) є частковим випадком результатів роботи [156] для циліндричного заповнювача. Наведемо його

$$\sigma_{\zeta}^{(0)} = -Pe^{\lambda\zeta}; \quad \sigma_{\rho}^{(0)} = -\frac{\nu}{1-\nu}Pe^{\lambda\zeta}; \quad \tau_{\rho}^{(0)} = \frac{\nu}{1-\nu}fPe^{\lambda\zeta}. \quad (4.39)$$

Перше наближення (φ^1). Система рівнянь (4.37) у першому наближенні має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\zeta}^{(0)}}{d\zeta} + 2\tau_{\rho\zeta}^{(1)} &= \frac{2\nu f}{1-\nu}(\zeta - l/2)Pe^{\lambda\zeta}; \quad (4.40) \\ (1-\nu)\sigma_{\rho}^{(1)} - \nu\sigma_{\zeta}^{(1)} &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \left(\int_{\zeta}^{\alpha} Pe^{\lambda\zeta} d\zeta + \int_{\alpha}^l P_{\max} e^{-\lambda\zeta} d\zeta \right); \\ \tau_{\rho\zeta}^{(1)} + f\sigma_{\rho}^{(1)} &= \frac{2\nu f^2 - (1-2\nu)}{1-\nu} Pe^{\lambda\zeta}. \end{aligned}$$

Розв'язок системи рівнянь (4.40) з крайовою умовою (4.24) буде таким

$$\begin{aligned} \sigma_{\zeta}^{(1)} &= -Pe^{\lambda\zeta} \left(H(\zeta, -f) - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\nu^2 f} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(e^{\lambda\alpha} - \frac{P_{\max}}{P} (e^{-\lambda l} - e^{-\lambda\alpha}) \right) (1 - e^{-\lambda\zeta}) \right); \\ \sigma_{\rho}^{(1)} &= -\frac{\nu}{1-\nu} Pe^{\lambda\zeta} \left(H(\zeta, -f) - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\nu^2 f} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(e^{\lambda\alpha} - 1 - \frac{P_{\max}}{P} (e^{-\lambda l} - e^{-\lambda\alpha}) \right) \right); \\ \tau_{\rho\zeta}^{(1)} &= \frac{\nu f}{1-\nu} Pe^{\lambda\zeta} \left(H(\zeta, -f) - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\nu^2 f} (e^{\lambda\alpha} - \right. \\ &\quad \left. - 1 - \frac{P_{\max}}{P} (e^{-\lambda l} - e^{-\lambda\alpha})) + 2f - \frac{1-2\nu}{\nu f} \right). \quad (4.41) \end{aligned}$$

Тут

$$H(\zeta, -f) = l + \left(\frac{4vf^2}{1-v} + \frac{1-2v}{v} + \frac{\lambda l}{2} \right) \zeta - \frac{\lambda \zeta^2}{2}. \quad (4.42)$$

Уведемо позначення:

$$F(\alpha) = e^{\lambda \alpha} - \frac{P_{\max}}{P} (e^{-\lambda l} - e^{-\lambda \alpha}). \quad (4.43)$$

Зведемо до купи результати (4.39) та (4.41) нульового і першого наближень. З урахуванням позначення (4.43) напруження в заповнювачі при $\zeta \in [0, \alpha]$ мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{\zeta} &= -Pe^{\lambda \zeta} \left(1 + \varphi(H(\zeta, -f) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1+v)(1-2v)}{2v^2 f} F(\alpha)(1 - e^{-\lambda \zeta}) \right) + O(\varphi^2); \\ \sigma_{\rho} &= -\frac{v}{1-v} Pe^{\lambda \zeta} \left(1 + \varphi(H(\zeta, -f) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1+v)(1-2v)}{2v^2 f} (F(\alpha) - 1) \right) + O(\varphi^2); \\ \tau_{\rho \zeta} &= \frac{vf}{1-v} Pe^{\lambda \zeta} \left(1 + \varphi \left(H(\zeta, -f) - \frac{(1+v)(1-2v)}{2v^2 f} (F(\alpha) - 1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2f - \frac{1-2v}{vf} \right) + O(\varphi^2) \right). \end{aligned} \quad (4.44)$$

В зоні $\zeta \in [\alpha, l]$ напруження обчислюються за формулами (4.28) при $P = P_{\max}$.

Координата точки розділу зон α знаходиться із умови неперервності осьових напружень

$$\sigma_{\zeta}(\alpha - 0) = \sigma_{\zeta}(\alpha + 0),$$

яка з урахуванням співвідношень (4.28), (4.44) після перетворення набуває вигляду

$$\frac{P}{P_{\max}} = e^{-2\lambda\alpha} \left(1 + \varphi(\lambda\alpha(\alpha-l)) - \frac{(1+v)(1-2v)}{v(1-v)\lambda} (e^{-\lambda l} - 1)(e^{\lambda\alpha} - 1) + (e^{-\lambda l} - e^{-\lambda\alpha})(1 - e^{-\lambda\alpha}) \right) + O(\varphi^2). \quad (4.45)$$

Обчислимо осьові переміщення заповнювача. Використовуючи закон Гука, запишемо

$$u_{\zeta} = -\frac{1}{E} \left(\int_{\zeta}^{\alpha} + \int_{\alpha}^l \right) (\sigma_{\zeta} - 2\nu\sigma_{\rho}) d\zeta. \quad (4.46)$$

Підставимо у формулу (4.46) відповідні обидвом зонам значення напружень (4.44) та (4.28) при $P = P_{\max}$, після інтегрування одержимо

$$\begin{aligned} u_{\zeta} = & \frac{1}{E} \frac{(1+v)(1-2\nu)}{1-\nu} \left(P_{\max} \frac{e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda l}}{\lambda} + P \frac{e^{\lambda\alpha} - e^{\lambda\zeta}}{\lambda} + \right. \\ & + \varphi \left(P_{\max} \frac{e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda l}}{\lambda} \left(\frac{1}{v\lambda} + l + \frac{(1+v)(1-2\nu)}{2v^2 f} (e^{-\lambda l} - 1) \right) + \right. \\ & \left. + P \frac{e^{\lambda\alpha} - e^{\lambda\zeta}}{\lambda} \left(-\frac{1}{v\lambda} + l - \frac{(1+v)(1-2\nu)}{2v^2 f} (F(\alpha) - 1) \right) \right) + \\ & + P_{\max} \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{4vf^2}{1-\nu} + \frac{1-2\nu}{\nu} - \frac{\lambda l}{2} \right) (e^{-\lambda\alpha}(\lambda\alpha + 1) - e^{-\lambda l}(\lambda l + 1)) + \\ & + P \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{4vf^2}{1-\nu} + \frac{1-2\nu}{\nu} + \frac{\lambda l}{2} \right) (e^{\lambda\alpha}(\lambda\alpha - 1) - e^{\lambda\zeta}(\lambda\zeta - 1)) + \\ & + P_{\max} \frac{1}{2\lambda^2} (e^{-\lambda\alpha}(\lambda^2\alpha^2 + 2\lambda\alpha + 2) - e^{-\lambda l}(\lambda^2 l^2 + 2\lambda l + 2)) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -P \frac{1}{2\lambda^2} \left(e^{\lambda\alpha} (\lambda^2 \alpha^2 - 2\lambda\alpha + 2) - e^{\lambda\zeta} (\lambda^2 \zeta^2 - 2\zeta + 2) \right) - \\
& - P_{\max} \frac{e^{-\lambda l}}{v\lambda} (l - \alpha) + P \frac{F(\alpha)}{v\lambda} (\alpha - \zeta) \Big) + O(\varphi^2) \Big). \quad (4.47)
\end{aligned}$$

Переміщення поршня отримаємо підстановкою у формулу (4.47) значення $\zeta = 0$. Після перегрупування (виділимо $\delta_{1\max}$ – найбільше переміщення поршня на етапі активного навантаження) для етапу розвантаження в умовах неповного проковзування маємо

$$\begin{aligned}
\delta_2 = & \delta_{1\max} + \frac{P_{\max}}{E} \frac{(1+v)(1-2v)}{1-v} \left(P_{\max} \frac{e^{\lambda\alpha} - 1}{\lambda} - \frac{1 - e^{-\lambda\alpha}}{\lambda} + \right. \\
& + \varphi \left(\frac{e^{-\lambda\alpha} - 1}{\lambda} \left(\frac{1}{v\lambda} + l + \frac{(1+v)(1-2v)}{2v^2 f} (e^{-\lambda l} - 1) \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{(1+v)(1-2v)}{2v^2 f} (e^{\lambda\alpha} - 1) \frac{e^{-\lambda l} - e^{-\lambda\alpha}}{\lambda} + \right. \\
& + \frac{P}{P_{\max}} \frac{e^{\lambda\alpha} - 1}{\lambda} \left(-\frac{1}{v\lambda} + l - \frac{(1+v)(1-2v)}{2v^2 f} (e^{\lambda\alpha} - 1) \right) + \\
& + \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{4vf^2}{1-v} + \frac{1-2v}{v} - \frac{\lambda l}{2} \right) (e^{-\lambda\alpha} (\lambda\alpha + 1) - 1) \Big) + \\
& + \frac{P}{P_{\max}} \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{4vf^2}{1-v} + \frac{1-2v}{v} + \frac{\lambda l}{2} \right) (e^{\lambda\alpha} (\lambda\alpha - 1) + 1) \Big) + \\
& + \frac{1}{2\lambda^2} \left(e^{-\lambda\alpha} (\lambda^2 \alpha^2 + 2\lambda\alpha + 2) - 2 \right) - \frac{P}{P_{\max}} \frac{1}{2\lambda^2} \left(e^{\lambda\alpha} (\lambda^2 \alpha^2 - \right.
\end{aligned}$$

$$-2\lambda\alpha + 2) - 2) + \frac{\alpha e^{-\lambda\alpha}}{\nu} + \frac{P}{P_{\max}} \frac{\alpha e^{\lambda\alpha}}{\nu} \Big) + O(\varphi^2) \Big). \quad (4.48)$$

Беручи до уваги, що

$$0 \leq \alpha \leq l, \quad (4.49)$$

запишемо цю умову неповного проковзування з допомогою формули (4.45) в термінах навантажень таким чином:

$$s_* Q_{\max} \leq Q \leq Q_{\max}.$$

Тут s_* – характерне значення коефіцієнта асиметрії циклу навантаження, яке обчислюється за формулою

$$s_* = e^{-2\lambda l} \left(1 - \varphi \left(\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu(1-\nu)\lambda} (e^{-\lambda l} - e^{\lambda l}) \right) \right) + O(\varphi^2). \quad (4.51)$$

Співвідношення (4.45) та (4.48) в параметричній формі описують нелінійну ділянку петлі конструкційного демпфування, відповідну розвантаженню в умовах неповного проковзування. Нерівності (4.49), (4.50) є відповідними еквівалентними умовами монотонності.

Повне проковзування.

