

Дослідження та методи аналізу

УДК 517.958:550.837

МАТЕМАТИЧНЕ ТРИВИМІРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ УСТАЛЕНИХ КОЛИВАНЬ У КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ПІВПРОСТОРИ

Л. М. Журавчак

Карпатське відділення Інституту геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України, 79060, Львів, вул. Наукова 3б, e-mail: carp@cb-igph.lviv.ua

Н. В. Шуміліна

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 79060, Львів, вул. Наукова 3б, e-mail: dept19@iapmm.lviv.ua

Для кусочно-однородного проводячого напівпространства рассмотрена численно-аналитическая методика нахождения компонент векторов напряженностей электрической и магнитной составляющих электромагнитного поля (ЭМП), которое возбуждается горизонтальной рамкой с гармонически изменяющимся во времени током. С помощью специального фундаментального решения уравнения Гельмгольца в полупространстве и метода приграничных элементов учтены токи смещения, проведено сравнение с квазистационарной моделью, исследовано влияние высокопроводных, нефте- и газоносных включений в полупространстве на распределение ЭМП, получены амплитудные и фазовые кривые кажущегося удельного сопротивления.

The numerical-analytical technique for finding electric and magnetic components of electromagnetic field (EMF) in a piecewise homogeneous conductive half-space is suggested. EMF is induced by a horizontal contour with current harmonically changing in time. With the help of special fundamental solution of Helmholtz equation for half-space and near-boundary element technique bias currents are considered, comparison with quasi-stationary model is carried out, influence of high-conductivity, oil and gas inclusions in a half-space on distribution of EMF is investigated, amplitude and phase curves of apparent resistivity are received.

Вступ

На даний час гармонічно змінні в часі електромагнітні поля (ЕМП) в однорідних та горизонтально-шаруватих моделях земної кори під дією природних та штучних зовнішніх джерел досліджені за допомогою добре розвинутої теорії спектрального аналізу. Це особливо стосується широкого класу двовимірних магнітотелуричних задач, коли зовнішнє поле задавалось у вигляді однорідного магнітного поля або плоскої однорідної хвилі. Відомі також аналітичні розв'язки задач розподілу ЕМП в порівняно простих електричних умовах для чужорідних локальних включень канонічної чи близької до неї форми у дво- та тривимірних горизонтально-шаруватих моделях [1,2]. Щодо об'єктів із включеннями складної форми, які краще відображають реальну геоелектричну ситуацію, то для математичного моделювання ЕМП, збудженого штучними джерелами, в останні роки на базі сучасних швидкодіючих комп'ютерів все ширше використовують числові та числово-аналітичні методи

розв'язування прямих задач геоелектрики. Застосування найбільш розповсюджених різнице-вих методів [3,4] чи методів скінченних елементів [5,6] дає хорошу точність результатів, але вимагає покриття сіткою всієї області, яку займає різнорідне тіло, що потребує великих обсягів пам'яті й програм точного обернення матриць великої розмірності. Використовуючи метод граничних інтегральних рівнянь [7-9] та створені на його базі методи граничних елементів [10,11], дискретизують тільки граничну поверхню об'єкта та поверхні розподілу середовищ, що економить обсяг оперативної пам'яті під час роботи алгоритму, дає порівняно високу точність розрахунків у внутрішніх точках. Однак при обчисленні компонент векторів напруженості ЕМП поблизу граничних чи контактних поверхонь точність розрахунків різко зменшується. Тому в багатьох випадках, на нашу думку, доцільно застосовувати непрямий метод приграничних елементів (НМПГЕ) [12,13], якому менше притаманні перераховані вище недоліки.

У цій роботі ми пропонуємо і апробуємо числово-аналітичні підходи, які ґрунтуються на

непрямою методі граничних елементів (НМГЕ) та НМПГЕ, до розв'язування прямих тривимірних задач теорії ЕМП у випадку установлених коливань для провідного кусково-однорідного півпростору, враховуємо струми зміщення порівняно з квазістационарною моделлю, а також досліджуємо вплив включень з вищою та нижчою (на прикладі нафто- та газоносних покладів), ніж у геосередовищі, провідністю на розподіл ЕМП, здійснюючи тривимірну інтерпретацію змодельованих даних за допомогою трансформацій значень компонент векторів напруженості ЕМП у амплітудні та фазові криві позірною питомого опору.

Формулювання задачі

Розглянемо кусково-однорідний півпростір, що займає область $\Omega = R^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : -\infty < x_i < \infty, i=1,2, -\infty < x_3 < 0\}$ у декартовій системі координат x_1, x_2, x_3 і містить $M-1$ включень Ω_m ($m = 2, \dots, M$), які перебувають в ідеальному електромагнітному контакті з геосередовищем $\Omega_1 = \Omega \setminus \cup_{m=2}^M (\Omega_m \cup \partial\Omega_m)$, причому $\partial\Omega_m \cap \partial\Omega = \emptyset$, $\partial\Omega_m$ – гранична поверхня зони Ω_m . Середовище і включення характеризуються постійними електропровідностями σ_1, σ_m , магнітними проникностями μ_1, μ_m і діелектричними проникностями $\varepsilon_1, \varepsilon_m$ відповідно. На денній поверхні $\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) : -\infty < x_i < \infty, i=1,2, x_3 = 0\}$ електричне поле (ЕП) відсутнє, а в контурі $\Omega_g \subset \Omega_1$ діє сторонній струм інтенсивності $\vec{\psi}(x, \tau) = (\psi_1(x, \tau), \psi_2(x, \tau), \psi_3(x, \tau))$, де $x = (x_1, x_2, x_3)$, τ – час. Припускаємо, що в початковий момент часу спостерігається нульовий розподіл компонент вектора напруженості ЕП $E_i^1(x, \tau)$ у середовищі й включеннях.

