

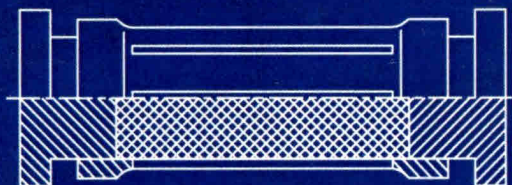
В. М. Шопя

І. П. Шацький

О. О. Бедзір

А. С. Величкович

# КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ПРОРІЗАНИХ ОБОЛОНОК З ДЕФОРМІВНИМИ ТІЛАМИ



Національна академія наук України  
Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача

Міністерство освіти і науки України  
Івано-Франківський національний технічний  
університет нафти і газу

В. М. Шопа, І. П. Шацький,  
О. О. Бедзір, А. С. Величкович

# **КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ПРОРІЗАНИХ ОБОЛОНОК З ДЕФОРМІВНИМИ ТІЛАМИ**

Івано-Франківськ  
2015

УДК 539.3  
ББК 22.251  
К 65

**Рецензенти:**

чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. Г. С. Кіт (*Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України*)

д-р техн. наук, проф. М. М. Кундрат (*Нац. ун-т водного господарства та природокористування*)

д-р техн. наук, проф. М. В. Лисканич (*Івано-Франківський нац. техн. ун-т нафти і газу*)

*Рекомендовано до друку Вченою радою Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (протокол № 2 від 29 січня 2015 р.) та Вченою радою Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу (протокол № 13/547 від 24 грудня 2014 р.)*

**К 65 Контактна взаємодія прорізанних оболонок з деформівними тілами : [монографія] / В. М. Шопя, І. П. Шацький, О. О. Бездір, А. С. Величкович – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2015. – 208 с.**

**ISBN 978-966-694-254-1**

Викладено результати механіко-математичного моделювання фрикційного контакту прорізанних оболонок та деформівного заповнювача. Подано розв'язки неконсервативних мішаних контактних задач, на основі яких визначено міцність, жорсткість та демпфувальну здатність оболонкових віброзахисних систем.

**УДК 539.3  
ББК 22.251**

© Шопя В. М., Шацький І. П.,  
Бездір О. О., Величкович А. С., 2015  
© ІШПМ НАН України,  
ІФНТУНГ, 2015

**ISBN 978-966-694-254-1**

## ЗМІСТ

<b>Вступ</b> .....	6
<b>Розділ 1</b>	
<b>Фрикційна взаємодія прорізної циліндричної оболонки з пружним заповнювачем</b> ( <i>О. О. Бедзір, І. П. Шацький, В. М. Шона</i> ) .....	12
1.1 Механіко-математична модель контактної взаємодії прорізної циліндричної оболонки із заповнювачем .....	12
1.2 Числово-аналітичний розв'язок контактної задачі для прорізної оболонки з затисненням на торцях .....	17
1.2.1 Виведення інтегрального рівняння та аналіз розв'язку контактної задачі .....	18
1.2.2 Змішана задача фрикційного контакту прорізної циліндричної оболонки з деформівним заповнювачем .....	31
1.3 Перевірка числового методу аналітичними розв'язками контактної задачі .....	42
1.3.1 Розв'язок контактної задачі за гладкого контакту .....	42
1.3.2 Стиск заповнювача в абсолютно жорсткій обоймі .....	43
1.4 Фрикційна взаємодія безмежної циліндричної оболонки з розрізами та деформівного заповнювача .....	45



1.5	Контактна взаємодія обмеженої розрізної циліндричної оболонки з деформівним заповнювачем.....	57
1.6	Вплив довжини заповнювача на контактну взаємодію.....	62

## **Розділ 2**

### **Фрикційний контакт системи коаксіальних циліндричних оболонок з пружним заповнювачем**

	<i>(О. О. Бедзір)</i> .....	69
2.1	Постановка та розв'язок контактної задачі .....	70
2.2	Змішана задача фрикційного контакту коаксіально встановлених оболонок з пружним заповнювачем .....	88

## **Розділ 3**

### **Методика розрахунку демпфера з розрізаною циліндричною оболонкою**

	<i>(І. П. Шацький)</i> .....	100
3.1	Контактна взаємодія ортотропної циліндричної оболонки з деформівним заповнювачем .....	100
3.2	Механіко-математичне моделювання демпфера з розрізаною уздовж твірної циліндричною оболонкою .....	113
3.3	Конструкційне демпфування при немонотонному навантаженні заповнювача у циліндричній оболонці з розрізом .....	123
3.4	Розрахунок демпфера із зовнішньою розрізаною та внутрішньою суцільною оболонками.....	137

<b>Розділ 4</b>	
<b>Дослідження взаємодії прорізанних оболонок з пружним тілом засобами віртуального та лабораторного експериментів</b>	
<i>(А. С. Величкович)</i> .....	146
4.1 Скінченно-елементний аналіз .....	146
4.2 Результати лабораторного експерименту .....	156
4.3 Порівняння теоретичних та експериментальних результатів .....	163
<b>Розділ 5</b>	
<b>Особливості конструкцій прорізнних оболонкових пружних елементів з деформівним заповнювачем</b>	
<i>(А. С. Величкович, В. М. Шона)</i> .....	167
5.1 Оболонкові пружини з прорізами .....	168
5.2 Оболонкові пружини з розрізом .....	179
<b>Список використаної літератури</b> .....	192

## ВСТУП

Для вирішення актуальної проблеми віброізоляції механізмів та споруд у Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України створено новий клас віброзахисних пристроїв – оболонкові пружні елементи [1–12, 23–35, 74, 76, 83–95, 124, 147]. Головна ознака конструкцій цього класу – використання тонкостінних елементів (оболонки, пластин, стержнів) як головної робочої ланки.

Ефективність роботи віброзахисної системи визначається переважно жорсткістю і демпфуванням пружного елемента. Для вирішення питання віброзахисту в конкретній ситуації необхідно управляти цими параметрами на стадії проектування – знижувати жорсткість пружних елементів без шкоди для їх міцності і забезпечувати при цьому необхідний рівень демпфування. Зважаючи на це, розроблено дві групи оболонкових пружин високої податливості на базі оболонки із прорізами та оболонки розімкнутого профілю. Робота цих оболонкових пружин у загальному базується на такому принципі. Зовнішнє навантаження діє на поршні і змушує їх рухатись назустріч один одному, стискаючи заповнювач. Останній, змінюючи свою форму, вступає у контактну взаємодію із тонкостінною робочою ланкою (оболонка з прорізами чи розрізом). Внаслідок цього оболонка, деформуючись в межах пружності, накопичує потенціальну енергію пружної деформації. При зникненні (зменшенні) зовнішнього навантаження рухомі частини системи за рахунок накопиченої енергії повертаються у вихідне (проміжне) положення. Частина підведеної до системи енергії зовнішніх впливів розсіюється за рахунок взаємного проковзування з тертям заповнювача та оболонки, внутрішнього тертя в заповнювачі та матеріалів несучої ланки. Таким чином, такі пружні елементи володіють як

амортизаційними, так і демпфувальними властивостями.

Сучасні оболонкові пружні елементи придатні для широкого використання у нафтогазовій, гірничій і металургійній промисловості, сільському господарстві, в авіа- та суднобудуванні, на залізничному транспорті, в машинах і механізмах, що зазнають значних динамічних навантажень і працюють в агресивних середовищах (можливо із присутністю абразиву) чи в екстремальних температурних умовах [4, 22, 23–35, 40, 74–76, 147].

Оболонкові віброізолятори з деформівним заповнювачем зазвичай систематизують за типом робочих ланок. Однією з найчисельніших груп у цій класифікації є пружні елементи високої податливості на базі оболонок із прорізами [6, 11, 12, 87, 93] та оболонок розімкнутого профілю [8–10, 23, 24, 90, 93–95]. Їх вдале проектування і використання суттєво залежить від якості розрахунку, а це ставить перед дослідниками нові задачі про фрикційний контакт прорізних та розрізаних оболонок з пружними тілами.

З точки зору механіки переважна більшість розроблених конструкцій – це деформівні системи з сухим тертям. При моделюванні таких систем в умовах немонотонного навантаження виникають конструктивно нелінійні неконсервативні мішані контактні задачі про фрикційну взаємодію оболонок з деформівним заповнювачем.

Контактні задачі для пружних систем складають актуальний розділ механіки деформівного твердого тіла. Постановки та методи розв'язку контактних задач з урахуванням сухого тертя, які використовують континуальні моделі суцільного середовища, відомі [13, 14, 41, 43, 45, 46, 57, 58, 60, 68, 69, 81, 107, 115, 155, 173]. Отримані в цих роботах результати виявляють загальні закономірності фрикційної взаємодії тіл та описують стан проблеми.

Слід також звернути увагу на роботи, в яких описано числові методи розв'язування контактних задач (напри-

клад, [51, 63, 107, 109, 112, 155, 171, 172, 183, 184]).

Крім того, на сьогодні достатньо вивченими можна вважати механізми конструкційного демпфування чи розсіювання енергії при немонотонному, зокрема, при циклічному навантаженні номінально верхомих або малорухомих з'єднань та систем [15, 40, 42, 54–56, 59, 62, 64, 67, 70, 71, 73, 82, 97, 104, 110, 111, 113, 114, 116, 117, 120, 150–170, 174–180].

Для інженерного дослідження фрикційної взаємодії твердих тіл більш придатними видаються підходи, котрі використовують моделі і методи теорій стержнів, оболонок і пластин. Зниження розмірності в моделях пружних тіл спрощує виведення та розв'язок рівнянь порівняно з тривимірними задачами теорії пружності. Основні труднощі в контактних задачах для тонкостінних конструкцій виникають уже на етапі моделювання об'єкта дослідження і адекватного вибору теорії. Контактні задачі для тонкостінних елементів мають свою специфіку, пов'язану з появою нерегулярних контактних напружень, додаткових зон відлипання тощо [44, 47–50, 72, 96, 133]. За наявності сухого тертя на контактних поверхнях проблемних питань стає ще більше.

У попередньому доробку авторів – моделі та методики аналітичного та числово-аналітичного дослідження фрикційної взаємодії тонких суцільних оболонок з податливим слабо стисливим заповнювачем за дії монотонного та немонотонного навантажень [53, 56, 98–103, 119, 132, 141–149].

Відзначимо також клас задач, які стосуються ефекту контактної взаємодії берегів розрізів в тонких оболонках [121, 122, 124, 125, 127–131, 136, 137, 181], а також розрахунку напруженого та граничного стану оболонок з тріщинами на пружній основі [61, 65, 66, 77–80].

Метою даної монографії є побудова теорії розрахунку

оболонкових пружних елементів з прорізною та розрізаною оболонкою. Для цього необхідно розробити адекватні за рівнем строгості моделі заповнювача та оболонок, сформулювати і розв'язати ряд контактних задач про фрикційну взаємодію оболонок і заповнювача при немонотонному навантаженні. Відтак, на основі проведених досліджень розробити інженерну методику визначення податливості, міцності та демпфувальних властивостей пружних елементів.

Монографія складається із вступу та п'яти розділів.

У першому розділі викладено результати механіко-математичного моделювання фрикційного контакту в оболонковій системі на базі прорізної циліндричної оболонки з деформівним заповнювачем. Для моделювання прорізної оболонки з великою кількістю розрізів запропоновано одновимірну модель, яка дозволила здійснити постановку та розв'язати низку конструктивно нелінійних змішаних контактних задач з урахуванням зон зчеплення, проковзування та відлипання на поверхнях спряження. На основі чисельних розв'язків, побудованих методом квадратур, досліджено вплив геометричних розмірів, умов закріплення панелей та фізичних властивостей взаємодіючих тіл на жорсткість та міцність системи.

У другому розділі книги проведено числово-аналітичне дослідження контактної взаємодії встановлених коаксіально прорізної та суцільної циліндричних оболонок з деформівним заповнювачем. Розглянута система є моделлю пружного елемента бурових амортизаторів. Досліджено вплив геометричних розмірів конструкції, кількості розрізів оболонки, пружних і трибологічних властивостей тіл контактних пар на напружено-деформований стан елементів системи, її податливість та міцність.

Третій розділ презентує дослідження поведінки оболонкового демпфера з розрізом в умовах монотонного та немонотонного навантажень. Сформульовано та аналітич-

но розв'язано контактну задачу про фрикційну взаємодію циліндричної ортотропної оболонки з деформівним заповнювачем. Здійснено механіко-математичне моделювання поведінки демпфера з розрізаною вздовж твірної циліндричною оболонкою в умовах експлуатаційних навантажень. Запропоновано ідею ототожнення розрізаної ізотропної оболонки, яка згинається в умовах неосесиметричного контактного навантаження, з сильно ортотропною суцільною оболонкою. В результаті отримано інженерні формули для визначення податливості та максимального експлуатаційного навантаження демпфера з розрізаною оболонкою.

Розвинуто методику квазістатичного аналізу конструкційного демпфування в малорухомих неконсервативних оболонкових системах з деформівним заповнювачем. Аналітично описано петлі гістерезису при немонотонному навантаженні заповнювача в циліндричній оболонці з розрізом, досліджено розподіл напружень на кожному етапі навантаження, знайдена залежність величини розсіяної енергії від коефіцієнта асиметрії циклу.

В аналогічній постановці проведено розрахунок демпфера з розрізаною зовнішньою та суцільною внутрішньою оболонками.

В четвертому розділі проведено дослідження взаємодії прорізаних оболонок з пружним тілом засобами віртуального та лабораторного експериментів. Здійснено перевірку адекватності запропонованих у книзі одновимірних моделей контактної взаємодії розрізаної та прорізної оболонок з пружним тілом шляхом ідентифікації окремих результатів, отриманих методом скінченних елементів та за допомогою лабораторного експерименту, з окремими результатами аналітичних розв'язків. Загалом виявлено добру збіжність висновків експериментальних досліджень з результатами, які отримані аналітично. Це свідчить про вдалу побудову розрахункових моделей і дозволяє рекоме-

ндувати запропоновані методики та аналітичні результати для розрахунку пружних елементів з прорізними оболонками.

П'ятий розділ монографії подає низку нових конструктивних рішень для пружних елементів, побудованих на базі прорізнаних оболонок. Більшість із цих розробок захищено охоронними документами.

Окремі результати, наведені в монографії, опубліковано в працях [16–21, 36–38, 119, 126, 134, 135, 138–140, 143].

Викладені у монографії результати дають теорію та методи розрахунку базових конструкцій демпферів з прорізними оболонками. Задачі для інших варіантів віброзахисних пристроїв, описаних у п'ятому розділі (а їх більшість), ще чекають на своє вирішення. Найбільші надії автори покладають на розвинутий у монографії підхід: моделювання складних об'єктів шляхом пониження розмірності континуумів, що контактують, із наступною аналітичною або числово-аналітичною реалізацією відповідних крайових задач.



## РОЗДІЛ 1

### ФРИКЦІЙНА ВЗАЄМОДІЯ ПРОРІЗНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПРУЖНИМ ЗАПОВНІЮВАЧЕМ

#### 1.1 Механіко-математична модель контактної взаємодії прорізної циліндричної оболонки з заповнювачем

Дослідження напружено-деформованого стану оболонкових прорізних пружних елементів (рис. 1.1) зводиться до постановки та розв'язку контактних задач про фрикційну взаємодію прорізних оболонок з деформівним заповнювачем. Мета даного параграфу – постановка контактної задачі та знаходження загального розв'язку. Для досягнення цієї мети необхідно розробити адекватні за рівнем стро-

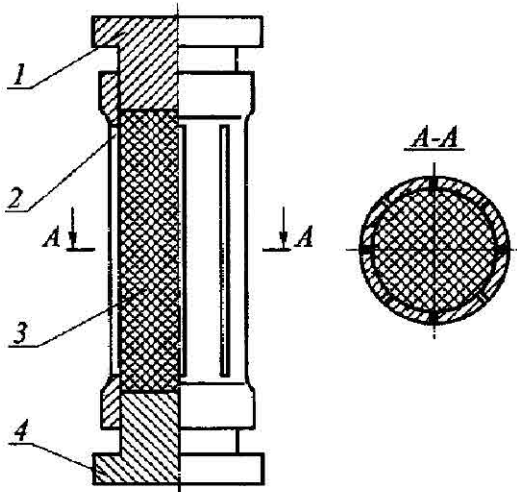


Рис. 1.1. Оболонкова пружина з прорізами  
(базова конструкція):

- 1, 4 – поршні; 2 – оболонка з прорізами;  
3 – пружний заповнювач

гості моделі заповнювача та оболонок, які дають змогу розв'язати поставлену задачу.

Розглянемо пружний циліндр радіуса  $R$  та довжини  $2l$ , який заповнює прорізну циліндричну оболонку завтовшки  $h$ . На торці пружного заповнювача через абсолютно жорсткі поршні передається зовнішнє навантаження  $F$ . Характер контактної взаємодії заповнювача та прорізної оболонки визначається законом сухого тертя. Тертям між заповнювачем і поршнями нехтуємо. Напружено-деформований стан прорізного пружного елемента досліджуємо в циліндричній системі координат  $Oxyz$  (рис. 1.2).

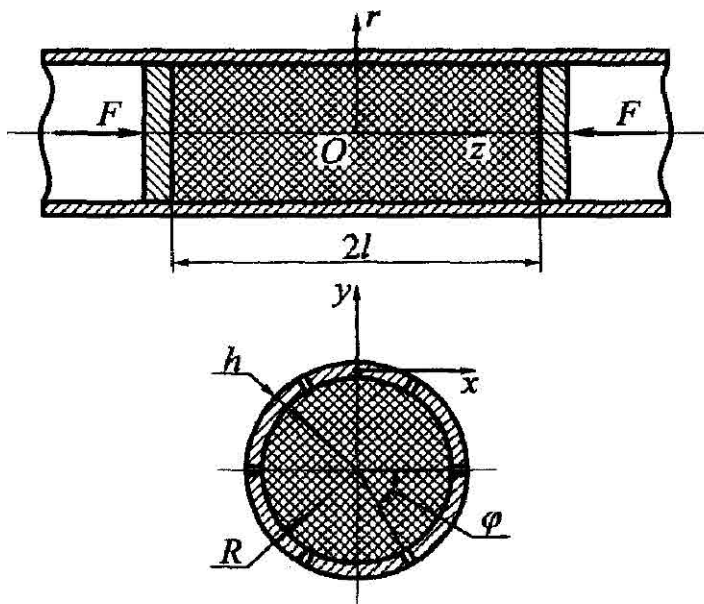


Рис. 1.2. Контактна система

Приймаючи число розрізів оболонки достатньо вели-

ким, вважаємо, що заповнювач перебуває в умовах осесиметричної деформації. Для його моделювання використовуємо співвідношення, запропоновані в роботах [100, 134]. Рівняння, що описують пружний стан деформівного заповнювача, отримано в припущенні, що нормальні напруження  $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z$  та осьові переміщення  $u_z$  розподілені рівномірно, а дотичні напруження  $\tau_{rz}$  і радіальні переміщення  $u_r$  – лінійно по поперечному перерізу.

Співвідношення для заповнювача в безрозмірній системі координат мають вигляд:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma, \quad \tau_{rz} = \frac{\tau r}{R}, \quad u_\zeta = u, \quad u_r = \frac{wr}{R}. \quad (1.1)$$

Рівняння закону Гука, усереднені по площі поперечного перерізу, є такими:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \frac{w}{R} = \frac{1}{E} [(1-\nu)\sigma - \nu\sigma_\zeta], \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_\zeta = \frac{1}{l} \frac{du}{d\zeta} = \frac{1}{E} [\sigma_\zeta - 2\nu\sigma]. \quad (1.3)$$

Усереднене рівняння рівноваги має вигляд

$$\frac{d\sigma_\zeta}{d\zeta} + \frac{2l\tau}{R} = 0. \quad (1.4)$$

Тут  $\sigma, \tau$  – нормальне і дотичне контактні напруження;  $u, w$  – осьове та радіальне переміщення на контактній поверхні  $r = R$ ;  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \varepsilon_{rz}$  – деформації в заповнювачі;  $\zeta = z/l$  – безрозмірна осьова координата;  $E, \nu$  – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу заповнювача.

Для моделювання прорізної оболонки використовуємо одновимірну модель. Приймаємо, що прорізна оболонка

складається з панелей, які зазнають плоского згину в радіальних площинах. Запишемо рівняння пружної лінії панелі, розглядаючи її як стержень з дугоподібною формою поперечного перерізу:

$$\frac{E_0 I_x}{I^4} \frac{d^4 w_0}{d\zeta^4} = -\sigma b, \quad \zeta \in [-1; 1], \quad (1.5)$$

де  $w_0$  – прогин панелі,  $b = 2R_1 \sin(\varphi/2)$  – її ширина;  $E_0 I_x = 0,5 E_0 b R^3 (\varphi + \sin(\varphi) - 8 \sin^2(\varphi/2) / \varphi)$  – жорсткість панелі на згин;  $\varphi = 2\pi/N$ ,  $N$  – кількість розрізів;  $E_0$  – модуль Юнга матеріалу оболонки.

Фрикційну взаємодію прорізної оболонки і заповнювача при монотонному зовнішньому навантаженні системи моделюємо співвідношеннями одностороннього нормального контакту:

$$[w] \equiv w_0 - w = 0, \quad \sigma < 0, \quad \zeta \in [-1; 1], \quad (1.6)$$

і законом сухого тертя:

$$\begin{aligned} \tau(\zeta) &= -f\sigma \operatorname{sgn} \zeta, \quad |\tau| > |\mu_0|, \quad \zeta \in X', \\ |\tau(\zeta)| &< -f\sigma, \quad u = u_0, \quad \zeta \in X'', \end{aligned} \quad (1.7)$$

де  $[w]$  – стрибок переміщень;  $X' = [-1, -\alpha) \cup (\alpha, 1]$  – зона проковзування;  $X'' = [-\alpha, \alpha]$  – зона зчеплення;  $\alpha$  – безрозмірна координата точки розмежування областей проковзування та зчеплення;  $u, u_0$  – осьові переміщення контактуючих поверхонь заповнювача та прорізної оболонки;  $f$  – коефіцієнт сухого тертя пари оболонка – заповнювач.

На торцях пружного заповнювача (під поршнями) виконуються умови:

$$\sigma_{\zeta}(\pm 1) = -P \equiv -\frac{F}{\pi R^2}. \quad (1.8)$$

Таким чином, контактну задачу про взаємодію прорізної оболонки та деформівного заповнювача з урахуванням сухого тертя сформульовано.

Проінтегрувавши рівняння рівноваги (1.4) з урахуванням крайових умов (1.8), отримуємо

$$\sigma_{\zeta}(\zeta) = -P - \frac{l}{R} \left[ \int_{-1}^{\zeta} \tau(\xi) d\xi - \int_{\zeta}^1 \tau(\xi) d\xi \right].$$

Запишемо вираз для знаходження нормального осевого напруження у заповнювачі через невідомі контактні напруження у такому вигляді:

$$\sigma_{\zeta}(\zeta) = -P + \frac{l}{R} \int_{-1}^1 \tau(\xi) \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi. \quad (1.9)$$

Із співвідношення (1.2) з урахуванням (1.9) знаходимо інтегральне подання для радіальних переміщень поверхні заповнювача через невідомі  $\sigma$ ,  $\tau$

$$w(\zeta) = \frac{R}{E} \left\{ (1 - \nu)\sigma(\zeta) + \nu \left( P + \frac{l}{R} \int_{-1}^1 \tau(\xi) \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right) \right\}. \quad (1.10)$$

Вираз для визначення осевої деформації заповнювача (1.3) через невідомі контактні напруження з урахуванням (1.9) буде таким

$$\varepsilon_{\zeta}(\zeta) = \frac{1}{E} \left( -P - 2\nu\sigma + \frac{l}{R} \int_{-1}^1 \tau(\xi) \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right). \quad (1.11)$$

Перейдемо до визначення радіального переміщення панелей прорізної оболонки. Розв'язок диференційного рівняння (1.5) знаходимо у вигляді:

$$w_0(\zeta) = C_0 + C_1\zeta + C_2\zeta^2 + C_3\zeta^3 + \frac{1}{12}k^4 \int_{-1}^1 |\xi - \zeta|^3 \sigma(\xi) d\xi, \quad (1.12)$$

$$\text{де } k^4 = -\frac{l^4 b}{E_0 I_x}.$$

Сталі інтегрування  $C_0, C_1, C_2, C_3$  визначаємо з крайових умов, які залежать від конструктивних особливостей прорізної оболонки.

### 1.2 Числово-аналітичний розв'язок контактної задачі для прорізної оболонки із затисненням на торцях

Мета даного параграфу – розробка методики розв'язку контактних задач, які моделюють роботу прорізних оболонкових пружних елементів, виведення співвідношень для визначення характеристик контактної системи. Розробку методики будемо здійснювати на основі вивчення фрикційної взаємодії заповнювача з прорізною оболонкою, торці якої жорстко затиснуті (рис. 1.3).

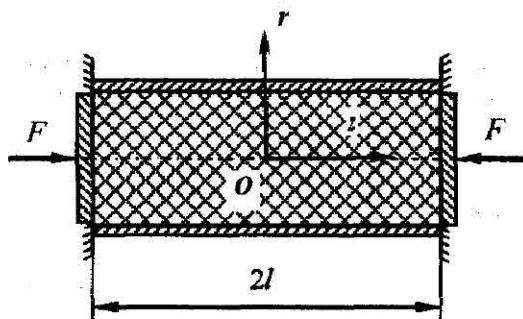


Рис. 1.3.

**1.2.1 Виведення інтегрального рівняння та аналіз розв'язку контактної задачі.** Вважаємо, що торці прорізної оболонки жорстко затиснуті. Тоді крайові умови для панелей мають вигляд:

$$w_0(\pm 1) = 0, \quad \frac{dw_0(\pm 1)}{d\zeta} = 0. \quad (1.13)$$

В результаті підстановки (1.12) в співвідношення (1.13) одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно сталих інтегрування, розв'язком якої є

$$C_0 = k^4 \int_{-1}^1 \left( -\frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{24} \right) \sigma(\xi) d\xi,$$

$$C_1 = k^4 \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{8}\xi^3 + \frac{1}{8}\xi \right) \sigma(\xi) d\xi,$$

$$C_2 = k^4 \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8} \right) \sigma(\xi) d\xi,$$

$$C_3 = k^4 \int_{-1}^1 \left( -\frac{1}{24}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi \right) \sigma(\xi) d\xi.$$

Таким чином, вираз для знаходження радіального переміщення оболонки (1.12) з урахуванням знайдених констант переписеться як квадратура:

$$w_0(\zeta) = -k^4 \int_{-1}^1 G(\zeta, \xi) \sigma(\xi) d\xi, \quad \zeta \in [-1; 1], \quad (1.14)$$

де  $G(\zeta, \xi)$  – функція Гріна крайової задачі (1.5), (1.13), визначена співвідношенням

$$G(\zeta, \xi) = \frac{1}{24} - \frac{\xi^2}{8} + \left( \frac{\xi}{8} + \frac{\xi^3}{8} \right) \zeta - \left( \frac{\xi}{8} + \frac{\xi^2}{8} \right) \zeta^2 + \left( \frac{\xi}{8} - \frac{\xi^3}{24} \right) \zeta^3 + \\ + \frac{1}{12} (\xi - \zeta)^3 \operatorname{sgn}(\xi - \zeta). \quad (1.12)$$

Задовольняючи за допомогою формул (1.10), (1.14) умови одностороннього контакту (1.6) та враховуючи закон сухого тертя (1.7), одержимо

$$\frac{R}{E} \left\{ (1-\nu)\sigma(\zeta) + \nu \left( P + \frac{I}{R} f \int_{-1}^1 \sigma(\xi) \operatorname{sgn} \xi \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right) \right\} = \\ = -k^4 \int_{-1}^1 G(\zeta, \xi) \sigma(\xi) d\xi. \quad (1.16)$$

Співвідношення (1.16) зведемо до інтегрального рівняння для визначення невідомого контактного напруження

$$\sigma(\zeta) + \int_{-1}^1 K(\xi, \zeta) \sigma(\xi) d\xi = -\frac{\nu}{1-\nu} P, \quad \zeta \in [-1, 1], \quad (1.17)$$

з ядром

$$K(\xi, \zeta) = -\frac{\nu}{1-\nu} f f \operatorname{sgn} \zeta \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) + 4\mu^4 G(\zeta, \xi), \quad (1.18)$$

$$\text{де } 4\mu^4 = \frac{1}{1-\nu} \frac{l^4 b}{R I_x} \frac{E}{E_0}.$$

Таким чином, задачу про фрикційну взаємодію прорізної циліндричної оболонки з пружним заповнювачем зведено до інтегрального рівняння (1.17) для визначення невідомого контактного напруження.