Коли параметр α досягне значення $\alpha = l$ (навантаження відповідно зменшиться до величини $Q = s_* Q_{\max}$), на усій поверхні контакту ($\zeta \in [0, l]$) будуть виконуватись умови повного зворотного проковзування. В цьому випадку справедливі формули (4.44), умова монотонності для повного проковзування має вигляд

$$0 \leq Q \leq s_* Q_{\max}, \quad (4.52)$$

а осьові переміщення заповнювача знаходяться з формули (4.46) при $\alpha = l$ інтегруванням напружень (4.44)

$$u_\zeta = \frac{P}{E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \left(\frac{e^{\lambda l} - e^{\lambda\zeta}}{\lambda} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \varphi \left(\frac{e^{\lambda l} - e^{\lambda \zeta}}{\lambda} \left(-\frac{1}{v\lambda} + l - \frac{(1+v)(1-2v)}{v(1-v)\lambda} (e^{\lambda l} - 1) \right) + \right. \\
& + \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{4vf^2}{1-v} + \frac{1-2v}{v} + \frac{\lambda l}{2} \right) (e^{\lambda l} (\lambda l - 1) - e^{\lambda \zeta} (\lambda \zeta - 1)) - \\
& - \frac{1}{2\lambda^2} (e^{\lambda l} (\lambda^2 l^2 - 2\lambda l + 2) - e^{\lambda \zeta} (\lambda^2 \zeta^2 - 2\lambda \zeta + 2)) + \\
& \left. + \frac{e^{\lambda l}}{v\lambda} (l - \zeta) \right) + O(\varphi^2). \tag{4.53}
\end{aligned}$$

Переміщення поршня одержимо з формули (4.53) при $\zeta = 0$

$$\begin{aligned}
\delta = u_{\zeta}(0) & + \frac{P}{E} \frac{(1+v)(1-2v)}{1-v} \left(\frac{e^{\lambda l} - 1}{\lambda} + \right. \\
& + \varphi \left(\frac{e^{\lambda l} - 1}{\lambda} \left(-\frac{1}{v\lambda} + l - \frac{(1+v)(1-2v)}{v(1-v)} \frac{e^{\lambda l} - 1}{\lambda} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{4vf^2}{1-v} + \frac{1-2v}{v} + \frac{\lambda l}{2} \right) (1 + e^{\lambda l} (\lambda l - 1)) + \\
& \left. \left. + \frac{1}{2\lambda^2} (2 - e^{\lambda l} (\lambda^2 l^2 - 2\lambda l + 2)) + \frac{le^{\lambda l}}{v\lambda} \right) + O(\varphi^2) \right). \tag{4.54}
\end{aligned}$$

Співвідношення (4.54) описує лінійну ділянку петлі конструкційного гістерезису, відповідну розвантаженню в умовах повного зворотного проковзування. Межі застосовності формули (4.54) встановлює нерівність (4.52).

Аналіз результатів. Таким чином, розв'язок мішаної контактної задачі про немонотонне деформування пружного заповнювача в конічній обоймі одержано. Записані вирази для напружень, осьових переміщень заповнювача та осадки поршня. На рис. 4.3 наведено діаграми деформування систем з

різними орієнтаціями твірної конуса. Значенню кута $\varphi = 0,1$ відповідає конічна поверхня контакту, звужена в бік поршня (рис. 4.1); значенню $\varphi = 0$ – циліндрична поверхня контакту; значенню $\varphi = -0,1$ – конічна поверхня контакту, розширена в бік поршня. Безрозмірні ординати та абсциси координатної площини зв'язані з розмірними такими залежностями:

$$\bar{Q} = Q/Q_{\max} ; \quad \bar{\delta} = \frac{u_z(0)E}{R_o P_{\max}}$$

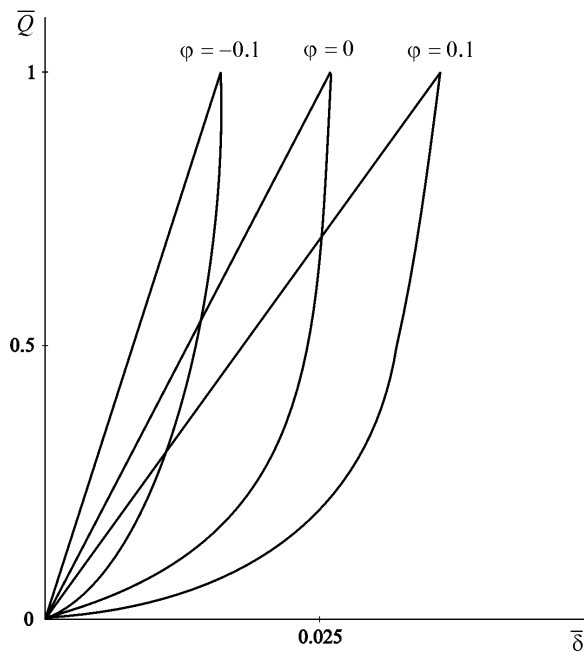


Рисунок 4.3

Порівнюючи нахил прямих активного навантаження та площі петель конструкційного демпфування, бачимо явну перевагу системи при $\varphi = 0,1$ над іншими двома в податливості та демпфуючій здатності, що доводить доцільність проектування оболонкових демпферів саме з такою орієнтацією конічної поверхні контакту.

РОЗДІЛ 5

ОПТИМІЗАЦІЯ БАГАТОСЕКЦІЙНИХ ОБОЛОНКОВИХ СИСТЕМ З ДЕФОРМІВНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ

5.1 Оптимізація демпферів сухого тертя за критерієм мінімальної жорсткості

Розглянемо ще один спосіб збільшення податливості оболонкових пружних елементів – послідовне встановлення секцій оптимальної довжини. Спочатку торкнемося обставин, які зумовили появу цієї ідеї.

Виходячи із співвідношень (1.66), (1.69), (1.70) першого розділу, запишемо податливість пружного елемента з оболонкою постійної товщини. Беручи до уваги наявність зон проковзування і зчеплення, отримуємо податливість системи як функцію безрозмірної півдовжини $l = a / R$

$$A_{II}(l) = \frac{2}{\pi E_0 h_0} \left\{ v_0 l + \frac{3\omega_0 + 2 - v_0}{2f} \times \right. \\ \left. \times \begin{cases} 1 + \gamma_* (-1 + 2fl + \ln \gamma_*), & \alpha_* \leq l \\ 1 - e^{-2fl}, & \alpha_* > l \end{cases} \right\}. \quad (5.1)$$

Тут введені позначення

$$\gamma_* = \frac{1 - 2v_0}{6\omega_0 + 5 - 4v_0}, \quad \alpha_* = \alpha_0 l,$$

з урахуванням яких формула (1.66) для координати розмежування зон проковзування і зчеплення набуває вигляду

$$\alpha_* = -\frac{\ln \gamma_*}{2f}. \quad (5.2)$$

Вернемося тепер до рисунка 1.6 із першого розділу, який ілюструє вплив безрозмірної довжини заповнювача l на відносну податливість

$$\tilde{\Lambda} = \frac{E_0 \delta}{PR} = \frac{\pi}{2} E_0 R \Lambda$$

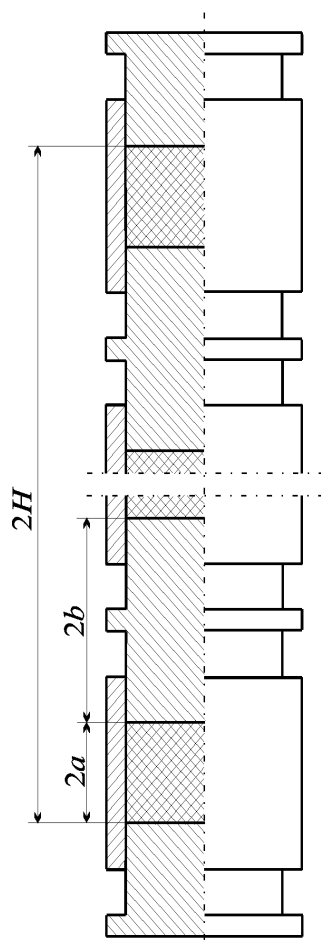


Рисунок 5.1 – Схема багатосекційного пружного елемента (оболонки сталі товщини)

при різних значеннях коефіцієнта тертя. Аналіз графіків свідчить, що $\Lambda(l)$ – монотонно зростаюча функція. Однак при великих значеннях аргумента l швидкість росту податливості $\Lambda(l)$ суттєво зменшується. Тому екстенсивне нарощування довжини секції – не метод збільшення податливості оболонкової пружини. Зауважимо також, що конструкційне демпфування – досить важливий фактор ефективної роботи пристрою – присутнє лише в зоні взаємного проковзування оболонки і заповнювача.

Виходячи з викладеного, пропонується використати спосіб послідовного встановлення секцій оптимальної довжини у пружному елементі (рис. 5.1) з тим, щоб збільшити податливість і поліпшити демпфуючі характеристики пристрою шляхом найбільш раціонального використання усієї його довжини.

Нехай $2H$ – загальна робоча довжина усього

пружного елемента, $2b$ – технологічно фіксована довжина поршня, $2a$ – робоча довжина секції. Тоді для безрозмірної півдовжини N -секційного пружного елемента маємо

$$L = Nl + (N - 1)d,$$

де $L = H/R$, $d = b/R$.

Податливість усього пружного елемента одержимо як суму податливостей послідовно встановлених секцій

$$\Lambda_{\Sigma}(l) = \Lambda(l)(L + d)/(l + d). \quad (5.3)$$

Знайдемо оптимальну величину l_* , при якій податливість $\Lambda_{\Sigma}(l)$ досягає максимуму, тобто:

$$\Lambda_{\Sigma}(l_*) = \max_{l \in [0, L]} \Lambda_{\Sigma}(l). \quad (5.4)$$

Дослідження функції $\Lambda_{\Sigma}(l)$ на екстремум доводить, що при $l > \alpha_*$ похідна $\Lambda'_{\Sigma}(l) < 0$, а єдиною точкою максимуму функції $\Lambda_{\Sigma}(l)$ на відрізку $[0, \alpha_*]$ є корінь l_* трансцендентного рівняння

$$e^{2fl} \left(\frac{1}{2f} - \frac{\nu d}{3\omega_0 + 2 - \nu_0} \right) = l + d + \frac{1}{2f}. \quad (5.5)$$

На рис. 5.2 зображено вплив безрозмірної довжини секції на відносну податливість $\tilde{\Lambda}_{p\Sigma} = \pi E_0 R \Lambda_{p\Sigma} / 2$ багатосекційного пружного елемента при $d = 0,91$; $\nu_0 = 0,3$; $\nu = 0,4995$; $\varepsilon_0 = 0,001$ (тоді $\omega_0 = 1$). Як видно із наведених графічних залежностей, із збільшенням коефіцієнта тертя оптимальна довжина секції зменшується.

Як приклад, візьмемо значення коефіцієнта тертя $f = 0,5$ і вирахуємо оптимальну довжину секції пружного елемента з характеристиками $h_0 = 0,005\text{м}$; $R = 0,0825\text{м}$; $E_0 = 200\text{ГПа}$. У результаті розв'язання рівняння (5.5) отримуємо: оптимальна безрозмірна довжина секції $l_* = 1,2$. Довжина зони проковзування обраховується за формулою (5.2) і дорівнює

$\alpha_* = 3,3 > l_*$. Податливість секції оптимальної довжини, виходячи із формули (5.1), дорівнює $L_p(l) = 2,325 \text{ нм/Н}$.