Рівняння Максвелла для кусково-однорідного тіла, в якому діють сторонні струми, мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H}^1 &= \sigma_1 \vec{E}^1 + \varepsilon_1 \frac{\partial \vec{E}^1}{\partial \tau} + \vec{\psi}, \quad \text{div} \vec{H}^s = 0, \\ \text{rot} \vec{H}^m &= \sigma_m \vec{E}^m + \varepsilon_m \frac{\partial \vec{E}^m}{\partial \tau}, \quad m = 2, \dots, M, \\ \text{rot} \vec{E}^s &= -\mu_s \frac{\partial \vec{H}^s}{\partial \tau}, \quad \text{div} \vec{E}^s = 0, \quad s = 1, \dots, M, \end{aligned} \quad (1)$$

де \vec{H}^s – вектор напруженості магнітного поля (МП) в Ω_s .

Для багатьох електродинамічних задач корисно розділити рівняння Максвелла, тобто записати окремі рівняння для електричного і магнітного полів. Перетворивши так рівняння (1), матимемо для визначення невідомих компонент вектора напруженості ЕП $E_j^1 = E_j^1(x, \tau)$

($j=1,2,3$) у середовищі й $E_j^m = E_j^m(x, \tau)$ у включеннях початково-крайову задачу, яка складається з системи телеграфічних рівнянь

$$\Delta E_j^1 - \sigma_1 \mu_1 \frac{\partial E_j^1}{\partial \tau} - \varepsilon_1 \mu_1 \frac{\partial E_j^1}{\partial \tau^2} = \mu_1 \frac{\partial \psi_j(x, \tau)}{\partial \tau},$$

$$(x, \tau) \in \Omega_1 \times T, \quad (2)$$

$$\Delta E_j^m - \sigma_m \mu_m \frac{\partial E_j^m}{\partial \tau} - \varepsilon_m \mu_m \frac{\partial E_j^m}{\partial \tau^2} = 0,$$

$$(x, \tau) \in \Omega_m \times T,$$

граничних

$$E_j^1 = 0, (x, \tau) \in \Gamma \times T, \quad (3)$$

контактних

$$\begin{aligned} E_j^1 &= E_j^m, \sigma_1 \frac{\partial E_j^1}{\partial n} + \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial E_j^1}{\partial n} = \\ &= -\sigma_m \frac{\partial E_j^m}{\partial n} - \varepsilon_m \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial E_j^m}{\partial n}, \quad (x, \tau) \in \partial\Omega_m \times T, \end{aligned} \quad (4)$$

та початкових умов

$$E_j^s = 0, \frac{\partial E_j^s}{\partial \tau} = 0, x \in \Omega_s, s = 1, \dots, M, \text{ при } \tau = 0, \quad (5)$$

де: Δ – оператор Лапласа, $T = \{\tau: 0 < \tau < \infty\}$, $n = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))$ – одинична зовнішня нормаль до $\partial\Omega_{1m} = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_m$.

Гармонічні коливання

Якщо проводити спостереження через досить тривалий час після зародження збурень, то можна припустити, що фізичні величини гармонічно змінюються в часі з кутовою частотою ω , тобто ми маємо справу з задачею про установлені коливання. У припущенні, що $E_j^s(x, \tau) = \tilde{E}_j^s(x, \omega)e^{-i\omega\tau}$, $\psi_j(x, \tau) = \tilde{\psi}_j(x, \omega)e^{-i\omega\tau}$, аналіз сильно спрощується, бо часова змінна виключається з диференціальних рівнянь і умов, внаслідок чого зникають початкові умови і замість (2)-(5) одержується така крайова задача:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{E}_j^1(x, \omega) + \mu_1 \omega (\varepsilon_1 \omega + i \sigma_1) \tilde{E}_j^1(x, \omega) = \\ = -i \omega \mu_1 \tilde{\psi}_j(x, \omega), x \in \Omega_1, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\Delta \tilde{E}_j^m(x, \omega) + \mu_m \omega (\varepsilon_m \omega + i \sigma_m) \tilde{E}_j^m(x, \omega) = 0, x \in \Omega_m,$$

$$\tilde{E}_j^1(x, \omega) = 0, x \in \Gamma, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_j^1(x, \omega) = \tilde{E}_j^m(x, \omega), (\sigma_1 - i \omega \varepsilon_1) \frac{\partial \tilde{E}_j^1(x, \omega)}{\partial n} = \\ = -(\sigma_m - i \omega \varepsilon_m) \frac{\partial \tilde{E}_j^m(x, \omega)}{\partial n}, x \in \partial\Omega_m, \end{aligned} \quad (8)$$

де $\tilde{E}_j^s(x, \omega) = \tilde{E}_j^{s1} + i\tilde{E}_j^{s2}$, $\tilde{\psi}_j(x, \omega) = \tilde{\psi}_j^1 + i\tilde{\psi}_j^2$ – комплексні амплітуди компонент вектора напруженості ЕП та сторонніх джерел струму.

Методика розв’язування.

Інтегральне зображення розв’язку

Для знаходження розв’язків задачі (6)-(8) використаємо непрямі методи граничних [10] або приграничних елементів [12]. Для кожної зони розв’язок \tilde{E}_j^s шукаємо в просторі R_s^3 . З цією метою розглянемо області $B_s \subset R_s^3$ такі, що $\Omega_s \subset B_s$, $\partial\Omega_m \cap \partial B_m = \emptyset$. У приграничних областях $G^s = B_s \setminus \Omega_s$ або на границях $\partial\Omega_{1m}, \partial\Omega_m$ введемо відповідно об’ємні приграничні G_v^s чи поверхневі граничні Γ_v^s елементи з невідомими компонентами фіктивних джерел струму $\tilde{\varphi}_{jv}^s(x, \omega) = \tilde{\varphi}_{jv}^{s1} + i\tilde{\varphi}_{jv}^{s2}$, причому

$$\begin{aligned} \cup_{v=1}^{V_s} G_v^s &= G, \quad \Gamma_v^1 = \partial G_v^1 \cap \partial\Omega_{1m}, \\ \Gamma_v^m &= \partial G_v^m \cap \partial\Omega_m \quad (v=1, \dots, V_m), \\ \cup_{v=1}^{V_1} \Gamma_v^1 &= \cup_{m=2}^M \partial\Omega_{1m}, \quad \cup_{v=1}^{V_m} \Gamma_v^m = \partial\Omega_m, \\ \Gamma_v^s \cap \Gamma_w^s &= \emptyset \quad \text{при } v \neq w. \end{aligned}$$

