УДК 628.112.4

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ РІДИНИ У ВОДОНОСНОМУ ГОРИЗОНТІ

[1]*В.Я.Грудз*, [2]*Б.Ю.Депутат*

[1] *ІФНТУНГ; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (03422) 42157;
e-mail: public@nung.edu.ua*

[2] *Долинський ГПЗ ВАТ "Укрнафта", 77503, м. Долина, вул. Підлівче, 63, тел. (03477) 25260,
e-mail: dgpz@dngvu.ukrnaftf.com*

Предложена методика определения координат источника загрязнений водоносного горизонта продукцией буровых скважин нефтепромысла на основе созданной математической модели фильтрации жидкости.

The method of decision of co-ordinates of source of contaminations of aquiferous horizon by the products of drillholes of neftepromisla on the basis of the created mathematical model of filtration of liquid is offered.

У випадках виникнення техногенних аварій на нафтопромислах частина рідини з нафтового продуктивного горизонту може потрапляти у водоносний горизонт, викликаючи забруднення питтєвої води. Джерелом забруднень водоносного пласта найчастіше можуть бути стовбури нафтових свердловин. Мінеральна вода водоносного горизонту є агресивним корозійним середовищем для металу стовбура нафтової свердловини, корозійні ушкодження якого призводять до потрапляння продукції нафтових свердловин в водоносний пласт. Особливо висока ймовірність виникнення джерел забруднення водоносних горизонтів в процесі реалізації методів активного впливу на нафтовий пласт (наприклад, проведення гідророзривів). В таких ситуаціях для забезпечення техногенної безпеки водоносного горизонту необхідно знати момент виникнення і координати джерела забруднення.

У початковий момент часу після виникнення джерела забруднення водоносного пласта його координати можна визначити на основі хімічного аналізу відібраних проб: найбільша концентрація солей вкаже на близькість до джерела забруднення. З плином часу внаслідок дифузійних процесів концентрація солей по площі водоносного пласта вирівняється, наступить динамічна рівновага, і метод відбору та аналізу проб на солоність стане неприйнятним. В такому випадку слід порушити рівновагу у водоносному горизонті шляхом інтенсивного відбору води, що активізує роботу джерела забруднень і за характером протікання гідродинамічного процесу фільтрації дасть змогу виявити координати джерела.

Єдиним шляхом оцінки характеру гідродинамічного процесу фільтрації води в пласті є метод побудови математичної моделі.

Диференціальне рівняння фільтрації рідини в пласті має такий вигляд [1]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \chi \nabla^2 p + \frac{f}{\rho\beta^*}, \qquad (1)$$

де: p – тиск рідини в пласті, Па;

t – час;

$\chi = k/(\mu\beta^*)$ – коефіцієнт теплопровідності, м^2/с;

k – коефіцієнт проникності пласта, який характеризує властивість пористого середовища пропускати через себе рідину під дією прикладеного перепаду тиску, м^2;

μ – динамічний коефіцієнт в'язкості рідини, Па·с;

$\beta^* = m\beta_p + \beta_c$;

m – пористість середовища пласта (безрозмірна величина),

β_p, β_c – коефіцієнти об'ємної пружності відповідно рідини і пласта, Па$^{-1}$);

ρ – густина рідини, кг/м^3;

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа (в декартовій системі координат);

f – функція внутрішнього джерела маси в пласті

$$f(x,y,z,t) = \lim_{\substack{\Delta V \to 0 \\ \Delta t \to 0}} \frac{\Delta G}{\Delta V \cdot \Delta t},$$

де: ΔV – частина об'єму пласта;

Δt – проміжок часу;

ΔG – маса рідини, що виділяється в об'ємі ΔV, кг/м^3·с.

Для випадку фільтрації в горизонтальній площині (двовимірна задача фільтрації, фільтрація в напрямі третьої осі відсутня) маємо з (1)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{x}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{f}{F}$$

де

$$F = \rho\beta^* \cdot \chi = \rho\beta^* \cdot \frac{k}{\mu\beta^*} = \frac{\rho k}{\mu}.$$

Нехай маємо горизонтальний пласт (безмежний) невеликої товщини, так що зміною тиску в напрямі третьої осі Z можна знехтувати. Початковий тиск у всіх точках пласта однаковий і рівний p_0. В момент часу $t = 0$ в точці з координатами x_1, y_1 почало діяти додатне джерело маси, інтенсивність якого q_1 (кг/м·с), а в точці пласта з координатами x_2, y_2 з того ж моменту часу – від'ємне джерело, інтенсивність якого q_2 (кг/м·с). У такому разі функція f матиме такий вигляд:

$$f = q_1\delta(x-x_1)\delta(y-y_1) - -q_2\,\delta(x-x_2)\delta(y-y_2)\,, \quad (3)$$

де $\delta(x-x_1)$, $\delta(y-y_1)$, $\delta(x-x_2)$, $\delta(y-y_2)$ – дельта функції Дірака [2].