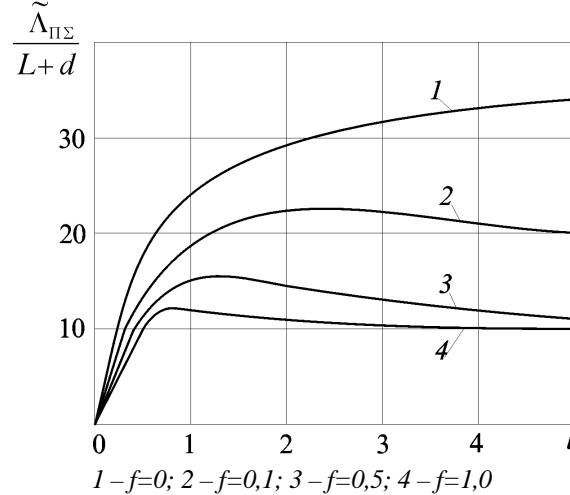


Рисунок 5.2 – Вплив безрозмірної довжини ланки на відносну податливість багатосекційного пружного елемента

Визначимо вигравш в податливості, який досягається послідовним встановленням секцій оптимальної довжини. Для цього розглянемо два пружних елементи однакової загальної довжини: один містить, наприклад, три секції оптимальної довжини, а другий складається із однієї секції. Загальна робоча безрозмірна півдовжина кожного із них буде $L = 3l_* + 2d = 5,42$. Податливість трисекційного визначається за формулою (5.3) і дорівнює

$$L_{p\Sigma}(l_*) = 3L_p(l_*) = 6,975 \text{ нм/Н}.$$

Податливість односекційного визначаємо за формулою (5.1). Маємо $L_p(l) = 4,162 \text{ нм/Н}$. Як видно із отриманих результатів, податливість трисекційного пружного елемента в 1,68 рази більша від податливості односекційного пружного елемента такої ж довжини.

Розглянемо тепер багатосекційний пружний елемент, секції якого являють собою коаксіальні оболонки, розділені заповнювачем (рис. 5.3). Напружено-деформований стан такої

секції досліджений у другому розділі. Підставляючи вираз (2.100) для податливості секції у формулу (5.3), отримуємо податливість багатосекційного коаксіального пружного елемента

$$\Lambda_{\kappa\Sigma}(l) = \frac{2(L+d)}{\pi\sqrt{R_1^2 - R_2^2}(l+d)} \left(\chi_1 l + \chi_2 \frac{1 - e^{-\lambda_0 l}}{\lambda_0} \right). \quad (5.6)$$

Тут введені позначення:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{1}{f_1 R_1 + f_2 R_2} \left(\frac{R_1^2}{E_1 h_1} \nu_1 f_1 - \frac{R_2^2}{E_2 h_2} \nu_2 f_2 \right); \\ \chi_2 &= 3 \frac{\gamma}{E} + \frac{2}{R_1^2 - R_2^2} \left(\frac{R_1^3}{E_1 h_1} + \frac{R_2^3}{E_2 h_2} \right) - \chi_1; \\ \lambda_0 &= \frac{2}{\sqrt{R_1^2 - R_2^2}} (f_1 R_1 + f_2 R_2). \end{aligned}$$

Зазначимо також, що безрозмірні величини тут мають вигляд:

$$L = H / \sqrt{R_1^2 - R_2^2}; \quad d = b / \sqrt{R_1^2 - R_2^2}; \quad l = a / \sqrt{R_1^2 - R_2^2}.$$

Максимум функції (5.6) досягається при довжині $l = l_*$, яка визначається із трансцендентного рівняння

$$e^{\lambda_0 l} \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{\chi_1 d}{\chi_2} \right) = l + d + \frac{1}{\lambda_0}. \quad (5.7)$$

Як приклад, розглянемо пружний елемент з характеристиками

$$\begin{aligned} R_1 &= 0,08\text{м}; \quad R_2 = 0,04\text{м}; \quad h_1 = 0,005\text{м}; \quad h_2 = 0,01\text{м}; \\ d &= 1; \quad f_1 = f_2 = 0,5; \quad \nu_1 = \nu_2 = 0,3; \quad E_1 = E_2 = 200\text{ГН/м}^2; \\ E &= 0,2\text{ГН/м}^2; \quad \nu = 0,4995. \end{aligned}$$

В результаті розв'язування рівняння (5.7) отримуємо: оптимальна безрозмірна довжина коаксіальної секції пружного елемента $l_* = 1,18$. Податливість такої секції вираховується за формулою (2.100) і дорівнює $\Lambda_k(l_*) = 1,195 \text{ нм/Н}$.

Розглянемо, нарешті, багатосекційний пружний елемент (рис. 5.4), який складається із рівномірних секцій, досліджених в розділі 3.1. Підставляючи вираз (3.28) для податливості секції у формулу (5.3), отримуємо податливість багатосекційного рівномірного пружного елемента

$$\Lambda_{\text{рв}}(l) = \frac{2(L+d)}{\pi E_0 h_0 (l+d)} \left(2\nu_0 l + 2 \frac{\nu_0 - 1}{f} \ln \frac{1+e^{-2fl}}{2} + 3\omega_0 \frac{1-e^{-2fl}}{2f} \right). \quad (5.8)$$

Максимум цього виразу досягається при довжині $l = l_*$, яка визначається із трансцендентного рівняння

$$2\nu_0 d + 3\omega_0 \left[-\frac{1}{2f} + \left(l + d + \frac{1}{2f} \right) e^{-2fl} \right] + 4(1-\nu_0) \left(\frac{l+d}{1+e^{2fl}} + \frac{1}{2f} \ln \frac{1+e^{-2fl}}{2} \right) = 0. \quad (5.9)$$

За конкретний приклад візьмемо рівномірний пружний елемент з характеристиками $R = 0,0825 \text{ м}$; $h_0 = 0,005 \text{ м}$; $E_0 = 200 \text{ ГН/м}^2$; $d = 0,91$; $\nu_0 = 0,3$; $f = 0,5$; $\omega_0 = 1$. У результаті розв'язування рівняння (5.9) отримуємо: оптимальна безрозмірна довжина рівномірної секції $l_* = 1,38$. Податливість рівномірної секції оптимальної довжини визначається за формулою (3.28) і дорівнює $\Lambda_p(l_*) = 2,792 \text{ нм/Н}$.

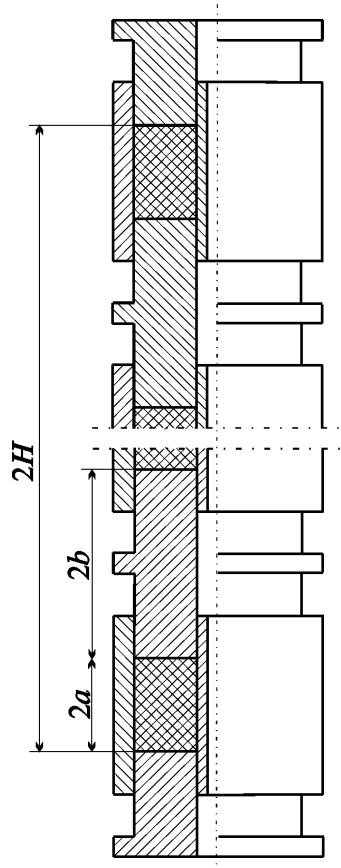


Рисунок 5.3 – Схема багатосекційного пружного елемента (коаксіальні оболонки постійної товщини)

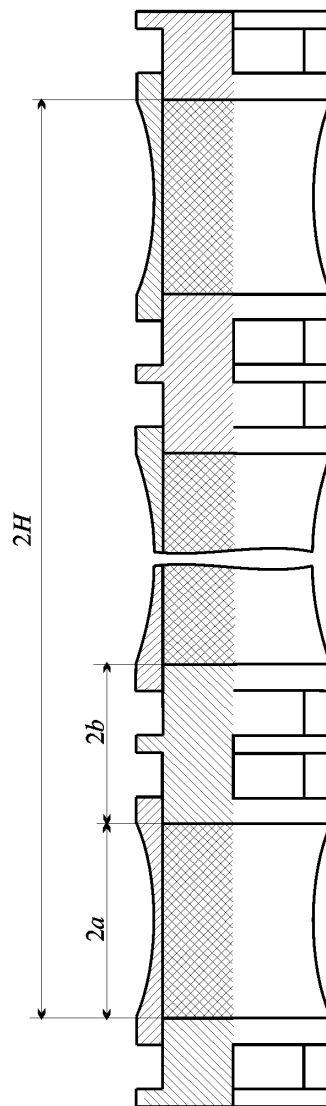


Рисунок 5.4 – Схема багатосекційного пружного елемента (рівномічні оболонки)

На практиці доволі частими є випадки, коли жорстке обмеження на загальну довжину пристрою не дає змоги точно витримати оптимальну довжину секції пружного елемента. При цьому величина $N = (L + d)/(l + d)$ може не бути натуральним числом. У такій ситуації мова повинна йти про оптимальну кількість секцій N_* , яку належить вмістити в задану довжину. За величину N_* слід прийняти те з двох сусідніх натуральних значень $N_1 = [N]$, $N_2 = [N] + 1$, для якого величина податливості $\Lambda_y(l_i)$, $l_i = (L - (N_i - 1)d)/N_i$, $i = 1; 2$ буде найбільшою.

Підсумовуючи викладене, відзначимо, що запропоновані способи збільшення податливості оболонкових пружних елементів досить прості в застосуванні і в той же час достатньо ефективні, особливо за наявності жорстких обмежень на габаритні розміри системи. На основі отриманих результатів розроблені нові конструкції оболонкових віброізоляторів, захищені авторськими свідоцтвами на винаходи [1,2].

5.2 Розподіл сил тертя у багатосекційному пружному елементі бурового амортизатора

Для зменшення жорсткості і підвищення зносостійкості амортизаторів коливань бурильної колони в їхніх конструкціях доцільно застосовувати багатосекційні оболонкові пружні елементи, що складаються із певної кількості секцій, зібраних послідовно [21, 80].

Методика розрахунку багатосекційних амортизаторів, які складаються із найпростіших пружних елементів (заповнювач циліндричної оболонки стискається по торцях поршнями), розроблена в розділі 5.1. Там же, зокрема, показано, що податливість усієї конструкції є сумою податливостей складових частин, а також запропоновано підхід до оптимізації довжини секції пружного елемента. Однак вказана схема незастосовна для розрахунку складніших конструкцій пружних елементів, наприклад, таких, що містять коаксіальний ствол для циркуляції промивальної рідини, бо, як буде показано далі, характер розподілу сил тертя в таких системах априорі невідомий і підлягає визначенню в ході розв'язання задачі.

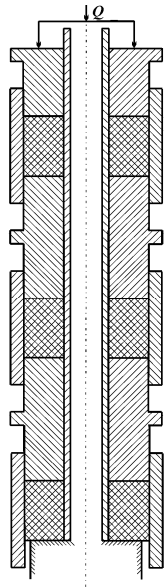


Рисунок 5.5 – Багатосекційний пружний елемент, зібраний на спільному стволі

невідомого навантаження Q_n . Нехай, як і раніше, $2a$ – довжина заповнювача, R_1, R_2 – радіуси оболонки і ствола відповідно, h_1, h_2 – їх товщини. Введемо циліндричну систему координат r, β, z (рис. 5.6).

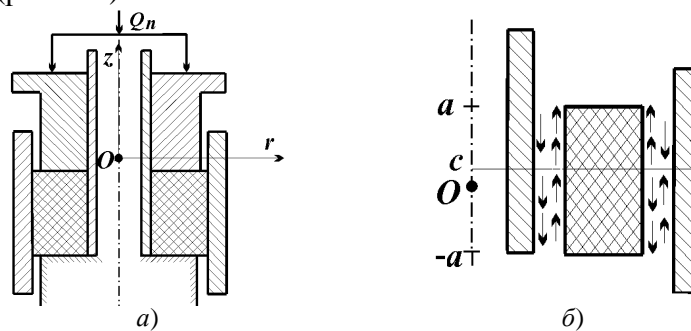


Рисунок 5.6 – Навантаження однієї секції (а), та напрямки сил тертя (б)

Розглянемо оболонковий пружний елемент бурового амортизатора такої конструкції (рис. 5.5). На загальному стволі послідовно розташовані порожнисті циліндри із слабкостисливого податливого на зсув матеріалу, які поміщені у пружні циліндричні оболонки і розділені жорсткими поршнями. На верхній поршень діє задане навантаження Q , нижній поршень N -ої секції жорстко з'єднаний зі стволом. Потрібно оцінити вплив кількості однакових елементів на податливість розглядуваної системи, враховуючи фрикційну взаємодію заповнювача з оболонками і з стволом.