Розв'язок інтегрального рівняння знаходимо методом механічних квадратур, використовуючи формулу трапецій з рівномірним розбиттям [39]. Візьмемо в якості квадратурних вузлів та вузлів колокації точки

$$\xi_i = -1 + (i-1)g, \quad \zeta_j = -1 + (j-1)g; \quad i, j = \overline{1, n}$$

де  $g = 2/(n-1)$  – сталий крок інтегрування,  $n$  – кількість вузлів в методі квадратур, та замінимо інтеграл скінченною сумою. Одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sigma_i + g \sum_{j=1}^n B_j K_{ij} \sigma_j = -\frac{\nu}{1-\nu} P, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.19)$$

Тут  $\sigma_i = \sigma(\zeta_i)$ ,  $K_{ij} = K(\xi_i, \zeta_j)$ ,  $B_j = \begin{cases} 0,5 & \text{при } j=1, j=n \\ 1 & \text{при } j \neq 1, j \neq n \end{cases}$ ,

Система рівнянь (1.19) зводиться до вигляду

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \sigma_j = C_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.20)$$

де  $A_{ij} = \delta_{ij} + K_{ij} B_j g$ ,  $C_i = -\frac{\nu}{1-\nu} P$ ,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Розв'язок системи рівнянь (1.20) отримано за допомогою методу Гауса з виділенням головного елемента. В результаті розв'язку одержимо значення контактного напруження  $\sigma_i = \sigma(\zeta_i)$  у вузлових точках.

Характеристики механічної системи та напружено-деформований стан тіл, що взаємодіють, знаходимо через контактні напруження. Використовуючи диференційні залежності між прогином, кутом повороту поперечного перерізу та внутрішніми силовими факторами, які діють у

поперечних перерізах прорізної оболонки, визначаємо необхідні характеристики напружено-деформованого стану контактної системи:

$$\theta(\zeta) = \frac{1}{l} \frac{dw}{d\zeta}, \quad M(\zeta) = -\frac{E_0 J_x}{l^2} \frac{d^2 w}{d\zeta^2},$$

$$Q(\zeta) = -\frac{E_0 J_x}{l^3} \frac{d^3 w}{d\zeta^3}. \quad (1.21)$$

У співвідношеннях (1.21)  $M, Q$  – відповідно згинальний момент та поперечна сила,  $\theta$  – кут повороту поперечного перерізу панелі.

У досліджуваній системі заповнювач трансформує позовжні переміщення поршнів в радіальні переміщення оболонки. Таким чином, основним робочим елементом в конструкції, що сприймає зовнішнє навантаження, є прорізна оболонка. Міцність контактної системи в цілому визначається утримувальною здатністю панелей. Розрахунок на міцність будемо проводити за критерієм найбільших нормальних напружень, які виникають в прорізній оболонці.

Нормальні осьові напруження в панелях визначаються за формулою

$$\sigma_{\varphi}(\zeta) = \frac{M(\zeta)}{W_x}, \quad (1.22)$$

де

$$W_x = \frac{hR^2}{2} \left( \varphi + \sin \varphi - \frac{8 \sin^2(\varphi/2)}{\varphi} \right) \frac{1}{1 - \frac{2 \sin(\varphi/2)}{\varphi}}$$

– осьовий момент опору панелі.

З урахуванням (1.21) співвідношення (1.22) набуває вигляду

$$\sigma_{\infty} = -4\mu^4(1-\nu) \frac{E_0}{E} \frac{RI_x}{I^3 W_x} \int_{-1}^1 G_2(\zeta, \xi) \sigma(\xi) d\xi, \quad \zeta \in [-1, 1], \quad (1.23)$$

де

$$G_2(\zeta, \xi) = -2 \left( \frac{\xi}{8} + \frac{\xi^2}{8} \right) + 6 \left( \frac{\xi}{8} - \frac{\xi^3}{24} \right) \zeta + \frac{1}{2} (\xi - \zeta) \operatorname{sgn}(\xi - \zeta).$$

Вираз для визначення поперечної сили в прорізній оболонці буде таким:

$$Q(\zeta) = -4\mu^4(1-\nu) \frac{E_0}{E} \frac{RI_x}{I^4} \int_{-1}^1 G_3(\zeta, \xi) \sigma(\xi) d\xi, \quad \zeta \in [-1, 1], \quad (1.24)$$

де  $G_3(\zeta, \xi) = 6 \left( \frac{\xi}{8} - \frac{\xi^3}{24} \right) - \frac{1}{2} (\xi - \zeta).$

Осьові переміщення заповнювача одержимо, інтегруючи модельні співвідношення (1.3) з врахуванням симетрії системи

$$u(\zeta) = -0.5 \int_{-1}^1 \varepsilon_{\zeta}(\xi) \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi, \quad \zeta \in [-1, 1].$$

Враховуючи інтегральне подання осьової деформації (1.11), вираз для знаходження осьового переміщення прорізів заповнювача дістали у вигляді:

$$u(\zeta) = -0.5 \frac{l}{E} \left[ \int_{-1}^1 (P + 2\nu\sigma(\xi)) \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi + \right. \\ \left. + 2lf \int_{-1}^1 \sigma(\xi) \operatorname{sgn} \xi |\xi - \zeta| d\xi \right], \quad \zeta \in [-1, 1]. \quad (1.25)$$

Жорсткість контактної системи визначається величиною осевого переміщення поршнів  $\delta$  під дією заданої сили  $F$ . Її значення одержимо, підставивши у формулу (1.25)  $\zeta = -1$ , або  $\zeta = 1$ . Тобто  $\delta = u_{\zeta}(\mp 1)$ .

При розгляді контакту між прорізною оболонкою та заповнювачем була прийнята умова про відсутність на поверхні спряження зони зчеплення. З метою перевірки цієї гіпотези запишемо іще вираз для визначення стрибка осевих переміщень на всій поверхні контакту. За відсутності зони зчеплення для всіх точок поверхні спряження має виконуватись така умова:

$$[u] \neq 0, \quad \zeta \in [-1, 1], \quad (1.26)$$

де  $[u] \equiv u - u_0$  – стрибок осевих переміщень;  $u_0$  – осеве переміщення контактуючої поверхні панелі, яке визначається з співвідношення

$$u_0(\zeta) = \theta(\zeta) h/2. \quad (1.27)$$

Формула для визначення кута повороту поперечного перерізу панелі прорізної оболонки має вигляд

$$\theta(\zeta) = -4\mu^4 \frac{(1-\nu) R}{E} \frac{1}{l} \int_{-1}^1 G_1(\zeta, \xi) \sigma(\xi) d\xi, \quad \zeta \in [-1, 1], \quad (1.28)$$

$$\text{де } G_1(\zeta, \xi) = \left( \frac{\xi}{8} + \frac{\xi^3}{8} \right) - 2 \left( \frac{\xi}{8} + \frac{\xi^3}{8} \right) \zeta + 3 \left( \frac{\xi}{8} - \frac{\xi^3}{24} \right) \zeta^2 - \\ - \frac{1}{4} (\xi - \zeta)^2 \operatorname{sgn}(\xi - \zeta).$$

Таким чином, співвідношення для знаходження стрибка осьових переміщень на поверхні контакту з урахуванням (1.24) та (1.28) буде

$$[u](\zeta) = \int_{-1}^1 \left( 2(1-\nu) \frac{\mu^4 R h}{E l} G_1(\zeta, \xi) - \right. \\ \left. - \frac{0,5 l}{E} [p + 2T(\zeta, \xi)] \right) \sigma(\xi) d\xi. \quad (1.29)$$

Числовий аналіз одержаних результатів показав, що на всій довжині контакту, крім початку координат ( $\zeta = 0$ ), значення стрибків осьових переміщень, підрахованих за формулою (1.29), не дорівнюють нулю. Це означає, що зона зчеплення між заповнювачем та прорізною оболонкою, на відміну від задач про контакт суцільних циліндричних оболонок з заповнювачем [100-103, 134, 145, 148, 149], виводиться в точку ( $\zeta = 0$ ).

Проілюструємо отримані результати графічно. Для прикладу розглянуто контактну систему з такими параметрами:  $h/R = 0,1$ ;  $E/E_0 = 0,0001$ ;  $\nu = 0,499$  та різними значеннями коефіцієнта тертя, кількості розрізів оболонки та довжини конструкції. Числові значення параметрів контактуючих тіл вибрані з діапазону робочих характеристик прорізних оболонкових пружних елементів (рис. 1.1) [6, 11, 12, 87, 93], моделлю яких є розглянута механічна система. Достовірність числових розрахунків було перевірено порівнянням кількості вузлів у квадратурних формулах та порі-

внянням числових результатів з аналітичними у граничних випадках. Практика обчислень показала, що достатня точність досягається при  $n=41$ .

Зважаючи на симетрію конструкції, характеристики пружних елементів, що залежать від осьової координати, подані на проміжку  $[0, 1]$ .

Рис. 1.4 ілюструє розподіл безрозмірного контактного тиску  $q = -\sigma/P$  по довжині зони контакту для різної кількості розрізів та для різних значень коефіцієнта тертя пари заповнювач-оболонка. Розрахунки проводили для конструкції з безрозмірною довжиною  $l/R = 2,5$ . Штриховими лініями позначено випадок проковзування з коефіцієнтом

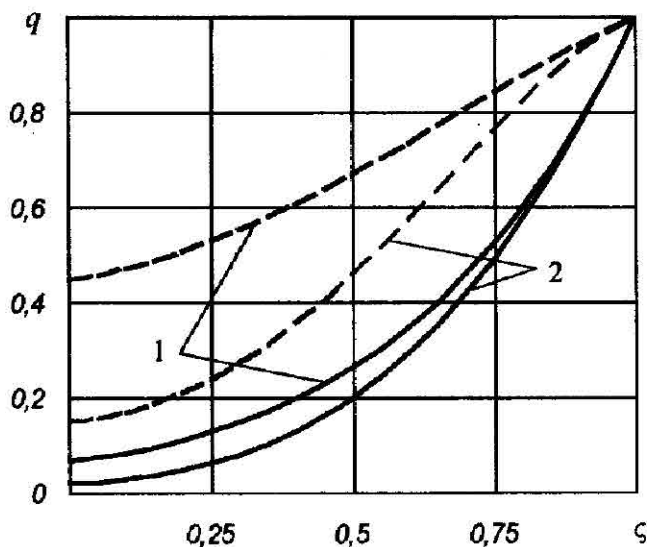


Рис. 1.4. Розподіл контактного тиску по довжині:  
1 –  $N=6$ ; 2 –  $N=7$

тертя  $f = 0,1$ , суцільними –  $f = 0,5$ . Максимальних значень контактний тиск набуває в площині торців заповнювача (на краях зони контакту), зменшуючись до центру симетрії системи. Наявність тертя між заповнювачем та оболонкою, число розрізів та довжина конструкції, величина відношення модулів пружності матеріалів панелей та заповнювача впливають на розподіл контактного напруження. Значне збільшення будь-якої із цих величин призводить до порушення умов взаємодії (1.6), а саме до зміни знаку контактних нормальних напружень.

Напружений стан оболонки характеризують криві, зображені на рис. 1.5. Тут наведено розподіл по довжині нормальних осьових напружень, визначених за формулою

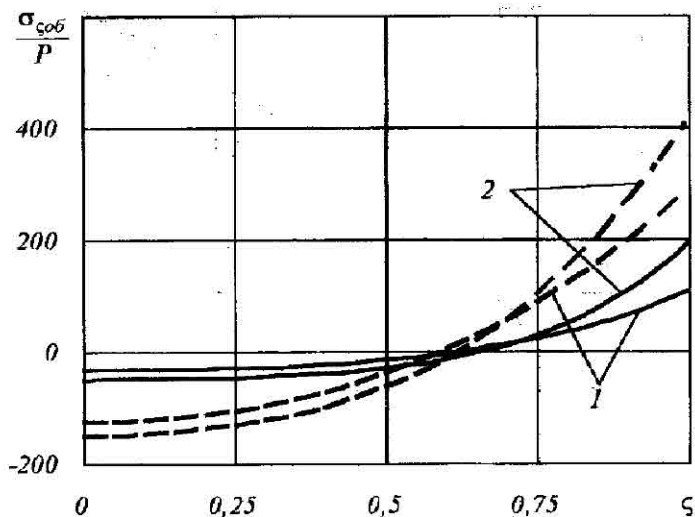


Рис. 1.5. Розподіл нормальних осьових напружень в прерізній оболонці:  
1 –  $N = 6$ ; 2 –  $N = 7$

(1.22). Позначення кривих аналогічні до прийнятих на попередній ілюстрації. Для всіх розглянутих випадків максимальними є напруження в перерізах оболонки, які належать площинам торців заповнювача. Темп зміни нормальних осьових напружень при віддаленні від торців заповнювача зменшується. Збільшення коефіцієнта тертя призводить до зменшення нормальних напружень в оболонці та до більш рівномірного їх розподілу по довжині. При збільшенні кількості розрізів оболонки нормальні напруження в панелях зростають.

Вплив безрозмірної довжини системи на величину максимальних нормальних напружень розтягу для фіксованих значень коефіцієнта тертя та кількості розрізів показано на рис. 1.6. При збільшенні довжини контактної системи максимальні нормальні напруження зростають. Із графіків видно, що криві, які описують максимальне на-

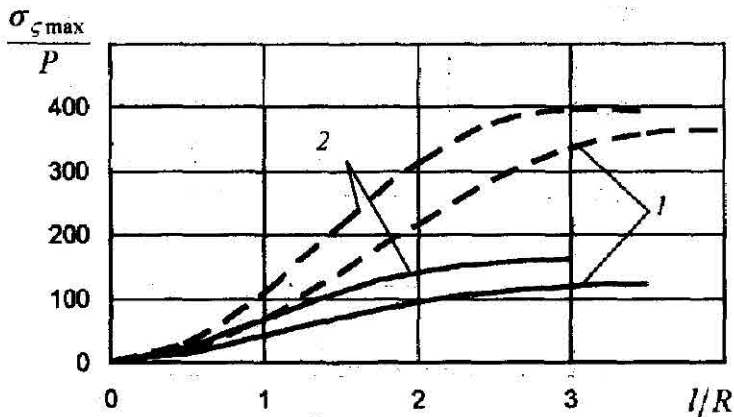


Рис. 1.6. Залежність максимальних нормальних напружень в панелях прорізної оболонки від довжини системи:

1 -  $N = 6$ ; 2 -  $N = 7$



пруження, мають горизонтальні асимптоти.

Податливість механічної системи при її навантаженні ілюструють лінії, зображені на рис. 1.7, які описують залежність осьового переміщення поршня  $\delta$  від безрозмірної довжини. Збільшення коефіцієнта тертя між заповнювачем та прорізною оболонкою призводить до зменшення осьової податливості контактної системи. Збільшення довжини заповнювача зменшує жорсткість контактної системи. Таким чином, при конструюванні пружних елементів з прорізними оболонками є можливим варіювати експлуатаційні характеристики, зокрема податливість, змінюючи коефіцієнти тертя пари заповнювач – оболонка. Із збільшенням кількості розрізів оболонки та довжини системи, величина осьового переміщення поршнів монотонно зростає. Впливає на величину осьового переміщення торця заповнювача і відношення модулів пружності матеріалів заповнювача та

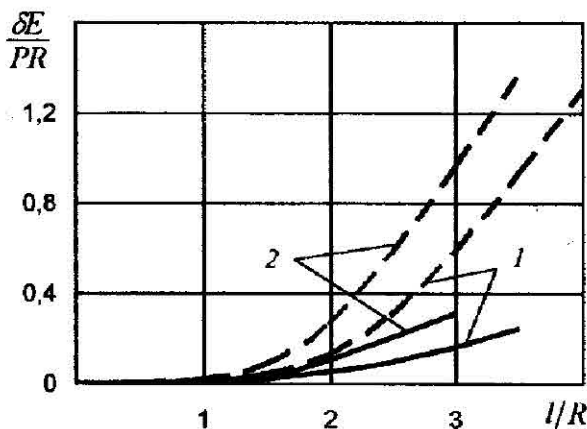


Рис. 1.7. Залежність осьового переміщення поршнів від довжини системи:  
1 –  $N=6$ ; 2 –  $N=7$

оболонки. Підбираючи відповідним чином трибологічні, геометричні та пружні параметри контактних пар, можна регулювати жорсткість системи, не змінюючи при цьому її утримувальну здатність.

Залежність осьових переміщень заповнювача від пружних характеристик контактних тіл та величини коефіцієнта тертя пари заповнювач-оболонка ілюструють криві, зображені на рис. 1.8. Графіки побудовано для контактної системи з такими параметрами: безрозмірна довжина заповнювача  $l/R = 2,5$ , кількість розрізів в оболонці  $N = 6$ . Штриховими лініями позначено випадок проковзування з коефіцієнтом тертя  $f = 0,1$ , суцільними –  $f = 0,5$ . Максимальними є переміщення в торцьовому перерізі. В перерізі,

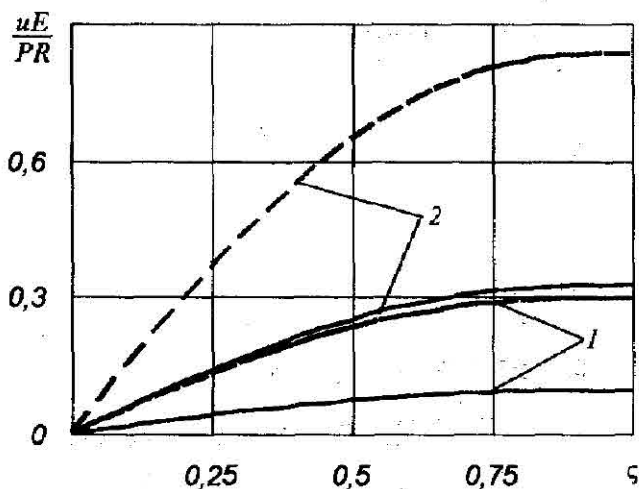


Рис. 1.8. Розподіл осьових переміщень заповнювача:

$$1 - E/E_0 = 0,001; \quad 2 - E/E_0 = 0,0001.$$

що проходить через центр контактної системи, осьові переміщення заповнювача відсутні.

Для всіх розглянутих параметрів контактних тіл за формулою (1.29) визначалася величина стрибка осьових переміщень на усій поверхні спряження. Отримані числові результати свідчать про те, що в розглянутій конструкції, на відміну від контактних систем з суцільною циліндричною оболонкою [100, 149], зона зчеплення між заповнювачем та прорізною оболонкою не виникає.

На рис. 1.9 подано розподіли радіального прогину панелі прорізної оболонки  $\bar{w} = w_o E / (PR)$  по довжині. Прогин панелей  $w_o$  та радіальні переміщення контактної поверхні заповнювача  $w$  є рівними за умовою (1.6). При збільшенні кількості розрізів величини радіального прогину оболонки можуть збільшуватися в декілька разів. Аналогічний (проте дещо слабший) ефект збільшення величини

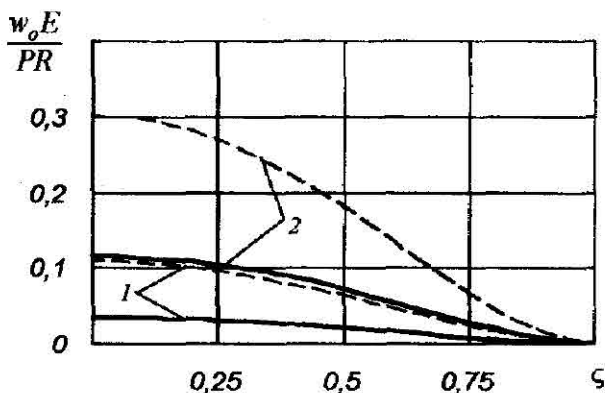


Рис. 1.9. Розподіл радіального прогину панелей прорізної оболонки по довжині:  
1 –  $N = 6$ ; 2 –  $N = 7$

прогину досягається і при зменшенні коефіцієнта тертя в контактній парі заповнювач – оболонка.

Аналіз інтегрального рівняння (1.17) та отриманих результатів показав, що при певних геометричних, фізичних та трибологічних параметрах контактної системи, порушується нерівність в умовах одностороннього контакту (1.6). На поверхні спряження панелей та деформівного заповнювача виникає зона відлипання. Постановка задачі в цьому випадку стає некоректною. Для розглянутих конструкцій відлипання прорізної оболонки від заповнювача відбувається при досягненні параметром  $\mu$  величин в межах діапазону 2,6 ... 3,2.

Використання умови контактної взаємодії, яка не враховує відлипання оболонки від заповнювача, обмежує застосування такої розрахункової моделі контактної системи. Для розрахунку контактної системи з довільними параметрами виникає необхідність постановки змішаної контактної задачі з урахуванням ефекту відлипання. Постановку конструктивно нелінійної контактної задачі здійснимо далі.

**1.2.2 Змішана задача фрикційного контакту прорізної циліндричної оболонки з деформівним заповнювачем.** У результаті проведеного аналізу числових розв'язків попередньої задачі встановлено, що при певних геометричних та фізичних характеристиках контактних тіл на поверхні їх спряження виникає зона відлипання між оболонкою та заповнювачем. На рис. 1.10 схематично показано деформований стан системи з областю відлипання. Виникнення зони відлипання пов'язано перш за все зі зменшенням згинної жорсткості панелей, яка залежить від числа розрізів у оболонці та пружних характеристик матеріалів контактуючих тіл. Збільшення коефіцієнта тертя прискорює появу відлипання прорізної оболонки від заповнювача.

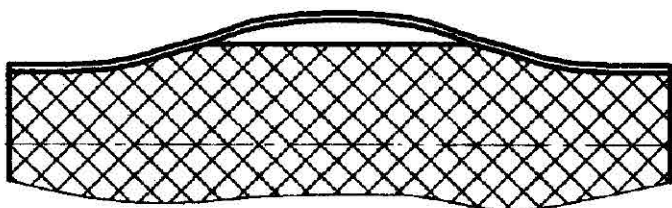


Рис. 1.10. Схема деформування контактної системи

У цьому параграфі пропонується математична модель фрикційної взаємодії прорізної оболонки та заповнювача, яка враховує можливість виникнення зони віддипання між контактними тілами. Контактна задача, що розглядається, є конструктивно нелінійною, оскільки розмір області віддипання наперед невідомий.

Постановку змішаної контактної задачі здійснимо на основі модельних співвідношень для пружного заповнювача та прорізної оболонки, запропонованих вище.

На бічній поверхні пружного циліндра виконуються умови:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r=R) &= \sigma_k, \quad \tau_{rz}(r=R) = \tau_k, \quad \zeta \in T', \\ \sigma_r(r=R) &= 0, \quad \tau_{rz}(r=R) = 0, \quad \zeta \in T'', \end{aligned} \quad (1.29)$$

де  $\sigma_r, \tau_{rz}$  – нормальне і дотичне напруження в заповнювачі;  $\sigma_k, \tau_k$  – нормальне і дотичне контактне напруження;  $T' = [-1, a] \cup [a, 1]$  – зона контакту;  $T'' = (-a, a)$  – зона віддипання;  $a$  – невідома безрозмірна координата точок розмежування областей проковзування та віддипання.

Напружено-деформований стан заповнювача описується співвідношеннями (1.1)–(1.4). На відміну від попереднього параграфу при моделюванні фрикційної взаємодії заповнювача та оболонки зону їх спряження розбиваємо на дві ділянки: зону безпосереднього контакту та відлипання. Розміри вказаних областей невідомі і координати точок їх розмежування знаходяться в процесі розв'язку задачі.

Раніше встановлено, що при розглянутих параметрах системи зона зчеплення між контактуючими тілами вироджується в точку. Тому надалі при дослідженні фрикційної взаємодії прорізної оболонки із заповнювачем будемо вважати, що зона проковзування займає всю область безпосереднього контакту тіл.

Записуємо умови одностороннього контакту з врахуванням появи зони відлипання.

В області проковзування:

$$[w] = w - w_0 = 0, \quad \sigma_k < 0, \quad \zeta \in T''; \quad (1.30)$$

в області відлипання:

$$[w] > 0, \quad \sigma_k = 0, \quad \tau_k = 0, \quad \zeta \in T', \quad (1.31)$$

де  $[w]$  – стрибок радіальних переміщень між панелями прорізної оболонки та заповнювачем.

Закон тертя Кулона описує контактну взаємодію панелей та пружного заповнювача в зоні проковзування

$$\tau_k(\zeta) = f\sigma_k \operatorname{sgn} \zeta, \quad \zeta \in T'. \quad (1.32)$$

На торцях заповнювача та оболонок виконуються умови (1.8), (1.13).

Вираз для знаходження нормального осьового напруження у заповнювачі через невідомі контактні напруження запишеться у вигляді:

$$\sigma_{\zeta}(\zeta) = -P + \frac{l}{R} \int_{T'} \tau_k(\xi) \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi. \quad (1.33)$$

Із співвідношення (1.2) з урахуванням (1.33) знаходимо інтегральне подання для радіальних переміщень поверхні заповнювача

$$w(\zeta) = \frac{R}{E} \left\{ (1-\nu)\sigma(\zeta) - \nu \left[ -P - \frac{l}{R} \int_{T'} \tau_k(\xi) \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right] \right\}. \quad (1.34)$$

Радіальні переміщення панелей визначаються рівнянням (1.14), в якому контактне напруження

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_k, & \zeta \in T'; \\ 0, & \zeta \in T''. \end{cases} \quad (1.35)$$

Прирівнюючи радіальні переміщення заповнювача та оболонок в зоні проковзування згідно з умовою (1.30) та враховуючи закон Кулона (1.32), одержимо

$$\begin{aligned} \frac{R}{E} \left\{ (1-\nu)\sigma(\zeta) - \nu \left[ -P - \frac{l}{R} \int_{T'} \sigma_k(\xi) \operatorname{sgn} \xi \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right] \right\} = \\ = -k^2 \int_{-1}^1 G(\zeta, \xi) \sigma(\xi) d\xi, \quad \zeta \in T'. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Співвідношення (1.36) зводиться до інтегрального рівняння з невідомими межами інтегрування:

$$\sigma_k(\zeta) + \int_{T'} K(\xi, \zeta) \sigma_k(\xi) d\xi = -\frac{\nu}{1-\nu} P, \quad \zeta \in T'. \quad (1.37)$$

Ядро інтегрального рівняння (1.37) визначається формулою (1.18).

Для знаходження невідомих координат точок розмежування зон проковзування та відлипання використаємо умову (1.31), яка вказує на рівність нулю контактної напруженості в зоні відлипання. В результаті отримаємо систему, яка складається з інтегрального рівняння (1.37) та додаткової умови для контактної напруженості в точках розмежування зон проковзування та відлипання:

$$\begin{cases} \sigma_k(\zeta) + \int_T K(\xi, \zeta) \sigma_k(\xi) d\xi = -\frac{\nu}{1-\nu} P, \\ \sigma_k(\pm a) = 0. \end{cases} \quad (1.38)$$

Для розв'язку інтегрального рівняння (1.37) використовуємо ітераційний метод послідовних наближень масиву вузлових значень контактних напружень і невідомих координат  $\pm a$  до таких значень, які задовольняють систему (1.38). Розглянемо процес знаходження розв'язку системи детальніше.

За перше наближення приймається розв'язок рівняння (1.16), отриманого для даної механічної системи без врахування зони відлипання на проміжку  $[-1; 1]$ . Використовуючи умову (1.30), та враховуючи симетрію задачі, знаходимо точки  $\zeta_k, \zeta_{k'}$ , в яких контактні напруження змінюють знак на протилежний:

$$\sigma_k^{(t)}(\zeta_k) > 0, \quad \sigma_k^{(t)}(\zeta_{k'}) > 0, \quad k(t) = \overline{1, n},$$

де  $k' = n - k(t) + 1$ ,  $t$  – номер наближення.

Для знаходження наступного (другого) наближення розв'язку інтегрального рівняння (1.37) будемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь розмірності  $2k$ :



$$\sum_{j=1}^{2k} A_{ij}^{(t)} \sigma_{ij}^{(t)} = C_i, \quad i = \overline{1, 2k}, \quad (1.39)$$

коефіцієнти якої обчислюються за формулами:

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{cases} A_{bm}, & i \leq k, \quad j \leq k; \\ A_{l, n-(k-m)}, & i \leq k, \quad j > k; \\ A_{n-(k-l), m}, & i > k, \quad j < k; \\ A_{n-(k-l), n-(k-m)}, & i > k, \quad j > k. \end{cases} \quad (1.40)$$

Отриманий із системи (1.39) масив значень контактного напруження перевіряємо за умовою (1.30). При виявленні додатних значень контактного напруження у вузлових точках будемо наступну матрицю, елементи якої визначаються за формулами (1.40), і ітераційний обчислювальний процес повторюється. Після знаходження такого розв'язку системи (1.39), при якому відсутні додатні контактні напруження, обчислювальний процес зупиняється. Розв'язок інтегрального рівняння (1.37) буде мати вигляд

$$\sigma_k = \sigma_k^{(t)}(\zeta_i), \quad i = 1, 2k(t) + 1.$$

Координати точок розмежування зон проковзування та відлипання контактуючих тіл знаходяться за формулою

$$a_i = \mp 1 \pm (k(t) - 1)g; \quad i = 1, 2.$$

Використовуючи для контактного напруження співвідношення (1.34), характеристики пружного елемента можна знаходити за формулами першого параграфа. При числовому знаходженні розв'язку використовували рівномірне розбиття з 41 вузлом колокації. Розв'язок систем лінійних алгебраїчних рівнянь знаходили методом Гауса.