Тоді замість рівнянь (6) для $x \in R_s^3$ матимемо

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{E}_j^1(x, \omega) + \mu_1 \omega (\varepsilon_1 \omega + i\sigma_1) \tilde{E}_j^1(x, \omega) &= \\ = -\sum_{v=1}^{V_1} \tilde{\varphi}_{jv}^1(x, \omega) \chi_v^1 - i\omega \mu_1 \tilde{\psi}_j(x, \omega), \quad x \in R_1^3, & \quad (9) \\ \Delta \tilde{E}_j^m(x, \omega) + \mu_m \omega (\varepsilon_m \omega + i\sigma_m) \tilde{E}_j^m(x, \omega) &= \\ = -\sum_{v=1}^{V_m} \tilde{\varphi}_{jv}^m(x, \omega) \chi_v^m, \quad x \in R_m^3, & \end{aligned}$$

де χ_v^s – характеристична функція елемента γ_v^s , $\gamma \in \{G, \Gamma\}$.

Використавши спеціальний фундаментальний розв’язок $\tilde{\Phi}_h^s(x, \xi, \omega)$ рівняння Гельмгольца для R^3 , який автоматично задовольняє граничну умову (7), запишемо інтегральне зображення розв’язку задачі (7)-(9) для компонент $\tilde{E}_i^s(x, \omega)$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_j^s(x, \omega) &= \sum_{v=1}^{V_s} \int_{\gamma_v^s} \tilde{\Phi}_h^s(x, \tau, \omega) \tilde{\varphi}_{jv}^s(\xi, \omega) d\gamma_v^s(\xi) + \\ &+ \tilde{I}_{cj}(x, \omega, \tilde{\Phi}_h^s), \end{aligned} \quad (10)$$

а також одержані на його основі інтегральні зображення для похідних від цих компонент за координатами x_l та за нормаллю

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{E}_j^s(x, \omega)}{\partial x_l} &= \sum_{v=1}^{V_s} \int_{\gamma_v^s} \tilde{Q}_{hl}^s(x, \tau, \omega) \tilde{\varphi}_{jv}^s(\xi, \omega) d\gamma_v^s + \\ &+ \tilde{I}_{cj}(x, \omega, \tilde{Q}_{hl}^s), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{E}_j^s(x, \omega)}{\partial n} &= \sum_{v=1}^{V_s} \int_{\gamma_v^s} \tilde{Q}_h^s(x, \tau, \omega) \tilde{\varphi}_{jv}^s(\xi, \omega) d\gamma_v^s \\ &+ \tilde{I}_{cj}(x, \omega, \tilde{Q}_h^s), \end{aligned} \quad (12)$$

де $\tilde{\Phi}_h^s(x, \xi, \omega) = \tilde{\Phi}^s(r, \omega) - \tilde{\Phi}^s(r', \omega)$,

$$\tilde{\Phi}^s(r, \omega) = \frac{\exp(ir\sqrt{\mu_s \omega (\varepsilon_s \omega + i\sigma_s)})}{4\pi r} = \tilde{\Phi}^{s1} + i\tilde{\Phi}^{s2},$$

$$\tilde{\Phi}^{s1} = \frac{1}{4\pi r} \exp(-rA_s \sin(\frac{\theta_s}{2})) \cos(rA_s \cos(\frac{\theta_s}{2})),$$

$$\tilde{\Phi}^{s2} = \frac{1}{4\pi r} \exp(-rA_s \sin(\theta_s/2)) \sin(rA_s \cos(\theta_s/2)),$$

$$r^2 = \sum_{i=1}^3 y_i^2, \quad r'^2 = \sum_{i=1}^3 y_i'^2, \quad y_i = x_i - \xi_i,$$

$$y_i' = x_i - \xi_i \quad (i=1,2), \quad y_3' = x_3 + \xi_3,$$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in R^3,$$

$$A_s = \sqrt{\mu_s \omega} \sqrt[4]{\varepsilon_s^2 \omega^2 + \sigma_s^2}, \quad \theta_s = \arctg(\sigma_s / (\varepsilon_s \omega)),$$

$$\tilde{Q}_{hl}^s(x, \xi, \omega) = \frac{\partial \tilde{\Phi}_h^s(x, \xi, \omega)}{\partial x_l} = y_l \tilde{Q}_l^s(r, \omega) - y_l' \tilde{Q}_l^s(r', \omega),$$

$$\tilde{Q}_l^s(r, \omega) = \tilde{Q}_l^{s1} + i\tilde{Q}_l^{s2},$$

$$\tilde{Q}_l^{s1} = -\frac{1}{r^2} [rA_s (\tilde{\Phi}^{s1} \sin(\theta_s/2) + \tilde{\Phi}^{s2} \cos(\theta_s/2)) + \tilde{\Phi}^{s1}],$$

$$\tilde{Q}_l^{s2} = \frac{1}{r^2} [rA_s (\tilde{\Phi}^{s1} \cos(\theta_s/2) - \tilde{\Phi}^{s2} \sin(\theta_s/2)) - \tilde{\Phi}^{s2}],$$

$$\tilde{Q}^s(x, \xi, \omega) = \tilde{Q}^{s1} + i\tilde{Q}^{s2}, \quad \tilde{Q}^{sk} = \sum_{l=1}^3 \tilde{Q}_l^{sk} n_l(x), \quad k=1,2,$$

$$\tilde{I}_{cj}(x, \omega, \tilde{\Phi}_h^m) = \tilde{I}_{cj}(x, \omega, \tilde{Q}_{hl}^m) = \tilde{I}_{cj}(x, \omega, \tilde{Q}_h^m) = 0,$$

$$\tilde{I}_{cj}(x, \omega, \tilde{F}_h^1) = i\omega \mu_1 \int_C \tilde{F}_h^1(x, \xi, \omega) \tilde{\psi}_j(\xi, \omega) dC(\xi) =$$

$$= \tilde{I}_{cj}^1(x, \omega, \tilde{F}_h^1) + i\tilde{I}_{cj}^2(x, \omega, \tilde{F}_h^1), \quad F_h \in \{\Phi_h, Q_{hl}, Q_h\},$$

$$\tilde{I}_{cj}^1(x, \omega, \tilde{F}_h^1) = -\omega \mu_1 \int_C (\tilde{F}_h^{11} \tilde{\psi}_j^2 + \tilde{F}_h^{12} \tilde{\psi}_j^1) dC(\xi),$$

$$\tilde{I}_{cj}^2(x, \omega, \tilde{F}_h^1) = \omega \mu_1 \int_C (\tilde{F}_h^{11} \tilde{\psi}_j^1 - \tilde{F}_h^{12} \tilde{\psi}_j^2) dC(\xi). \quad (13)$$