Розглянемо осесиметричний напружено-деформований стан довільного n -ого елемента, який перебуває під дією наперед

Принципово характер розподілу контактних напружень може бути досліджений при наступних спрощуючих припущеннях. Оболонка і ствол приймаються абсолютно жорсткими, причому ствол нерухомий, а оболонка має можливість осьового переміщення як жорстке ціле. Пружна рівновага заповнювача описується одновимірною моделлю, побудованою в розділі 2.1:

а) усереднене рівняння рівноваги у проекції на вісь z

$$\frac{d\sigma_z}{dz} + \frac{2\pi}{S}(\tau_1 R_1 - \tau_2 R_2) = 0, \quad z = [-a, a]; \quad (5.10)$$

б) зв'язки між напруженнями і деформаціями, що впливають із закону Гука

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\beta = \sigma, \quad \sigma_z = \frac{1-\nu}{\nu} \sigma, \\ \varepsilon_r = \varepsilon_\beta = 0, \quad \varepsilon_z = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E\nu} \sigma; \end{aligned} \quad (5.11)$$

в) умови сухого тертя на контактуючих поверхнях

$$\begin{aligned} \tau_2 = f_2 \sigma, \quad r = R_2; \\ \tau_1 = -f_1 \sigma \operatorname{sgn}(z - c), \quad r = R_1; \end{aligned} \quad (5.12)$$

г) крайові умови на торцях

$$\sigma_z(a) = -Q_n/S; \quad u_z(-a) = 0. \quad (5.13)$$

У формулах (5.10) – (5.13) $\sigma_r, \sigma_\beta, \sigma_z$ – нормальні напруження, $\varepsilon_r, \varepsilon_\beta, \varepsilon_z$ – відповідні їм деформації, u_z – осьове переміщення заповнювача, σ і τ_1, τ_2 – нормальне і дотичні контактні напруження на поверхнях $r = R_1$ і $r = R_2$; f_1 і f_2 – коефіцієнти тертя пар заповнювач – оболонка і заповнювач – ствол, $S = \pi(R_1^2 - R_2^2)$ – площа поперечного перерізу заповнювача; E, ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона його матеріалу.

Зазначимо, що точка зміни знаку взаємного переміщення оболонки і заповнювача є наперед невідомою, тому її координати

ната c , введена у формулу (5.12), повинна визначатися в процесі розв'язання задачі.

Введемо безрозмірну координату $\zeta = z/a$. Виключимо за допомогою (5.11) осьове напруження і врахуємо умови фрикційного контакту (5.12). Із рівняння рівноваги (5.10) одержимо диференціальне рівняння для визначення контактного напруження

$$\frac{d\sigma}{d\zeta} - (t_2 + t_1 \operatorname{sgn}(\zeta - \eta))\sigma = 0, \quad \zeta \in [-1, 1]. \quad (5.14)$$

Тут $\eta = c/a$; $t_i = \frac{v f_i}{1 - \nu} \frac{S_i}{2S}$; $S_i = 4\pi R_i a$, $i = 1, 2$ – площі бічних поверхонь заповнювача.

Розв'язок рівняння (5.14) з крайовою умовою

$$\sigma(1) = -\frac{v Q_n}{(1 - \nu) S}$$

подається виразом

$$\sigma(\zeta) = -\frac{v Q_n}{(1 - \nu) S} \exp\left\{t_2(\zeta - 1) + t_1(|\zeta - \eta| - 1 + \eta)\right\}. \quad (5.15)$$

Підставляючи результат (5.15) у формули (5.12), одержуємо розподіл сил тертя в контактах

$$\tau_2(\zeta) = -\frac{v Q_n f_2}{(1 - \nu) S} \exp\left\{t_2(\zeta - 1) + t_1(|\zeta - \eta| - 1 + \eta)\right\} \quad (5.16)$$

$$\tau_1(\zeta) = -\frac{v Q_n f_1}{(1 - \nu) S} \operatorname{sgn}(\zeta - \eta) \exp\left\{t_2(\zeta - 1) + t_1(|\zeta - \eta| - 1 + \eta)\right\}$$

Вимагаючи виконання умови рівноваги

$$\int_{-1}^1 \tau_1(\zeta) d\zeta = 0,$$

приходимо до трансцендентного рівняння для визначення параметра η

$$\frac{1}{t_1+t_2} + \frac{1}{t_2-t_1} \exp(2(t_1\eta - t_2)) - \left(\frac{1}{t_2-t_1} + \frac{1}{t_1+t_2} \right) \exp((t_1+t_2)(\eta-1)) = 0. \quad (5.17)$$

Неважко показати, що корінь цього рівняння невід'ємний, причому $\eta = 0$ при $t_2 = 0$ (відсутність тертя на стволі).

Визначимо величину навантаження, яке передається на наступний поршень

$$Q_{n+1} = -S\sigma_\zeta(-1) = -\frac{1-\nu}{\nu} S\sigma(-1).$$

З урахуванням виразу (5.15) маємо

$$Q_{n+1} = Q_n \exp(2(t_1\eta - t_2)), \quad n = \overline{1, N-1}. \quad (5.18)$$

Враховуючи, що $Q_1 = Q$, можемо зробити висновок, що контактні напруження в n -ій секції пружного елемента визначаються за допомогою формул (5.15) – (5.18).

Перейдемо до деформованого стану. Маючи на увазі висновки, зроблені в розділі 2 (див. обґрунтування формул (2.81) – (2.100)), осьову деформацію заповнювача можна подати як асимптотичну суму двох доданків: осьова деформація стисливого заповнювача в жорсткій обоймі під дією сили Q_n і контактних напружень (5.15), (5.16) плюс осьова деформація нестисливого заповнювача, що виникає за рахунок збільшення об'єму при деформації оболонок під дією тих же контактних напружень. Крім того, слід врахувати, що в районі верхнього поршня у стволі діє стискаюче осьове зусилля

$$N_\zeta(1) = (Q_n - Q)/(2\pi R_2) = (Q_n - Q)a/S_2. \quad (5.19)$$

Враховуючи сказане, на основі співвідношень (2.85), (2.96) визначаємо осьову деформацію заповнювача, а відтак, інтегруючи, знаходимо осадку верхнього поршня в n -ій секції пружного елемента. Опускаючи громіздкі проміжні викладки, тут запишемо тільки остаточний результат

$$\begin{aligned}
\delta_n = & -\frac{1}{S} \left\{ Q - Q_n \exp(-2(t_2 - t_1\eta)) \right\} \frac{2v_2 R_2 a}{E_2 h_2} + \\
& + \frac{2v Q_n}{(1-v)S} \left\{ \left(\frac{(1-2v)(1+v)a}{Ev} + \frac{S_1 R_1^2}{SE_1 h_1} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{S_2 R_2^2}{SE_2 h_2} - \frac{f_2 v_2 R_2 S_2 a}{SE_2 h_2} \frac{1}{t_1 - t_2} + \frac{f_1 v_1 R_1 S_1 a}{SE_1 h_1} \right) \times \right. \\
& \times \frac{1 - \exp((t_1 + t_2)(\eta - 1))}{t_1 + t_2} + \\
& \left. \left. + \frac{f_1 v_1 R_1 S_1 a}{SE_1 h_1} \frac{\eta \exp((t_1 + t_2)(\eta - 1))}{t_1 - t_2} \right\}. \quad (5.20)
\end{aligned}$$

Визначимо осадку N -секційного пружного елемента, який складається із послідовно встановлених на спільному стволі однакових секцій

$$\delta = \sum_{n=1}^N \delta_n. \quad (5.21)$$

Враховуючи, що, згідно з формулою (5.18), послідовність навантажень на поршні є геометричною прогресією із знаменником $q = \exp(2(t_1\eta - t_2))$ і $Q_1 = Q$, одержуємо, що

$$\sum_{n=1}^N Q_n = Q \sum_{n=1}^N q^{n-1} = Q(1 - q^N)/(1 - q). \quad (5.22)$$

Тоді співвідношення (5.21) з урахуванням формул (5.20), (5.22) остаточно подається в розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned}
\delta = & \frac{2Q}{S} \left\{ -\frac{v_2 R_2 a}{E_2 h_2} N + \left\{ \frac{v_2 R_2 a}{E_2 h_2} \exp(-2(t_2 - t_1\eta)) + \right. \right. \\
& + \frac{v}{1-v} \left\{ \left(\frac{(1-2v)(1+v)a}{Ev} + \frac{S_1 R_1^2}{SE_1 h_1} + \frac{S_2 R_2^2}{SE_2 h_2} - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{f_2 v_2 R_2 S_2 a}{SE_2 h_2} \frac{1}{t_1 - t_2} + \frac{f_1 v_1 R_1 S_1 a}{SE_1 h_1} \left. \frac{1 - \exp((t_1 + t_2)(\eta - 1))}{t_1 + t_2} \right. \\
& + \left. \frac{f_1 v_1 R_1 S_1 a \eta \exp((t_1 + t_2)(\eta - 1))}{SE_1 h_1} \frac{1}{t_1 - t_2} \right\} \left. \frac{1 - \exp(-2N(t_2 - t_1 \eta))}{1 - \exp(-2(t_2 - t_1 \eta))} \right\}. \quad (5.23)
\end{aligned}$$

У частковому випадку $t_2 = 0$ ($\eta = 0$), що означає відсутність тертя на стволі, маємо

$$\begin{aligned}
\delta = & \frac{2vQ}{(1-v)S} \left(\frac{(1-2v)(1+v)a}{Ev} + \frac{S_1 R_1^2}{SE_1 h_1} + \right. \\
& \left. + \frac{S_2 R_2^2}{SE_2 h_2} + \frac{f_1 v_1 R_1 S_1 a}{SE_1 h_1} \right) \frac{1 - \exp(-t_1)}{t_1} N. \quad (5.24)
\end{aligned}$$

Як впливає із виразу (5.23), осадка багатосекційного пружного елемента не пропорційна кількості секцій. Таким чином, його податливість не є адитивною функцією податливостей складових частин. Причина цього, як видно із порівняння формул (5.23) і (5.24), полягає у присутності тертя на стволі.

Більш компактні співвідношення для податливості можна одержати, нехтуючи ефектом Пуассона пружних оболонок ($v_i \rightarrow 0, i = 1, 2$) і коректно враховуючи слабу стисливість заповнювача ($v \rightarrow 0,5$).