Зробимо аналіз результатів розрахунків, проведених для контактної системи з параметрами:  $h/R = 0,1$ ;  $E/E_0 = 0,0001$ ;  $\nu = 0,499$ . Величина значень коефіцієнта тертя, число розрізів оболонки та довжина системи варіюються.

На рис. 1.11 наведено розподіл безрозмірного контактного тиску  $q = -\sigma/P$  по довжині для різної кількості розрізів оболонки при  $l/R = 4,0$  та проковзуванні з сухим тертям ( $f = 0,3$ ). Наявність тертя між заповнювачем та оболонкою зумовлює нерівномірність розподілу контактного тиску заповнювача на панелі оболонки. Збільшення коефіцієнта тертя, кількості розрізів в оболонці та її довжини спри-

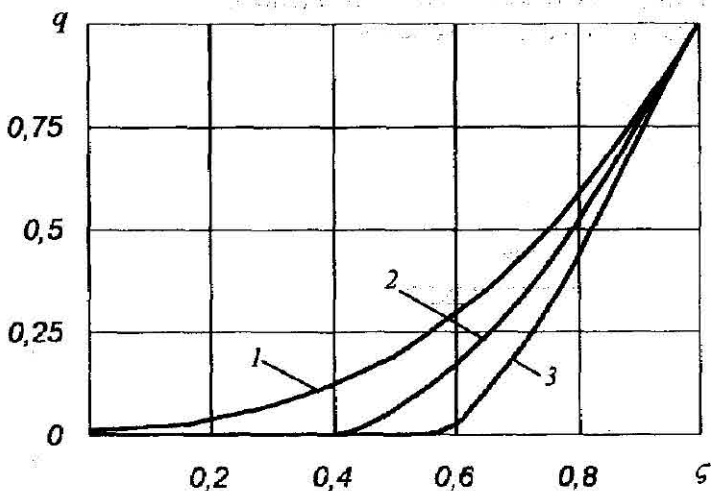
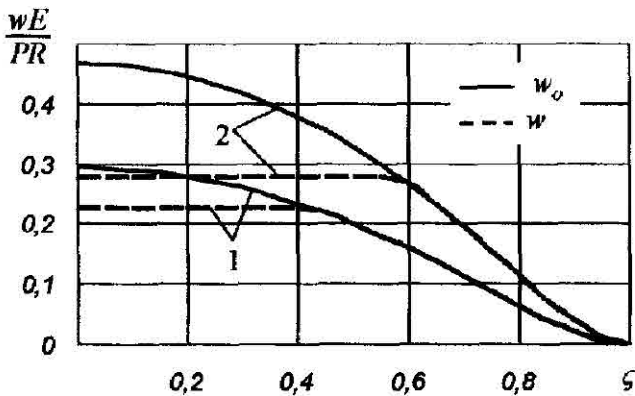


Рис. 1.11. Розподіл контактної тиску між заповнювачем та оболонкою:  
1— $N=6$ ; 2— $N=7$ ; 3— $N=8$

чиняють падіння контактного тиску до нуля в центральній частині поверхні спряження і появу зони віддипання між панелями та деформівним заповнювачем. Впливає на появу віддипання і відношення модулів пружності контактуючих тіл.

На рис. 1.12 подано графік розподілу по довжині радіальних прогинів панелей прорізної оболонки та зовнішньої поверхні деформівного заповнювача, які побудовані з використанням співвідношень (1.14), (1.10). Штриховими лініями позначено переміщення заповнювача, суцільними – прогин прорізної оболонки. На характер прогину панелей впливають умови їх закріплення та значний контактний тиск на кінцях. Невелика жорсткість панелей на згин у порівнянні з аналогічними за розмірами суцільними циліндричними оболонками зумовлює появу ефекту віддипання в прорізних пружних елементах.



**Рис. 1.12. Розподіл радіальних переміщень прорізної оболонки та заповнювача:**  
 1 –  $N = 6$ ; 2 –  $N = 8$

На рис. 1.13 зображено графіки розподілу стрибка радіальних переміщень по довжині оболонки, значення якого знаходяться за формулою

$$[w] = w_0 - w.$$

Використовуючи формули (1.14) та (1.34), отримаємо рівняння для знаходження стрибка радіальних переміщень

$$[w](\zeta) = (1-\nu) \frac{R}{E} \left[ \sigma(\zeta) + \frac{\nu}{1-\nu} P + \int_{-1}^1 K(\xi, \zeta) \sigma(\xi) d\xi \right]. \quad (1.41)$$

Тут  $K(\xi, \zeta)$  визначається співвідношенням (1.17).

Ширина зони відлипання та величина стрибка радіальних переміщень залежать від кількості розрізів оболонки, її довжини та коефіцієнта тертя контактуючої пари заповнювач-оболонка. Ширина зони відлипання та величина стрибка радіальних переміщень збільшуються з ростом коефіцієнта тертя та кількості розрізів. Максимального зна-

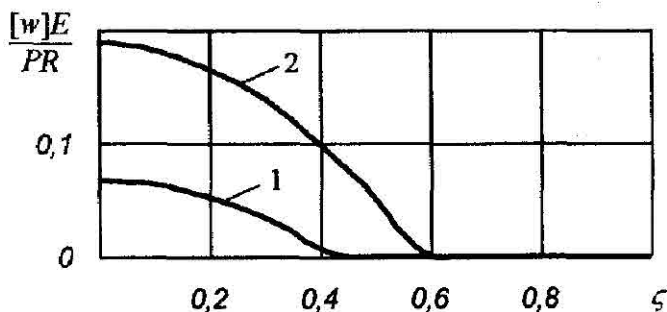


Рис. 1.13. Розподіл стрибка радіальних переміщень по довжині:  
1 —  $N = 6$ ; 2 —  $N = 8$

чення стрибок радіальних переміщень досягає в площині, що проходить через центр контактної системи.

Податливість контактної системи ілюструють криві на рис. 1.14. Залежність величини осьового переміщення поршня від безрозмірної довжини оболонки знаходиться із співвідношення:

$$\delta = -\frac{0.5l}{E}P \int_{-1}^1 \left[ \left( 1 + 2\nu \frac{\sigma(\xi)}{P} \right) \operatorname{sgn}(\xi + 1) + 2f \frac{\sigma(\xi)}{P} \operatorname{sgn} \xi |\xi + 1| \right] d\xi. \quad (1.42)$$

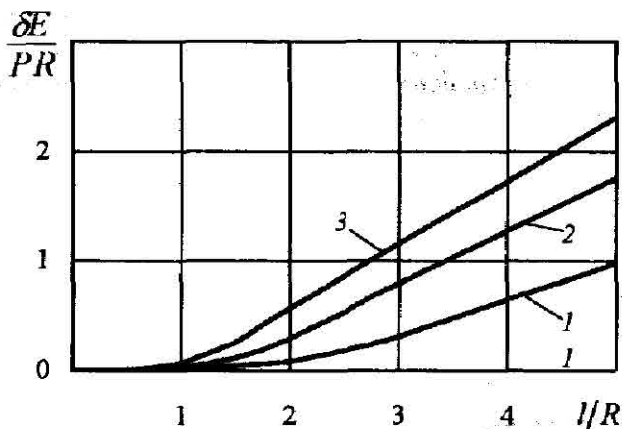


Рис. 1.14. Залежність осьового переміщення поршнів від довжини системи:  
1 -  $N=6$ ; 2 -  $N=7$ ; 3 -  $N=8$

На рис. 1.15 показано залежність максимальних нормальних напружень, які виникають у затисненні панелей прорізної оболонки від безрозмірної довжини системи. Криві побудовані з використанням співвідношення

$$\sigma_{\xi_{\max}} = -4\mu^4(1-\nu) \frac{E_0}{E} \frac{Rl_x}{l^3 W_x} \times \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi^3) \right) \sigma(\xi) d\xi, \quad \xi \in [-1, 1]. \quad (1.43)$$

Слід відзначити стабілізацію напружень в прорізній оболонці зі збільшенням довжини системи. При цьому податливість прорізного пружного елемента продовжує збільшуватися.

Відлипання прорізної оболонки від заповнювача зменшує зону безпосереднього контакту тіл, що погіршує демпфувальні властивості такої конструкції. Тому при використанні розглянутої системи в демферах, необхідно враховувати можливість відлипання між контактуючими тілами.

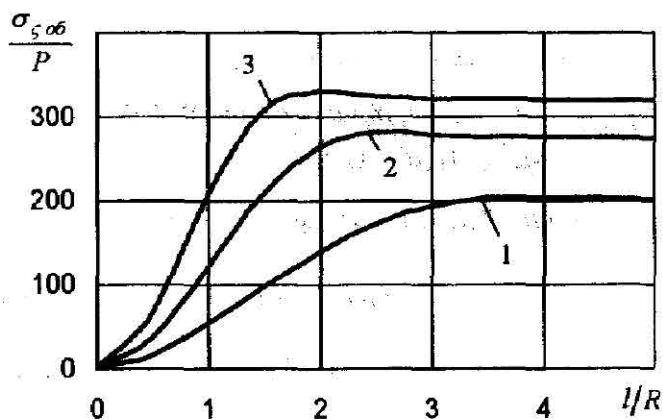


Рис. 1.15. Залежність максимальних нормальних напружень в прорізній оболонці від довжини системи: 1— $N=6$ ; 2— $N=7$ ; 3— $N=8$ .

### 1.3 Перевірка числового методу аналітичними розв'язками контактної задачі

З метою перевірки достовірності отриманих числових результатів розглянемо часткові випадки постановки задачі контактної взаємодії прорізної оболонки з деформівним заповнювачем, які дозволяють отримати аналітичний розв'язок. Дані задачі сформульовані для пружних систем з характерними особливостями контактних тіл.

**1.3.1 Розв'язок контактної задачі за гладкого контакту.** Нехай  $f = 0$ . За відсутності тертя контактна задача зводиться до диференційного рівняння (вважаємо, що зона відлипання відсутня)

$$\frac{E_0 I_x}{l^4} \frac{d^4 w_o}{d\zeta^4} + \frac{E}{(1-\nu)R} w_o = \frac{b\nu}{1-\nu} P, \quad \zeta \in [-1; 1], (1.44)$$

з крайовими умовами (1.13).

Для прогину панелі отримуємо результат:

$$w_o(\zeta) = -\frac{A}{4\mu^4} \left( \frac{Y_1(\mu\zeta)Y_2(\mu) + 4Y_3(\mu\zeta)Y_4(\mu)}{Y_1(\mu)Y_2(\mu) + 4Y_3(\mu)Y_4(\mu)} - 1 \right). (1.45)$$

Тут  $Y_1(\mu), Y_2(\mu), Y_3(\mu), Y_4(\mu)$  – функції Кривола:

$$Y_1(\mu) = ch\mu \cos \mu, \quad Y_2(\mu) = \frac{1}{2}(ch\mu \sin \mu + sh\mu \cos \mu),$$

$$Y_3(\mu) = sh\mu \sin \mu, \quad Y_4(\mu) = \frac{1}{4}(ch\mu \sin \mu - sh\mu \cos \mu).$$

$$4\mu^4 = \frac{1}{1-\nu} \frac{l^4 b}{R I_x} \frac{E}{E_0}, \quad A = \frac{\nu}{1-\nu} \frac{l^4 b}{E_0 I_x} P.$$

Контактне напруження визначається за формулою

$$\sigma(\zeta) = -\frac{\nu}{1-\nu} P \left( \frac{Y_1(\mu\zeta)Y_2(\mu) + Y_3(\mu\zeta)Y_4(\mu)}{Y_1(\mu)Y_2(\mu) + 4Y_3(\mu)Y_4(\mu)} \right). \quad (1.46)$$

Осьова деформація заповнювача визначається співвідношенням

$$\varepsilon_\zeta(\zeta) = -\frac{P}{E} + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \frac{A}{4\mu^4 R} \left( \frac{Y_1(\mu\zeta)Y_2(\mu) + Y_3(\mu\zeta)Y_4(\mu)}{Y_1(\mu)Y_2(\mu) + 4Y_3(\mu)Y_4(\mu)} \right). \quad (1.47)$$

Після інтегрування для осьового переміщення заповнювача отримаємо вираз

$$u(\zeta) = -\frac{P}{E} \zeta + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \frac{A}{4\mu^4} \frac{1}{R} \left( \frac{Y_2(\mu\zeta)Y_2(\mu) + Y_4(\mu\zeta)Y_4(\mu)}{Y_1(\mu)Y_2(\mu) + 4Y_3(\mu)Y_4(\mu)} \right).$$

За умов гладкого контакту ядро (1.18) інтегрального рівняння (1.17) матиме вигляд

$$K(\xi, \zeta) = 4\mu^4 G(\xi, \zeta).$$

Результати отримані числовим методом порівнювали з точними аналітичними. Для 41 вузла колокації похибка числових результатів, обчислена за чебишевською нормою, не перевищує 0,1%.

**1.3.2 Стиск заповнювача в абсолютно жорсткій обоймі.** Розглянемо випадок, коли пружний заповнювач перебуває в абсолютно жорсткій прорізній оболонці. В цьому випадку для пружних характеристик прорізної оболонки та контактуючих тіл слід прийняти:  $E_o \rightarrow \infty$  або  $(E/E_o \rightarrow 0)$ . Умова абсолютно жорсткої оболонки геометрично визначається рівністю нулю радіальних переміщень панелей. Відповідно до умов контактної взаємодії (1.6) рів-



няння (1.10), що визначає радіальні переміщення контактної поверхні заповнювача, зводиться до вигляду

$$(1-\nu)\sigma(\zeta) + \nu \left( P + \frac{l}{R} \int_{-1}^1 \tau(\xi) \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right) = 0, \quad \zeta \in (-1, 1). \quad (1.48)$$

Після деяких перетворень останнього співвідношення отримаємо диференціальне рівняння для визначення контактного напруження:

$$\frac{d\sigma}{d\zeta} - a(\zeta)\sigma = 0 \quad (1.49)$$

з крайовими умовами

$$\sigma(\pm 1) = -\frac{\nu}{1-\nu} P, \quad (1.50)$$

де  $a(\zeta) = m \operatorname{sgn} \zeta$ ,  $m = \frac{2\nu f l}{1-\nu R}$ .

Розв'язком рівняння (1.49) з врахуванням крайової умови (1.50) є

$$\sigma(\zeta) = -\frac{\nu}{1-\nu} P e^{-m(|\zeta|)} \quad (1.51)$$

Дотичні контактні напруження визначаються підстановкою нормальних контактних напружень (1.51) в закон Кулона (1.7):

$$\tau(\zeta) = -\frac{\nu}{1-\nu} f P \operatorname{sgn} \zeta e^{-m(|\zeta|)} \quad (1.52)$$

Використовуючи знайдені контактні напруження (1.51), (1.52) з модельних співвідношень (1.2)–(1.4), отримаємо осьові напруження та деформації в заповнювачі:

$$\sigma_{\zeta} = -P e^{-m(1-|\zeta|)},$$

$$\varepsilon_{\zeta}(\zeta) = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} P e^{-(1-|\zeta|)}. \quad (1.53)$$

У випадку жорсткої оболонки ядро інтегрального рівняння (1.18) перетворюється до виду

$$K(\xi, \zeta) = -\frac{\nu}{1-\nu} l f \operatorname{sgn} \zeta \operatorname{sgn}(\xi - \zeta). \quad (1.54)$$

В розглянутих задачах розбіжність в результатах, отриманих числовим методом та аналітично, становить 0,1%. Крім того, достовірність числового розрахунку перевіряли подвоєнням кількості вузлів в методі квадратур.

#### 1.4 Фрикційна взаємодія безмежної циліндричної оболонки з розрізами та деформівного заповнювача

Робочим елементом пружного демфера, що моделюється, є суцільна оболонка з розміщеними симетрично поздовжніми розрізами у центральній частині конструкції. Довжина розрізів оболонки дорівнює довжині заповнювача. Запропонована схема оболонки моделює пружне кріплення панелей.

Побудуємо механіко-математичну модель безмежної циліндричної оболонки з поздовжніми розрізами. Тонкостінну оболонку розглядаємо, як систему, що складається з трьох з'єднаних між собою частин: прорізної (розташованої в центральній частині конструкції) та двох півбезмежних циліндричних суцільних оболонок, розміщених обабіч розрізаної частини. У місцях з'єднання прорізної та суцільних оболонок виконуються умови неперервності радіальних та кутових переміщень. Неперервними є також внутрішні силові фактори, що виникають в оболонках при сти-

ску деформівного заповнювача поршнями.

Приймаємо, що центральна частина оболонки, яка має розрізи, складається з панелей, що зазнають плоского згину в радіальних площинах.

Неперервність радіальних та кутових переміщень передбачає їх рівність в точках з'єднання оболонок, тому крайові умови для панелей прорізної оболонки матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} w_o(-1) &= w_1^A, & w_o(+1) &= w_1^B, \\ \left. \frac{dw_o}{d\zeta} \right|_{\zeta=-1} &= \theta_1^A, & \left. \frac{dw_o}{d\zeta} \right|_{\zeta=1} &= \theta_1^B, \end{aligned} \quad (1.55)$$

де  $w_o$  – радіальне переміщення панелей прорізної оболонки;  $\zeta$  – безрозмірна осьова координата.

У співвідношенні (1.44)  $w_1^A, w_1^B, \theta_1^A, \theta_1^B$  – поки що невизначені відповідно радіальні переміщення та кути повороту лівої (індекс  $A$ ) та правої (індекс  $B$ ) суцільних оболонок. Для їх знаходження розглянемо допоміжну задачу.

В допоміжній задачі розглядається півбезмежна циліндрична оболонка завтовшки  $h$ , яка навантажена погонними зусиллям  $q$  та моментами  $m$ , розподіленими по торцювому перерізу. Інших зовнішніх навантажень на оболонку немає (рис. 1.16). Дослідження проводимо в циліндричній системі координат  $O, r, \theta, z_1$ .

Радіальні переміщення суцільної оболонки визначаються з диференціального рівняння:

$$\frac{d^4 w_1(z_1)}{dz_1^4} + 4k^4 w_1(z_1) = 0, \quad z_1 \in [0, +\infty), \quad (1.56)$$

де  $k^4 = \frac{E_1 h}{4R^2 D} = \frac{3(1-\nu_1^2)}{R^2 h^2}$ ,  $D = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1^2)}$  – циліндрична

жорсткість оболонки,  $E_1, \nu_1$  – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона її матеріалу.

Крайові умови для оболонки мають вигляд:

$$w_1 \Big|_{z_1=-\infty} = 0, \quad \frac{dw_1}{dz_1} \Big|_{z_1=-\infty} = 0,$$

$$m_z \Big|_{z_1=0} = -D \frac{d^2 w_1}{dz_1^2} = m, \quad q_z \Big|_{z_1=0} = -D \frac{d^3 w_1}{dz_1^3} = q. \quad (1.57)$$

Запишемо розв'язок рівняння (1.56) із врахуванням крайових умов (1.57):

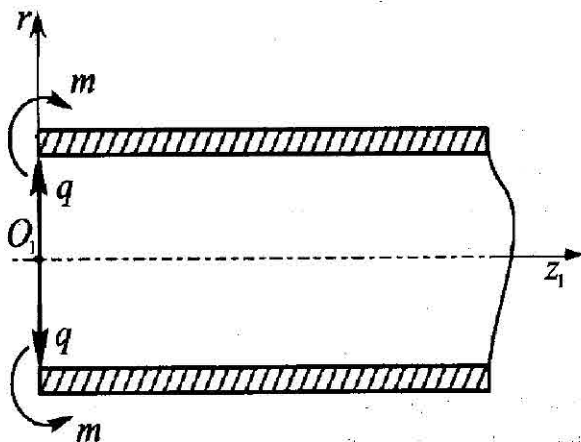


Рис. 1.16. Схема навантаження півбезмежної оболонки

$$w_1(z) = \frac{e^{-kz_1}}{2k^2 D} \left[ m(\operatorname{sinc} kz_1 - \operatorname{cos} kz_1) - \frac{q}{k} \operatorname{cos} kz_1 \right]. \quad (1.58)$$

Кут повороту поперечного перерізу оболонки визначається співвідношенням

$$\frac{dw_1}{dz_1} = \frac{e^{-kz_1}}{2kD} \left[ 2m \operatorname{cos} kz_1 + \frac{q}{k} (\operatorname{cos} kz_1 + \operatorname{sinc} kz_1) \right].$$

Таким чином, радіальні переміщення оболонки та кут повороту торцевого перерізу оболонки ( $z_1 = 0$ ) визначаються лінійними залежностями:

$$\begin{aligned} w_1(0) &= \frac{1}{2k^2 D} \left[ -m - \frac{q}{k} \right], \\ \frac{dw_1(0)}{dz_1} &= \frac{1}{2kD} \left[ 2m + \frac{q}{k} \right]. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Розглянемо силові фактори, які виникають у прорізній та суцільних оболонках. Нехай на краях панелей діють згинальний момент  $M_0$  та поперечна сила  $Q_0$ . Вони визначаються через диференційні залежності від радіального прогину прорізної оболонки таким чином:

$$M_0(\zeta) = -\frac{E_0 J_x}{l^2} \frac{d^2 w_0}{d\zeta^2}, \quad Q_0(\zeta) = -\frac{E_0 J_x}{l^3} \frac{d^3 w_0}{d\zeta^3}. \quad (1.60)$$

Враховуючи рівність внутрішніх силових факторів у оболонках в точках спряження  $A$  і  $B$ , запишемо формули для визначення погонних згинального моменту та поперечного зусилля, які діють на торцях суцільних оболонки:

$$m = \frac{M_0}{R\varphi}, \quad q = \frac{Q_0}{R\varphi}. \quad (1.61)$$

Співвідношення (1.61) з урахуванням (1.60) набувають вигляду:

$$m = -\frac{E_0 J_x}{l^2 R \varphi} \frac{d^2 w_0}{d\zeta^2}, \quad q = -\frac{E_0 J_x}{l^3 R \varphi} \frac{d^3 w_0}{d\zeta^3} \quad (1.62)$$

Враховуючи симетрію контактної системи та співвідношення (1.59), (1.62), одержимо крайові умови для панелей розрізаної частини оболонки:

$$w_0 = -\frac{\sqrt{3(1-\nu_1^2)}}{\pi} \frac{N l_x}{l^2 h^2} \left[ -\frac{d^2 w_0}{d\zeta^2} - \frac{1}{kl} \frac{d^3 w_0}{d\zeta^3} \right],$$

$$\frac{dw_0}{d\zeta} = -\frac{3(1-\nu_1^2)}{\pi} \frac{N l_x}{kl^2 h^3} \left[ 2 \frac{d^2 w_0}{d\zeta^2} + \frac{1}{kl} \frac{d^3 w_0}{d\zeta^3} \right] \quad (1.63)$$

Таким чином, для визначення радіального прогину панелей прорізної оболонки маємо крайову задачу (1.5), (1.63).

Загальний розв'язок рівняння знаходимо у вигляді:

$$w(\zeta) = C_0 + C_1 \zeta + C_2 \zeta^2 + C_3 \zeta^3 + \frac{1}{12} \lambda^4 \int_{-1}^1 (\xi - \zeta)^3 \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) \sigma(\xi) d\xi, \quad (1.64)$$

де  $\lambda^4 = -\frac{l^4 b}{E_0 J_x}$ ,  $C_0, C_1, C_2, C_3$  – невідомі сталі інтегрування, які визначаються умовами (1.63).

Розкривши (1.63), одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих сталих інтегрування

$$\begin{cases} C_0 + C_1 + d_1 C_2 + (1 - 6d_2) C_3 = I_0(1) - \beta_{11} I_2(1) + \beta_{12} I_3(1), \\ C_0 - C_1 + d_1 C_2 + (-1 - 6d_2) C_3 = I_0(-1) - \beta_{11} I_2(1) + \beta_{12} I_3(1), \\ C_1 + (2 - 2\beta_{21}) C_2 + d_3 C_3 = -I_1(1) - \beta_{21} I_2(1) + \beta_{22} I_3(1), \\ C_1 + (-2 - 2\beta_{21}) C_2 + d_3 C_3 = -I_1(-1) - \beta_{21} I_2(1) + \beta_{22} I_3(1), \end{cases} \quad (1.65)$$

де  $d_1 = 1 - 2\beta_{11}$ ;  $d_2 = \beta_{11} + \beta_{12}$ ;  $d_3 = 3 - 6\beta_{21} - 6\beta_{22}$ ;

$$\beta_{11} = \frac{\sqrt{3(1-\nu_0^2)}}{\pi} \frac{N I_x}{l^2 h^2}; \quad \beta_{12} = \frac{1}{k} \frac{\sqrt{3(1-\nu_0^2)}}{\pi} \frac{N I_x}{l^3 h^2};$$

$$\beta_{21} = -\frac{6(1-\nu_0^2)}{\pi} \frac{N I_x}{k l^2 h^3}; \quad \beta_{22} = -\frac{3(1-\nu_0^2)}{\pi} \frac{N I_x}{k^2 l^3 h^3};$$

$$I_0(\zeta) = \frac{1}{12} \lambda^4 \int_{-1}^1 (\xi - \zeta)^3 \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) \sigma(\xi) d\xi;$$

$$I_1(\zeta) = -\frac{1}{4} \lambda^4 \int_{-1}^1 (\xi - \zeta)^2 \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) \sigma(\xi) d\xi;$$

$$I_2(\zeta) = \frac{1}{2} \lambda^4 \int_{-1}^1 (\xi - \zeta) \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) \sigma(\xi) d\xi;$$

$$I_3(\zeta) = -\frac{1}{2} \lambda^4 \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) \sigma(\xi) d\xi. \quad (1.66)$$

Із розв'язку системи рівнянь (1.65) отримали

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \frac{1}{2}(I_0(1) - I_0(-1)) + \left( \frac{3(\beta_{21} + \beta_{22})}{4(1 - \beta_{21})}(2\beta_{11} - 1) + \frac{6(\beta_{12} - \beta_{11})}{4} \right) \times \\
 &\quad \times (-I_0(1) - I_0(-1) - I_1(1) + I_1(-1)) - \\
 &\quad - \beta_{11}I_2(1) + \beta_{12}I_3(1) + \frac{(2\beta_{21} - 1)}{(1 - \beta_{21})}(2\beta_{22}I_3(1) - 2\beta_{21}I_2(1) - I_1(1) - I_3(-1)), \\
 C_1 &= \frac{3}{4}(I_0(1) + I_0(-1)) + \frac{1}{4}(I_1(1) - I_1(-1)); \\
 C_2 &= \frac{3(\beta_{21} + \beta_{22})}{4(1 - \beta_{21})}(-I_0(1) - I_0(-1) - I_1(1) + I_1(-1)) + \\
 &\quad + \frac{2\beta_{22}I_3(1) - 2\beta_{21}I_2(1) - I_1(1) - I_1(-1)}{4(1 - \beta_{21})}; \\
 C_3 &= \frac{1}{4}(-I_0(1) - I_0(-1) - I_1(1) + I_1(-1)). \quad (1.67)
 \end{aligned}$$

Співвідношення (1.64), (1.66), (1.67) описують радіальні переміщення "пружно закріплених" панелей прорізної оболонки внаслідок контактного тиску заповнювача на оболонку.