Побудова системи лінійних алгебричних рівнянь для знаходження невідомих фіктивних джерел струму

Для спрощення алгоритму апроксимуємо невідомі дійсні функції $\tilde{\varphi}_{iv}^{s1}(x, \omega), \tilde{\varphi}_{iv}^{s2}(x, \omega)$ константами d_{iv}^{s1}, d_{iv}^{s2} . Для їх знаходження побудуємо з використанням виразів (10), (12), систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР), вимагаючи задоволення в колокаційному сенсі умов контакту. Вона має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{V_1} [d_{jv}^{11} I_{vw}^1(\tilde{\Phi}_h^{11}) - d_{jv}^{12} I_{vw}^1(\tilde{\Phi}_h^{12})] - \sum_{v=1}^{V_m} [d_{jv}^{m1} I_{vw}^m(\tilde{\Phi}_h^{m1}) - \\ - d_{jv}^{m2} I_{vw}^m(\tilde{\Phi}_h^{m2})] = -\tilde{I}_{cj}^1(x^{mw}, \omega, \tilde{\Phi}_h^1), \end{aligned}$$

$$x^{mw} \in \Gamma_w^m \subset \partial\Omega_m, \quad w = 1, \dots, V_m, \quad (14)$$

$$\sum_{v=1}^{V_1} [d_{jv}^{11} I_{vw}^1(\tilde{\Phi}_h^{12}) + d_{jv}^{12} I_{vw}^1(\tilde{\Phi}_h^{11})] - \sum_{v=1}^{V_m} [d_{jv}^{m1} I_{vw}^m(\tilde{\Phi}_h^{m2}) + d_{jv}^{m2} I_{vw}^m(\tilde{\Phi}_h^{m1})] J = -\tilde{I}_{cj}^2(x^{mw}, \omega, \tilde{\Phi}_h^1), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{v=1}^{V_1} [d_{jv}^{11}(\sigma_1 I_{vw}^1(\tilde{Q}_h^{11}) - \omega \varepsilon_1 I_{vw}^1(\tilde{Q}_h^{12})) - d_{jv}^{12}(\sigma_1 I_{vw}^1(\tilde{Q}_h^{12}) - \omega \varepsilon_1 I_{vw}^1(\tilde{Q}_h^{11}))] J + \\ & + \sum_{v=1}^{V_m} [d_{jv}^{m1}(\sigma_m I_{vw}^m(\tilde{Q}_h^{m1}) - \omega \varepsilon_m I_{vw}^m(\tilde{Q}_h^{m2})) - d_{jv}^{m2}(\sigma_m I_{vw}^m(\tilde{Q}_h^{m2}) - \omega \varepsilon_m I_{vw}^m(\tilde{Q}_h^{m1}))] J = \\ & = -\sigma_1 \tilde{I}_{cj}^1(x^{mw}, \omega, \tilde{Q}_h^1) + \omega \varepsilon_1 \tilde{I}_{cj}^2(x^{mw}, \omega, \tilde{Q}_h^1), \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{v=1}^{V_1} [d_{jv}^{11}(\sigma_1 I_{vw}^1(\tilde{Q}_h^{12}) - \omega \varepsilon_1 I_{vw}^1(\tilde{Q}_h^{11})) + d_{jv}^{12}(\sigma_1 I_{vw}^1(\tilde{Q}_h^{11}) - \omega \varepsilon_1 I_{vw}^1(\tilde{Q}_h^{12}))] J + \\ & + \sum_{v=1}^{V_m} [d_{jv}^{m1}(\sigma_m I_{vw}^m(\tilde{Q}_h^{m2}) - \omega \varepsilon_m I_{vw}^m(\tilde{Q}_h^{m1})) + d_{jv}^{m2}(\sigma_m I_{vw}^m(\tilde{Q}_h^{m1}) - \omega \varepsilon_m I_{vw}^m(\tilde{Q}_h^{m2}))] J = \\ & = -\sigma_1 \tilde{I}_{cj}^2(x^{mw}, \omega, \tilde{Q}_h^1) + \omega \varepsilon_1 \tilde{I}_{cj}^1(x^{mw}, \omega, \tilde{Q}_h^1), \quad (17) \end{aligned}$$

де $I_{vw}^s(F) = \int_{\gamma_v^s} F(x^{sw}, \xi, \omega) d\gamma_v^s(\xi)$. Зауважимо,

що інтеграли за Γ_v^s від функцій \tilde{Q}_h^s при $x^{mw} = \xi^{mw}$, які входять в (16), (17), обчислюються в сенсі Коші.

Обчислення компонент ЕМП

Розв'язавши СЛАР (14)-(17), одержимо формули для знаходження дійсних \tilde{E}_j^{s1} і уявних частин \tilde{E}_j^{s2} компонент вектора напруженості ЕП у будь-яких точках півпростору x^{sp} , які нас цікавлять, включаючи і поверхні контакту,

$$\begin{aligned} \tilde{E}_j^{s1}(x^{sp}, \omega) &= \sum_{v=1}^{V_s} [d_{jv}^{s1} I_{vp}^s(\tilde{\Phi}_h^{s1}) - d_{jv}^{s2} I_{vp}^s(\tilde{\Phi}_h^{s2})] J + \\ &+ \tilde{I}_{cj}^{s1}(x^{sp}, \omega, \tilde{\Phi}_h^s), \\ \tilde{E}_j^{s2}(x^{sp}, \omega) &= \sum_{v=1}^{V_s} [d_{jv}^{s1} I_{vp}^s(\tilde{\Phi}_h^{s2}) + d_{jv}^{s2} I_{vp}^s(\tilde{\Phi}_h^{s1})] J + \\ &+ \tilde{I}_{cj}^{s2}(x^{sp}, \omega, \tilde{\Phi}_h^s). \end{aligned}$$