Тоді із формули (5.23) маємо

$$\delta = LQ,$$

де

$$\begin{aligned}
L = & \frac{1}{S} \left(\frac{6(1-2v)a}{E} + \frac{S_1 R_1^2}{SE_1 h_1} + \frac{S_2 R_2^2}{SE_2 h_2} \right) \frac{1 - \exp((t_1^* + t_2^*)(\eta - 1))}{t_1^* + t_2^*} \times \\
& \times \frac{1 - \exp(-2N(t_2^* - t_1^* \eta))}{1 - \exp(-2(t_2^* - t_1^* \eta))},
\end{aligned}$$

$$t_i^* = \lim_{\nu \rightarrow 0,5} t_i = f_i S_i / 2S, \quad i=1,2. \quad (5.25)$$

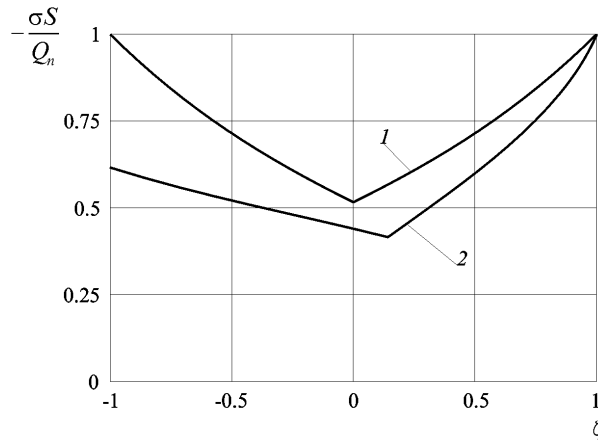
Приклад розрахунку. Проілюструємо отримані аналітичні результати для конкретних параметрів багатосекційного пружного елемента. Нехай $a = R_2$, $R_1 = 2R_2$, $\nu \approx 0,5$. Тоді $t_2 = 4f_2/3$, $t_1 = 8f_1/3$.

На рис. 5.7 наведено графіки, що характеризують розподіл безрозмірного контактного тиску в довільній секції при різних значеннях коефіцієнтів тертя. Лінії 1 відповідають значенням $f_2 = 0$, $f_1 = 0,25$ ($\eta = 0$), лінії 2 – значенням $f_2 = 0,25$, $f_1 = 0,25$ ($\eta \approx 0,1338$). Видно, що наявність тертя на стволі порушує симетрію епюри контактного тиску відносно середини секції.

Вплив кількості секцій на безрозмірну податливість багатосекційного пружного елемента

$$\tilde{\Lambda} = \mathcal{K} \left\{ \frac{2}{S} \left(\frac{3(1-2\nu)a}{E} + \frac{S_1 R_1^2}{S E_1 h_1} + \frac{S_2 R_2^2}{S E_2 h_2} \right) \right\}^{-1}$$

наведено на рис. 5.8. Світлі точки відповідають значенням $f_2 = 0$, $f_1 = 0,25$, темні точки – значенням $f_2 = 0,25$, $f_1 = 0,25$.



1 – $f_2=0, f_1=0,25$; 2 – $f_2=0,25, f_1=0,25$;

Рисунок 5.7 – Розподіл контактний тиску в секції

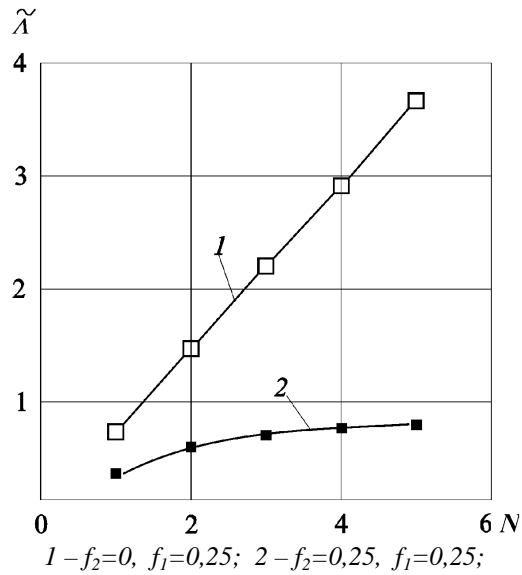


Рисунок 5.8 – Залежність податливості від числа секцій

Таким чином, податливість багатосекційного пружного елемента, зібраного на спільному стволі, пропорційна кількості секцій тільки у разі відсутності тертя на стволі. При фрикційному контакті заповнювача зі стволом темп зростання податливості зменшується при збільшенні кількості секцій.

Із зростанням номера секції її напруженість зменшується (див. формулу (5.18)). Цей факт доцільно врахувати при оптимальному проектуванні розглянутої конструкції.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. А.с. 1527425 СССР, МКИ F 16 F 1/34. Амортизатор / С.В.Величкович, И.И.Попадюк, И.П.Шацкий, В.М.Шопа // Оpubл. 07.12.1989 г., Бюл. № 45.
2. А.с. 1548553 СССР, МКИ F 16 F 1/34. Упругий элемент / С.В.Величкович, В.М.Шопа, И.П.Шацкий, И.И.Попадюк // Оpubл. 07.04.1990 г., Бюл. № 9.
3. А.с. 1601315 СССР, МКИ E 21 B 17/07. Забойный амортизатор / А.С.Величкович, С.В.Величкович (СССР) // Оpubл. 23.10.90, Бюл. № 39.
4. А.с. 1719741 СССР, МКИ F 16 F 1/40. Упругий элемент / С.В.Величкович, В.М.Шопа, А.С.Величкович // Оpubл. 15.03.1991, Бюл. № 10.
5. Александров В.М., Кудиш И.И. Асимптотические методы в контактных задачах с нелинейным трением // Прикл. мех. – 1981. – 17, № 6. – С. 76–84.
6. Афанасьев П.П. Конструкционное демпфирование. – М.: МАИ, 1972. – 97 с.
7. Бедзир А.А. Моделирование фрикционного взаимодействия прорезной цилиндрической оболочки с деформируемым заполнителем // XVI конф. по вопросам рассеяния энергии при колебаниях механических систем. Тез. докл. – Киев ИПП АН УССР, 1992. – С. 4.
8. Величкович А.С. Віброзахисні пристрої з оболонковими пружними елементами // Тези наук.-техн. конф. проф.-викл. складу держ. техн. ун-ту нафти і газу. – Ів.-Франківськ: ІФДТУНГ. – 1998. – С. 35.
9. Величкович А.С. Механізми передачі осьового навантаження і крутного моменту в бурових амортизаторах // Розвідка і розробка нафтових і газових родовищ. Сер.: Нафтогазопромислове обладнання. Івано-Франківськ: – ІФНТУНГ. – 2001. – № 38. – С. 101–107.
10. Величкович А.С. Оптимізація роботи оболонкових пружних елементів бурових амортизаторів // Розвідка і розробка нафтових і газових родовищ. Сер.: Буріння нафтових і газових свердловин. – Ів.-Франківськ: ІФДТУНГ. – 1996. – № 33. – С. 112–117.
11. Величкович А.С. Пружні елементи бурових амортизаторів з розширеним діапазоном робочих навантажень // Розвідка і розробка нафтових і газових родовищ. Сер.: Буріння нафтових і газових свердловин. – Ів.-Франківськ: ІФДТУНГ. – 1997. – № 34. – С. 51–57.

12. Величкович А.С., Величкович С.В. Буровые амортизаторы двойного действия для регулирования динамического режима буровой колонны // Хим. и нефтегазовое машиностроение. – 1997. – № 6. – С. 20–22.
13. Величкович А.С., Величкович С.В. Забойный амортизатор с оболочечным упругим элементом переменной жесткости // Хим. и нефтяное машиностроение. – 1994. – № 8. – С. 10–11.
14. Величкович А.С., Величкович С.В. Оболочечный буровой амортизатор повышенной податливости // Хим. и нефтегазовое машиностроение. – 2002. – № 31. – С. 12–15.
15. Величкович А.С., Величкович С.В. Особливості конструкцій та параметрична оптимізація оболонкових пружних елементів // Тези доп. IV Міжнародної конференції з механіки неоднорідних структур. – Тернопіль: ТПУ ім. І.Пулюя. – 1995. – С. 22.
16. Величкович А.С., Величкович С.В. Особливості проектування та оптимізація оболонкових пружних елементів віброзахисних систем // Тези доп. Міжн. наук. конф. “Сучасні проблеми механіки і математики”. – Львів: ІППММ НАН України. – 1998. – С. 52.
17. Величкович А.С., Величкович С.В. Повышение надежности и эффективности буровых амортизаторов с оболочечными упругими элементами // Хим. и нефтегазовое машиностроение. – 2000. – № 2. – С. 4–15.
18. Величкович А.С., Величкович С.В. Техніка і технологія віброзахисту та регулювання динамічного режиму бурової колони // Тези доп. Міжнародного симпозиуму українських інженерів-механіків. – Львів: Кінпатрі, 1993. – С. 221.
19. Величкович А.С., Величкович С.В. Упругий шпindel забойного двигателя // Хим. и нефтяное машиностроение. – 2000. – № 5. – С. 14–15.
20. Величкович А.С., Величкович С.В. Упругий элемент бурового амортизатора для бурения скважин в аномальных температурных условиях // Хим. и нефтегазовое машиностроение. – 1998. – № 12. – С. 38–39.
21. Величкович А.С., Величкович С.В., Шопа В.М. Комплекс засобів віброзахисту та регулювання динамічного режиму бурової колони. – Івано-Франківськ: Сіверсія ЛТД, 2000. – 86 с.
22. Величкович А.С., Шопа В.М. Бурові амортизатори як засіб підвищення техніко-економічних показників буріння свердловин // Нафтова і газова промисловість. – 2000. – № 3. – С. 16–18.
23. Величкович С.В. Расчет упругого элемента амортизатора колебаний буровой колонны // Хим. и нефт. машиностроение. – 1989. – № 3. – С. 5–7.

24. Величкович С.В., Величкович А.С. Виброзащитные устройства с оболочечными упругими элементами // Тез. докл. XVI конф. по вопросам рассеяния энергии при колебаниях механических систем. – Киев: Институт проблем прочности АН Украины. – 1992. – С. 10.
25. Величкович С.В., Попадюк И.И., Шацкий И.П. Совершенствование технологии бурения нефтяных и газовых скважин // 6 Всес.конф. по управлению в мех. системах (Львов, 26–28 апр. 1988 г.): Тез. докл. – Львов: ИППММ АН УССР, 1988. – С. 28–29.
26. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. – Киев: Наук. думка, 1986. – 544 с.
27. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. В.М.Челомей. – М.: Машиностроение, 1981. – Т.6. – 456 с.
28. Вульфсон И.И., Сердюков Б.В. Экспериментальное исследование демпфирующей способности затянутых конических резьбовых соединений // В кн.: Рассеяние энергии при колеб. упругих систем. – Киев: Наук. думка, 1968. – С. 405–409.
29. Вульфсон И.И., Сердюков Б.В., Бауэр М.Э. Исследование демпфирующих свойств конических, резьбовых, шпоночных и шлицевых соединений. – М.: ОКБС МС и ИП, 1967. – 30 с.
30. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
31. Гогилашвили В.И., Хвингия М.В. Рассеяние энергии и оптимальная посадка в цилиндрических соединениях // В кн.: Рассеяние энергии при колеб. мех. систем. – Киев: Наук. думка, 1970. – С. 421–430.
32. Гогилашвили В.И. Модель рассеяния энергии при колебаниях несимметричных систем со многими фрикционными узлами // Сообщ. АН Груз. ССР. – 1980. – 97, № 2. – С. 389–392.
33. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 411 с.
34. Давиденков Н.Н. О рассеянии энергии при вибрациях // Журн. техн. физики. – 1938. – № 6. – С. 483–499.
35. Дебривный Н.Е. К исследованию затухания колебаний в стальных тросах // В кн.: Вопр. рассеяния энергии при колеб. упр. систем. – Киев: Гостехиздат УССР, 1962. – С. 218–222.
36. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 509 с.
37. Дорошко С.М. Конструкционный гистерезис в двухслойных пластинках переменной толщины // Тр. РКИИГА. – Рига, 1968. – Вып. 126. – С. 68–74.