Прирівнюючи радіальні переміщення контактуючих поверхонь заповнювача (1.10) та панелей (1.64) в зоні проковзування згідно з умовою (1.30), (1.31) та враховуючи закон Кулона (1.32), одержимо інтегральне рівняння з невідомими межами інтегрування

$$\sigma(\zeta) + \left( \int_{-1}^{-a} + \int_a^1 \right) H(\xi, \zeta) \sigma(\xi) d\xi = -\frac{\nu}{1-\nu} P, \quad \zeta \in T'. \quad (1.68)$$

Ядро інтегрального рівняння (1.68) визначається співвідношенням



$$H(\zeta, \xi) = -\frac{\nu}{1-\nu} P \operatorname{sgn} \zeta \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) + 4\mu^4 (C_0 + C_1 \zeta + C_2 \zeta^2 + C_3 \zeta^3) + \frac{\mu^4}{3} (\xi - \zeta)^3 \operatorname{sgn}(\xi - \zeta), \quad (1.69)$$

де

$$\begin{aligned} C_0 &= \left( -\frac{1}{8} \xi^2 - \frac{1}{24} \right) + \frac{2\beta_{11} - 1}{4(1 - \beta_{21})} \times \\ &\times \left[ 3(\beta_{21} + \beta_{22}) \left( -\frac{1}{24} \xi^3 + \frac{1}{8} \xi - \frac{1}{3} \right) + \beta_{21} \xi \right] - \frac{1}{4(1 - \beta_{21})} \times \\ &\times \left( -\frac{1}{8} \xi^2 + \frac{1}{8} \right) + 6(\beta_{21} + \beta_{22}) \left( -\frac{1}{24} \xi^3 + \frac{1}{8} \xi - \frac{1}{12} \right) + \frac{1}{2} \beta_{11} \xi, \\ C_1 &= \frac{1}{8} \xi^3 + \frac{1}{8} \xi, \\ C_2 &= \frac{1}{4(1 - \beta_{21})} \left[ 3(\beta_{21} + \beta_{22}) \left( -\frac{1}{24} \xi^3 + \frac{1}{8} \xi - \frac{1}{3} \right) - \left( -\frac{1}{8} \xi^2 + \frac{1}{8} \right) + \beta_{21} \xi \right], \\ C_3 &= -\frac{1}{24} \xi^2 + \frac{1}{8} \xi, \quad 4\mu^4 = \frac{1}{1-\nu} \frac{l^4 b}{Rl_x} \frac{E}{E_0}. \quad (1.70) \end{aligned}$$

Для знаходження невідомих координат точок розмежування зон проковзування та відлипання  $\pm a$  прирівнюємо нулю контактні напруження в зоні відлипання (1.31). У результаті одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \sigma(\zeta) + \int_T H(\xi, \zeta) \sigma(\xi) d\xi = -\frac{\nu}{1-\nu} P, \quad \zeta \in T', \\ \sigma(\pm a) = 0. \end{cases} \quad (1.71)$$

При числовому розв'язку інтегрального рівняння використовуємо метод послідовних наближень масиву вузло-

вих значень контактних напружень і невідомих координат точок розмежування областей проковзування та відлипання до таких, що задовольняють систему рівнянь (1.71).

Розрахунки проводили для оболонкової системи з такими параметрами:  $h/R = 0,1$ ;  $E/E_0 = 0,0001$ ;  $\nu = 0,499$ ;  $\nu_0 = 0,3$ ;  $f = 0,5$ . При числових розрахунках у методі квадратур використано сітку з 41 вузлом колокацій.

Згідно з одержаними числовими результатами контактні напруження в даній механічній системі є меншими від напружень, що виникають механічній системі з жорстким закріпленням панелей. Розглянемо вплив пружного закріплення панелей на основні характеристики контактної системи.

На рис. 1.17 зображено радіальні переміщення прорізної оболонки, підраховані для досліджуваної системи (по-

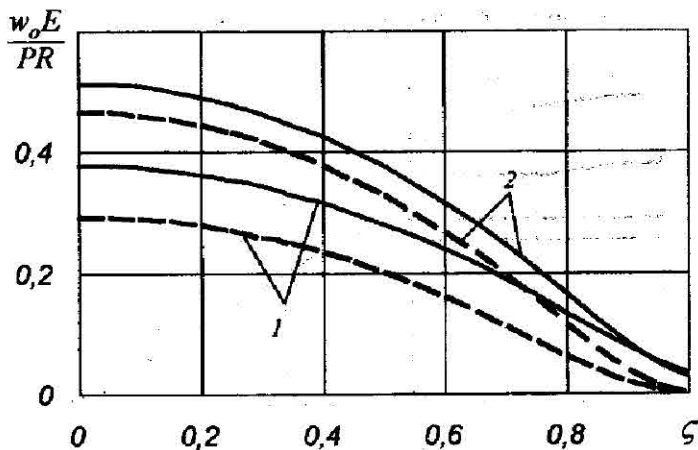


Рис. 1.17. Радіальний прогин панелей прорізної оболонки:  
1 —  $N = 6$ ; 2 —  $N = 8$

значено суцільними лініями) та у випадку нульових крайових умов на лінійні та кутові переміщення торцевих перерізів панелей (штрихові лінії). Безрозмірна довжина розрізів в оболонці  $l/R=4,0$ . Встановлено, що величина радіальних переміщень панелей в торцях ( $\zeta = \pm 1$ ) слабо залежить від кількості розрізів в оболонці. Наявність торцевих радіальних переміщень зумовлює більший прогин панелей розглянутої контактної системи порівняно з радіальним переміщенням прорізної оболонки при її жорсткому закріпленні. При збільшенні числа розрізів оболонки різниця в величині прогинів для різних контактних систем зменшується.

На рис. 1.18 зображено радіальні переміщення контактних поверхонь прорізної оболонки та заповнювача для пружних систем при  $N = 6$ . Відзначимо збільшення ширини зони відлипання та величини стрибка радіальних переміщень для даної контактної системи порівняно з розгля-

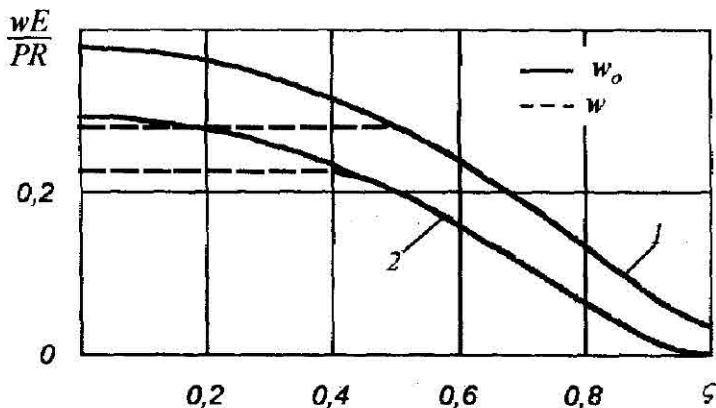


Рис. 1.18. Радіальні переміщення прорізної оболонки та заповнювача: 1 – пружне, 2 – жорстке закріплення

нутою раніше (§ 1.3).

Осьову податливість пружної системи характеризують криві на рис. 1.19. На графіках зображено залежність осьового переміщення поршнів від довжини розрізів в оболонці та від їх кількості. Осьова податливість системи з пружно закріпленими панелями збільшується на 25 – 35% для  $N=6$  та на 10 – 15% для  $N=8$  порівняно з конструкцією з жорстко закріпленими панелями.

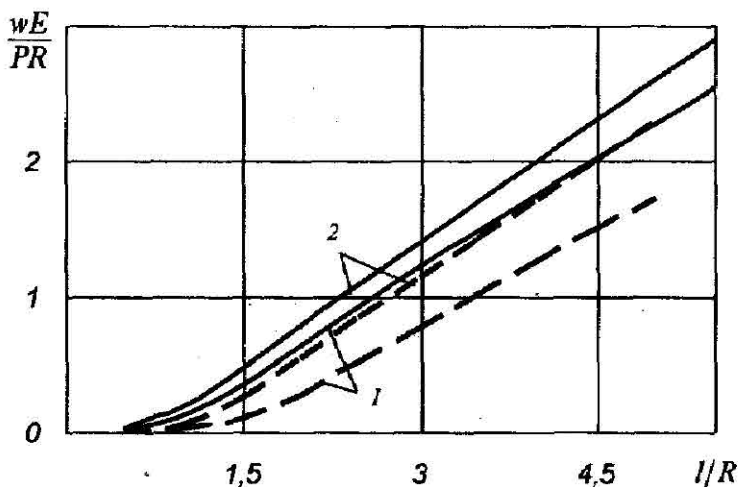


Рис. 1.19. Залежність осьового переміщення торців заповнювача від довжини заповнювача:  
1 –  $N=6$ ; 2 –  $N=8$

Нормальні осьові напруження, які діють у панелях прорізної оболонки, знаходимо за формулою (1.22):

$$\sigma_{\zeta_0} = -4\mu^4(1-\nu)\frac{E_0}{E}\frac{Rl_x}{P W_x} \int_{-1}^1 U_2(\zeta, \xi)\sigma(\xi)d\xi, \quad \zeta \in [-1; 1],$$

(1.72)

де  $U_2(\zeta, \xi) = -2C_2 + 6C_3\zeta + \frac{1}{2}(\xi - \zeta)\operatorname{sgn}(\xi - \zeta)$ .

Максимальні напруження в панелях виникають в торцевих перерізах, у місцях спряження прорізної та суцільної частини оболонки. На рис. 1.20 зображено залежності максимальних напружень від довжини розрізів оболонки. Позначення та нумерація кривих аналогічні до попередніх. Для розглянутої контактної системи, на відміну від випадку жорсткого закріплення панелей, змінюється харак-

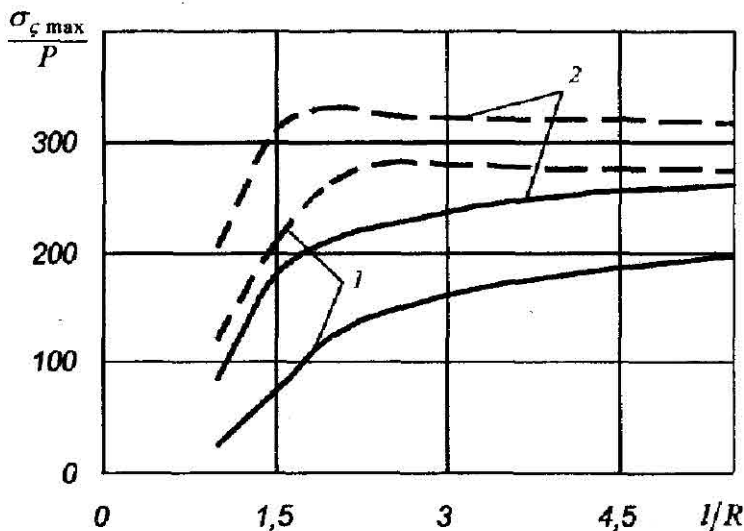


Рис. 1.20. Залежність максимальних нормальних напружень в панелях від довжини розрізів:  
 1 -  $N=6$ ; 2 -  $N=8$

тер залежності  $\sigma_{\infty}$  від довжини прорізної оболонки. Для жорстко закріплених панелей величина  $\sigma_{\infty}$  сягає максимального значення при  $l/R \approx 2,0$  та стабілізується із зростанням довжини оболонки. В нашому випадку, при збільшенні довжини розрізної частини оболонки, величина нормального напруження в пружно закріплених панелях зростає монотонно. Як видно із зображених кривих, максимальні нормальні напруження у пружно закріплених панелях менші, ніж у затиснутих. Найбільшою різниця у величині максимальних нормальних напружень є для коротких прорізних оболонок. Зі збільшенням довжини розрізів в оболонці та їх кількості різниця в значеннях  $\sigma_{\infty}$  нівелюється. Так, наприклад, для прорізної оболонки з безрозмірною довжиною  $l/R = 5$  значення максимальних  $\sigma_{\infty}$  в панелях зменшуються на 26%, якщо число розрізів  $N = 6$ , та на 14% при  $N = 8$ .

### **1.5 Контактна взаємодія обмеженої розрізної циліндричної оболонки з деформівним заповнювачем**

Розглянемо контактну систему, що складається з циліндричної оболонки з розрізами та пружного заповнювача. Використання даної моделі дозволить більш адекватно описати роботу пружних елементів, а отже, точніше визначити характеристики механічної системи.

Сформулюємо контактну задачу для випадку, коли суцільні частини оболонки є короткими та мають однакову довжину  $L$ . Отже, маємо оболонку радіуса  $R$  і завтовшки  $h$ , з поздовжніми розрізами довжиною  $2l$ , в якій абсолютно жорсткими гладкими поршнями стискається пружний заповнювач (див. рис. 1.1).

Вважаємо, що суцільна частина оболонки є короткою, тобто виконується співвідношення  $kL \leq 3$ , де

$k = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu_0^2)}{R^2 h^2}}$  – параметр кривини оболонки. При знаходженні розв'язку рівняння (1.56) необхідно враховувати умови закріплення на обох краях оболонки.

Для суцільної циліндричної оболонки скінченної довжини маємо такі крайові умови: один край ( $x = L$ ) вільний, на іншому виконуються співвідношення:

$$\begin{aligned} m_z|_{x=0} &= -D \frac{d^2 w_2}{dx^2} = m, \\ q_z|_{x=0} &= -D \frac{d^3 w_2}{dx^3} = q. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Розв'язок рівняння (1.56) шукаємо у вигляді [22]:

$$\begin{aligned} w_2(z) &= w(0)K_0(kx) + \frac{1}{k} \frac{dw}{dx}(0)K_1(kx) + \frac{1}{k^2} \frac{d^2 w}{dx^2}(0)K_2(kx) + \\ &+ \frac{1}{k^3} \frac{d^3 w}{dx^3}(0)K_3(kx) + \frac{1}{k^3 D} \int_0^x K_3[k(x-x_1)] q dx_1 \end{aligned} \quad (1.74)$$

де

$$\begin{aligned} K_0(kx) &= \operatorname{ch}(kx) \cos(kx), \\ K_1(kx) &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch}(kx) \sin(kx) + \operatorname{sh}(kx) \cos(kx)), \\ K_2(kx) &= \frac{1}{2} \operatorname{sh}(kx) \sin(kx), \end{aligned}$$

$$K_3(kx) = \frac{1}{4}(\operatorname{ch}(kx)\sin(kx) - \operatorname{sh}(kx)\cos(kx)),$$

– функції Крилова.

Радіальні переміщення та кут повороту торцьового перерізу оболонки ( $x=0$ ) при крайових умовах (1.73) визначаються співвідношеннями:

$$w_2(0) = \frac{1}{k^2 D} \left[ \frac{K_0 K_2 + 4K_3^2}{4(K_2^2 - K_1 K_3)} m + \frac{K_1 K_2 - K_0 K_3}{4(K_2^2 - K_1 K_3)} \frac{q}{k} \right],$$

$$\frac{dw_2(0)}{dx} = \frac{1}{kD} \left[ \frac{K_0 K_1 + 4K_2 K_3}{4(K_2^2 - K_1 K_3)} m - \frac{K_1^2 - K_0 K_2}{4(K_2^2 - K_1 K_3)} \frac{q}{k} \right], \quad (1.75)$$

де  $K_i = K_i(kL)$ ,  $i = 0, 3$ .

З урахуванням (1.73) співвідношення (1.75) набувають вигляду:

$$w_o = B_1 \left[ \frac{K_0 K_2 + 4K_3^2}{4(K_2^2 - K_1 K_3)} \frac{d^2 w_o}{d\zeta^2} + \frac{K_1 K_2 - K_0 K_3}{4(K_2^2 - K_1 K_3)} \frac{1}{kl} \frac{d^3 w_o}{d\zeta^3} \right],$$

$$\frac{dw_o}{d\zeta} = B_2 \left[ \frac{K_0 K_1 + 4K_2 K_3}{2(K_2^2 - K_1 K_3)} \frac{d^2 w_o}{d\zeta^2} + \frac{K_1^2 - K_0 K_2}{2(K_2^2 - K_1 K_3)} \frac{1}{kl} \frac{d^3 w_o}{d\zeta^3} \right], \quad (1.76)$$

$$\text{де } B_1 = \frac{\sqrt{3(1-\nu_o^2)} NI_x}{\pi l^2 h^2}, \quad B_2 = -\frac{6(1-\nu_o^2) NI_x}{\pi kl^2 h^3}.$$

Прогин прорізної частини оболонки описується рівнянням (1.5), загальний розв'язок якого визначається співвідношенням (1.64). Сталі інтегрування, що входять в (1.64), знаходимо, задовольнивши умови (1.76).



Розв'язавши отриману систему рівнянь, одержимо інтегральне подання радіального прогину панелей. Прирівнюючи радіальне переміщення заповнювача (7.6) та прогин панелей за умовою (1.30), отримаємо інтегральне рівняння відносно контактного напруження

$$\sigma(\zeta) + \int_T S(\xi, \zeta) \sigma(\xi) d\xi = -\frac{\nu}{1-\nu} p, \quad \zeta \in T'. \quad (1.77)$$

Шукана область інтегрування описується умовою (1.31).

Ядро інтегрального рівняння (1.77) має вигляд аналогічний до (1.69), проте відрізняється значенням сталих інтегрування

$$S(\zeta, \xi) = -\frac{\nu}{1-\nu} l f \operatorname{sgn} \zeta \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) + 4\mu^4 \left[ C_0 + C_1 \zeta + C_2 \zeta^2 + C_3 \zeta^3 + \frac{1}{12} (\xi - \zeta)^3 \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) \right]. \quad (1.78)$$

Сталі  $C_i$  визначаються співвідношеннями (1.67). Для даного випадку розрізної оболонки коефіцієнти  $\beta_{ij}$  такі:

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \frac{\sqrt{3(1-\nu_o^2)} N l_x}{\pi} \frac{K_0 K_2 + 4K_3^2}{l^2 h^2 4(K_2^2 - K_1 K_3)}, \\ \beta_{12} &= \frac{1}{k} \frac{\sqrt{3(1-\nu_o^2)} N l_x}{\pi} \frac{K_1 K_2 - K_0 K_3}{l^3 h^2 4(K_2^2 - K_1 K_3)}, \\ \beta_{21} &= -\frac{6(1-\nu_o^2) N l_x}{\pi} \frac{K_0 K_1 + 4K_2 K_3}{kl^2 h^3 4(K_2^2 - K_1 K_3)}, \\ \beta_{22} &= -\frac{3(1-\nu_o^2)}{\pi} \frac{K_1^2 - K_0 K_2}{4(K_2^2 - K_1 K_3)} \frac{N l_x}{k^2 l^3 h^3}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (1.77) побудували чисельно методом квадратур.

Проаналізуємо отримані результати. Розрахунки проводили для оболонкової системи з такими параметрами:  $h/R=0,1$ ;  $E/E_0=0,0001$ ;  $\nu=0,499$ ;  $\nu_0=0,3$ ;  $f=0,3$ . Довжина оболонки, розрізів та їх кількість варіювалися. На рис. 1.21 наведено залежності осьового переміщення поршнів від довжини суцільної частини оболонки  $l/R=3,0$  (суцільні лінії), та для  $l/R=4,0$  (штрихові лінії). Із збільшенням довжини суцільної частини оболонки податливість системи зменшується до певної величини. Подальше зростання довжини не призводить до зміни переміщення поршнів.

Встановлено також, що збільшення довжини суціль-

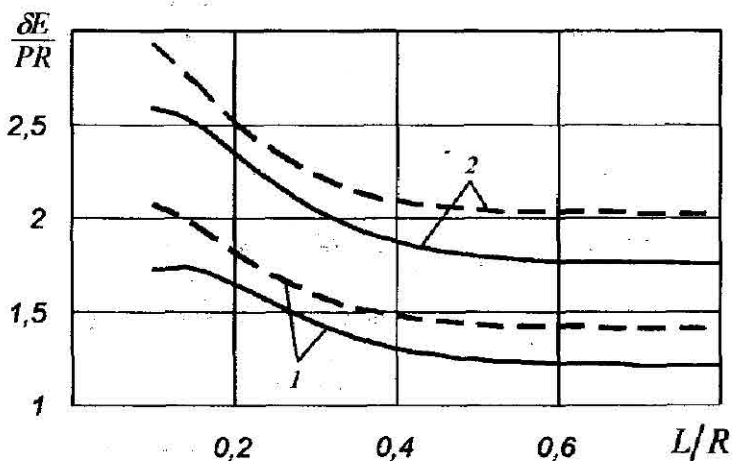


Рис. 1.21. Залежності осьового переміщення поршнів від довжини суцільної частини оболонки:

1 -  $N=6$ ; 2 -  $N=8$

ної частини оболонки призводить до підвищення контакт-ного тиску заповнювача на оболонку, до зменшення ліній-них та кутових переміщень в місцях спряження прорізної та суцільної оболонок та до зниження утримувальної здат-ності контактної системи.

### 1.6 Вплив довжини заповнювача на контактну взаємодію

Розглянемо контактну систему, у якій довжина запов-нювача є меншою від довжини оболонки. Дослідимо вплив довжини заповнювача на основні характеристики оболон-кового демпфера.

Розглядається пружний циліндр радіуса  $R$  та завдов-жки  $2\gamma l$  ( $\gamma \in [0; 1]$ ), який розміщений симетрично віднос-но центрального перерізу прорізної циліндричної оболонки завдовжки  $2l$  та завтовшки  $h$  (рис. 1.22). На торці пружно-го заповнювача через абсолютно жорсткі гладкі поршні пе-редається зовнішнє навантаження  $F$ . Характер контактної взаємодії заповнювача та оболонки визначається законом

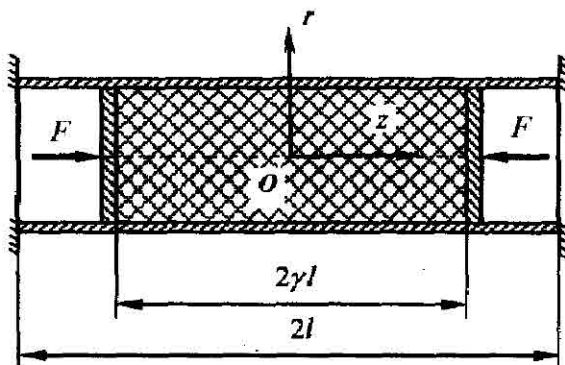


Рис. 1. 22.

сухого тертя. Напружено-деформований стан пружної системи досліджуємо в циліндричній системі координат  $O r \theta z$  з початком в центрі симетрії конструкції.

Запишемо крайові умови на бічній поверхні пружного циліндра:

$$\sigma_r(r=R) = \sigma, \quad \tau_{rz}(r=R) = \tau, \quad z \in [-\gamma l, \gamma l], \quad (1.80)$$

де  $\sigma_r, \tau_{rz}$  – нормальне і дотичне напруження в заповнювачі;  $\sigma, \tau$  – нормальне і дотичне контактні напруження.

Модель заповнювача описується співвідношеннями (1.1) – (1.4).

Рівняння пружної лінії панелі має вигляд

$$\frac{E_c I_x}{l^4} \frac{d^4 w_0}{d\zeta^4} = -\sigma b H(\gamma - |\zeta|), \quad \zeta \in [-1; 1], \quad (1.81)$$

де  $H(\dots)$  – функція Гевісайда.

На торцях заповнювача виконуються умови (1.8).

На поверхні спряження контактуючих тіл враховуємо можливість виникнення зони відлипання між заповнювачем та оболонкою. Запишемо умови одностороннього контакту:

– область проковзування

$$[w] = w - w_0 = 0, \quad \sigma < 0, \quad \zeta \in V'; \quad (1.82)$$

– область відлипання

$$[w] > 0, \quad \sigma = 0, \quad \zeta \in V'', \quad (1.83)$$

де  $[w]$  – стрибок радіальних переміщень між панеллю прорізної оболонки та заповнювачем;  $V' \in [-\gamma, a] \cup [a, \gamma]$ ,  $V'' = (-a, a)$  – зони проковзування та відлипання;  $a$  – невідома безрозмірна координата точок їх розмежування.

Закон тертя Кулона описує взаємодію панелей та пружного заповнювача в зоні проковзування

$$\tau(\zeta) = f\sigma \operatorname{sgn} \zeta, \quad \zeta \in V'. \quad (1.84)$$

Проінтегруємо рівняння рівноваги заповнювача (1.4) з урахуванням крайових умов (1.80). В результаті отримаємо вираз для знаходження нормального осьового напруження у заповнювачі через невідомі контактні напруження:

$$\sigma_{\zeta}(\zeta) = -P + \frac{l}{R} \int_{-r}^{\gamma} \tau(\xi) \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi. \quad (1.85)$$

Вираз для знаходження радіальних переміщень заповнювача буде:

$$w(\zeta) = \frac{R}{E} \left\{ (1 - \nu)\sigma(\zeta) - \nu \left[ -P - \frac{l}{R} \int_{-r}^{\gamma} \tau(\xi) \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right] \right\}. \quad (1.86)$$

Осьову деформацію заповнювача з урахуванням (1.86) знаходимо із співвідношення

$$\varepsilon_{\zeta}(\zeta) = \frac{1}{E} \left[ -p - 2\nu\sigma + \frac{l}{R} \int_{-r}^{\gamma} \tau(\xi) \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right]. \quad (1.87)$$

Вираз для знаходження радіального переміщення оболонки знаходимо з розв'язку диференційного рівняння (1.81) при нульових крайових умовах на лінійні та кутові переміщення торців панелей:

$$w_0(\pm 1) = 0, \quad \frac{dw_0(\pm 1)}{d\zeta} = 0. \quad (1.88)$$

Отож, прогин панелей визначається виразом

$$w_0(\zeta) = -k^4 \int_{-\gamma}^{\gamma} G(\zeta, \xi) \sigma(\xi) d\xi, \quad \zeta \in [-1; 1], \quad (1.89)$$

де  $G(\zeta, \xi)$  – функція Гріна (1.15), а  $k^4 = -\frac{l^4 b}{E_0 J_x}$ .

Прирівнявши радіальні переміщення заповнювача (1.86) та оболонки (1.89) в зоні проковзування за умовою (1.82) та враховуючи закон Кулона (1.32), одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{R}{E} \left\{ (1-\nu)\sigma(\zeta) - \nu \left[ -P - \frac{l}{R} \int_{-\gamma}^{\gamma} \sigma(\xi) \operatorname{sgn} \xi \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right] \right\} = \\ = -k^4 \int_{-\gamma}^{\gamma} G(\zeta, \xi) \sigma(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

За наявності зони відлипання  $T'' = (-a, a)$  отримане співвідношення зводиться до інтегрального рівняння з невідомими межами інтегрування:

$$\sigma(\zeta) + \left( \int_{-\gamma}^{-a} + \int_a^{\gamma} \right) K(\xi, \zeta) \sigma(\xi) d\xi = -\frac{\nu}{1-\nu} P, \quad \zeta \in T''. \quad (1.90)$$

Ядро інтегрального рівняння описується виразом (1.18).

Для знаходження невідомих координат точок розмежування зон проковзування та відлипання використаємо умову рівності нулю контактного тиску в зоні відлипання (1.83).

Розглянемо вплив довжини заповнювача на напружено-деформований стан елементів контактної системи та її основні характеристики. На рис. 1.23 подано розподіл контактного напруження  $\sigma/P$  по довжині оболонки при  $f=0,5$ ;  $l/R=4,0$ ;  $N=6$  для різних довжин заповнювача. Суцільна лінія –  $\gamma=0,75$ , штрихова –  $\gamma=1$ . Із зменшенням довжини заповнювача зростають контактні напруження на поверхні спряження, внаслідок чого зростає радіальний прогин панелей. Це призводить до збільшення радіального переміщення контактної поверхні заповнювача та збільшенню осьового переміщення поршнів. Отже, жорсткість системи повинна зменшуватися.

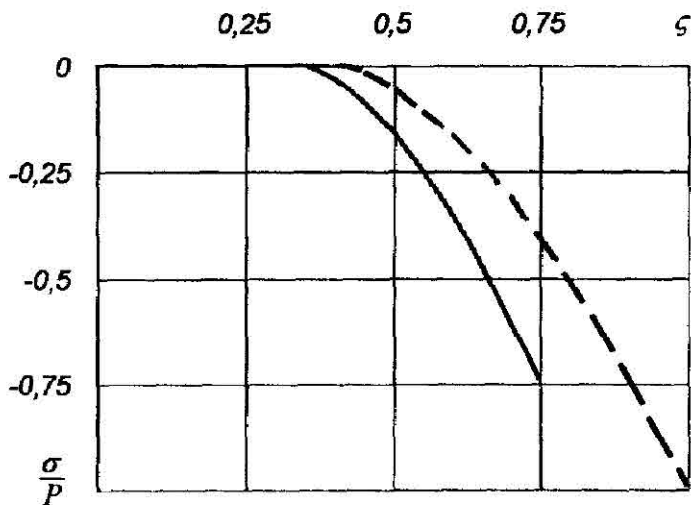


Рис. 1.23. Розподіл контактного напруження по довжині системи

На рис. 1.24 показано залежність осевого переміщення торців заповнювача  $\delta E/PR$  від безрозмірної довжини для різних контактних систем. Позначення кривих аналогічні до попереднього рисунку. Із збільшенням безрозмірної довжини осеві переміщення поршнів ростуть інтенсивніше для контактної системи з меншою довжиною заповнювача. Так при  $l/R=4,0$  податливість системи з коротким заповнювачем ( $\gamma=0,75$ ) збільшується на 35% проти податливості конструкції з однаковими довжинами контактних тіл ( $\gamma=1$ ).