Дійсні й уявні частини \tilde{H}_j^{s1} , \tilde{H}_j^{s2} компонент вектора напруженості МП обчислимо за формулами

$$\tilde{H}_k^{s1} = \frac{1}{\omega \mu_s} \left(\frac{\partial \tilde{E}_l^{s2}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{E}_j^{s2}}{\partial x_l} \right), \tilde{H}_k^{s2} = -\frac{1}{\omega \mu_s} \left(\frac{\partial \tilde{E}_l^{s1}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{E}_j^{s1}}{\partial x_l} \right),$$

використовуючи вирази, аналогічні (11). Тут для різних k використовуються різні пари індексів l та j , зокрема, для $k=1$ вибираємо $l=3, j=2$, для $k=2$ — $l=1, j=3$, для $k=3$ — $l=2, j=1$. Остаточного одержимо

$$\begin{aligned} \tilde{H}_k^{s1}(x^{sp}, \omega) &= \frac{1}{\omega \mu_s} \sum_{v=1}^{V_s} [d_{lv}^{s1} I_{vp}^s(\tilde{Q}_{hj}^{s2}) + d_{lv}^{s2} I_{vp}^s(\tilde{Q}_{hj}^{s1}) - \\ &- d_{jv}^{s1} I_{vp}^s(\tilde{Q}_{hl}^{s2}) - d_{jv}^{s2} I_{vp}^s(\tilde{Q}_{hl}^{s1})] J + \\ &+ \tilde{I}_{cl}^{s2}(x^{sp}, \omega, \tilde{Q}_{hj}^s) - \tilde{I}_{cj}^{s2}(x^{sp}, \omega, \tilde{Q}_{hl}^s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_k^{s2}(x^{sp}, \omega) &= -\frac{1}{\omega \mu_s} \sum_{v=1}^{V_s} [d_{lv}^{s1} I_{vp}^s(\tilde{Q}_{hj}^{s1}) - d_{lv}^{s2} I_{vp}^s(\tilde{Q}_{hj}^{s2}) - \\ &- d_{jv}^{s1} I_{vp}^s(\tilde{Q}_{hl}^{s1}) + d_{jv}^{s2} I_{vp}^s(\tilde{Q}_{hl}^{s2})] J + \\ &+ \tilde{I}_{cl}^{s1}(x^{sp}, \omega, \tilde{Q}_{hj}^s) - \tilde{I}_{cj}^{s1}(x^{sp}, \omega, \tilde{Q}_{hl}^s). \end{aligned}$$

Квазістаціонарна модель

У цьому випадку рівняння (9) та контактні умови (8) матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{E}_j^1(x, \omega) + i\mu_1 \omega \sigma_1 \tilde{E}_j^1(x, \omega) &= \\ = -\sum_{v=1}^{V_1} \tilde{\varphi}_{jv}^1(x, \omega) \chi_v^1 - i\omega \mu_1 \tilde{\psi}_j(x, \omega), \quad x \in R_1^3, \\ \Delta \tilde{E}_j^m(x, \omega) + i\mu_m \omega \sigma_m \tilde{E}_j^m(x, \omega) &= \\ = -\sum_{v=1}^{V_m} \tilde{\varphi}_{jv}^m(x, \omega) \chi_v^m, \quad x \in R_m^3, \\ \tilde{E}_j^1(x, \omega) &= \tilde{E}_j^m(x, \omega), \end{aligned}$$

$$\sigma_1 \frac{\partial \tilde{E}_j^1(x, \omega)}{\partial n} = -\sigma_m \frac{\partial \tilde{E}_j^m(x, \omega)}{\partial n}, \quad x \in \partial \Omega_m.$$

Зрозуміло, що дещо спростяться і вирази для фундаментального розв'язку

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^{s1} &= \frac{1}{4\pi r} \exp(-rA_s / \sqrt{2}) \cos(rA_s / \sqrt{2}), \\ \tilde{\Phi}^{s2} &= \frac{1}{4\pi r} \exp(-rA_s / \sqrt{2}) \sin(rA_s / \sqrt{2}), \\ \tilde{Q}_l^{s1} &= -\frac{(x_l - \xi_l)}{r^2} [rA_s(\tilde{\Phi}^{s1} + \tilde{\Phi}^{s2}) / \sqrt{2} + \tilde{\Phi}^{s1}], \\ \tilde{Q}_l^{s2} &= \frac{(x_l - \xi_l)}{r^2} [rA_s(\tilde{\Phi}^{s1} - \tilde{\Phi}^{s2}) / \sqrt{2} - \tilde{\Phi}^{s2}]; \end{aligned}$$

тут враховано, що $\theta_s = \pi/2$, а для A_s маємо формулу $A_s = \sqrt{\mu_s \omega \sigma_s}$.

У СЛАР внаслідок простіших других контактних умов замість рівнянь (16), (17) матимемо

$$\begin{aligned} & \sigma_1 \sum_{v=1}^{V_{1M}} [d_{jv}^{11} I_{vw}^1(\tilde{Q}_h^{11}) - d_{jv}^{12} I_{vw}^1(\tilde{Q}_h^{12})] + \\ & + \sigma_m \sum_{v=1}^{V_m} [d_{jv}^{m1} I_{vw}^m(\tilde{Q}_h^{m1}) - d_{jv}^{m2} I_{vw}^m(\tilde{Q}_h^{m2})] = \\ & = -\sigma_1 \tilde{I}_{cj}^1(x^{mw}, \omega, \tilde{Q}_h^1), \\ & \sigma_1 \sum_{v=1}^{V_{1M}} [d_{jv}^{11} I_{vw}^1(\tilde{Q}_h^{12}) + d_{jv}^{12} I_{vw}^1(\tilde{Q}_h^{11})] + \\ & + \sigma_m \sum_{v=1}^{V_m} [d_{jv}^{m1} I_{vw}^m(\tilde{Q}_h^{m2}) + d_{jv}^{m2} I_{vw}^m(\tilde{Q}_h^{m1})] = \\ & -\sigma_1 \tilde{I}_{cj}^2(x^{mw}, \omega, \tilde{Q}_h^1). \end{aligned}$$