38. Зозуля В.В. Осесимметричная контактная задача для цилиндрических оболочек с учетом сил трения и определение грузоподъемности клинозажимных устройств: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Харьков, 1984. – 22 с.
39. Зубко В.И., Полевой Б.Н., Шопа В.М. Цилиндрический изгиб пакета трансверсально-изотропных пластин при наличии зон сцепления, проскальзывания, отслоения // Механика композитных материалов. – 1990. – № 3. – С. 508–512.
40. Зубко В.И., Полевой Б.Н., Шопа В.М. Построение аналитического решения задачи изгиба пакета трансверсально-изотропных пластин // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990. – № 10. – С. 44–48.
41. Исследование демпфирования колебаний в станках токарной, шлифовальной и фрезерной группы / Д.Н.Решетов, З.М.Левина, Г.А.Ермаков и др. – М.: ЭНИМС, 1955. – 339 с.
42. К расчету двухслойных конструкций с учетом трения / М.А.Артемов, О.Г.Кудашов, Г.П.Митрофанов, Ю.М.Мяснянкин // Прикл. задачи мех. сплош. сред. – Воронеж, 1988. – С. 119–121.
43. Калинин Н.Г. Две задачи о конструкционном демпфировании в двухслойной балке // Вопр. дин. и прочн. – Рига, 1961. – Вып. 7. – С. 5–14.
44. Калинин Н.Г. Конструкционное демпфирование в многослойной балке переменного сечения // Вопр. дин. и прочн. – Рига, 1962. – Вып. 8. – С. 29–36.
45. Кантор В.Я., Зозуля В.В. Контактные задачи теории оболочек: математические аспекты проблемы // ИПМ АН УССР. – Харьков, 1988. – 95 с. – Деп. в ВИНТИ, 1988. – № 1251 – В88.
46. Керимов З.Г. Динамические расчеты буровой колонны. – М.: Недра, 1973. – 203 с.
47. Койбин А.В. Распространение вибраций в коротком упругом стержне при наличии сухого трения // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. – 1986. – № 6. – С. 170–173.
48. Койбин А.В. Распространение случайной вибрации в упругом стержне при наличии сухого трения // Прикл. механика. – 1975. – 11, № 3. – С. 101–107.
49. Конструкционное демпфирование в буровом амортизаторе / В.М.Шопа, И.П.Шацкий, С.В.Величкович, И.И.Попадюк // Нефтяное хозяйство. – 1990. – № 3. – С. 28–29.
50. Конструкционное демпфирование в неподвижных соединениях / Н.Г.Калинин, Ю.А.Лебедев, В.И.Лебедева и др. – Рига: Изд-во. АН Латв. ССР, 1960. – 170 с.

51. Конструкционное демпфирование в оболочечных виброизоляторах с сухим позиционным трением / С.В.Величкович, И.И.Попадюк, И.П.Шацкий, В.М.Шопа // 15 конф. по вопросам рассеяния энергии при колеб. мех. систем (Каменец-Подольский, 23–25 мая 1989г.): Тез. докл. – Киев: ИПП АН УССР, 1989. – С. 31–32.
52. Конструкционное демпфирование в оболочечных виброизоляторах с сухим позиционным трением / С.В.Величкович, И.И.Попадюк, И.П.Шацкий, В.М.Шопа // В кн.: Рассеяние энергии при колеб. мех. систем. Матер. 15 Респ. науч. конф. – Киев: Наук. думка, 1992. – С. 40–43.
53. Конструкционное демпфирование в узлах вибрационных машин / М.В.Хвингия, Г.Г.Цулая, В.Н.Гогилашвили, Т.Г.Татишвили. – Тбилиси: Изд-во ГПИ, 1973. – 138 с.
54. Конструкционный гистерезис в оболочечном демпфере с распределенным трением / С.В.Величкович, И.И.Попадюк, И.П.Шацкий, В.М.Шопа // Пробл. прочности. – 1991. – № 3. – С. 36–37.
55. Конструкційне демпфування в малорухомих оболонкових системах з сухим тертям / І.Й.Попадюк, І.П.Шацький, В.М.Шопа, О.О.Бедзір // Тези доп. наук.-техн. конф. проф.-викл. складу Івано-Франківського держ. техн. ун-ту нафти і газу. Ч.2. – Івано-Франківськ: ІФДТУНГ, 1996. – С. 57.
56. Кравчук А.С. К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // Прикл. математика и механика. – 1980. – **44**, № 1. – С. 122–129.
57. Кравчук А.С. Об учете трения в контактных задачах // Прикл. вопр. деформируем. тел. – Томск, 1980. – С. 78–84.
58. Крэндалл С. Роль демпфирования в теории колебаний // Механика. – 1971. – **129**, № 5. – С. 1–22.
59. Кузнецов Е.А., Гороховский Г.А. Фрикционное взаимодействие шероховатых тел с позиций механики твердого тела // Трение и износ. – 1980. – **1**, № 4. – С. 638–649.
60. Лазуткин Г.В. Вынужденные периодические колебания виброзащитных систем с конструкционным гистерезисом // Вибрац. прочн. и надеж. двигателей и систем летат. аппаратов. – Куйбышев, 1986. – С. 81–89.
61. Латифов Ф.С., Мамедов С.А. Задача о свободных колебаниях системы цилиндр – сплошной заполнитель // Изв. АН Аз. ССР. Сер. физ.-техн. и мат. н. – 1987. – **8**, № 3. – С. 136–140.
62. Лебедев В.И. Выбор оптимального закона распределения сил трения в одной задаче конструкционного демпфирования // Вопр. динамики и прочности. – Рига, 1963. – Вып. 10. – С. 167–174.

63. Лебедев Н.Ф. Динамика гидравлических забойных двигателей. – М.: Недра, 1981. – 251 с.
64. Лебедев Ю.А. К расчету характеристик демпфирования амортизаторов с кольцевыми пружинами // Вопр. динамики и прочности. – Рига, 1959. – Вып. 6. – С. 37–52.
65. Лебедева В.И. Конструкционное демпфирование во фрикционных муфтах при циклическом нагружении // Изв. АН Латв. ССР. – 1959. – № 11. – С. 37–45.
66. Левин А.А. Численное решение квазистатических контактных задач с сухим трением // Горьк. ун-т. – Горький, 1987. – 30 с. – Деп. в ВИНТИ 14.04.87, № 2567 – В87.
67. Левина З.М., Решетов Д.Н. Контактная жесткость машин. – М.: Машиностроение, 1971. – 262 с.
68. Логинов В.К., Матвеев В.В., Страхов Г.И. Совещание по проблеме конструкционного демпфирования колебаний. Рига, 24–26 февр. // Пробл. прочности. – 1970. – № 9. – С. 114–119.
69. Луфт Г.М., Ключинская Н.Ф. Теоретическое построение петли гистерезиса для пластин с цилиндрическим буртом // Вопр. динамики и прочности. – Рига, 1972. – Вып. 23. – С. 203–212.
70. Максак В.И. Предварительное смещение и жесткость механического контакта. – М.: Наука, 1975. – 59 с.
71. Максак В.И., Митрофанов Б.П. О рассеивании энергии в упругом дискретном контакте // Изв. Томск. политехн. ин-та. – 1976. – № 209. – С. 23–26.
72. Максак В.И., Тритенко А.Н. О рассеянии энергии в механическом контакте при воздействии периодических колебаний с симметричным циклом // Пробл. прочности. – 1973. – № 10. – С. 107–109.
73. Матвеев В.В. Демпфирование колебаний деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1985. – 264 с.
74. Машины и стенды для испытания деталей / В.Л.Гадолин, Н.А.Дроздов, В.Н.Иванов и др. – М.: Машиностроение, 1979. – 343 с.
75. Мирзаджанзаде А.Х., Керимов З.Г., Копейкис М.С. Теория колебаний в нефтепромысловом деле. – Баку: Маариф, 1976. – 308 с.
76. Мицкевич З.А. К вопросу о конструкционном демпфировании // Изв. вузов. Машиностроение. – 1975. – № 2. – С. 27–30.
77. Моссаковский В.И., Петров В.В., Сладковский А.В. Исследование микроскольжения на контактных поверхностях при помощи МКЭ. – Днепропетровск, 1981. – 64 с. – Деп. в ВИНТИ, 1981, № 5327 – В81.

78. Мяснянкин Ю.М., Свиридов Ю.Т., Спорыхин А.Н. К теории безмоментных многослойных цилиндрических оболочек с учетом трения между слоями // Анал. и числ. методы решения задач мех. деформир. тверд. тела / Воронеж. ун-т. – Воронеж, 1990. – С. 91–97. – Деп. в ВИНТИ 12.06.90, № 3346 – В90.
79. Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. Демпфирование колебаний. – М.: Мир, 1988. – 448 с.
80. Оболонкові пружини / В.М.Шопа, А.С.Величкович, С.В. Величкович та ін. – Івано-Франківськ: Факел, 2002. – 92 с.
81. Оболочечные упругие элементы: основы конструирования / В.М.Шопа, С.В.Величкович, И.П.Шацкий, И.И.Попадок // Препринт ИППММ АН УССР № 21 – 88. – Львов, 1990. – 61 с.
82. Осадчук В.А. К определению оптимальных параметров продольных разрезов в замкнутых цилиндрических оболочках-демпферах // В кн.: Обобщенные функции в термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1980. – С. 64–69.
83. Осадчук В.А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
84. Осадчук В.А., Николишин М.М. Напряженное состояние ослабленной трещиной замкнутой трансверсально-изотропной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1975. – № 7. – С. 619–623.
85. Осадчук В.А., Николишин М.М., Регейло С.П. Влияние упругого наполнителя на напряженное состояние замкнутой цилиндрической оболочки с системой трещин // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1979. – Вып. 9. – С. 70–76.
86. Палочкина Н.В., Решетов Д.Н. Рассеяние энергии колебаний в цилиндрическом соединении с натягом // Изв. вузов. Машиностроение. – 1965. – № 9. – С. 79–85.
87. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. – М.: Физматгиз, 1960. – 193 с.
88. Пановко Я.Г. Проблемы теории конструкционного демпфирования в неподвижных соединениях // Тр. III совещания по осн. пробл. теор. маш. и механизмов. Сб. «Динамика машин». – М.: Машгиз, 1963. – С. 209–234.
89. Пановко Я.Г., Гольцев Д.И., Страхов Г.И. Элементарные задачи конструкционного гистерезиса // Вопр. дин. и прочн. – Рига, 1958. – Вып. 5. – С. 5–26.
90. Пановко Я.Г., Страхов Г.И. Приближенное исследование вынужденных колебаний упругих систем с конструкционным демпфированием // Вопр. дин. и прочн. – Рига, 1962. – Вып. 8. – С. 5–12.