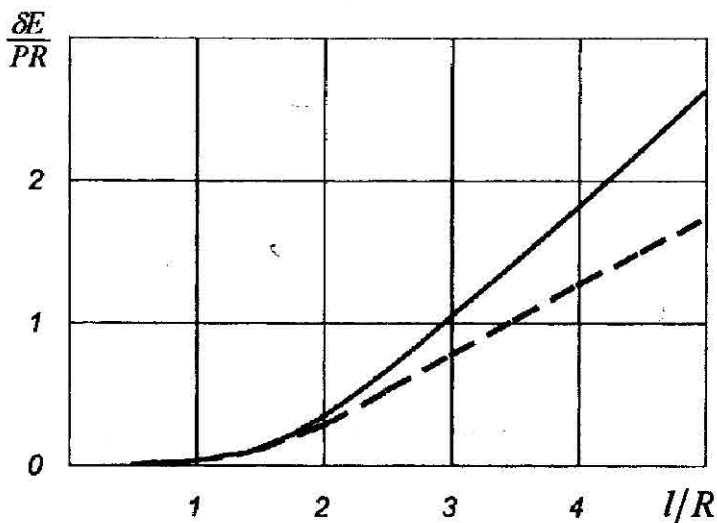
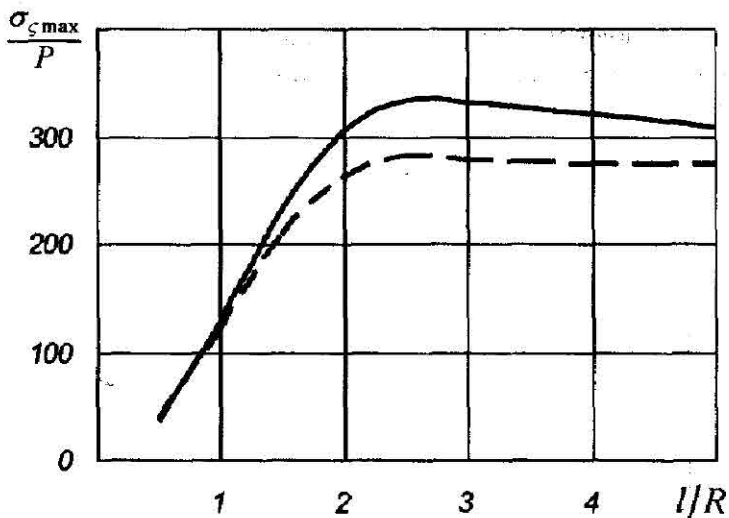


Рис. 1.24. Залежність осадки поршня від довжини оболонки

Розглянемо вплив довжини заповнювача на несучу здатність контактної системи. Розрахунок на міцність проводимо за теорією найбільших нормальних напружень.



Максимальні напруження виникають в торцевих перерізах панелей. На рис. 1.25 подано залежність  $\sigma_{\zeta \max}/P$  від безрозмірної довжини для розглянутих у попередніх випадках контактних систем. Спостерігали збільшення величини  $\sigma_{\zeta \max}$  при зменшенні довжини заповнювача.



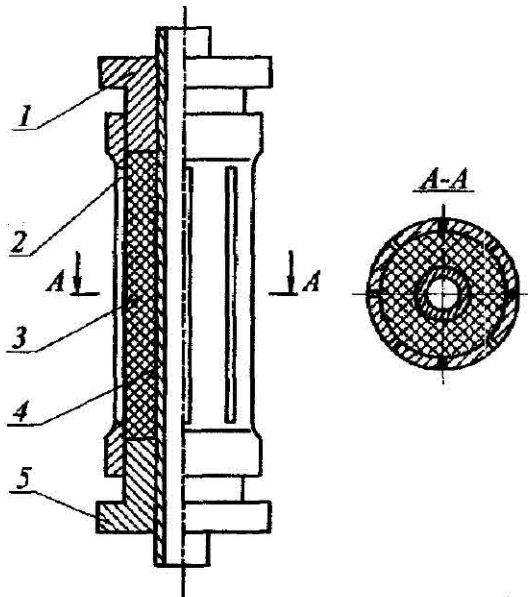
**Рис. 1.25. Залежність максимальних нормальних напружень в оболонці від довжини оболонки**

Підсумуємо отримані результати. В цьому розділі здійснено постановку низки мішаних контактних задач, які моделюють роботу прорізних оболонкових пружних елементів. Проаналізовано вплив механічних, трибологічних та геометричних параметрів взаємодіючих тіл на основні характеристики контактної системи, її міцність та жорсткість.

## РОЗДІЛ 2

### ФРИКЦІЙНИЙ КОНТАКТ СИСТЕМИ КОАКСІАЛЬНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З ПРУЖНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ

Серед оболонкових пружних елементів існують конструкції, які містять внутрішню циліндричну оболонку, необхідну для технологічних потреб (рис. 2.1). Такими, зокрема, є пружні елементи бурових амортизаторів [35, 74], в яких по внутрішній оболонці подається буровий розчин.



**Рис. 2.1.** Оболонкова пружина з прорізами, обладнана стволом (базова конструкція):  
1, 5 – поршні; 2 – оболонка з прорізами; 3 – пружний заповнювач; 4 – ствол

Моделювання роботи таких механічних систем зводиться до постановки задач взаємодії тришарової контактної системи з умовами неідеального контакту шарів.

У роботах [99, 100] запропоновано механіко-математичну модель деформівного заповнювача, з використанням якої здійснено постановку та розв'язано контактну задачу про стиснення заповнювача у встановлених коаксіально суцільних циліндричних оболонках. Використання прорізної оболонки в пружному елементі бурового амортизатора зменшує його жорсткість і тим самим дозволяє розширити діапазон використання віброзахисного пристрою. У цьому розділі проведено дослідження контактної взаємодії деформівного заповнювача з встановленими коаксіально прорізною (зовнішня) та суцільною (внутрішня) циліндричними оболонками.

### 2.1 Постановка та розв'язок контактної задачі

Розглянемо пружний порожнистий циліндр зовнішнього  $R_1$  і внутрішнього  $R_2$  радіусів та завдовжки  $2l$ , який розділяє коаксіально встановлені прорізну (радіуса  $R_1$  і товщини  $h_1$ ) та суцільну (радіуса  $R_2$  і товщини  $h_2$ ) циліндричні оболонки. На торці циліндра (деформівного заповнювача) через абсолютно жорсткі гладкі поршні передається зовнішнє навантаження  $Q$ . Характер контактної взаємодії заповнювача та оболонок визначається законом сухого тертя. Напружено-деформований стан системи досліджуємо в циліндричній системі координат *Ortz* (рис. 2.2).

Приймаючи число розрізів зовнішньої оболонки достатньо великим, вважаємо, що заповнювач перебуває в умовах осесиметричної деформації.

Крайові умови на бічних повернях для пружного циліндра мають вигляд:

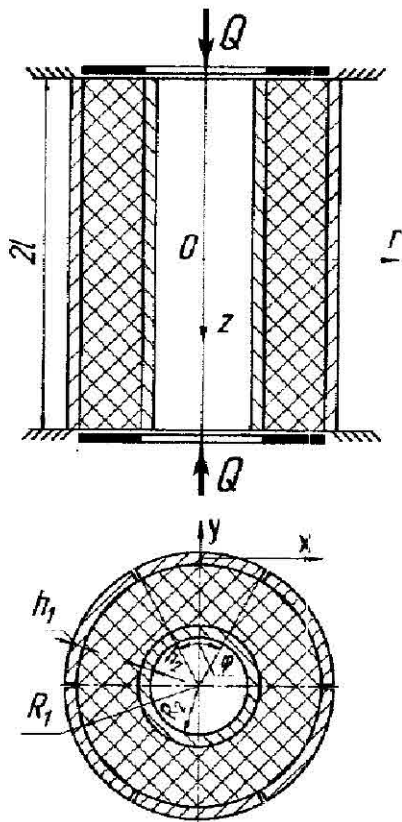


Рис. 2.2

$$\sigma_r(r=R_i)=\sigma_i, \quad \tau_{rz}(r=R_i)=\tau_i, \quad i=1,2, \quad (2.1)$$

де  $\sigma_i, \tau_i$  – нормальні і дотичні контактні напруження;  $\sigma_r, \tau_{rz}$  – нормальні і дотичні напруження у заповнювачі.

Запишемо модельні співвідношення, що визначають напружено-деформований стан заповнювача через контактні напруження на бічних поверхнях. В моделі враховується радіальне обтиснення заповнювача, але ігноруються зсувні деформації.

$$\frac{w_1}{R_1} = \frac{1}{E(R_1^2 - R_2^2)} \left( (R_2^2(1+\nu) + R_1^2(1-\nu))\sigma_1 - 2R_2^2\sigma_2 \right) - \frac{\nu}{E}\sigma_\zeta,$$

$$\frac{w_2}{R_2} = \frac{1}{E(R_1^2 - R_2^2)} \left( 2R_1^2\sigma_1 - (R_1^2(1+\nu) + R_2^2(1-\nu))\sigma_2 \right) - \frac{\nu}{E}\sigma_\zeta;$$
(2.2)

$$\varepsilon_\zeta = \frac{1}{l} \frac{du}{d\zeta} = \frac{1}{E} \left( \sigma_\zeta - \frac{2\nu(\sigma_1 R_1^2 - \sigma_2 R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} \right),$$
(2.3)

$$\frac{d\sigma_\zeta}{d\zeta} + \frac{2l}{R_1^2 - R_2^2} (R_1\tau_1 - R_2\tau_2) = 0,$$
(2.4)

де  $w_i$  – радіальні переміщення контактних тіл на поверхнях  $r = R_i$ ,  $i = 1, 2$ ;  $\sigma_\zeta, \varepsilon_\zeta, u$  – осьові напруження, деформації та переміщення;  $E, \nu$  – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу заповнювача;  $\zeta = z/l \in [-1, 1]$  – безрозмірна осьова координата.

Для опису пружного стану прорізної оболонки використовуємо модель, розглянуту в першому розділі. Відповідно до цієї моделі панелі прорізної оболонки зазнають плоского згину в радіальних площинах. Рівняння, що описує прогин панелі, є аналогічним до співвідношення (1.5) і в позначеннях розглядуваної задачі має вигляд

$$\frac{E_1 J_x}{l^4} \frac{d^4 w^{(1)}}{d\zeta^4} = -\sigma_1 b, \quad \zeta \in [-1, 1]. \quad (2.5)$$

Тут  $w^{(1)}$  – прогин панелі;  $\sigma_1$  – нормальне контактне напруження;  $E_1 J_x = 0,5 E_1 h_1 R_1^3 (\varphi + \sin(\varphi) - 8 \sin^2(\varphi/2) / \varphi)$  – жорсткість панелі на згин;  $b = 2 R_1 \sin(\varphi/2)$  – ширина панелі;  $\varphi = 2\pi/N$ ,  $N$  – кількість розрізів;  $E_1$  – модуль Юнга матеріалу оболонки.

Пружну рівновагу суцільної циліндричної оболонки опишемо співвідношеннями безмоментної теорії [118]:

– рівняння рівноваги

$$\frac{dN_\zeta}{d\zeta} + l \tau_2 = 0, \quad N_\theta = R_2 \sigma_2; \quad (2.6)$$

– фізичні співвідношення (закон Гука)

$$\varepsilon_\zeta^{(2)} = \frac{1}{l} \frac{du_2}{d\zeta} = \frac{1}{E_2 h_2} [N_\zeta - \nu_2 N_\theta], \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_\theta^{(2)} = \frac{w^{(2)}}{R_2} = \frac{1}{E_2 h_2} [N_\theta - \nu_2 N_\zeta]. \quad (2.8)$$

Тут  $N_\zeta, N_\theta$  – мембранні зусилля;  $\sigma_2, \tau_2$  – нормальне та дотичне контактні напруження на зовнішній поверхні суцільної оболонки;  $\varepsilon_\zeta^{(2)}, \varepsilon_\theta^{(2)}, u_2, w^{(2)}$  – осьові та радіальні деформації і переміщення;  $E_2, \nu_2$  – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки.

Фрикційну взаємодію оболонок і заповнювача опишемо співвідношеннями одностороннього нормального контакту, припускаючи, що зони проковзування охоплюють

зони контакту на обидвох поверхнях спряження, а зони зчеплення вироджуються в точки:

$$[w_i] = w^{(i)} - w_i = 0, \quad \sigma_i < 0, \quad \zeta \in [-1; 1]. \quad (2.9)$$

Закон тертя Кулона подаємо у вигляді:

$$\tau_i(\zeta) = (-1)^{(i)} f_i \sigma_i \operatorname{sgn} \zeta, \quad \zeta \in [-1, 1], \quad i = 1, 2, \quad (2.10)$$

де  $[w_i]$  – стрибки радіальних переміщень;  $f_i$  – коефіцієнти тертя між заповнювачем та оболонками на поверхнях спряження  $r = R_i$ .

На торцях заповнювача виконуються умови:

$$\sigma_\zeta(\pm 1) = -P \equiv -\frac{Q}{\pi(R_1^2 - R_2^2)}. \quad (2.11)$$

Запишемо граничні умови для оболонок. Вважаємо, що торці прорізної оболонки жорстко затиснуті:

$$w^{(1)}(\pm 1) = 0, \quad \frac{dw^{(1)}}{d\zeta}(\pm 1) = 0. \quad (2.12)$$

Для внутрішньої оболонки приймаємо

$$N_\zeta(\pm 1) = 0. \quad (2.13)$$

Проінтегрувавши рівняння (2.4) з врахуванням крайових умов (2.11), отримаємо співвідношення для осьового напруження у заповнювачі:

$$\sigma_\zeta = -P - \frac{l}{R_1^2 - R_2^2} \int_{-1}^1 (R_1 \tau_1 + R_2 \tau_2) \operatorname{sgn} \xi \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi. \quad (2.14)$$

Підставивши одержаний вираз у співвідношення (2.2), знайдемо інтегральні подання для радіальних переміщень заповнювача на поверхнях спряження  $r = R_i$ ,  $i = 1, 2$  через невідомі контактні напруження  $\sigma_i, \tau_i$ :

$$\begin{aligned} \frac{w_1}{R_1} &= \frac{1}{E} \left( [r_2^2(1+\nu) + r_1^2(1-\nu)] \sigma_1 - 2r_2^2 \sigma_2 + \nu P + \right. \\ &+ \left. \frac{l}{R_1^2 - R_2^2} \int_{-1}^1 (R_1 \tau_1 + R_2 \tau_2) \operatorname{sgn} \xi \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right), \\ \frac{w_2}{R_2} &= \frac{1}{E} \left( 2r_1^2 \sigma_1 - [r_1^2(1+\nu) + r_2^2(1-\nu)] \sigma_2 + \nu P + \right. \\ &+ \left. \frac{l}{R_1^2 - R_2^2} \int_{-1}^1 (R_1 f_1 \sigma_1(\xi) + R_2 f_2 \sigma_2(\xi)) \operatorname{sgn} \xi \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right), \quad (2.15) \end{aligned}$$

$$\text{де } r_i^2 = \frac{R_i^2}{R_1^2 - R_2^2}.$$

Формулу для знаходження осьової деформації в заповнювачі отримаємо підстановкою (2.14) у співвідношення (2.3):

$$\begin{aligned} \varepsilon_\zeta &= -\frac{1}{E} \left[ 2\nu(\sigma_1 r_1^2 - \sigma_2 r_2^2) + P + \right. \\ &+ \left. \int_{-1}^1 (l_1 f_1 \sigma_1 + l_2 f_2 \sigma_2) \operatorname{sgn} \xi \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right]. \quad (2.16) \end{aligned}$$



$$\text{Тут } l_i = \frac{R_i}{R_1^2 - R_2^2}, \quad i = 1, 2.$$

Перейдемо до знаходження радіальних переміщень у оболонках. Використовуючи результати першого розділу, розв'язок задачі (2.5), (2.12) запишемо у вигляді

$$w^{(1)}(\zeta) = -k^4 \int_{-1}^{\zeta} G(\zeta, \xi) \sigma_1(\xi) d\xi, \quad \zeta \in [-1; 1], \quad (2.17)$$

де  $G(\zeta, \xi)$  – функція Гріна крайової задачі (2.5), (2.12), яка визначається рівнянням (1.14);  $k^4 = l^4 b / E_1 I_x$ .

Визначимо радіальні переміщення внутрішньої оболонки. Для цього спершу проінтегруємо співвідношення (2.6) з урахуванням крайових умов (2.13). В результаті отримаємо рівняння для визначення осьових зусиль у циліндричній оболонці

$$N_\zeta = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 l \tau_2 \operatorname{sgn} \xi \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi. \quad (2.18)$$

Далі, враховуючи співвідношення (2.6) та (2.18), з формули (2.8) отримаємо інтегральне подання для радіального переміщення внутрішньої оболонки:

$$\frac{w^{(2)}}{R_2} = \frac{1}{E_2 h_2} \left[ R_2 \sigma_2 - \frac{\nu_2}{2} \int_{-1}^1 l \sigma_2 \operatorname{sgn} \xi \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right]. \quad (2.19)$$

Формула для визначення радіальної деформації у внутрішній оболонці матиме вигляд:

$$\varepsilon_{\zeta}^{(2)}(\zeta) = -\frac{1}{E_2 h_2} \left[ \nu_2 R_2 \sigma_2 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_2 \sigma_2 \operatorname{sgn} \xi \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right]. \quad (2.20)$$

Прирівняємо радіальні переміщення заповнювача та оболонок на поверхнях спряження згідно з умовами одностороннього контакту (2.9) та з урахуванням закону Кулона (2.10). Одержимо такі співвідношення

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E} \left( [r_2^2(1+\nu) + r_1^2(1-\nu)] \sigma_1 - 2r_2^2 \sigma_2 + \nu P + \right. \\ & \left. + \frac{I}{R_1^2 - R_2^2} \int_{-1}^1 (R_1 f_1 \sigma_1(\xi) + R_2 f_2 \sigma_2(\xi)) \operatorname{sgn} \xi \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right) = \\ & = -k^4 \int_{-1}^1 G(\zeta, \xi) \sigma_1(\xi) d\xi; \\ & \frac{1}{E} \left( 2r_1^2 \sigma_1 - [r_1^2(1+\nu) + r_2^2(1-\nu)] \sigma_2 + \nu P + \right. \\ & \left. + \frac{I}{R_1^2 - R_2^2} \int_{-1}^1 (R_1 f_1 \sigma_1(\xi) + R_2 f_2 \sigma_2(\xi)) \operatorname{sgn} \xi \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right) = \\ & = \frac{1}{E_2 h_2} \left[ R_2 \sigma_2 - \frac{\nu_2}{2} \int_{-1}^1 f_2 \sigma_2 \operatorname{sgn} \xi \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right]. \end{aligned}$$

Після алгебраїчних перетворень отримуємо систему двох інтегральних рівнянь для знаходження невідомих контактних напружень на поверхнях  $r = R_i$ ,  $i = 1, 2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}\sigma_1(\zeta) + a_{12}\sigma_2(\zeta) + \\ + \int_{-1}^1 (K_{11}(\xi, \zeta)\sigma_1(\xi) + K_{12}(\xi, \zeta)\sigma_2(\xi))d\xi = -\frac{\nu P}{1-\nu}; \\ a_{21}\sigma_1(\zeta) + a_{22}\sigma_2(\zeta) + \\ + \int_{-1}^1 (K_{21}(\xi, \zeta)\sigma_1(\xi) + K_{22}(\xi, \zeta)\sigma_2(\xi))d\xi = -\frac{\nu P}{1-\nu}. \end{array} \right. \quad (2.21)$$

Ядра інтегральних рівнянь системи (2.21) подаються формулами:

$$K_{11}(\xi, \zeta) = \frac{\nu}{1-\nu} \frac{IR_1}{R_1^2 - R_2^2} f_1 \operatorname{sgn} \zeta \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) + 4\mu^4 G(\xi, \zeta);$$

$$K_{12}(\xi, \zeta) = \frac{\nu}{1-\nu} \frac{IR_2}{R_1^2 - R_2^2} f_2 \operatorname{sgn} \zeta \operatorname{sgn}(\xi - \zeta);$$

$$K_{21}(\xi, \zeta) = \frac{\nu}{1-\nu} \frac{IR_1}{R_1^2 - R_2^2} f_1 \operatorname{sgn} \zeta \operatorname{sgn}(\xi - \zeta);$$

$$K_{22}(\xi, \zeta) = \left(1 + \frac{\nu_2}{2\nu} \beta_2\right) \frac{\nu}{1-\nu} \frac{IR_2}{R_1^2 - R_2^2} f_2 \operatorname{sgn} \zeta \operatorname{sgn}(\xi - \zeta). \quad (2.22)$$

У співвідношеннях (2.21), (2.22) введено позначення:

$$a_{11} = r_1^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} r_2^2, \quad a_{12} = -\frac{2}{1-\nu} r_2^2,$$

$$a_{21} = \frac{2}{1-\nu} r_1^2, \quad a_{22} = -\left[\frac{1+\nu}{1-\nu} r_1^2 + r_2^2 + \frac{1}{1-\nu} \beta_1\right];$$

$$\beta_1 = \frac{ER_2}{E_2 h_2}, \quad \beta_2 = \frac{EI}{E_2 h_2 I_2}; \quad 4\mu^4 = \frac{1}{1-\nu} \frac{R_1^3 b E}{I_x E_1}.$$

Розв'язок системи інтегральних рівнянь (2.21) побудовано числово. Для апроксимації інтегралів використали формулу трапецій з рівномірною сіткою вузлів. За вузли приймаємо точки

$$\zeta_i = -1 + (i-1)g, \quad i = \overline{1, n},$$

де  $g = 2/(n-1)$  – сталий крок інтегрування,  $n$  – кількість вузлів в методі квадратур.

Отож, замінюючи інтеграли скінченними сумами, одержимо лінійну систему алгебраїчних рівнянь відносно вузлових значень контактних напружень

$$\begin{cases} a_{11}\sigma_i^{(1)} + a_{12}\sigma_i^{(2)} + g \sum_{j=1}^n B_j (K_{ij}^{11}\sigma_j^{(1)} + K_{ij}^{12}\sigma_j^{(2)}) = C_j; \\ a_{21}\sigma_i^{(1)} + a_{22}\sigma_i^{(2)} + g \sum_{j=1}^n B_j (K_{ij}^{21}\sigma_j^{(1)} + K_{ij}^{22}\sigma_j^{(2)}) = C_j, \end{cases} \quad (2.23)$$

де  $\sigma_i^{(1)} = \sigma_1(\zeta_i)$ ,  $\sigma_i^{(2)} = \sigma_2(\zeta_i)$ ,  $\xi_i = -1 + (i-1)g$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ;  
 $K_{ij}^{ml}(\xi, \zeta) = K_{ml}(\xi_i, \zeta_j)$ ,  $m, l = 1, 2$ ;

$$C_j = -\frac{\nu}{1-\nu} P; \quad B_j = \begin{cases} 0,5 & \text{при } j=1, j=n; \\ 0 & \text{при } j \neq 1, j \neq n. \end{cases}$$

Систему рівнянь (2.23) зводимо до вигляду:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n (A_{ij}^{11}\sigma_j^{(1)} + A_{ij}^{12}\sigma_j^{(2)}) = C_j; \\ \sum_{j=1}^n (A_{ij}^{21}\sigma_j^{(1)} + A_{ij}^{22}\sigma_j^{(2)}) = C_j, \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\text{де } A_{ij}^{ml} = \begin{cases} a_{ml} + K_{ij}^{ml} B_j g, & j = i \\ K_{ij}^{ml} B_j g, & j \neq i, \end{cases} \quad m, l = 1, 2; \quad i = \overline{1, n}.$$

Введемо позначення

$$A_{ij}^{11} = D_{2i-1, 2j-1}, \quad A_{ij}^{12} = D_{2i-1, 2j},$$

$$A_{ij}^{21} = D_{2i, 2j-1}, \quad A_{ij}^{22} = D_{2i, 2j},$$

$$\sigma_i^{(1)} = s_{2i-1}, \quad \sigma_i^{(2)} = s_{2i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Система рівнянь (2.24) в нових позначеннях матиме структуру:

$$\sum_{j=1}^{2n} D_{ij} s_j = C_j, \quad i = \overline{1, 2n}. \quad (2.25)$$

Для розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (2.25) застосовано метод Гауса з виділенням головного елемента.

В результаті розв'язку отримаємо вектор, непарні компоненти якого відповідатимуть значенням контактного напруження у вузлових точках для зовнішньої прорізної оболонки, а парні – для внутрішньої (суцільної) оболонки:

$$\sigma_k^{(1)} = s_{2k-1}, \quad \sigma_k^{(2)} = s_{2k}. \quad (2.26)$$

За допомогою числових значень контактного напруження можна визначити усі характеристики напружено-деформованого стану системи. Запишемо формули для визначення характеристик розглядуваної системи через контактні напруження на бічних поверхнях заповнювача.

Осьове переміщення деформівного заповнювача знайдемо, проінтегрувавши вираз (2.14) з врахуванням парності осьової деформації. У результаті

$$u(\zeta) = -\frac{l}{2E} \left[ \int_{-1}^1 (P + 2\nu(\sigma_1(\xi)r_1^2 - \sigma_2(\xi)r_2^2)) \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{2l}{R_1^2 - R_2^2} \int_{-1}^1 (R_1 f_1 \sigma_1(\xi) + R_2 f_2 \sigma_2(\xi)) \operatorname{sgn} \xi |\xi - \zeta| d\xi \right]. \quad (2.27)$$

Жорсткість контактної системи визначається величиною осьового переміщення поршня під дією зовнішнього навантаження. Осадка поршнів дорівнює переміщенню торцевого перерізу заповнювача і знаходиться за формулою

$$\delta = -\frac{l}{2E} \left[ \int_{-1}^1 (P + 2\nu(\sigma_1(\xi)r_1^2 - \sigma_2(\xi)r_2^2)) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{2l}{R_1^2 - R_2^2} \int_{-1}^1 (R_1 f_1 \sigma_1(\xi) + R_2 f_2 \sigma_2(\xi)) \operatorname{sgn} \xi (1 + \xi) d\xi \right]. \quad (2.28)$$

Міцність механічної системи в цілому визначається утримувальною здатністю прорізної оболонки. Розрахунок на міцність здійснюємо за нормальними напруженнями, що виникають в панелях прорізної оболонки від дії згинального моменту, за формулою (1.22). Величину згинального моменту визначаємо з диференціальних залежностей (1.21):

$$M(\zeta) = -4\mu^4(1-\nu) \frac{E_1}{E} \frac{R_1 I_x}{l^3} \int_{-1}^1 G_2(\zeta, \xi) \sigma_1(\xi) d\xi, \quad \zeta \in [-1; 1]. \quad (2.29)$$

Тут  $G_2(\zeta, \xi)$  така, як у формулі (1.23).

Розрахунки виконано для оболонкових систем з параметрами:  $E/E_1 = E/E_2 = 0,0001$ ;  $R_2/R_1 = 0,5$ ;  $h_1/R_1 = 0,1$ ;  $h_2/R_1 = 0,04$ ;  $\nu = 0,499$ ;  $\nu_2 = 0,3$ ;  $f_i = 0,3$ . Розглянуті числові значення параметрів відповідають реальним характеристикам конструкцій пружних елементів бурових амортизаторів. При числових розрахунках в методі квадратур використано розбиття з 41 вузлом.

В табл. 2.1 наведено значення контактного тиску  $q_i = -\sigma_i/P$ ,  $i=1, 2$  на поверхнях спряження у вузлових точках. Число розрізів у прорізній оболонці  $N = 6, 7$ ; безрозмірна довжина системи  $l/R_1 = 2,5$ . Як видно із таблиці, контактний тиск заповнювача на зовнішню (прорізну) оболонку більший від тиску на внутрішню оболонку для всіх розглянутих значень параметрів системи. Знаючи розподіл контактного тиску на поверхнях спряження, визначаємо необхідні характеристики конструкції.

Проілюструємо одержані числові результати.

Зважаючи на симетрію задачі, залежності від координати подаємо на проміжку  $[0; 1]$ .

На рис. 2.3 зображено розподіл контактного тиску  $q_1 = -\sigma_1/P$  по довжині оболонки для різної кількості розрізів при  $l/R_1 = 2,5$ ;  $f_i = 0,3$ . У зв'язку з тим, що значення контактних напружень на внутрішній та зовнішній оболонках близькі одне до одного, на рисунку зображено тільки величину  $q_1$ . Максимального значення контактний тиск досягає в площині торців заповнювача, зменшуючись до площини симетрії системи.