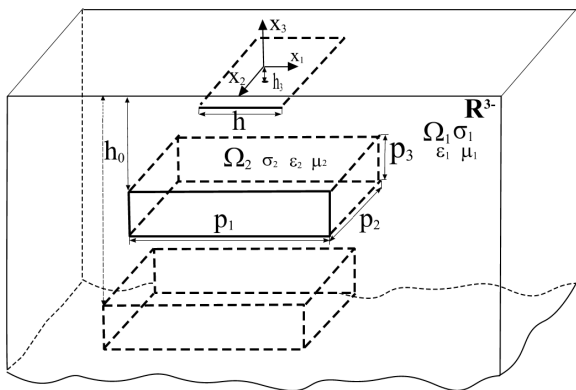


Рисунок 1 – Геоелектрична модель півпростору з включенням

Числові дослідження

Розглянуто включення Ω_2 у формі паралелепіпеда розмірами $p_1 = p_2 = 6, p_3 = 3$, розміщеного на глибині h_0 від границі півпростору (рис. 1). Стороннім джерелом, яке збурювало ЕМП, враховуючи широке застосування чисто індуктивного способу збудження, була квадратна рамка C зі стороною $h = 2,5$, яка знаходилася на глибині $h_3 = -0,01$. Залежність сили струму в рамці описувалась функцією $\tilde{\psi}_j(x, \omega) = C_j(x)$, де $C_j(x)$ – проекції одиничного вектора, колінеарного дотичній до контура C в точці $x \in C$. У цьому частковому випадку вирази (13) матимуть такий вигляд:

$$\tilde{I}_{cj}^1(x, \omega, \tilde{F}^1) = -\omega \mu_1 \int_C \tilde{F}^{12} C_j(\xi) dC(\xi),$$

$$\tilde{I}_{cj}^2(x, \omega, \tilde{F}^1) = \omega \mu_1 \int_C \tilde{F}^{11} C_j(\xi) dC(\xi).$$

Для знаходження розв'язків задачі (6)-(8) з метою порівняння точності числових результатів використовували непрямі методи граничних та приграничних елементів. Оскільки під час обчислення компонент векторів напруженості ЕМП результати, одержані за допомогою НМПГЕ, краще співпадали з тестовими, всі на-

ведені нижче графічні дані отримані за допомогою саме цього методу.

Досліджувались закономірності зміни характеристик ЕМП від фізичних властивостей включення: його провідності, діелектричної й магнітної проникливостей – з метою формулювання практичних рекомендацій у процесі розпізнавання локальних провідних і високоомних неоднорідностей. На рис. 2 зображено для повної (з врахуванням струмів зміщення, товстіші криві) і квазістаціонарної моделей (тонші криві) залежність дійсних значень вертикальної компоненти $H_3^1(0,0,h_3,\omega)$, одержаних в центрі рамки, від частоти ω для параметрів $\sigma_2=0,25\sigma_1, \mu_2=0,99994\mu_0, \epsilon_2=2\epsilon_0; \sigma_2=0,1\sigma_1, \mu_2=1,00008\mu_0, \epsilon_2=\epsilon_0; \sigma_2=5\sigma_1, \mu_2=\mu_0, \epsilon_2=30\epsilon_0$, які відповідають нафтовому (криві з символами \bullet), газовому (криві з \circ) та провідному включенням (криві з \blacktriangle). З метою порівняння тут також наведено величини для однорідного півпростору ($\sigma_2=\sigma_1=1$ См/м, $\mu_2=\mu_1=\mu_0=4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м, $\epsilon_2=\epsilon_1=15\epsilon_0, \epsilon_0=(1/36\pi) \cdot 10^{-9}$ Ф/м, криві без символів). Як бачимо, для високоомних включень значення $H_3^1(0,0,h_3,\omega)$ на всьому діапазоні частот є меншими, ніж в однорідному півпросторі, а для провідних – більшими; причому врахування струмів зміщення дає вищі величини, ніж квазістаціонарна модель, що особливо проявляється в області високих частот. Відзначимо, що розмірності всіх фізичних величин (час, коефіцієнти електропровідності, діелектричні та магнітні проникливості, напруженості електричного та магнітного полів) вибирались у системі СІ, а всі геометричні параметри є безрозмірними, оскільки з врахуванням критерію подібності вони зменшені порівняно з реальними в сто разів.

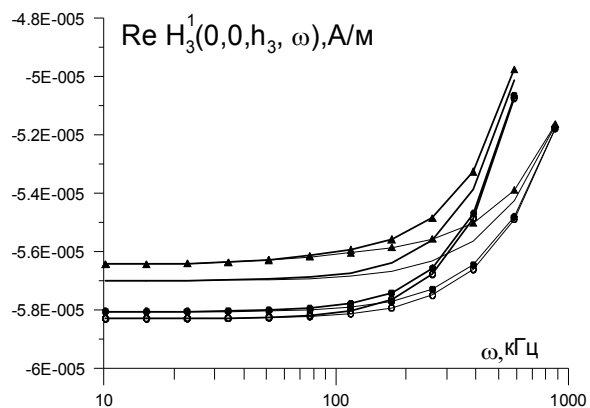


Рисунок 2 – Вплив ЕМ параметрів включення на вертикальну компоненту МП

Як відомо, під час інтерпретації результатів важливе значення мають теоретичні криві частотного зондування [14], які характеризують амплітуду

$$|\rho_\omega^f|/\rho_1 = \frac{\sqrt{(f^1 f^{01} + f^2 f^{02})^2 + (f^2 f^{01} - f^1 f^{02})^2}}{(f^{01})^2 + (f^{02})^2}$$