91. Пановко Я.Г., Страхов Г.И. Вынужденные колебания механических систем с большим гистерезисом // Ин-т осн. пробл. техники. – Варшава, 1963. – №5. – С. 523–529.
92. Пановко Я.Г., Страхов Г.И. Конструкционное демпфирование в резьбовых соединениях // Изв. АН Латв. ССР. – Рига, 1959. – № 12. – С. 15–26.
93. Пановко Я.Г., Страхов Г.И. Конструкционное демпфирование в шлицевых соединениях // Изв. АН Латв. ССР. – Рига, 1960. – № 8. – С. 39–46.
94. Пат. 2015295 РФ, МКИ 5 E21 В 17/07. Буровой амортизатор / С.В.Величкович, В.М.Шопа, А.С.Величкович, О.Ф.Яремак (Украина) // Оpubл. 30.06.94, Бюл. № 12.
95. Пат. 2031270 РФ, МКИ 6 F16 F 1/42. Амортизатор / С.В.Величкович, В.М.Шопа, П.Е.Кравец, и др. (Украина) // Оpubл. 20.03.1995, Бюл. № 8.
96. Пат. 2043558 РФ, МКИ 6 F 16 J 15/34. Торцевое уплотнение / С.В.Величкович, И.И.Попадюк, И.П.Шацкий, О.О.Бедзир // Оpubл. 10.09.95, Бюл. №. 25.
97. Пат. 2088741 РФ, МКИ 6 E 21 В 17/07. Забойный амортизатор / А.С.Величкович (Украина) // Оpubл. 27.08.97, Бюл. № 24.
98. Пелех Б.Л., Сухорольский М.А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – Киев: Наук. думка, 1980. – 216 с.
99. Пелех Б.Л., Черепюк И.Д. Об одной задаче для цилиндрической оболочки с упругим наполнителем при учете сил сухого трения // Физ-хим. механика материалов. – 1972. – 8, № 5. – С. 12–15.
100. Писаренко Г.С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. – Киев: Наук. думка, 1970. – 379 с.
101. Подгаецкий Э.М. Вибрация упругого стержня при наличии сил сухого трения на его боковой поверхности // Прикл. математика и механика. – 1987. – 51, № 1. – С. 175–176.
102. Подстригач И.Я., Попадюк И.И., Шопа В.М. Исследование конструкционного демпфирования в коаксиально расположенных цилиндрических оболочках, разделенных наполнителем // 16 конф. по вопр. рассеяния энергии при колеб. мех. систем (Ивано-Франковск, 24–26 июня 1992 г.): Тез. докл. – Киев: ИПП АН Украины, 1992. – С. 30.
103. Подстригач Я.С., Воробец Б.С., Чернуха Ю.А. К температурной задаче для тел с включением // Прикл. механика. – 1972. – 8, № 12. – С. 80–85.

104. Попадюк И.И. Конструкционный гистерезис в равнопрочной цилиндрической оболочке с деформируемым наполнителем // 16 конф. по вопр. рассеяния энергии при колеб. мех. систем (Ивано-Франковск, 24–26 июня 1992 г.): Тез. докл. – Киев: ИПП АН Украины, 1992. – С. 31.
105. Попадюк И.И. О контактном взаимодействии несущих частей оболочечной пружины // В кн.: Матер. 12 конф. мол. ученых ИППММ АН УССР (Львов, 21–23 окт. 1987 г.) – Ин-т прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР, Львов, 1987. – С. 138–142. – Деп. в ВИНТИ 08.08.1988 г., № 6308 – В88.
106. Попадюк И.И. Упругое равновесие коаксиальных цилиндрических оболочек и деформируемого наполнителя в условиях фрикционного контакта // В. кн.: Матер. 13 конф. мол. ученых Ин-та прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР (Львов, 11–12 мая 1989 г.). – Львов: ИППММ АН УССР, 1989 – С. 110–114. – Деп. в ВИНТИ 06.12.1989 г., № 7242 – В89.
107. Попадюк І.Й. Бездір О.О. Математичне моделювання та розрахунок прорізних оболочкових пружних елементів // Тези доп. 4 Міжнародної конференції з механіки неоднорідних структур. – Тернопіль, 1995. – С.56.
108. Попадюк І.Й., Шацький І.П., Шопа В.М. Фрикційний контакт у кінцічному амортизаторі з пружним заповнювачем // Доп. НАН України. – 1997. – № 4. – С. 67–71.
109. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник. В 3-х т. / Ред. И.А.Биргера и Я.И.Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – Т.3. – 567 с.
110. Равнопрочный упругий элемент оболочечной пружины / В.М.Шопа, И.П.Шацкий, С.В.Величкович, И.И.Попадюк // Вестн. машиностроения. – 1991. – № 2. – С. 25–26.
111. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л.А.Галина. – М.: Наука, 1976. – 483 с.
112. Расчет конструкционного демпфирования в оболочечных пружинах / В.М.Шопа, Б.Н.Полевой, С.В.Величкович, И.И.Попадюк // Вестн. машиностроения. – 1985. – № 12. – С. 23–25.
113. Расчет ствола амортизатора колебаний буровой колонны / Б.Н.Полевой, В.М.Шопа, С.В.Величкович и др. // Ред. ж. Хим. и нефт. машиностроение. – М.: 1983. – 13 с. – Деп. в ЦИНТИ-химнефтемаш 31.10.83, № 1098 – ХМД83.
114. Ревва В.Ф. Некоторые случаи конструкционного демпфирования низкоамплитудных колебаний // Тр. Одесского технол. ин-та. – Одесса, 1960. – № 13. – С. 43–61.
115. Регулирование жесткости оболочечных элементов / С.В.Величкович, В.М.Шопа, И.П.Шацкий, И.И.Попадюк // Машиностроитель. – 1990. – № 7. – С. 30.

116. Рекач В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости. – М.: Высш. школа, 1977. – 216 с.
117. Решение вариационным методом пространственных контактных задач качения с проскальзыванием и сцеплением / Р.В.Гольдштейн, А.Ф.Зазовский, А.А.Спектор, Р.П.Федоренко // Успехи механики. – 1982. – 5, № 3/4. – С. 61–102.
118. Решетов Д.Н., Левина З.М. Возбуждение и демпфирование колебаний в станках // В кн.: Иссл. колеб. металлорежущих станков. – М.: Машгиз, 1957. – С. 45–86.
119. Решетов Д.Н., Левина З.М. Демпфирование колебаний в деталях станков // В кн.: Исслед. колебаний металлореж. станков при резании металлов. – М.: Машгиз, 1958. – С. 87 – 155.
120. Решетов Д.Н., Левина З.М. Демпфирование колебаний в соединениях деталей машин // Вестн. машиностроения. – 1956. – № 12. – С.16–23.
121. Решетов Д.Н., Палочкин С.В. Демпфирование колебаний в компенсирующих муфтах // Изв. вузов. Машиностроение. – 1981. – № 12. – С. 13–18.
122. Решетов Д.Н., Палочкина Н.В. Исследование демпфирования колебаний в резьбовом соединении // Изв. вузов. Машиностроение. – 1972. – № 1. – С. 19–23.
123. Румянцев А.А. Итерационный алгоритм решения задачи о штампе произвольной формы с учетом трения // Пробл. прочности. – 1984. – № 7. – С. 101–105.
124. Сойфер А.М., Филекин В.П. Конструкционное демпфирование колебаний тонкостенных оболочек типа корпусных деталей ГТД // Изв. вузов МВО СССР. Авиац. техника. – 1958. – №1. – С. 158–164.
125. Соколкин Ю.В., Постных А.М., Хронусов В.В. Оптимальное демпфирование колебаний двухслойного стержня // Изв. вузов. Машиностр. – 1987. – № 2. – С. 14–17.
126. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. – М.: Госстройиздат, 1960. – 131 с.
127. Страхов Г.И. Конструкционный гистерезис в амортизаторах резинометаллического типа // Вопр. динамики и прочности. – Рига: Изд-во АН Латв. ССР, 1959. – Вып. 6. – С. 5–35.
128. Страхов Г.И. Конструкционный гистерезис в прессовом соединении при растяжении – сжатии // Изв. АН Латв. ССР. – Рига, 1957. – № 5. – С. 129–138.
129. Страхов Г.И. Приближенное решение задачи о колебаниях системы с конструкционным гистерезисом при случайных возмущениях // Тр. РКИИГА. – Рига, 1969. – Вып. 138. – С. 80–88.

130. Страхов Г.И. Характеристика демпфирования в двухлистовой рессоре // Изв. АН Латв. ССР. – Рига, 1958. – №9. – С. 117–124.
131. Страхов Г.И., Логинов В.К. Вынужденные колебания систем с конструкционным демпфированием // Тр. РКИИГА. – 1966. – Вып. 83. – С. 3–13.
132. Телега Ю.И. Вариационные методы в контактных задачах механики // Успехи механики. – 1987. – **10**, № 2. – С. 3–95.
133. Телия Т.Н. Метод оптимизации петли гистерезиса в упругой системе вибрационной машины // Сообщ. АН ГССР. – 1986. – **124**, № 2. – С. 369–372.
134. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы сопротивления материалов. – М.: ГИТТЛ, 1950. – 289 с.
135. Филекин В.П. Конструкционный гистерезис в составной балке при отсутствии скольжений на концах // Изв. вузов. Авиац. техника. – 1960. – № 1. – С. 83–93.
136. Филин А.П. Элементы теории оболочек. – Л.: Стройиздат, 1975. – 256 с.
137. Фрикційна взаємодія ортотропної циліндричної оболонки з деформівним заповнювачем / А.С.Величкович, І.Й.Попадюк, І.П.Шацький, В.М.Шопа // Доповіді НАН України. – 1999. – № 11. – С. 67–69.
138. Хвингия М.В., Цулая Г.Г., Гогилашвили В.И. Конструкционное демпфирование в узлах вибрационных машин. – Тбилиси: Груз. политехн. ин-т., 1973. – 138 с.
139. Численно-аналитическое решение задач о фрикционном контакте цилиндрических оболочек с деформируемым наполнителем / С.В.Величкович, И.И.Попадюк, И.П.Шацкий, В.М.Шопа // Респ. н.-т. конф. «Эффективные числ. методы решения краевых задач механики тверд. деформир. тела» (Харьков, 27–29 сент. 1989 г.): Тез. докл. – Харьков: Харьк. инж.-строит. ин-т, 1989. – Ч. 1. – С. 45–46.
140. Шацкий И.П., Шопа В.М., Бедзир О.О. Неидеальный контакт в составной оболочечной конструкции с деформируемым наполнителем // Прикл. механика. – 1995. – **31**, № 5. – С. 25–29.
141. Шацький І.П., Шопа В.М., Бедзір О.О. Фрикційна взаємодія прорізної циліндричної оболонки з пружним заповнювачем // Доп. АН України. – 1993. – № 8. – С. 70–73.
142. Шацький І.П., Шопа В.М. Контактна задача для балки з урахуванням тертя при немонотонному навантаженні // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1990. – № 12. – С. 30–32.
143. Шацький І.П., Шопа В.М., Величкович А.С. Розрахунок демпфера з розрізаною циліндричною оболонкою // Розвідка і розробка нафтових і газових родовищ. Сер. Нафтопромислове обладнання. – 1998. – № 35. – С. 31–38.