Таблиця 2.1 – Значення контактних напружень  
у вузлових точках

Координата вузлової точки	Число розрізів оболонки			
	$N = 6$		$N = 7$	
$\zeta$	$\sigma_1/P$	$\sigma_2/P$	$\sigma_1/P$	$\sigma_2/P$
0	-0.0398	-0.0233	-0.0085	-0.0015
0.05	-0.0429	-0.0264	-0.0274	-0.0028
0.1	-0.0499	-0.0336	-0.0319	-0.0041
0.15	-0.0587	-0.0427	-0.0384	-0.0055
0.2	-0.0695	-0.054	-0.0473	-0.0153
0.25	-0.0827	-0.0678	-0.0589	-0.0281
0.3	-0.0987	-0.0845	-0.0735	-0.0442
0.35	-0.1178	-0.1044	-0.0918	-0.0641
0.4	-0.1406	-0.1282	-0.1141	-0.0884
0.45	-0.1675	-0.1562	-0.1412	-0.1176
0.5	-0.1993	-0.1891	-0.1736	-0.1523
0.55	-0.2366	-0.2276	-0.2122	-0.1933
0.6	-0.2803	-0.2724	-0.2576	-0.2413
0.65	-0.3311	-0.3245	-0.3108	-0.2972
0.7	-0.3902	-0.3849	-0.3729	-0.3618
0.75	-0.4588	-0.4546	-0.4447	-0.4362
0.8	-0.538	-0.535	-0.5276	-0.5215
0.85	-0.6295	-0.6274	-0.6227	-0.6187
0.9	-0.7348	-0.7335	-0.7314	-0.7291
0.95	-0.8559	-0.855	-0.8538	-0.8538
1	-0.9949	-0.9941	-0.9941	-0.9941



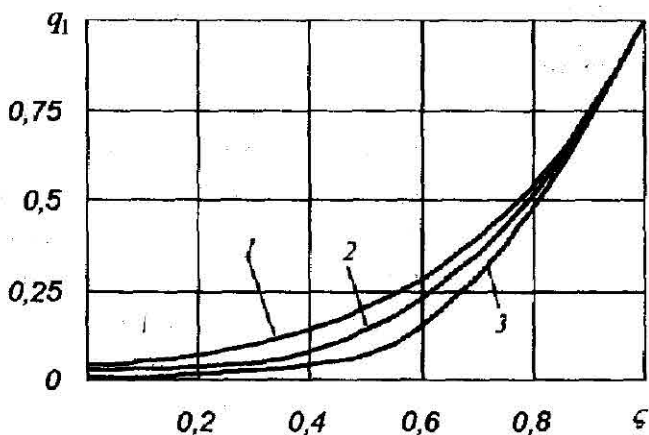


Рис. 2.3. Розподіл контактної тиску між заповнювачем та прорізною оболонкою:  
 1 -  $N=6$ ; 2 -  $N=7$ ; 3 -  $N=8$

Податливість механічної системи ілюструють криві на рис. 2.4. Тут зображено залежність переміщення поршня  $\delta E / PR_0$  від безрозмірної довжини, підрахованого за формулою (2.28). Збільшення коефіцієнта тертя та зменшення числа розрізів призводить до зниження податливості контактної системи.

Розподіл радіальних переміщень панелей по довжині конструкції для різної кількості розрізів прорізної оболонки показано на рис. 2.5. Відзначимо зменшення радіальних переміщень прорізної оболонки в розглянутій системі у порівнянні з прогинами такої ж за розмірами контактної системи за відсутності в ній внутрішньої оболонки.

Максимальний згинальний момент у прорізній оболонці виникає в закріпленні панелей. Рис. 2.6 описує мак-

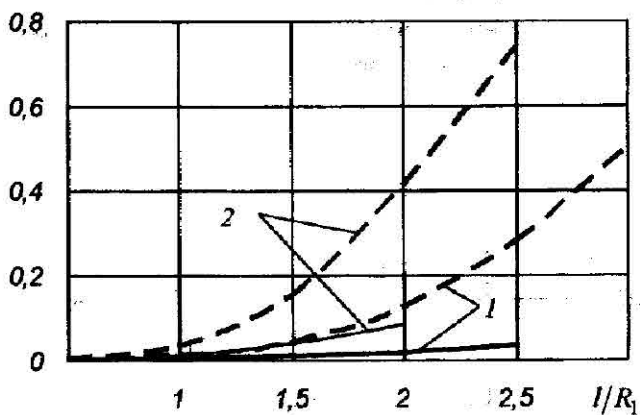


Рис. 2.4. Залежність осевого переміщення поршнів від довжини конструкції:  
 1 -  $N=6$ ; 2 -  $N=8$

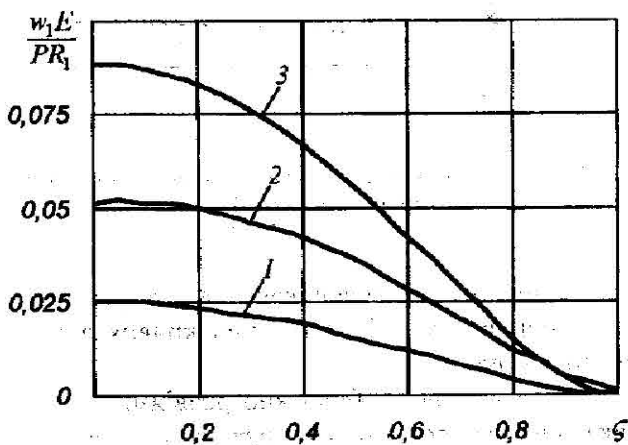


Рис. 2.5. Розподіл радіального прогину панелей прорізної оболонки по довжині системи:  
 1 -  $N=6$ ; 2 -  $N=7$ ; 3 -  $N=8$

симальні нормальні напруження у прорізній оболонці, залежні від довжини пружного елемента. Штриховими лініями позначено випадок проковзування при  $f = 0,1$ , суцільними – при  $f = 0,5$ .

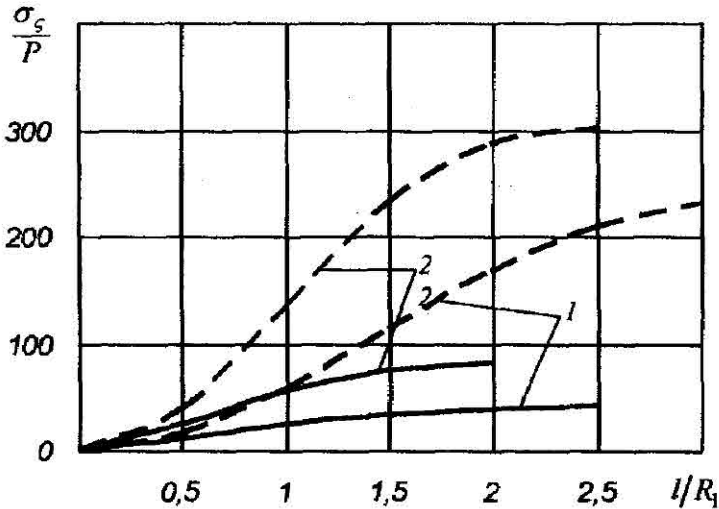
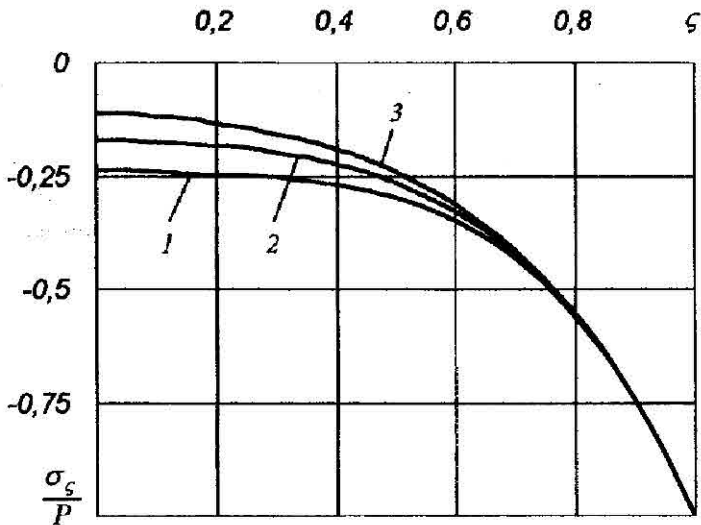


Рис. 2.6. Залежність максимальних нормальних напружень в прорізній оболонці від довжини системи: 1 –  $N = 6$ ; 2 –  $N = 8$

Напружений стан заповнювача характеризують графіки, зображені на рис. 2.7. Нумерація кривих аналогічна до прийнятої на рис. 2.3.

У цьому параграфі побудовано розв'язок контактної задачі, яка виникає при стиску пружного заповнювача в системі встановлених коаксіально прорізної та суцільної циліндричних оболонок.



**Рис. 2.7. Розподіл осевих напружень в заповнювачі**

Встановлено відсутність ділянок зчеплення на обидвох контактуючих поверхнях. З'ясовано, що при збільшенні довжини заповнювача, кількості розрізів та коефіцієнтів тертя на поверхнях спряження можуть виникати зони відлипання. За наявності відлипання хоча б на одній поверхні контакту постановка задачі стає некоректною. Порушення умов одностороннього контакту при певних характеристиках конструкції не дозволяє визначити напружено-деформований стан елементів механічної системи для ширшого діапазону параметрів. У наступному параграфі розглянуто математичну модель фрикційної взаємодії, що ви-

никає при стиску заповнювача в системі коаксіальних оболонок з урахуванням явища відлипання на обидвох поверхнях контакту:

## 2.2 Змішана задача фрикційного контакту коаксіально встановлених оболонок з пружним заповнювачем

Розглядаємо оболонкову систему, яка складається із встановлених коаксіально прорізної та суцільної циліндричних оболонок, розділених деформівним заповнювачем (рис. 2.2). Контактну задачу досліджуємо в циліндричній системі координат  $O r \theta z$ .

Крайові умови на бічних поверхнях для пружного циліндра мають вигляд

$$\sigma_r(r = R_i) = \sigma_i, \quad \tau_{rz}(r = R_i) = \tau_i, \quad \zeta \in T_i', \quad (2.30)$$

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad \zeta \in T_i'', \quad i = 1, 2.$$

Тут  $\sigma_i, \tau_i$  – нормальні і дотичні контактні напруження;  $\sigma_r, \tau_{rz}$  – нормальні і дотичні напруження у заповнювачі;  $T_i' = [-1, a_i] \cup [a_i, 1]$ ,  $T_i'' = (-a_i, a_i)$  – області проковзування та відлипання;  $a_i$  – невідомі точки розмежування зон проковзування та відлипання;  $\zeta = z/l \in [-1, 1]$  – безрозмірна осьова координата.

Для опису пружного стану деформівного заповнювача при його стиску поршнями використовуємо співвідношення (2.2) – (2.5). Области спряження заповнювача та оболонок розбиваємо на зони контакту та відлипання. Умови взаємодії запишемо в розширеній формі окремо для кожної ділянки:

– зони проковзування

$$[w_i] = w^{(i)} - w_i = 0, \quad \sigma_i < 0, \quad \zeta \in T_i'; \quad (2.31)$$

– зони відлипання

$$[w_i] > 0, \quad \sigma_i = 0, \quad \zeta \in T_i'', \quad i = 1, 2.$$

Тут  $[w_i]$  – стрибки переміщень;  $w^{(i)}$ ,  $w_i$  – радіальні переміщення контактуючих поверхонь прорізної оболонки та заповнювача.

Закон тертя Кулона виконується в областях проковзування. Записуємо його для обидвох поверхонь контакту:

$$\tau_i(\zeta) = (-1)^{(i)} f_i \sigma_i \operatorname{sgn} \zeta, \quad \zeta \in T_i', \quad i = 1, 2. \quad (2.32)$$

Тут  $f_i$  – коефіцієнти тертя на поверхнях  $r = R_i$ .

Радіальні переміщення заповнювача визначаються через контактні напруження співвідношеннями

$$\frac{w_1}{R_1} = \frac{1}{E} \left( [r_2^2(1+\nu) + r_1^2(1-\nu)] \sigma_1^* - 2r_2^2 \sigma_2^* + \nu r_1^2 \sigma_1^* + \right. \\ \left. + \frac{I}{R_1^2 - R_2^2} \int_{-1}^1 (R_1 f_1 \sigma_1^*(\xi) + R_2 f_2 \sigma_2^*(\xi)) \operatorname{sgn} \xi \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right); \quad (2.33)$$

$$\frac{w_2}{R_2} = \frac{1}{E} \left( 2r_1^2 \sigma_1^* - [r_1^2(1+\nu) + r_2^2(1-\nu)] \sigma_2^* + \nu r_2^2 \sigma_2^* + \right. \\ \left. + \frac{I}{R_1^2 - R_2^2} \int_{-1}^1 (R_1 f_1 \sigma_1^*(\xi) + R_2 f_2 \sigma_2^*(\xi)) \operatorname{sgn} \xi \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right).$$

$$\text{Тут } \sigma_i^* = \begin{cases} \sigma_i, & \zeta \in T_i'; \\ 0, & \zeta \in T_i''. \end{cases}$$

Радіальний прогин панелей прорізної оболонки визначається виразом (1.14):

$$w^{(1)}(\zeta) = -k^4 \int_{-1}^1 G(\zeta, \xi) \sigma_1^*(\xi) d\xi, \quad \zeta \in [-1, 1]. \quad (2.34)$$

Тут параметр  $k^4$  та функція  $G(\zeta, \xi)$  визначаються співвідношеннями (2.16).

Радіальні переміщення внутрішньої оболонки знаходимо за формулою:

$$w^{(2)} = \frac{R_2}{E_2 h_2} \left( R_2 \sigma_2 - \frac{\nu_2}{2} \int_{-1}^1 f_2 \sigma_2^* \operatorname{sgn} \xi \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right), \quad \zeta \in [-1, 1]. \quad (2.35)$$

Прирівнюючи радіальні переміщення заповнювача та оболонок в зонах проковзування відповідно до умов одностороннього контакту (2.31) та враховуючи закон Кулона (2.32), дістанемо систему двох інтегральних рівнянь для знаходження невідомих контактних напружень:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \sigma_1(\zeta) + a_{12} \sigma_2(\zeta) + \\ + \int_T (K_{11}(\xi, \zeta) \sigma_1(\xi) + K_{12}(\xi, \zeta) \sigma_2(\xi)) d\xi = -\frac{\nu}{1-\nu} P; \\ a_{21} \sigma_1(\zeta) + a_{22} \sigma_2(\zeta) + \\ + \int_T (K_{21}(\xi, \zeta) \sigma_1(\xi) + K_{22}(\xi, \zeta) \sigma_2(\xi)) d\xi = -\frac{\nu}{1-\nu} P. \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Умовні позначення, використані в співвідношеннях (2.36), відповідають позначенням в формулі (2.21). Межі інтегрування в рівняннях є невідомими.

Невідомі координати точок розмежування областей проковзування та відлипання оболонок і заповнювача знаходимо з умов контактної взаємодії (2.31), відповідно контактні напруження на краях зони відлипання рівні нулю

$$\sigma_i(\pm a_i) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.37)$$

Таким чином, отримано замкнуту систему рівнянь (2.36), (2.37).

При розв'язанні системи інтегральних рівнянь використовуємо метод послідовних наближень масиву вузлових значень контактних напружень і невідомих координат точок розмежування зон проковзування та відлипання до значень, що задовольняють систему. Розглянемо процес знаходження розв'язку системи (2.36), (2.37).

На першому кроці використовуємо розв'язок системи рівнянь (2.21), отриманий для даної механічної системи без врахування зони відлипання на проміжку  $[-1; 1]$ . За умовою (2.37), знаходимо ті точки на поверхнях спряження заповнювача з оболонками  $\zeta_{1k}$ ,  $\zeta_{1k'}$ ,  $\zeta_{2m}$ ,  $\zeta_{2m'}$  (враховуючи симетрію задачі, їх є чотири), в яких значення контактних тисків змінюють знак на протилежний

$$\sigma_1(\zeta_k) > 0, \quad \sigma_1(\zeta_{k'}) > 0, \quad k = \overline{1, n}; \quad (2.38)$$

$$\sigma_2(\zeta_m) > 0, \quad \sigma_2(\zeta_{m'}) > 0, \quad m = \overline{1, n}.$$

Тут  $k' = n - k + 1$ ,  $m' = n - m + 1$ .

Будуємо систему лінійних рівнянь розмірності  $2(k + m)$ :



$$\sum_{j=1}^{2(k+m)} \tilde{A}_{ij} \tilde{\sigma}_j = C_i, \quad i = \overline{1, 2k+2m}, \quad (2.39)$$

елементи якої знаходяться за формулами

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{cases} A_{lm}, i \leq k, j \leq k; \\ A_{l, n-(k-m)}, i \leq k, j > k; \\ A_{n-(k-l), m}, i > k, j < k; \\ A_{n-(k-l), n-(k-m)}, i > k, j > k. \end{cases} \quad (2.40)$$

Отриманий після знаходження розв'язку системи (2.39) масив значень контактних напружень перевіряємо за умовами (2.38). При одержанні додатних значень контактного напруження хоча б на одній контактній поверхні ітераційний процес повторюється. Після знаходження розв'язку системи (2.39), при якому відсутні додатні контактні напруження, обчислювальний процес зупиняється. Результат одержуємо у такому вигляді

$$\sigma_1^* = \begin{cases} \sigma_1, & \zeta \in [-1, \zeta_{k(l)}) \cup (\zeta_{k'(l)}, 1]; \\ 0, & \zeta \in [\zeta_{k(l)}, \zeta_{k'(l)}] \end{cases};$$

$$\sigma_2^* = \begin{cases} \sigma_2, & \zeta \in [-1, \zeta_{m(l)}) \cup (\zeta_{m'(l)}, 1]; \\ 0, & \zeta \in [\zeta_{m(l)}, \zeta_{m'(l)}] \end{cases} \quad (2.41)$$

Тут  $l$  – номер ітераційного наближення.

При числових розрахунках використано рівномірне розбиття з 41 вузлом. Розрахунки виконано для оболонкових систем з параметрами:  $E/E_1 = E/E_2 = 0,0001$ ;  $\nu = 0,499$ ;  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ;  $R_2/R_1 = 0,5$ ;  $h_1/R_1 = 0,1$ ;  $h_2/R_1 = 0,04$  та різними значеннями числа розрізів оболонки, довжини, коефіцієнта тертя.

Тестування програми проводили для випадків, коли розв'язок системи рівнянь (2.36) можна знайти в аналітичній формі (випадок абсолютно жорстких оболонок) та порівнянням результатів при подвоєнні кількості вузлів в методі квадратур.

На рис. 2.8, 2.9 зображено розподіл контактних напружень  $\sigma_1/P$  та  $\tau_1/P$  по довжині оболонки для різної кількості розрізів при  $l/R_1 = 5,0$ ;  $f = 0,3$ . У зв'язку з тим, що контактні напруження на внутрішній та зовнішній оболонках близькі за значеннями, розподіл контактної тиску на внутрішній оболонці не наводимо. При збільшенні кількості розрізів оболонки зони відлипання розширюються. Відлипання заповнювача на внутрішній поверхні контакту відбувається швидше, ніж на зовнішній. Ширина області відлипання заповнювача з внутрішньою (суцільною) оболонкою є більшою від зони відлипання на прорізній оболонці.

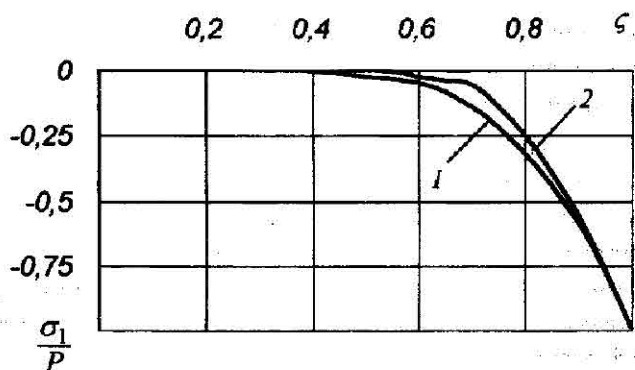


Рис. 2.8. Розподіл нормальних контактних напружень: 1 –  $N = 6$ ; 2 –  $N = 8$

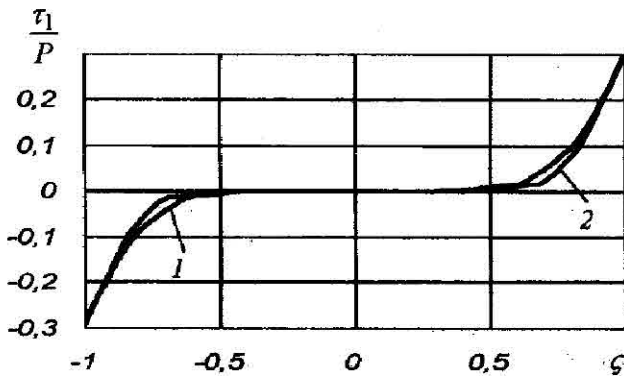


Рис. 2.9. Розподіл дотичних контактних напружень: 1 –  $N = 6$ ; 2 –  $N = 8$

На рис. 2.10 зображено графіки розподілу по довжині оболонки прогинів панелей прорізної оболонки  $w^{(1)}E/PR$  та радіального переміщення зовнішньої контактної поверхні деформівного заповнювача  $w_1E/PR$ , які побудовані з використанням співвідношень (2.15), (2.16). Штриховими лініями позначено переміщення заповнювача, суцільними – прогин прорізної оболонки ( $l/R_1 = 4,0$ ;  $f_1 = f_2 = 0,3$ ). Не-велика жорсткість панелей на згин порівняно з аналогічними за розмірами суцільними циліндричними оболонками та значний контактний тиск на краю панелі зумовлює значні радіальні переміщення точок прорізної оболонки. За своєю конструктивною побудовою прорізна оболонка має максимальний прогин посередині системи. При збільшенні кількості розрізів у прорізній оболонці зменшується жорсткість панелей на згин, в результаті чого зростають і їх радіальні переміщення. Значний прогин панелей прорізної

оболонки і зумовлює появу зони відлипання на поверхні  
спряження.

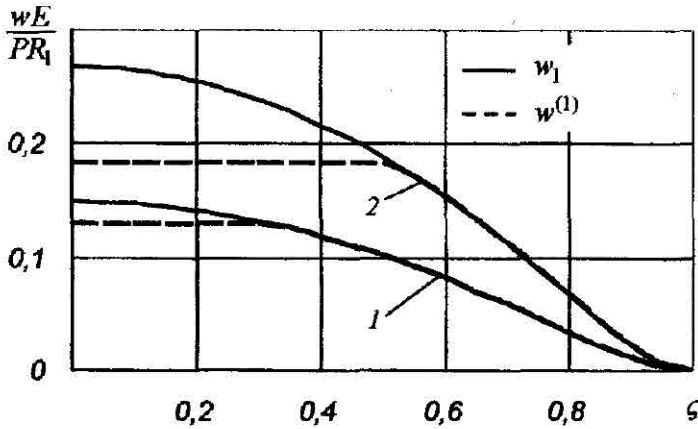


Рис. 2.10. Розподіл радіальних переміщень  
прорізної оболонки та заповнювача:  
1 -  $N=6$ ; 2 -  $N=8$

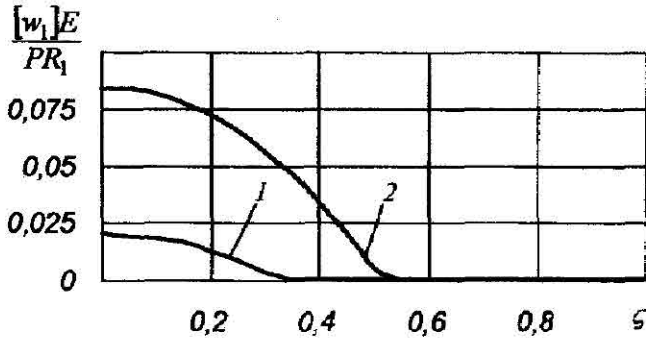


Рис. 2.11. Розподіл стрибка радіальних переміщень  
на поверхні спряження заповнювач – прорізна оболонка:  
1 -  $N=6$ ; 2 -  $N=8$

На рис. 2.11 зображено графіки розподілу по довжині контактної системи стрибка радіальних переміщень між прорізною оболонкою та заповнювачем, величина якого знаходяться за формулою

$$[w_1](\zeta) = \frac{R}{E} \left[ \left( r_1^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} r_2^2 \right) \sigma_1(\zeta) - \frac{1+\nu}{1-\nu} r_2^2 \sigma_2(\zeta) + \frac{\nu}{1-\nu} P \right] + \frac{R}{E} \int_{-1}^1 (K_{11}(\xi, \zeta) \sigma_1(\xi) + K_{12}(\xi, \zeta) \sigma_2(\xi)) d\xi, \quad (2.42)$$

де  $K_{11}(\xi, \zeta)$ ,  $K_{12}(\xi, \zeta)$  визначаються співвідношеннями (2.22).

Із збільшенням числа розрізів в оболонці зростає не тільки ширина зони відлипання, а і величина стрибка радіальних переміщень прорізної оболонки з заповнювачем. Ширина зони відлипання та величина стрибка залежать і від пружних властивостей контактних тіл та їх трибологічних характеристик.

На рис. 2.12 зображено графіки розподілу по довжині пружного елемента стрибка радіальних переміщень між заповнювачем та суцільною оболонкою, значення якого знаходяться за формулою

$$[w_2](\zeta) = \frac{R_2}{E} \left( \frac{2}{1-\nu} r_1^2 \sigma_1(\zeta) - \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} r_1^2 + r_2^2 + \frac{1}{1-\nu} \frac{ER_2}{E_2 h_2} \right) \sigma_2(\zeta) + \frac{\nu}{1-\nu} P \right) + \frac{R_2}{E} \int_{-1}^1 (K_{21}(\xi, \zeta) \sigma_1(\xi) + K_{22}(\xi, \zeta) \sigma_2(\xi)) d\xi. \quad (2.43)$$

Тут  $K_{21}(\xi, \zeta)$ ,  $K_{22}(\xi, \zeta)$  – визначаються співвідношеннями (2.22).

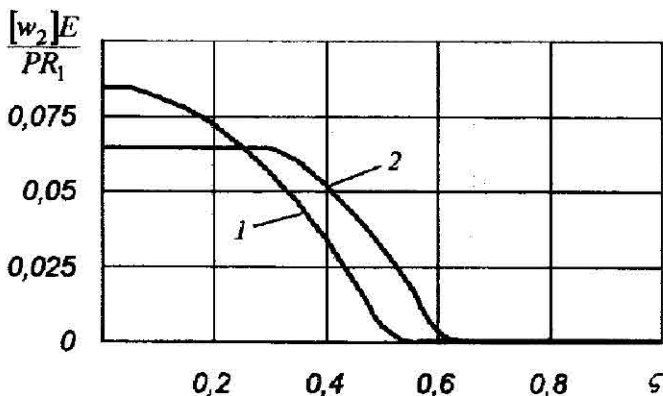


Рис. 2.12. Розподіл стрибка радіальних переміщень на поверхні сприяння заповнювач – суцільна оболонка:  
1 –  $N = 6$ ; 2 –  $N = 8$

При збільшенні кількості розрізів ширина зони відлипання на внутрішній контактній поверхні збільшується, але, на відміну від стрибка на зовнішній поверхні сприяння, в даному випадку зменшується величина  $[w_2]$ .

Податливість механічної системи ілюструють криві, зображені на рис. 2.13. Тут зображено величину осьового переміщення поршня  $\delta$  від безрозмірної довжини, що знаходиться із співвідношення (2.28). Параметри контактної системи попередні. При невеликих довжинах бачимо майже лінійну залежність осадки поршня від довжини елемента. Зі збільшенням довжини контактної системи податливість пружного елемента стабілізується.

На рис. 2.14 показано залежність максимальних напружень розтягу, які виникають в затисненні панелей прорізної оболонки  $\sigma_{\zeta \max} / P$ , від безрозмірної довжини. Криві побудовано з використанням співвідношення

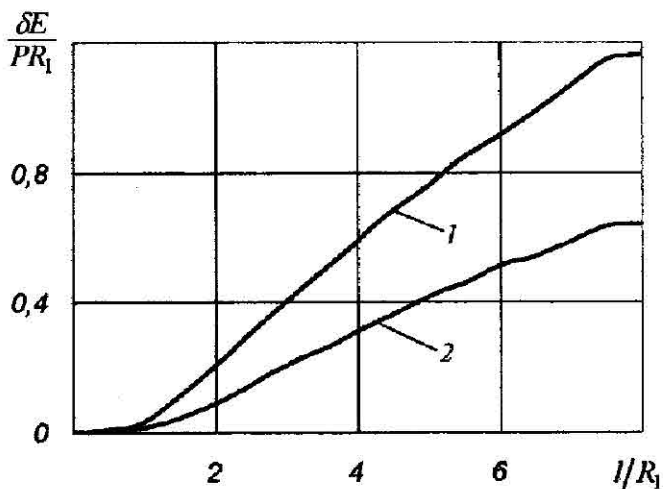


Рис. 2.13. Залежність осадки поршня від довжини заповнювача: 1 –  $N=6$ ; 2 –  $N=8$

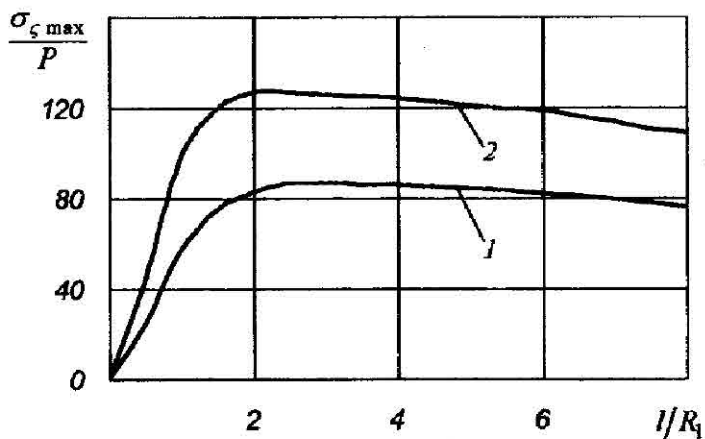


Рис. 2.14. Залежність максимальних нормальних напружень в прорізній оболонці від довжини: 1 –  $N=6$ ; 2 –  $N=8$

$$\sigma_{\zeta \max} = -4\mu^4(1-\nu) \frac{E_1 R_1 I_x}{E I^3 W_x} \times$$

$$\times \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi^3) \right) \sigma(\xi) d\xi, \quad \zeta \in [-1, 1]. \quad (2.44)$$

Необхідно відзначити зменшення нормальних напружень в торцевих перерізах прорізної оболонки.