Підставляємо (3) у рівняння (2) і, враховуючи сказане, отримуємо таку крайову задачу фільтрації:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{x}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{f}{F}\times \quad (4)$$

$$\left[q_1\delta(x-x_1)\delta(y-y_1) - q_2\delta(x-x_2)\delta(y-y_2)\right].$$

Початкові і граничні умови мають вигляд

$$p(x,\,y,\,0) = p_0\,; \quad (5)$$

$$p_{|x|\to\infty} \to p_0\,,\quad p_{|y|\to\infty} \to p_0\,. \quad (6)$$

Поставлену задачу фільтрації розв'язуватимемо, користуючись методом функції Гріна [3],

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t} = x\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right), \quad (7)$$

$$G(x-x',\,y-y',\,t-\tau),\ t>\tau\,;$$

$$G_{t=\tau} = \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,; \quad (8)$$

$$G_{|x|\to\infty,\ |y|\to\infty} = 0,\ t>\tau\,. \quad (9)$$

Рівнянням (7)-(9) задовольняє функція, яка є фундаментальним розв'язком двовимірної задачі фільтрації і яка має такий вигляд:

$$G = \frac{1}{4\pi\chi(t-\tau)}\exp\left[-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{4\chi(t-\tau)}\right] \quad (10)$$

Підставивши (10) в рівняння (7)-(9), можна переконатися, що функція (10) є дійсно функцією Гріна задачі, що розглядається.

Задача (4)-(6) є неоднорідною задачею фільтрації рідини в пласті. Розв'язок такої задачі за допомогою функції Гріна має вигляд [3]

$$U(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,y-\varsigma,t)\varphi(\xi,\varsigma)\,d\xi d\varsigma + \quad (11)$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\varsigma,\tau)G(x-\xi,y-\varsigma,t)\,d\xi d\varsigma d\tau\,.$$

Тут: $U(x,y,t)$ – шукана функція, яка є розв'язком нестаціонарної двовимірної задачі;

$\varphi(x,y)$ – початкове значення функції $U(x,y,t)$ ($\varphi(x,y) = U(x,y,0)$);

$f(x,y,t)$ – функція, яка визначає неоднорідність диференціального рівняння, яке розв'язане відносно похідної $\partial U/\partial t$.

Застосовуємо (11) до нашої задачі. Після спрощення отримаємо

$$p(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p_0}{4\pi\chi t}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\varsigma)^2}{4\chi t}\right]d\xi d\varsigma +$$
$$+\frac{1}{F}\int_0^t\frac{1}{4\pi(t-\tau)}\left\{q_1\exp\left[-\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{4\chi(t-\tau)}\right]-\right.$$
$$\left.-q_2\exp\left[-\frac{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}{4\chi(t-\tau)}\right]\right\}d\tau\,. \quad (12)$$

Аналітичний вираз (12) є розв'язком задачі фільтрації. Це означає, що функція (12) задовольняє всім трьом рівнянням (4)-(6).

Одержане рівняння дає змогу побудувати поле ізобар при вимушеній фільтрації рідини в водоносному горизонті, якщо відомі координати стоку та координати джерела забруднень. Перші визначаються вибором місця інтенсивного відбору рідини з пласта і, очевидно, вони відомі. Координати можливого джерела забруднень необхідно взяти у відповідності до розміщення нафтових свердловин. Виконавши багатоваріантні розрахунки, в яких як джерело забруднень розглядаються почергово всі нафтові свердловини, можна побудувати карти ізобар, на які слід нанести фактичні дані про тиски в пласті, виміряні в процесі проведення експерименту в місцях можливої індикації (наприклад, за рівнями води в колодязях). Порівняння розрахункових і фактичних даних дає змогу визначити координати джерела забруднення.

Література

1. Гладкий А.В., Скопецький В.В. Методи числового моделювання екологічних процесів. –К.: Політехніка, 2005. – 152 с.

2. Принципи моделювання та прогнозування в екології / В.В.Богобоящий, К.Р.Курбанов, П.Б.Палій та ін. Підручник. – К.: Центр навчальної літератури, 2004. – 216 с.

3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1964. – 724 с.