144. Шилько С.В., Можаровский В.В. Численное исследование микропроскальзывания в контакте индентор – упругое основание // Трение и износ. – 1985. – 6, № 2. – С. 283–288.
145. Шопа В.М., Бедзір О.О. Розрахунок оболонкового пружного елемента бурового амортизатора // Розвідка і розробка нафтових і газових родовищ. – Сер. Нафтогазопромислове обладнання. – 1996. – № 33. – С.106–112.
146. Шопа В.М., Бедзір О.О. Фрикційний контакт прорізної циліндричної оболонки з деформівним заповнювачем // Матер. доп. 3-го Міжнар. симп. “Некласичні проблеми теорії тонкостінних елементів конструкцій та фіз.-хім. механіки композиційних матеріалів”. – Івано-Франківськ: ІФДТУНГ. – 1997. – С.175–178.
147. Шопа В.М., Величкович А.С. Особливості конструкцій та параметрична оптимізація оболонкових пружних елементів бурових амортизаторів // Тези доп. наук.-техн. конф. проф.-викл. складу Ів.-Франківського держ. техн. ун-ту нафти і газу. – Івано-Франківськ: ІФДТУНГ. – 1997. – С. 105.
148. Шопа В.М., Польовий Б.М., Величкович С.В. Розрахунок пакета циліндричних оболонок з врахуванням тертя // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1982. – № 5. – С. 49–52.
149. Шопа В.М., Польовий Б.М., Попадюк І.Й. Конструкційне демпфування механічних систем з м'яким елементом трансформації переміщень // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1985. – № 5. – С. 45–49.
150. Шопа В.М., Попадюк І.Й., Бедзір О.О. Змішані задачі фрикційного контакту коаксіальних циліндричних оболонок і деформівного заповнювача // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, № 3. – С. 103–108.
151. Шопа В.М., Попадюк І.Й. Конструкційне демпфування в рівномічній циліндричній оболонці з деформівним заповнювачем. – Мат. методи і фіз.-мех. поля. – Вип. 37. – 1994. – С. 86–91.
152. Шопа В.М., Попадюк І.Й. Механико-математическое моделирование оболочечных конструкций с деформируемым заполнителем // III Всес. конф. по механике неоднородных структур (Львов, 17-19 сент. 1991 г.): Тез. докл. – Львов: ИППММ АН УССР, 1991. – Ч.2. – С. 366.
153. Шопа В.М., Попадюк І.Й., Бедзір О.О. Змішані задачі фрикційної взаємодії в малорухомих оболонкових системах з сухим тертям // Тези доп. міжн. наук. конф. “Сучасні проблеми механіки і математики”. – Львів: ИППММ НАН України. – 1998. – С. 51.
154. Шопа В.М., Сухорольский М.А. Один класс контактных задач теории оболочек // Докл. АН УССР. – Сер. А. – 1987. – С.48–52.

155. Шопа В.М., Шацкий И.П., Попадюк И.И. Расчет податливости оболочечной пружины // Изв. вузов. Машиностроение. – 1989. – № 5. – С. 18–21.
156. Шопа В.М., Шацкий И.П., Попадюк И.И. Элементарный расчет конструкционного гистерезиса в оболочечных пружинах // Вестн. машиностроения. – 1989. – № 3. – С. 31–32.
157. Шопа В.М., Шацкий И.П., Попадюк И.И. Конструкційне демпфування в циліндричній оболонці з пружним заповнювачем // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1989. – № 2. – С. 44–47.
158. Шопа В.М., Шацкий И.П., Попадюк И.И. Фрикційна взаємодія циліндричної оболонки з пружним заповнювачем // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1989. – № 3. – С. 48–50.
159. Янютин Е.Г., Водченко В.Н. Исследование нестационарных колебаний цилиндрической оболочки в среде с учетом сухого трения // Ин-т пробл. машиностр. АН УССР. – Харьков, 1988. – 13 с. – Деп. в ВИНТИ 12.07.88, № 5597 – В88.
160. Badrakhhan F. Dynamic analysis of yielding and hysteretic systems by polynomial approximation // J.Sound and Vibr. – 1988. – **125**, № 1. – P. 23–42.
161. Vapat C.N., Sankar S. Multiunit impact damper – reexamined // J.Sound and Vibr. – 1985. – **103**, № 4. – P. 457–469.
162. Beards C.F. The damping of structural vibration by controlled interfacial slip in joints // Trans. ASME: J. Vibr., Acoust., Stress and Reliab. Des. – 1983. – **105**, № 3. – P. 369–373.
163. Beards C.F., Imam I.M.A. The damping of plate vibration by interfacial slip between layers // Int. J. Mach. Tool Des. and Res. – 1978. – **18**, № 3. – P. 131–137.
164. Beards C.F., Robb D.A. The use of frictional damping to control the vibration of plates in structures // Rec. Adv. Struct. Dyn. Pap. Int. Conf., Southampton. – 1980. – Vol.2. – P. 749–760.
165. Bielski W.R., Telega J.J. A contribution to contact problems for a class of solids and structures // Arch. Mech. – 1985. – **37**, № 4–5. – P. 303 – 320.
166. Brink K. Die Dämpfung bei Drehschwingungen der Kupplungen // Wohl. Inst. Mitt. – 1936. – H. 28. – P. 53–81.
167. Bufler H. Derivation of the variational inequalities and extremum principles of the frictionless elastic contact problem // Comp. Meth. Eng. – 1985. – **53**, № 2. – P. 163–182.
168. Chow T.S. Hermans J.J. The effect of dry friction on the oscillatory behavior of fabrics // Text. Res. J. – 1970. – **40**, № 11. – P. 982–985.
169. Dämpfung von Schwingungen bei Maschinen und Bauwerken // VDI-Ber. – 1987. – № 627. – S. 1–446.

170. Damping Applications for Vibration Control / Ed. by P.J.Torvik // Winter Annu. Meet. ASME. Chicago, Nov. 16–21, 1980. – New-York, 1980. – 158 p.
171. Den-Hartog J.P. Forced vibrations with combined Wiscous and Coulomb damping // Phil. mag. a. I. sci. – 1930. – **9**, № 59. – P. 5–19.
172. Den-Hartog J.P. Mechanical Vibrations. – New-York, McGraw-Hill, 4th Ed., 1956. – 238 p.
173. Den-Hartog J.P., Heiles R.M. Forced vibrations in nonlinear system with various combinations of linear springs // J. of Appl. Mech. – 1936. – **3**, № 4. – P. 23–33.
174. Dowell E.H., Schwartz H.B. Forced response of a cantilever beam with a dry friction damper attached. Part 2: experiment // J. Sound and Vibr. – 1983. – **91**, № 2. – P. 269–291.
175. Dowell E.H., Schwartz H.B. Forced response of a cantilever beam with a dry friction damper attached. Part 1: theory// J. Sound and Vibr. – 1983. – **91**, № 2. – P. 255–267.
176. Duvaut G. Equilibre d'un solide elastique avec contact unilateral et frottement de Coulomb // C. R. Acad. Sc. – 1980. – **290**. – P. 263–265.
177. Earles S.W.E., Mansoori F.S. Frictional damping applied to a cantilever-beam structure: a theoretical and experimental response comparison // Int. J. Mach. Tool. Des. and Res. – 1974. – **14**, № 1. – P. 111–124.
178. Gangadharam D. A review of structural damping // Indian Eng. – 1970. – **14**, № 4. – P. 9–19.
179. Goodman L.E., Klumpp J.H. Analysis of Slip Damping with Reference to Turbine-Blade Vibrations / J. of Appl. Mech.– 1956. – **23**, № 3. – P. 42–50.
180. Haslinger J. On the approximation of the Signorini problem with friction // Comp. math. – Warsaw, 1984. – **13**. – P.149–157.
181. Kalker J.J. The quasistatic contact problem with friction for three-dimensional elastic bodies // J. mec. theor. et appl. – 1988. – **7**, № 1. – P. 55–66.
182. Kameswara Rao C.W.S. A note of damping under random loading // Eng. Struct. – 1981. – **3**, № 1. – P. 62–63.
183. Klumpp J.H., Lazan B.J. Frictional Damping and Resonant Vibration Characteristics of an Axial Slip Lap Joint // WADC Techn. Reports newsletter. – 1954. – № 3. – P. 54–64.
184. Murin J. Comments on the dynamic and damping properties of a layered system with dry friction // Zag. drgan nielin. – 1973. – № 14. – P. 531–545.

185. Murin J. Dynamicke vlastnosti mechanickych sustav so symetrickou, po ciastkach linearnou hystereziou // *Strojn. cas.* – 1974. – **25**, № 1. – S. 64–80.
186. Murin J. Niektore rezonancne vlastnosti sustav s multilinearnou hystereziou // *Strojn. cas.* – 1974. – **25**, № 1. – S. 64–80.
187. Murin J. Poznamky k tlmeniu torznych kmitov v tzv. nepohyblivych spojoch // *Strojn. cas.* – 1984. – **35**, № 1–2. – S. 113–119.
188. Murin J. Tlmenie torznych kmitov v nalisovanych spojoch // *Strojn. cas.* – 1983. – **34**, № 4. – S. 421–426.
189. Nayak P. Ranganath. Contact vibrations // *J. Sound and Vibr.* – 1972. – **22**, № 3. – P. 297–322.
190. Nordlund E. Slip and energy dissipation in cylindrical friction joints loaded by impact-induced waves // *Int. J. Impact Eng.* – 1987. – **6**, № 1. – P. 35–50.
191. Oden J.T., Pires E.B. Nonlokal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity // *Tr. ASME: J. Appl. Mech.* – 1983. – **50**, № 1. – P. 67–76.
192. Osinski J. Zastosowanie metody elementow skonczonej do analizy statycznych poloczen z tarciem konstrukcyjnym // *Pr. Inst. podstaw bud. masz. P. Warz.* – 1984. – № 4. – S. 133–150.
193. Pian T.H.H., Hallowell F.C. Investigation of Structural Damping in a Simple Built-Up Beams // *Proc. First U.S. Nat. Congress Appl. Mech., ASME.* – 1952. – P. 97–102.
194. Plynkett R. Friction damping // *Damp. Appl. Vibr. Contr. Winter Annu. Meet. ASME. Chicago, Nov. 16–21, 1980.* – New-York, 1980. – P. 65–74.
195. Rades M. Parameter identification of a structure with combined coulomb and hysteretic damping // *Rev. roum. sci. techn. Ser. mec. appl.* – 1982. – **27**, № 2. – P. 299–308.
196. Rosel R. On the interpretation of structural damping // *J. angew. Math. und Mech.* – 1973. – **53**, № 6. – P. 329–332.
197. Structural damping / Ed. by J.E. Ruzicka // *Pap. pres. for a col. on struct. damp. held at the ASME annu. meet. in Atlantic City, New-York, in Dec., 1959.* – Pergamon press, 1960. – 165 p.
198. Tang D.M., Dowell E.H. Damping in beams and plates due to slipping at the support boundaries. Part 2. Numerical and experimental study // *J. Sound and Vibr.* – 1986. – **108**, № 3. – P. 509–522.
199. Whiteman I.R. A Mathematical Model Depicting the Stress-Strain Diagram and the Hysteresis Loop // *J. Appl. Mech.* – 1959. – **26**, № 1. – P. 95–100.
200. Whiteman I.R. Mathematical analysis of the hysteresis loop as a basis for attrition phenomena // *Ph. D. Thesis, U. of Calif. – Los-Angeles, 1957.* – P. 24–28.

201. Wissbrock H. Damped vibrations of a jointed cantilever beam // Proc. 2 Int. Conf. Rec. Adv. Struct. Dyn., Southampton, 9–13 Apr., 1984. – Vol. 1. – P. 361–372.
202. Wissbrock H. Reibungsdämpfung durch Scheuerleisten: Ein Praxisgerechtes Auslegungskonzept // Ing. Arch. – 1957. – **57**, № 5. – P. 349–360.
203. Wissbrock H. Untersuchungen zur Fugendämpfung zusammengesetzter Bauteile // Fortschr.Ber.VDIZ. – 1985. – P. 1–161.
204. Wittmeyer H. Beziehung zwischen den Kenngrößen einer gedämpften und denen der zugehörigen ungedämpften Struktur. Teil 2. Größere strukturelle Dämpfungen // Z. Flugwis. und Welt- raumforsch. – 1987. – **11**, № 1. – P. 23–28.
205. Yamada A., Kakubari T., Furukava M. Stiffness and energy loss in a junction // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. – 1987. – **C 53**, № 487. – P. 656–662.
206. Yamada Y. Studies on vibration damping of steel structures // Rapp. commis. trav. Assoc. int. ponts et charpentes. – **13**, s. 1. – 1973. – P. 101–106.