Таким чином, тут здійснено постановку та розв'язано конструктивно нелінійну змішану контактну задачу, яка виникає при стиску деформівного заповнювача в системі коаксіально встановлених оболонок з урахуванням зон відлипання. Досліджено вплив фізичних, геометричних та трибологічних параметрів на напружено-деформований стан елементів контактної системи.



## РОЗДІЛ 3

### МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ ДЕМПФЕРА З РОЗРІЗАНОЮ ЦИЛІНДРИЧНОЮ ОБОЛОНКОЮ

Серед представників нового класу засобів віброзахисту – оболонкових пружин, – сформовано окрему групу конструкцій на базі оболонок розімкнутого профілю. Таке виконання конструктивно анізотропних робочих ланок дає можливість використати ефект згинальної деформації розімкнутих оболонок у їхньому контакті з пружним заповнювачем. У цих оболонкових пружинах підвищена податливість поєднується із необхідним рівнем розсіювання енергії, що зумовило їх вдале використання у промисловості [8–10, 23, 24, 90, 93–95]. Тож задача про розрахунок демпфера з розрізаною циліндричною оболонкою має передусім прикладне значення. Розроблена тут теорія орієнтована на більш раціональну експлуатацію уже існуючих конструкцій та на розробку нових технічних рішень з використанням прорізанних оболонок.

#### 3.1 Контактна взаємодія ортотропної циліндричної оболонки з деформівним заповнювачем

У даному параграфі сформульовано та розв'язано контактну задачу про фрикційну взаємодію ортотропної циліндричної оболонки з деформівним заповнювачем. Отримані результати потрібні для теоретичного розгляду поведінки демпфера з розрізаною по твірній циліндричною оболонкою як системи з істотною конструктивною анізотропією. З іншого боку, зважаючи на широке використання композитів у сучасній промисловості, досить перспективною бачиться можливість застосування армованих матеріалів у тонкостінних елементах конструкцій оболонкових за-

собів віброзахисту. Цей напрям конструювання ставить нові задачі дослідження фрикційної взаємодії тонкостінних систем з деформівним заповнювачем. Розглянемо пружний деформівний циліндр (заповнювач) радіуса  $R$  і завдовжки  $a$ , який заповнює ортотропну циліндричну оболонку завтовшки  $h$  (рис. 3.1). На один торець циліндра через абсолютно жорсткий гладкий поршень передається зовнішнє навантаження  $Q$ , другий торець заповнювача разом з обо-

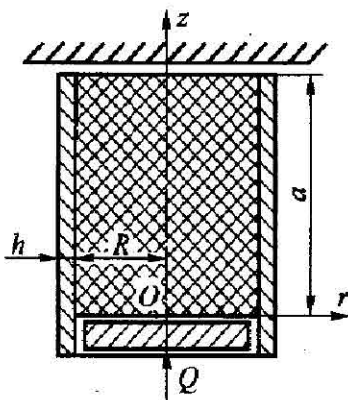


Рис. 3.1.

лонкою гладко впертий в жорстку перепону. Характер контактної взаємодії оболонки і заповнювача визначається законом сухого тертя. Осесиметричний напружено-деформований стан системи досліджуємо в циліндричних координатах.

Прагнучи аналітично оцінити найбільш суттєві параметри сформульованої задачі для створення простої інженерної методики розрахунку оболонкових конструкцій такого типу, дослідження проводимо на базі одновимірних моделей заповнювача і оболонки [100, 149].

Пружну рівновагу оболонки описуємо співвідношеннями безмоментної теорії, що включають:

– рівняння рівноваги

$$\frac{dN_{\zeta}}{d\zeta} - \sigma\tau_0 = 0; \quad (3.1)$$

$$N_{\beta} = -R\sigma_0, \quad (3.2)$$

– закон Гука (фізичні співвідношення)

$$\varepsilon_{\zeta 0} = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{E_1} N_{\zeta} - \frac{\nu_{12}}{E_2} N_{\beta} \right); \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_{\beta 0} = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{E_2} N_{\beta} - \frac{\nu_{21}}{E_1} N_{\zeta} \right), \quad (3.4)$$

де  $N_{\zeta}$ ,  $N_{\beta}$  – мембранні зусилля,  $\sigma_0$ ,  $\tau_0$  – задані на внутрішній поверхні оболонки напруження,  $E_1$ ,  $E_2$  та  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$  – модулі Юнга та коефіцієнти Пуассона матеріалу оболонки у відповідних напрямках.

Вихідними модельними співвідношеннями для заповнювача будуть усереднені за площею поперечного перерізу рівняння рівноваги [100] та закон Гука

$$\frac{d\sigma_{\zeta}}{d\zeta} + 2\tau = 0, \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_{\zeta} = \frac{1}{a} \frac{du}{d\zeta} = \frac{1}{E} (\sigma_{\zeta} - 2\nu\sigma), \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_{\rho} = \varepsilon_{\beta} = \frac{w}{R} = \frac{1}{E} [(1-\nu)\sigma - \nu\sigma_{\zeta}], \quad (3.7)$$

де  $l = a/R$ ,  $\zeta = z/a \in [0, 1]$ ,  $\rho = r/R \in [0, 1]$  – безрозмірні координати;  $\sigma$ ,  $\tau$  – нормальне і дотичне контактні напруження;  $u$ ,  $w$  – осьове і радіальне переміщення на поверхні  $r = R$ ;  $E$ ,  $\nu$  – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу заповнювача.

На торцях заповнювача і оболонки виконуються умови:

$$\sigma_z(0) = -p \equiv -Q/(\pi R^2), \quad N_z(0) = 0; \quad (3.8)$$

$$u(1) = 0, \quad u_0(1) = 0. \quad (3.9)$$

Фрикційну взаємодію оболонки і заповнювача опишемо співвідношеннями одностороннього контакту:

$$w_0 = w, \quad \sigma_0 = \sigma < 0, \quad \zeta \in [0, 1]; \quad (3.10)$$

законом сухого тертя:

$$\tau = f\sigma, \quad u > u_0, \quad \zeta \in [0, \alpha_0), \quad (3.11)$$

$$u = u_0, \quad |\tau| < -f\sigma, \quad \zeta \in (\alpha_0, 1], \quad (3.12)$$

де  $f$  – коефіцієнт сухого тертя пари оболонка-заповнювач,  $\alpha_0$  – безрозмірна координата точки розмежування ділянок проковзування і зчеплення заповнювача та оболонки.

Замінюючи умови рівності (чи нерівності) осьових переміщень умовами сумісності (чи несумісності) осьових деформацій оболонки і заповнювача, закон сухого тертя перепишемо у вигляді:

$$\tau = f\sigma, \quad \varepsilon_z > \varepsilon_{z_0}, \quad \zeta \in [0, \alpha_0), \quad (3.13)$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{z_0}, \quad |\tau| < -f\sigma, \quad \zeta \in (\alpha_0, 1]. \quad (3.14)$$

Отже, крайова задача про контактну взаємодію оболонки і заповнювача з урахуванням сил сухого тертя сформульована. Її розв'язок будемо окремо для кожної з ділянок – проковзування та ідеального зчеплення.

Нехай  $\zeta \in [0, \alpha_0)$ . Зінтегрувавши рівняння (3.5), (3.1) з урахуванням крайових умов (3.8), є:

$$\sigma_\zeta = -p - 2l \int_0^\zeta \tau d\zeta; \quad (3.15)$$

$$N_\zeta = a \int_0^\zeta \tau d\zeta. \quad (3.16)$$

Підставляючи інтеграли (3.15), (3.16) відповідно у формули (3.6), (3.7) і (3.3), (3.4), отримуємо деформації і переміщення через невідомі  $\sigma$ ,  $\tau$ :

– для заповнювача

$$\varepsilon_\zeta = \frac{1}{a} \frac{du}{d\zeta} = -\frac{1}{E} \left( p + 2l \int_0^\zeta \tau d\zeta + 2\nu\sigma \right), \quad (3.17)$$

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_\beta = \frac{w}{R} = \frac{1}{E} \left[ (1-\nu)\sigma + \nu \left( p + 2l \int_0^\zeta \tau d\zeta \right) \right]; \quad (3.18)$$

– для оболонки

$$\varepsilon_{\zeta 0} = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{E_1} a \int_0^\zeta \tau_0 d\zeta + \frac{\nu_{12}}{E_2} R\sigma_0 \right), \quad (3.19)$$

$$\varepsilon_{\beta 0} = -\frac{1}{h} \left( \frac{1}{E_2} R\sigma_0 + \frac{\nu_{21}}{E_1} a \int_0^\zeta \tau_0 d\zeta \right). \quad (3.20)$$

Далі, підставляючи вирази переміщень (3.18), (3.20) в умови одностороннього контакту (3.10) і враховуючи закон сухого тертя для ділянки проковзування (3.13), отримуємо ключове рівняння контактної задачі в зоні проковзування:

$$\sigma \left( h - hv + \frac{ER}{E_2} \right) + \left( 2hv + \frac{REv_{21}}{E_1} \right) fl \int_0^{\xi} \sigma d\zeta + vph = 0.$$

Для компактного запису рівнянь в безрозмірному вигляді введемо параметри безрозмірної жорсткості

$$\varepsilon_1 = \frac{ER}{E_1 h} \quad \text{і} \quad \varepsilon_2 = \frac{ER}{E_2 h},$$

тоді ключове рівняння набуде такого вигляду

$$\sigma (1 - v + \varepsilon_2) + (2v + v_{21}\varepsilon_1) fl \int_0^{\xi} \sigma d\zeta = -vp. \quad (3.21)$$

Диференціюючи інтегральне співвідношення (3.21), приходимо до звичайного диференціального рівняння

$$\frac{d\sigma}{d\zeta} + \lambda\sigma = 0, \quad \zeta \in [0, \alpha_0], \quad (3.22)$$

де  $\lambda = fl(2v + v_{21}\varepsilon_1)/(1 - v + \varepsilon_2)$ .

Розв'язуючи рівняння (3.22) при крайовій умові  $\sigma(0) = -vp/(1 - v + \varepsilon_2)$ , отримуємо вираз для нормального контактного напруження

$$\sigma = -\frac{vp}{1 - v + \varepsilon_2} e^{-\lambda\zeta}, \quad \zeta \in [0, \alpha_0]. \quad (3.23)$$

Використовуючи закон Кулона (3.13), отримуємо вираз для дотичного контактного напруження

$$\tau = -f \frac{\nu P}{1 - \nu + \varepsilon_2} e^{-\lambda \zeta}, \quad \zeta \in [0, \alpha_0]. \quad (3.24)$$

Запишемо необхідний нам інтеграл

$$\int_0^{\zeta} \tau d\zeta = -\frac{\nu P}{l(2\nu + \nu_{21}\varepsilon_1)} (1 - e^{-\lambda \zeta}), \quad \zeta \in [0, \alpha_0]. \quad (3.25)$$

Підставляючи інтеграл (3.25) у співвідношення (3.15) та (3.16), отримуємо відповідно вирази для осьових напружень в заповнювачі і зусиль в оболонці:

$$\sigma_{\zeta} = -\frac{P}{2\nu + \nu_{21}\varepsilon_1} (\nu_{21}\varepsilon_1 + 2\nu e^{-\lambda \zeta}), \quad \zeta \in [0, \alpha_0]; \quad (3.26)$$

$$N_{\zeta} = -\frac{\nu P R}{2\nu + \nu_{21}\varepsilon_1} (1 - e^{-\lambda \zeta}), \quad \zeta \in [0, \alpha_0]. \quad (3.27)$$

Для осьової деформації заповнювача з формули (3.17) з урахуванням співвідношень (3.23), (3.25) отримаємо вираз

$$\varepsilon_{\zeta} = -\frac{P}{E} \frac{1}{(2\nu + \nu_{21}\varepsilon_1)} \left[ \nu_{21}\varepsilon_1 + \right. \\ \left. + 2\nu \frac{(1 - \nu + \varepsilon_2 - 2\nu^2 - \nu\nu_{21}\varepsilon_1) P^{-\lambda \zeta}}{1 - \nu + \varepsilon_2} \right], \quad \zeta \in [0, \alpha_0]. \quad (3.28)$$

Перейдемо до побудови розв'язку задачі на ділянці ідеального зчеплення оболонки і заповнювача. Нехай  $\zeta \in (\alpha_0, 1]$ . Запишемо вираз для осьових напружень у заповнювачі і зусиль в оболонці через невідоме дотичне контактне напруження у формі

$$\sigma_{\zeta} = \sigma_{\zeta}(\alpha_0) - 2l \int_{\alpha_0}^{\zeta} \tau d\zeta, \quad (3.29)$$

$$N_{\zeta} = N_{\zeta}(\alpha_0) + a \int_{\alpha_0}^{\zeta} \tau d\zeta, \quad (3.30)$$

де  $\sigma_{\zeta}(\alpha_0)$ ,  $N_{\zeta}(\alpha_0)$  – невідомі. Тепер вирази (3.6), (3.3) для осьових деформацій заповнювача і оболонки набувають вигляду:

$$\varepsilon_{\zeta} = \frac{1}{E} \left[ \sigma_{\zeta}(\alpha_0) - 2l \int_{\alpha_0}^{\zeta} \tau d\zeta - 2\nu\sigma \right], \quad (3.31)$$

$$\varepsilon_{\zeta 0} = \frac{1}{hE_1E_2} \left[ E_2N_{\zeta}(\alpha_0) + aE_2 \int_{\alpha_0}^{\zeta} \tau d\zeta + \nu_{12}E_1R\sigma \right], \quad (3.32)$$

а радіальні переміщення заповнювача (3.7) і оболонки (3.4) будуть:

$$\frac{w}{R} = \frac{1}{E} \left( (1-\nu)\sigma - \nu\sigma_{\zeta}(\alpha_0) + 2l\nu \int_{\alpha_0}^{\zeta} \tau d\zeta \right), \quad (3.33)$$

$$\frac{w_0}{R} = -\frac{1}{h} \left( \frac{R\sigma}{E_2} + \frac{\nu_{12}N_{\zeta}(\alpha_0)}{E_1} + \frac{a\nu_{12}}{E_1} \int_{\alpha_0}^{\zeta} \tau d\zeta \right). \quad (3.34)$$

Задовольняючи з допомогою формул (3.29) – (3.34) умови одностороннього контакту (3.10), (3.14), приходимо до системи рівнянь для визначення контактних напружень:



$$(1 - \nu + \varepsilon_2)\sigma + (2\nu + \nu_{12}\varepsilon_1)l \int_{\alpha_0}^{\zeta} \tau d\zeta = \nu\sigma_{\zeta}(\alpha_0) - \frac{\nu_{12}N_{\zeta}(\alpha_0)\varepsilon_1}{R},$$

$$(2\nu + \varepsilon_2\nu_{12})\sigma + (2 + \varepsilon_1)l \int_{\alpha_0}^{\zeta} \tau d\zeta = \sigma_{\zeta}(\alpha_0) - \frac{\varepsilon_1 N_{\zeta}(\alpha_0)}{R}. \quad (3.35)$$

Права частина отриманої системи рівнянь не залежить від  $\zeta$ . Таким чином, (3.35) є системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно двох невідомих констант  $\sigma$  і

$l \int_{\alpha_0}^{\zeta} \tau d\zeta$ . Оскільки співвідношення виду

$$l \int_{\alpha_0}^{\zeta} \tau d\zeta = \text{const}$$

після інтегрування приводить до особливості типу  $\delta$  функції у виразі для  $\tau$ , а отже і до розриву осьових напружень  $\sigma_{\zeta}$  і зусиль  $N_{\zeta}$ , які в даному разі повинні бути неперервними, то необхідно прийняти

$$l \int_{\alpha_0}^{\zeta} \tau d\zeta = 0.$$

Звідси

$$\tau(\zeta) = 0, \quad \zeta \in (\alpha_0, 1],$$

а система рівнянь (3.35) набуде такого вигляду:

$$(1 - \nu + \varepsilon_2)\sigma = \nu\sigma_{\zeta}(\alpha_0) - \frac{\nu_{12}N_{\zeta}(\alpha_0)\varepsilon_1}{R},$$

$$(2\nu + \varepsilon_2 \nu_{12})\sigma = \sigma_\zeta(\alpha_0) - \frac{\varepsilon_1 N_\zeta(\alpha_0)}{R}, \quad \zeta \in (\alpha_0, 1] \quad (3.37)$$

Умова розв'язальності системи (3.37) – лінійна залежність рівнянь. Виключаємо  $\sigma$  і знаходимо  $\sigma_\zeta(\alpha_0)$  як функцію  $N_\zeta(\alpha_0)$

$$\sigma_\zeta(\alpha_0) = \frac{\varepsilon_1 N_\zeta(\alpha_0)}{R} \frac{1 - \nu_{12} 2\nu - \nu_{12}^2 \varepsilon_2 - \nu + \varepsilon_2}{(1 - \nu + \varepsilon_2) - \nu(2\nu + \varepsilon_2 \nu_{12})} \quad (3.38)$$

Залежність (3.38) слугує для визначення невідомої координати  $\alpha_0$  точки розмежування ділянок проковзування і зчеплення. До неї слід додати умови неперервності осьових напружень і зусиль у цій точці:

$$\sigma_\zeta(\alpha_0 - 0) = \sigma_\zeta(\alpha_0 + 0), \quad N_\zeta(\alpha_0 - 0) = N_\zeta(\alpha_0 + 0) \quad (3.39)$$

Тепер використовуючи вирази (3.26), (3.27) при  $\zeta = \alpha_0$  і враховуючи умови неперервності (3.39), із формули (3.38) знаходимо

$$\alpha_0 = \frac{(1 - \nu + \varepsilon_2)}{f l (2\nu + \nu_{21} \varepsilon_1)} \ln \left( \frac{\nu}{\varepsilon_1} \times \frac{2[1 - \nu(1 + 2\nu) + \varepsilon_2(1 - \nu \nu_{12})] + \varepsilon_1(1 - 2\nu \nu_{12} - \varepsilon_2 \nu_{12}^2 - \nu + \varepsilon_2)}{\nu [1 - 2\nu \nu_{12} - \nu - \varepsilon_2(2\nu_{12}^2 - 1 - 2\nu_{21}^2) + \nu_{21} + 2\nu_{21} \nu] - \nu_{21}(1 + \varepsilon_2)} \right) \quad (3.40)$$

Зауважимо, що при  $\alpha_0 \geq 1$  в рамках прийнятої моделі зона проковзування охоплює всю область контакту.

Невідоме контактне напруження  $\sigma$  в зоні зчеплення знайдемо, підстановкою співвідношень (3.26) і (3.27) при  $\zeta = \alpha_0$  в будь-яке з рівнянь системи (3.37).

Таким чином, сформульована контактна задача про фрикційну взаємодію безмоментної ортотропної циліндричної оболонки з деформівним заповнювачем розв'язана. Розв'язок знайдено в класі кусково-неперервних функцій:

$$\sigma = -\frac{\nu p}{1-\nu+\varepsilon_2} \begin{cases} e^{-\lambda\zeta}, & \zeta \in [0, \alpha_0) \\ e^{-\lambda\alpha_0}, & \zeta \in (\alpha_0, 1] \end{cases},$$

$$\tau = -f p \frac{\nu}{1-\nu+\varepsilon_2} \begin{cases} e^{-\lambda\zeta}, & \zeta \in [0, \alpha_0) \\ 0, & \zeta \in (\alpha_0, 1] \end{cases} \quad (3.41)$$

При відомих контактних напруженнях (3.41) і координаті  $\alpha_0$  на основі (3.2), (3.15) – (3.20) можна знайти всі характеристики напружено-деформованого стану системи. Зокрема, головні напруження, що виникають в оболонці, визначаються формулами:

$$\sigma_1 = \frac{N_\beta}{h} = -p \frac{R}{h} \frac{\nu}{1-\nu+\varepsilon_2} \begin{cases} e^{-\lambda\zeta}, & \zeta \in [0, \alpha_0) \\ e^{-\lambda\alpha_0}, & \zeta \in (\alpha_0, 1] \end{cases}, \quad (3.42)$$

$$\sigma_2 = \frac{N_\zeta}{h} = -p \frac{R}{h} \frac{\nu}{2\nu+\nu_{21}\varepsilon_1} \begin{cases} 1-e^{-\lambda\zeta}, & \zeta \in [0, \alpha_0) \\ 1-e^{-\lambda\alpha_0}, & \zeta \in (\alpha_0, 1] \end{cases}. \quad (3.43)$$

Обчислимо ще осьові переміщення перерізів заповнювача. При цьому мусимо розрізнити два випадки:  $\alpha_0 \geq 1$  і  $\alpha_0 < 1$ .

Нехай  $\alpha_0 \geq 1$ . Інтегруючи вираз осьової деформації (3.6) з урахуванням крайової умови (3.9) і співвідношення (3.28), одержуємо

$$u(\zeta) = -a \int_{\zeta}^1 \varepsilon_{\zeta} d\zeta = \frac{pa}{E(2\nu + \nu_{21}\varepsilon_1)} \left[ \varepsilon_1 \nu_{21} (1 - \zeta) + \frac{2\nu \left[ (1 - \nu - 2\nu^2) + \varepsilon_2 - \nu \nu_{21} \varepsilon_1 \right]}{fl(2\nu + \varepsilon_1 \nu_{21})} (e^{-\lambda \zeta} - e^{-\lambda}) \right]. \quad (3.44)$$

Зокрема, при  $\zeta=0$  із виразу (3.44) отримуємо формулу для осьового переміщення (осадки) поршня від дії заданої сили  $Q$

$$\delta = u(0) = \frac{Ql}{\pi ER(2\nu + \nu_{21}\varepsilon_1)} \left[ \varepsilon_1 \nu_{21} + \frac{2\nu \left[ (2 - \nu - 2\nu^2) + \varepsilon_2 - \nu \nu_{21} \varepsilon_1 \right]}{fl(2\nu + \varepsilon_1 \nu_{21})} (1 - e^{-\lambda}) \right]. \quad (3.45)$$

Тепер проаналізуємо випадок  $\alpha_0 < 1$ . Інтегруючи формулу (3.6), з урахуванням незмінності осьових деформацій заповнювача на ділянці зчеплення та крайової умови (3.9) маємо:

$$u(\zeta) = -a (1 - \zeta) \varepsilon_{\zeta}(\alpha_0), \quad \zeta \in (\alpha_0, 1]. \quad (3.46)$$

Підставляючи в (3.46)  $\zeta = \alpha_0$ , отримуємо крайову умову

$$u(\alpha_0) = -a (1 - \alpha_0) \varepsilon_{\zeta}(\alpha_0), \quad (3.47)$$

де  $\varepsilon_\zeta(\alpha_0)$  визначається з виразу (3.28) при  $\zeta = \alpha_0$ .

В зоні проковзування маємо

$$u(\zeta) = u(\alpha_0) - a \int_{\zeta}^{\alpha_0} \varepsilon_\zeta d\zeta, \quad \zeta \in [0, \alpha_0]. \quad (3.48)$$

Підставляючи співвідношення (3.28), (3.47) у формулу (3.48) та інтегруючи, отримуємо

$$u(\zeta) = \frac{p\alpha}{E(2\nu + \nu_{21}\varepsilon_1)} \left\{ \varepsilon_1 \nu_{21} (1 - \zeta) + \frac{2\nu \left[ (1 - \nu - 2\nu^2) + \varepsilon_2 - \nu \nu_{21} \varepsilon_1 \right]}{f l (2\nu + \varepsilon_1 \nu_{21})} \times \right. \\ \left. \times \left[ e^{-\lambda \zeta} - e^{-\lambda \alpha_0} + \lambda (1 - \alpha_0) e^{-\lambda \alpha_0} \right] \right\}. \quad (3.49)$$

Зокрема, для осьового переміщення (осадки) штовхача одержимо

$$\delta = u(0) = \frac{Ql}{\pi ER(2\nu + \nu_{21}\varepsilon_1)} \left\{ \varepsilon_1 \nu_{21} + \frac{2\nu \left[ (1 - \nu - 2\nu^2) + \varepsilon_2 - \nu \nu_{21} \varepsilon_1 \right]}{f l (2\nu + \varepsilon_1 \nu_{21})} \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 + e^{-\lambda \alpha_0} (-1 + \lambda (1 - \alpha_0)) \right] \right\}. \quad (3.50)$$

Податливість системи визначається за формулою

$$\Lambda = 2\delta / Q. \quad (3.51)$$

Як видно із формул (3.42), (3.43), стисливість і податливість заповнювача слабо впливають на напружений стан системи оболонка-заповнювач. Більш суттєву роль вони відіграють при розрахунку податливості системи і довжини зони проковзування.

### 3.2. Механіко-математичне моделювання демпфера з розрізаною вздовж твірної циліндричною оболонкою

Розглянемо пружний деформівний циліндр (заповнювач) 2 (рис. 3.2) радіуса  $R$  завдовжки  $2a$ , який заповнює циліндричну оболонку 1 завтовшки  $h$  з розрізом вздовж твірної. Заповнювач стискається по торцях абсолютно жорсткими, гладкими поршнями 3, до яких прикладено осьове навантаження завбільшки  $Q$ . Необхідно дослідити напружено-деформований стан системи, враховуючи фрикційне проковзування заповнювача відносно оболонки.

Основна ідея моделювання така. Інтуїтивно зрозуміло, що жорсткість розрізаної оболонки в тангенційному напрямку менша, аніж уздовж твірної. Основний вклад у податливість системи буде вносити зміна форми заповнювача за рахунок згинальної деформації розрізаної оболонки (зменшення кривини розімкненого кільця у поперечному перерізі). Тому логічними є наступні припущення. Матеріал заповнювача вважаємо нестисливим. Розрізаній ізотропній оболонці, яка згинається в умовах неосесиметричного контактного навантаження, поставимо у відповідність сильно ортотропну замкнуту циліндричну оболонку, яка перебуває під дією осесиметричного контактного навантаження. Товщини та радіуси оболонок збережемо однаковими. Модуль пружності та допустиме напруження для еквівалентної ортотропної оболонки виберемо такими, щоби вони в середньому ототожнювали властивості розрізаної оболонки та її суцільної моделі [135].

Для цього здійснюємо уявний експеримент. Нехай  $E_0$  і  $[\sigma]$  – модуль Юнга та допустиме нормальне напруження для матеріалу розрізаної оболонки. Введемо нові позначення  $E_e$  та  $[\sigma]_e$  – відповідно модуль пружності та допустиме напруження для матеріалу еквівалентної моделі, які підлягають визначенню. Піддамо обидві оболонки дії

внутрішнього тиску  $q$ . Знайдемо напруження та деформації.

Уведемо циліндричну систему координат  $r, \beta, z$  (рис. 3.2).

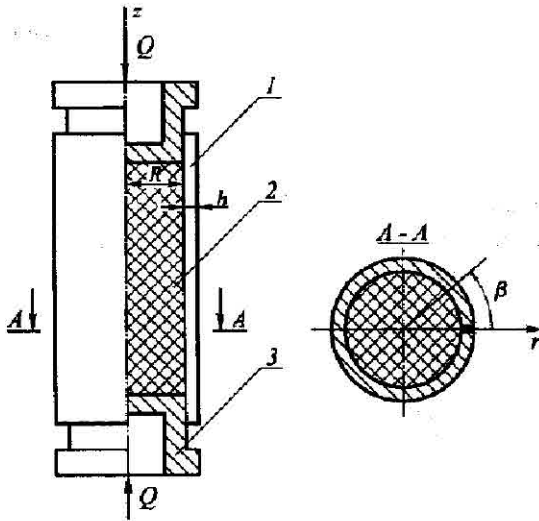


Рис. 3.2.

Внаслідок переважаючого впливу згинальної деформації будемо додатково вважати, що серединна поверхня розрізаної оболонки є нерозтяжною ( $\varepsilon_z^{(1)} = \varepsilon_\beta^{(1)} = 0$ ), а серединна поверхня ортоговної оболонки розтягується лише у тангенційному напрямку ( $\varepsilon_z^{(2)} = 0, \varepsilon_\beta^{(2)} \neq 0$ ) [135].

В силу закладених припущень внутрішній тиск у розрізаній оболонці викличе лише деформацію згину. Розв'яжемо відповідну плоску задачу. Рівняння рівноваги мають вигляд:

$$\frac{dN_\beta}{d\beta} + Q_\beta = 0, \quad \frac{dQ_\beta}{d\beta} - N_\beta = -qR,$$

$$\frac{dM_\beta}{d\beta} - Q_\beta R = 0, \quad \beta \in (0, 2\pi), \quad (3.52)$$

де  $N_\beta$  – тангенційне зусилля,  $M_\beta$  і  $Q_\beta$  – згинальний момент та перерізувача сила.