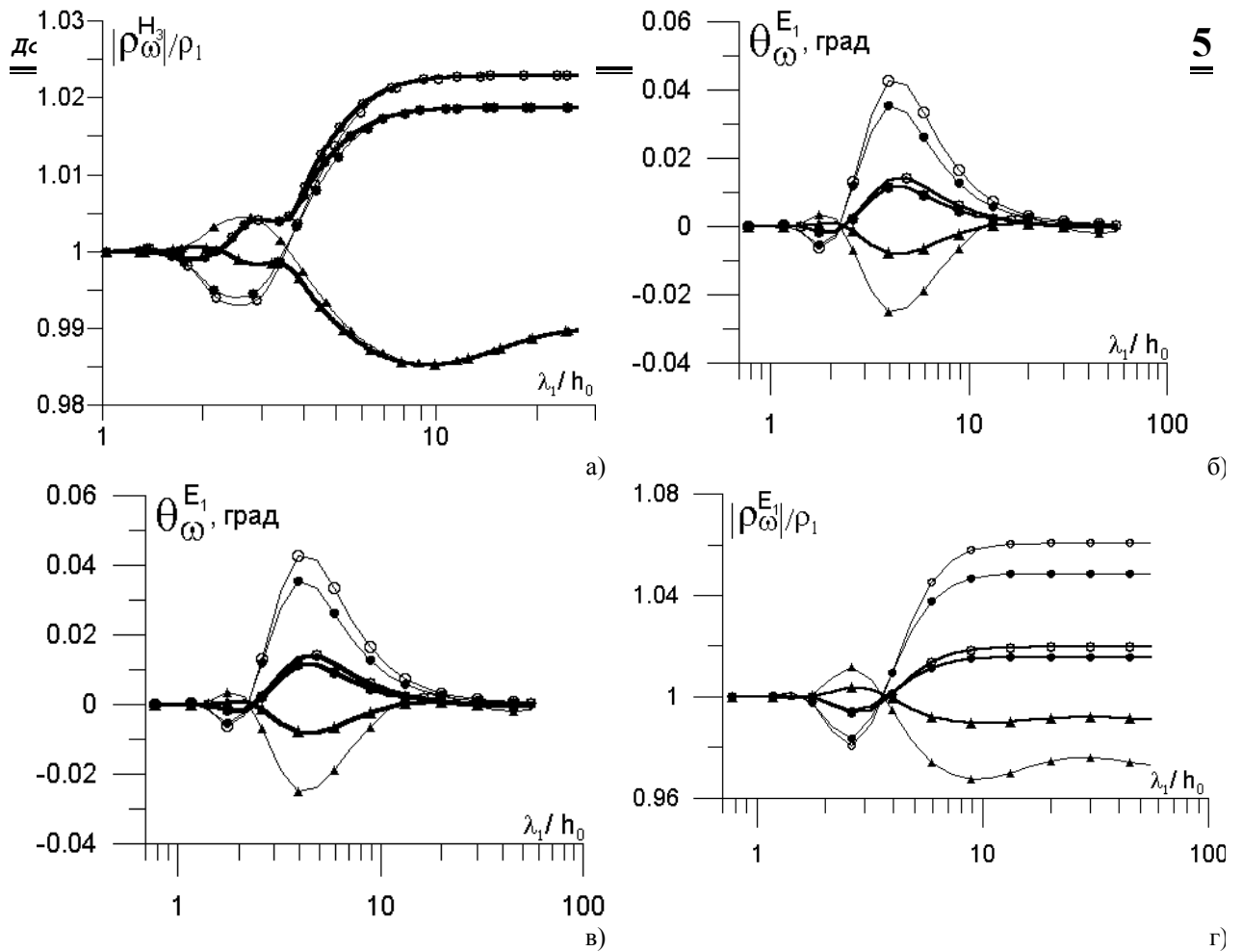


Рисунок 3 – Порівняння амплітудних та фазових кривих для повної та квазістаціонарної моделі

і фазу $\theta_{\omega}^f = \arctg \frac{f^2 f^{01} - f^1 f^{02}}{f^1 f^{01} + f^2 f^{02}}$ позірною питомиго опору, тут $f^k \in \{H_1^{1k}, H_2^{1k}, H_3^{1k}, E_1^{1k}, E_2^{1k}\}$, f^1, f^{01}, f^2, f^{02} – дійсні та уявні частини компонент векторів напруженості ЕМП, індекс „0” вказує на величини в однорідному півпросторі з питомим опором $\rho_1 = 1/\sigma_1$. Тому на рис. 3, а, б, зображено графіки залежності $|\rho_{\omega}^{H3}|/\rho_1$ та θ_{ω}^{H3} , одержані в центрі рамки, від λ_1/h_0 в простому логарифмічному масштабі для повної та квазістаціонарної моделей. Амплітудні й фазові криві для $|\rho_{\omega}^{E1}|/\rho_1$ і θ_{ω}^{E1} , обчислені в рамці (в точці з координатами (0,6; 0,6; h_3), товстіші криві) та за її межами (в точці з координатами (1,6; 0,6; h_3), тонші криві), зображені на рис. 3, в, г, мають аналогічний з попередніми характер. Тут $\lambda_1 = 2\pi\sqrt{2}/A_1$ – довжина хвилі в Ω_1 , позначення такі ж, як і на рис. 2. За максимумами чи мінімумами на цих кривих можна оцінити позірний опір включення.

Досліджували також вплив глибини залягання включень на значення компонент ЕМП. Зокрема, на рис. 4 зображено графіки залежності $|\rho_{\omega}^{H3}|/\rho_1$ у випадку високоомних (рис. а) та провідних (рис. б) включень, коли $h_0 = 1,0$

(товстіші криві) та $h_0 = 1,5$ (тонші криві), причому для провідного включення наведені результати повної (криві з символами \ominus) та квазістаціонарної (криві без символів) моделей.

Висновки

З точки зору інтерпретаційного процесу пряма задача індуктивних зондувань є дуже важливою і визначальною та підлягає постійній оптимізації. Варто відзначити, що інтерпретація даних, які відносяться до горизонтально-неоднорідних середовищ, із застосуванням позірних параметрів одновимірних моделей (нехай навіть багат шарових) вже себе вичерпала. Сучасний інтерпретаційний процес вимагає застосування тривимірних математичних моделей. Гостроти ситуації додає й те, що тенденцією ЕМ досліджень є організація збору й обробки все більших обсягів даних, і, отже, всі елементи апарату інверсії, включаючи і елементи тривимірного характеру, повинні бути оперативними. Як відомо, обернену задачу розв'язують переважно на базі аналізу чутливості прямої задачі до змін геопараметрів і проводять його найчастіше шляхом багатократного використання процедури прямої задачі. Тому алгоритм прямої тривимірної задачі, який дає можливість в частотній області ефективно і з достатньою точністю обчислювати всі компоненти ЕМП й позірні величини, не вводячи потенціалів електричного чи магнітного типів, є в цій ситуації надзвичайно корисним.

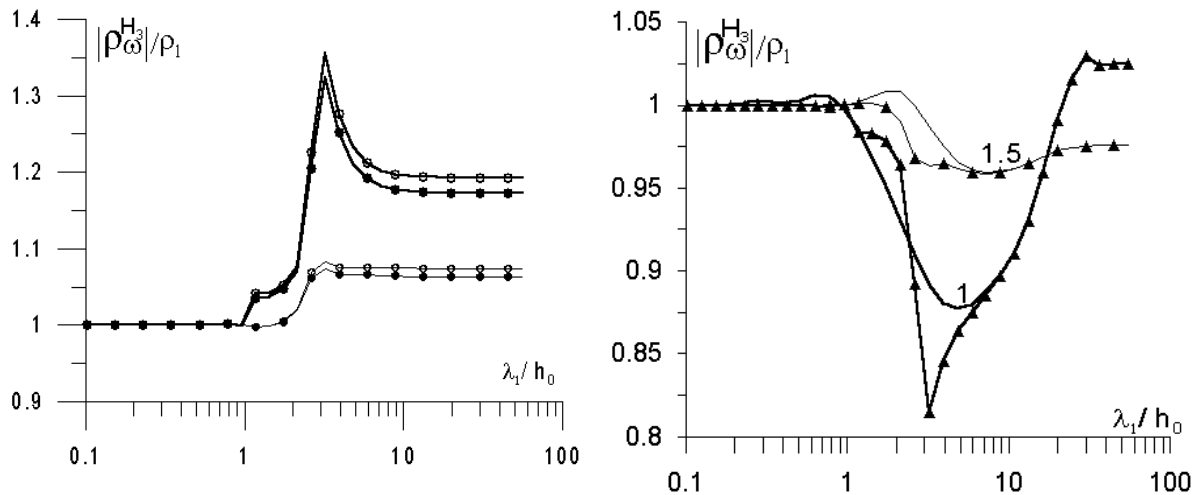


Рисунок 4 – Залежність амплітудних кривих від глибини залягання включення

З усього наведеного вище випливає, що запропонована для розв'язування прямих тривимірних задач у провідному кусково-однорідному півпросторі методика є ефективною, а розвиток створеного на її базі програмного забезпечення може відбуватись із врахуванням таких факторів. Окрім розглянутого кусково-однорідного півпростору, варто дослідити ще й шарувату модель з включеннями довільної форми, оскільки вона істотна для сучасних умов застосування індуктивної імпульсної електророзвідки. Водночас для оперативнішої обробки великих масивів площинних даних під час розв'язування оберненої задачі геоелектрики слід одержати інтерпретаційні формули на базі амплітудних та фазових кривих позірного питомого опору.

Результати проведеного математичного моделювання свідчать про доцільність застосування індуктивних імпульсних електророзвідувальних методів частотного зондування для виявлення високопровідних включень типу рудних родовищ та високоомних включень типу нафтових і газових покладів. Загальними сприятливими умовами для виявлення і дослідження локальних неоднорідностей з провідністю, вищою й нижчою, ніж геосередовище, треба вважати співвимірну з горизонтальними розмірами (чи меншу) глибину їх залягання.

Література

1. Жданов М.С. Электроразведка. – М.: Недра, 1986. – 316 с.
2. Кауфман А.А. Введение в теорию геофизических методов. Часть 2. Электромагнитные поля: Пер. с англ. – М.: ООО «Недра-Бизнесцентр», 2000. – 483 с.
3. Newman, G.A., and Alumbaugh, D.L. Frequency-domain modeling of airborne electromagnetic response of high-contrast prisms in layered earth: *Geophys. Prosp.*, 1995, **43**, 1021-1042.
4. Fomenko, E.Y., and Mogi, T. A new computation method for a staggered grid of 3D EM field conservative modeling: *Earth, Planets and Space*, 2002, **54**, 499-509.
5. Badea, E. A., Everett, M.E., Newman, G.A., and Biro, O. Finite-element analysis of controlled-source electromagnetic induction using Coulomb-gauged potentials: *Geophysics*, 2001, **66**, 786-799.
6. Mitsuhashi, Y., and Uchida, T. 3D magnetotelluric modeling using the T-Ω finite-element method: *Geophysics*, 2004, **69**, 108-119.
7. Табаровский Л.А. Применение метода интегральных уравнений в задачах геоэлектрики. – Новосибирск: Наука, 1975. – 140 с.
8. Dmitriev, V.I., and Nesmeyanova, N.I. Integral equation method in three-dimensional problems of low-frequency electrodynamics: *Computat. Math. Modeling*, New-York: Plenum Pub. Corp., 1992, **3**, 313-317.
9. Avdeev, D.B., Kuvshinov, A.V., Pankratov, O. V., and Newman, G.A., Three-dimensional induction logging problems, Part I: An integral equation solution and model comparisons: *Geophysics*, **67**, 413-426.
10. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
11. Paulsen, K.D., Linch, D.R., and Strohbehn, J.W. Three-dimensional finite, boundary, and hybrid element solutions of the Maxwell equations for lossy dielectric media: *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1988, **36**, 682-693.
12. Журавчак Л. М., Грицько Є. Г. Метод приграничних елементів у прикладних задачах математичної фізики. – Львів: Карпатське відділення Інституту геофізики НАН України, 1996. – 220 с.
13. Журавчак Л. М., Шуміліна Н. В. Математичне моделювання електромагнітного поля у процесі дослідження складних геоелектричних розрізів // *Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ*. – 2004. – № 3. – С. 98-104.
14. Электроразведка: Справочник геофизика. – М.: Недра, 1979. – 517 с.