Проінтегрувавши систему диференціальних рівнянь (3.52) при крайових умовах

$$N_\beta = 0, \quad M_\beta = 0, \quad Q_\beta = 0 \quad \text{при} \quad \beta = 0, 2\pi, \quad (3.53)$$

одержимо вирази для зусиль і моментів:

$$N_\beta = 2qR \sin^2(\beta/2), \quad Q_\beta = -qR \sin \beta,$$

$$M_\beta = -2qR^2 \sin^2(\beta/2). \quad (3.54)$$

Максимальне напруження розтягу в оболонці досягається при  $\beta = \pi$ :

$$\sigma_{\max}^{(1)} = \max_{\beta \in [0, 2\pi]} \frac{1}{h} \left( N_\beta - \frac{6}{h} M_\beta \right) = 2q \frac{R}{h} \left( 1 + 6 \frac{R}{h} \right). \quad (3.55)$$

Функцію прогину знайдемо з диференціального рівняння

$$\frac{d^2 w}{d\beta^2} + w = -\frac{12R^2}{E_0 h^3} M_\beta, \quad \beta \in (0, 2\pi). \quad (3.56)$$

Інтегруючи вираз (3.56), маємо:

$$w(\beta) = A \cos \beta + B \sin \beta + \frac{12qR^4}{E_0 h^3} \left( 1 - \frac{1}{2} \beta \sin \beta \right).$$



Тут перші два доданки описують переміщення перерізу як жорсткого цілого.

Знайдемо середнє значення прогину

$$\frac{w^{(1)}}{R} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{w(\beta)}{R} d\beta = \frac{18qR^3}{E_0 h^3}. \quad (3.57)$$

У ортотропній безмоментній оболонці під внутрішнім тиском  $N_\beta = qR$ , тож для тангенційної деформації та максимального напруження маємо відповідно вирази:

$$\varepsilon_\beta^{(2)} = \frac{w^{(2)}}{R} = \frac{q}{E_e} \frac{R}{h}, \quad (3.58)$$

$$\sigma_{\max}^{(2)} = \frac{N_\beta}{h} = q \frac{R}{h}. \quad (3.59)$$

Вимагаючи, щоб у лівих частинах виразів (3.57) і (3.58) середні прогини були однаковими, знаходимо еквівалентну пружну сталу модельної суцільної оболонки

$$E_e = \frac{1}{18} \frac{h^2}{R^2} E_0. \quad (3.60)$$

Скориставшись критерієм міцності за максимальними напруженнями розтягу та результатами (3.55) і (3.59), одержимо:

$$2q \frac{R}{h} \left( 1 + 6 \frac{R}{h} \right) = [\sigma], \quad q \frac{R}{h} = [\sigma]_e.$$

Звідси легко знайдемо еквівалентну характеристику міцності модельної суцільної оболонки:

$$[\sigma]_c = \frac{[\sigma]}{2\left(1+6\frac{R}{h}\right)} \approx \frac{1}{12} \frac{h}{R} [\sigma]. \quad (3.61)$$

Таким чином, параметри пружності та міцності модельної суцільної оболонки визначаються формулами (3.60), (3.61).

Тепер перейдемо до дослідження напружено-деформованого стану у замкнутій сильно ортотропній оболонці з деформівним заповнювачем за наявності фрикційної взаємодії на контактуючих поверхнях. Внаслідок симетрії конструкції відносно площини, рівновіддаленої від штовхачів, за об'єкт дослідження можна взяти половину системи (рис. 3.1), вважаючи переріз, що належить площині симетрії, гладко впертим в жорстку перепону.

Перепишемо усереднені рівняння рівноваги та закон Гука для нестисливого заповнювача (3.5) – (3.7) з урахуванням прийнятих припущень:

$$\frac{d\sigma_\zeta}{d\zeta} + 2l\tau = 0, \quad \zeta \in (0, 1); \quad (3.62)$$

$$\frac{du}{d\zeta} + 2lw = 0,$$

$$\frac{du}{d\zeta} = \frac{a}{E} (\sigma_\zeta - \sigma), \quad \zeta \in (0, 1), \quad (3.63)$$

де  $\sigma_\zeta$ ,  $u$  – осьові напруження та переміщення заповнювача,  $\sigma$  і  $\tau$  – нормальне та дотичне контактні напруження,  $w$  – радіальне переміщення на поверхні  $r=R$ ,  $E$  – модуль Юнга матеріалу,  $l = a/R$  – безрозмірна півдовжина заповнювача.

Крайові умови мають вигляд:

$$\sigma_{\zeta}(0) = -p = -Q/(\pi R^2), \quad u(1) = 0. \quad (3.64)$$

Для ортотропної оболонки, використовуючи рівняння рівноваги та фізичні співвідношення (3.2), (3.4) за наведених вище припущеннях, отримаємо

$$w = -\frac{\sigma R^2}{E_c h}, \quad \zeta \in (0, 1). \quad (3.65)$$

На поверхні контакту оболонка і заповнювач взаємодіють із сухим тертям за законом Кулона:

$$\tau = f\sigma, \quad \zeta \in (0, 1), \quad (3.66)$$

де  $f$  – коефіцієнт тертя.

Через припущення про недеформівність оболонки в осьовому напрямку зона зчеплення у фрикційному контакті не спостерігається.

Вилучаючи із співвідношень (3.62), (3.63), (3.65), (3.66) напруження  $\sigma_{\zeta}$  та  $\tau$ , приходимо до ключового диференційного рівняння для знаходження контактного напруження

$$\frac{d\sigma}{d\zeta} + \lambda\sigma = 0, \quad \zeta \in (0, 1) \quad (3.67)$$

з крайовою умовою

$$\sigma(0) = -p/(1 + 2\varepsilon_2), \quad (3.68)$$

де  $\lambda = 2fl/(1 + 2\varepsilon_2)$ ,  $\varepsilon_2 = ER/(E_c h) = 18R^3 E/(E_c h^3)$ .

Розв'язок задачі (3.67), (3.68) має вигляд

$$\sigma(\zeta) = -\frac{P}{1+2\varepsilon_2} e^{-\lambda\zeta}, \quad \zeta \in (0,1).$$

Для осьових напружень та переміщень маємо:

$$\sigma_\zeta(\zeta) = -pe^{-\lambda\zeta}, \quad u(\zeta) = \frac{pa}{E} \frac{2\varepsilon_2}{1+2\varepsilon_2} \frac{e^{-\lambda\zeta} - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Зокрема, формула для осадки штовхача буде такою

$$\delta = u(0) = \frac{pa}{E} \frac{2\varepsilon_2}{1+2\varepsilon_2} \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}. \quad (3.69)$$

Порівнюючи максимальне розтягувальне напруження в оболонці з еквівалентним допустимим

$$p \frac{R}{h(1+2\varepsilon_2)} \leq [\sigma]_e, \text{ одержимо формулу для максимального}$$

експлуатаційного навантаження

$$Q_{\max} \leq \frac{\pi}{12} [\sigma] h^2 (1+2\varepsilon_2). \quad (3.70)$$

Формули (3.69), (3.70) є основними для інженерного розрахунку податливості та утримувальної здатності демпфера з розрізаною вздовж твірної циліндричною оболонкою. Слід зазначити, що хоча для реальних пар заповнювач-оболонка відношення  $E/E_0$  досить мале, величиною  $\varepsilon_2$  в отриманих результатах нехтувати не можна, оскільки множник  $(R/h)^3$  для тонкостінних конструкцій досить великий.

Для ілюстрування отриманих в рамках розробленої моделі результатів оберемо за приклад зображену на рис. 3.2 систему з параметрами, що входять до діапазону

робочих характеристик реальних конструкцій оболонкових пружних елементів  $f = 0.5$ ,  $l = 3$ ,  $h/R = 0.18$ ,  $E/E_0 = 0.0001$ .

На рис. 3.3 графічно зображено залежності податливості пружного елемента від товщини оболонки при різних коефіцієнтах тертя пари оболонка-заповнювач. Бачимо, що

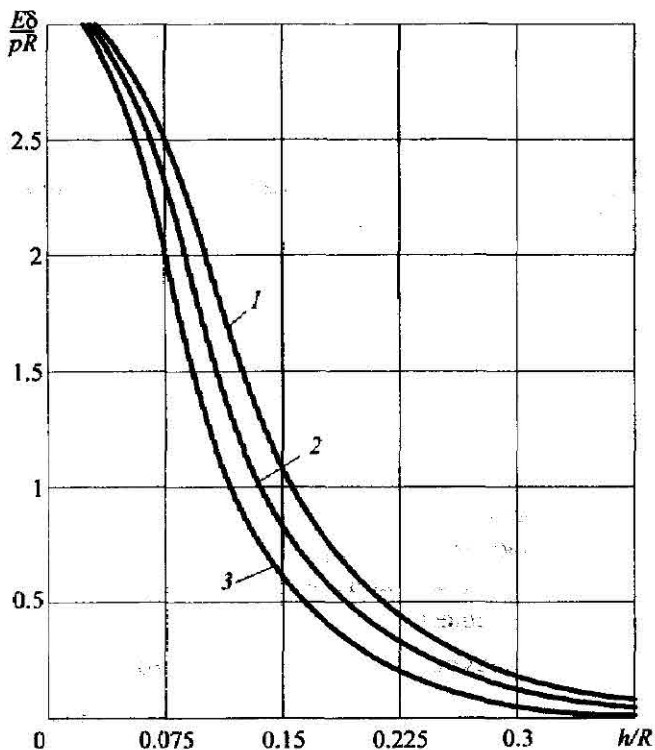


Рис. 3.3 Вплив товщини оболонки на податливість пружного елемента:

1 -  $f = 0.2$ ; 2 -  $f = 0.5$ ; 3 -  $f = 0.8$

при збільшенні товщини оболонки податливість системи зменшується. За інших однакових умов вищу податливість матиме система з меншим коефіцієнтом тертя пари оболонка-заповнювач. Збільшення коефіцієнта тертя призводить до зменшення податливості пружного елемента, що, з одного боку, зменшує ефективність використання подібних систем в ролі засобів віброзахисту, але, з іншого боку, збільшує п'ятому демпфувальну здатність такого пристрою.

На рис. 3.4 зображено залежності податливості пружного елемента від відносної довжини заповнювача для різних товщин оболонки.

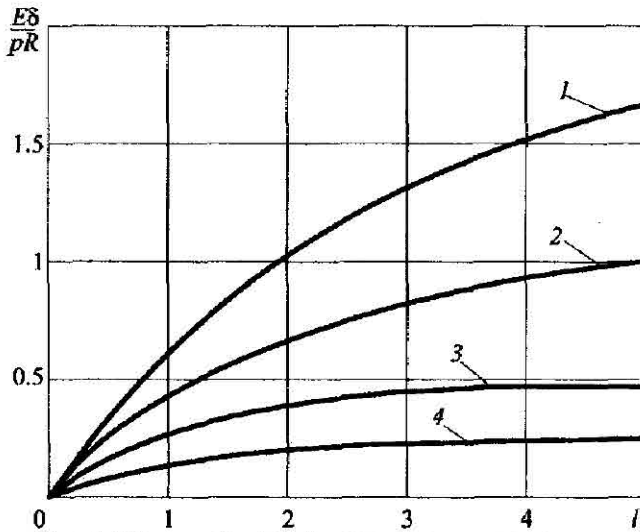


Рис. 3.4 Вплив відносної довжини заповнювача на податливість пружного елемента:

1 -  $h/R = 0.12$ ; 2 -  $h/R = 0.15$ ; 3 -  $h/R = 0.18$ ;

4 -  $h/R = 0.21$

При збільшенні довжини системи темп зростання податливості поступово зменшується. Зменшення темпу зростання податливості настає швидше в пружних елементах з більшою товщиною стінки. Аналіз залежностей рис. 3.4 дозволяє вести розмову про оптимальну довжину системи в кожному конкретному випадку.

Залежності податливості пружного елемента від пружних властивостей заповнювача при різних коефіцієнтах тертя пари заповнювач-оболонка зображено на рис. 3.5. При збільшенні модуля пружності заповнювача

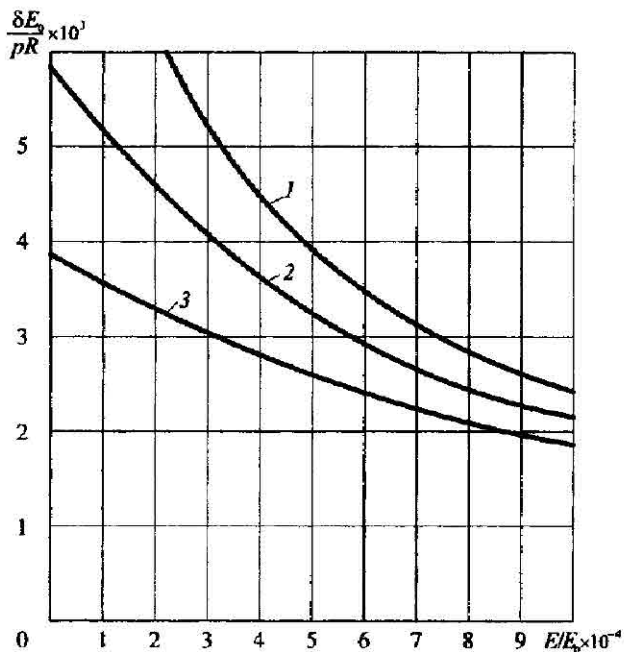


Рис. 3.5 Залежність податливості пружного елемента від пружних властивостей заповнювача:  
 1 -  $f = 0.2$ ; 2 -  $f = 0.5$ ; 3 -  $f = 0.8$

податливість системи спадає, при цьому в пружних елементах з іншими однаковими параметрами більша податливість досягається для менших коефіцієнтів тертя пари заповнювач-оболонка.

Побудовані графічні залежності рис. 3.3–3.5, доповнені формулою (3.70), дозволяють легко варіювати основні експлуатаційні параметри системи на стадії проектування, що надає можливість забезпечити необхідну ефективність роботи віброзахисної системи загалом.

### 3.3. Конструкційне демпфування при немонотонному навантаженні заповнювача в циліндричній оболонці з розрізом

Розглянемо попередню задачу, вважаючи, що прикладена до штовхача сила змінюється циклічно в часі з коефіцієнтом асиметрії циклу  $s = Q_{\min}/Q_{\max} \geq 0$ . При немонотонному навантаженні внаслідок фрикційної взаємодії оболонки із заповнювачем в системі буде розсіюватися енергія. Виникає явище конструкційного гістерезису в малорухомій деформівній системі, яке, наслідуючи праці [100, 103, 146, 148], вивчимо у квазістатичній постановці, нехтуючи інерційними членами в рівняннях динаміки оболонки і заповнювача.

Закон сухого тертя на поверхні контакту оболонки із заповнювачем запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \tau &= f \sigma \operatorname{sgn} \dot{u}_z, \quad \dot{u}_z \neq 0; \\ |\tau| &\leq -f \sigma, \quad \dot{u}_z = 0, \end{aligned} \quad (3.71)$$

де  $\dot{u}_z$  – осьова швидкість в заповнювачі. Через закладені припущення про відсутність осьових деформацій оболонки



остання в напрямку  $\zeta$  вважається нерухомою.

У квазістатичних задачах від диференціювання за часом доцільно перейти до диференціювання за параметром навантаження

$$\dot{u}_\zeta = \frac{\partial u_\zeta}{\partial Q} \dot{Q}$$

і розглянути процес немонотонного навантаження, конструкції поетапно [100] з монотонною зміною  $Q$  на кожному з етапів.

### 1. Початкове (активне) навантаження

$$0 \leq Q \leq Q_{\max}, \quad \dot{Q} > 0, \quad du/dQ > 0.$$

Це питання уже по суті розглянуто у попередніх параграфах. Для контактних та осьових напружень маємо вирази:

$$\sigma^I(\zeta) = -\frac{P}{1+2\varepsilon_2} e^{-\lambda\zeta}, \quad \tau^I(\zeta) = -\frac{fP}{1+2\varepsilon_2} e^{-\lambda\zeta},$$

$$\sigma_\zeta^I(\zeta) = -pe^{-\lambda\zeta}, \quad \zeta \in [0, 1]. \quad (3.72)$$

Графічно ці залежності подано на рис. 3.6. Тут і далі для ілюстрування одержаних результатів за приклад обрали систему з параметрами  $f=0.5$ ,  $l=3$ ,  $h/R=0.18$ ,  $E/E_0=0.0001$ .

Переміщення поршня буде таким

$$\delta^I = u_\zeta^I(0) = \frac{Qa}{\pi R^2 E} \frac{2\varepsilon_2}{1+2\varepsilon_2} \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}. \quad (3.73)$$

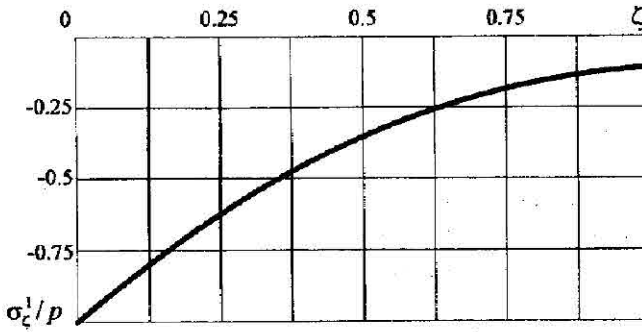
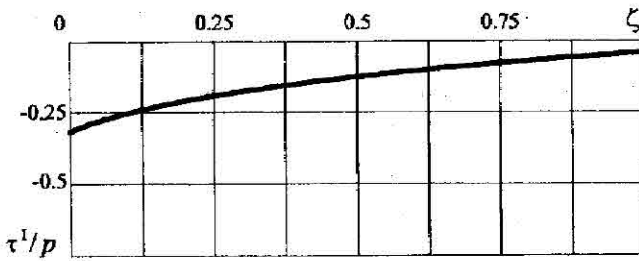
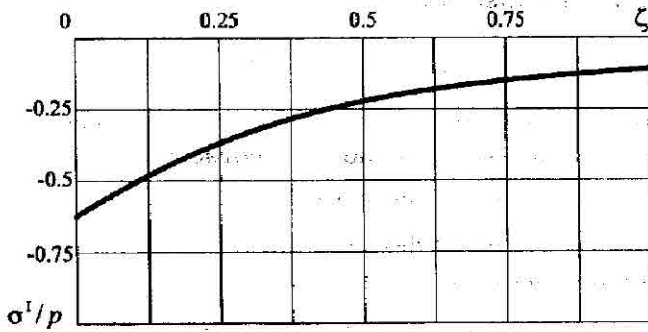


Рис. 3.6 Розподіл напружень на етапі активного навантаження

## 2. Розвантаження

$$Q_{\max} \geq Q \geq 0, \quad \dot{Q} < 0.$$

На початку даного етапу розвантаження конструкції проходить в режимі неповного зворотного проковзування. Відрізок  $\zeta \in [0, 1]$  розбивається на дві області, в яких швидкість взаємного зміщення, а, отже, і дотичні контактні напруження мають протилежні знаки:  $\zeta \in [0, \alpha]$  – область зворотного проковзування, де  $\partial u_{\zeta} / \partial Q < 0$ , та  $\zeta \in [\alpha, 1]$  – область зчеплення, де  $\partial u_{\zeta} / \partial Q = 0$ . Координата точки розмежування областей є шуканою.

У зоні зчеплення маємо розподіли напружень та переміщень, досягнуті раніше наприкінці попереднього етапу:

$$\begin{aligned} \sigma^{\text{II}}(\zeta) &= \sigma^{\text{I}}(\zeta) \Big|_{p=P_{\max}} = -\frac{P_{\max}}{1+2\varepsilon_2} e^{-\lambda\zeta}, \\ \tau^{\text{II}}(\zeta) &= \tau^{\text{I}}(\zeta) \Big|_{p=P_{\max}} = -\frac{fP_{\max}}{1+2\varepsilon_2} e^{-\lambda\zeta}, \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\sigma_{\zeta}^{\text{II}}(\zeta) = \sigma^{\text{I}}(\zeta) \Big|_{p=P_{\max}} = -P_{\max} e^{\lambda\zeta}, \quad \zeta \in [\alpha, 1].$$

У зоні проковзування дотичні напруження змінюють свій напрям на протилежний. Це означає, що в задачі (3.67), (3.68) слід змінити знак параметра  $\lambda$ . Тоді одержимо:

$$\begin{aligned} \sigma^{\text{II}}(\zeta) &= -\frac{P}{1+2\varepsilon_2} e^{\lambda\zeta}, \quad \tau^{\text{II}}(\zeta) = \frac{fP}{1+2\varepsilon_2} e^{\lambda\zeta}, \\ \sigma_{\zeta}^{\text{II}}(\zeta) &= -pe^{\lambda\zeta}, \quad \zeta \in [0, \alpha]. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Забезпечивши неперервність осьових напружень у точці  $\alpha$

$$\sigma_{\zeta}^{\text{II}}(\alpha-0) = \sigma_{\zeta}^{\text{II}}(\alpha+0),$$

знайдемо координату точки розмежування областей зворотного проковзування та зчеплення

$$\alpha = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{p_{\max}}{p} \right)^{1/2} = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{Q_{\max}}{Q} \right)^{1/2}. \quad (3.76)$$

Графіки напружень наведено на рис. 3.7.

Описаний процес розвантаження реалізується до того моменту, поки точка  $\alpha$  не досягне правої межі  $\zeta=1$ . З умови  $0 \leq \alpha \leq 1$  знаходимо відповідний діапазон зміни навантаження:

$$s \cdot Q_{\max} \leq Q \leq Q_{\max}, \quad (3.77)$$

де  $s = e^{-2\lambda}$  — характерне значення коефіцієнта асиметрії циклу.

Інтегруючи вираз (3.63) при напруженнях (3.74), (3.75), обчислимо переміщення поршня на цьому етапі:

$$\delta^{\text{II}} = \delta_{\max}^{\text{I}} - \frac{a}{\pi R^2 E} \frac{2\varepsilon_2}{1+2\varepsilon_2} \frac{1}{\lambda} \left( \sqrt{Q_{\max}} - \sqrt{Q} \right)^2. \quad (3.78)$$

Коли навантаження знизиться до величини  $Q = s \cdot Q_{\max}$ , умови зворотного проковзування будуть виконуватися на всій поверхні контакту  $\zeta \in (0, 1]$ . У цьому випадку в діапазоні розвантаження  $0 \leq Q \leq s \cdot Q_{\max}$  будуть справджуватися формули (3.75). Характерний розподіл напружень, що відповідає цьому епізоду розвантаження показано на рис. 3.8.

Осадку поршня знайдемо інтегруванням (3.63) при напруженнях (3.75):

$$\delta'' = \frac{Qa}{\pi R^2 E} \frac{2\varepsilon_2}{1+2\varepsilon_2} \frac{e^\lambda - 1}{\lambda} \quad (3.79)$$

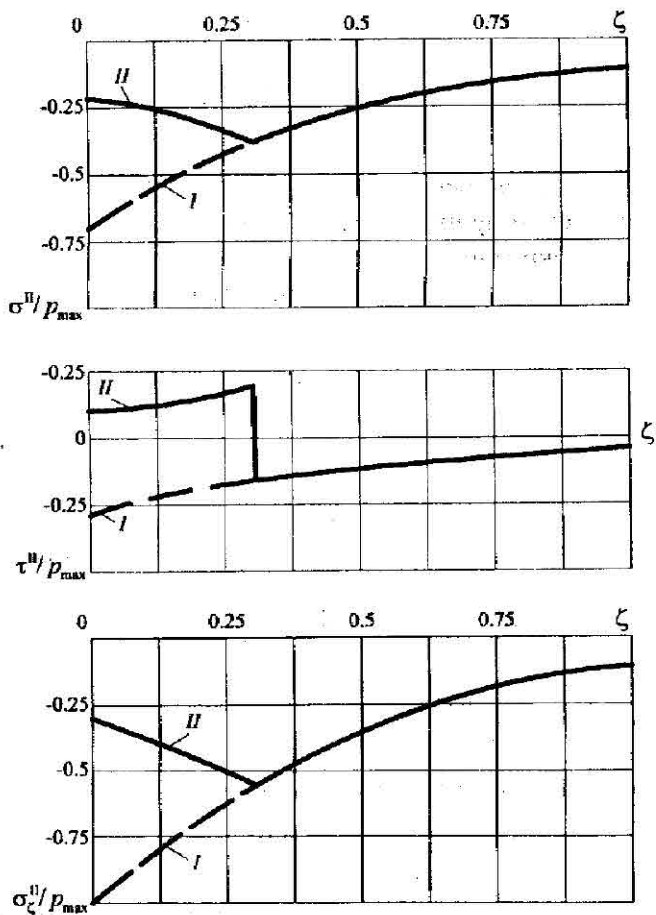


Рис. 3.7 Розподіл напружень на етапі розвантаження (режим неповного проковзування)

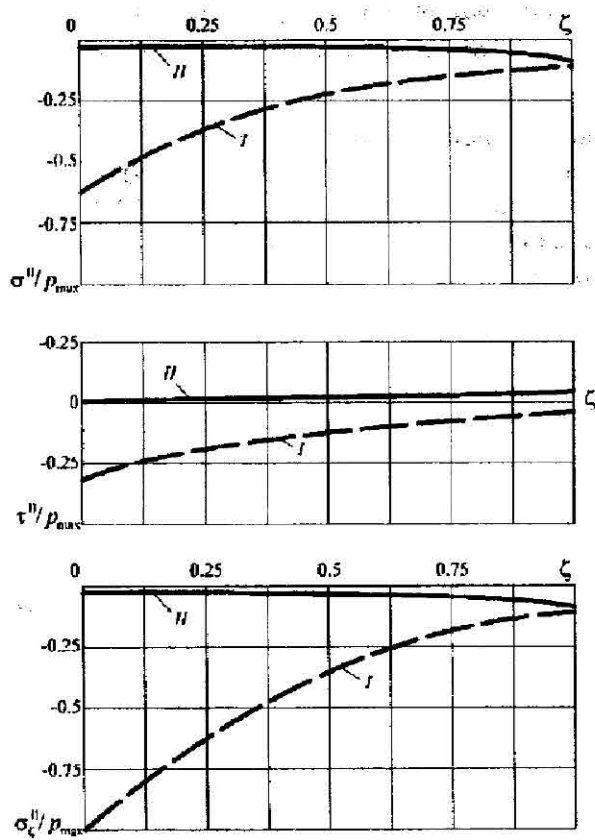


Рис. 3.8. Розподіл напружень на етапі розвантаження (режим повного проковзування)

### 3. Повторне навантаження

$$Q_{\min} \leq Q \leq Q_{\max}, \quad \dot{Q} > 0. \quad (3.80)$$

Залежно від величини  $Q_{\min}$  можливі два варіанти:  $s \geq s_*$  і  $s \leq s_*$ . Розглянемо по черзі кожен із них.

Складнішим є випадок, коли  $1 \geq s \geq s_*$ . Тут на поверхні контакту присутні одразу три області. Відмінність між ними полягає у тому, що в кожних двох сусідніх областях дотичні контактні напруження мають протилежні знаки. Слід зазначити, що кількість таких областей при довільній кількості циклів навантажень з довільною амплітудою може бути будь-якою і залежати виключно від історії навантаження. Отже, у цьому випадку маємо пряме проковзування у припоршневій зоні  $\zeta \in [0, \beta]$  і ситуацію закінчення попереднього етапу в області  $\zeta \in [\beta, 1]$ .

У зоні зчеплення ( $\partial u_\zeta / \partial Q = 0$ ,  $\zeta \in [\beta, 1]$ ) напруження одержимо з виразів (3.75) при  $p = p_{\min}$ :

$$\sigma^{\text{III}}(\zeta) = \sigma^{\text{II}}(\zeta) \Big|_{p=p_{\min}} = \begin{cases} -\frac{p_{\min}}{1+2\varepsilon_2} e^{\lambda\zeta}, & \zeta \in [\beta, \alpha] \\ -\frac{p_{\max}}{1+2\varepsilon_2} e^{-\lambda\zeta}, & \zeta \in [\alpha, 1] \end{cases};$$

$$\tau^{\text{III}}(\zeta) = \tau^{\text{II}}(\zeta) \Big|_{p=p_{\min}} = \begin{cases} \frac{f p_{\min}}{1+2\varepsilon_2} e^{\lambda\zeta}, & \zeta \in [\beta, \alpha] \\ -\frac{f p_{\max}}{1+2\varepsilon_2} e^{-\lambda\zeta}, & \zeta \in [\alpha, 1] \end{cases};$$

$$\sigma_\zeta^{\text{III}}(\zeta) = \sigma_\zeta^{\text{II}}(\zeta) \Big|_{p=p_{\min}} = \begin{cases} -p_{\min} e^{\lambda\zeta}, & \zeta \in [\beta, \alpha] \\ -p_{\max} e^{-\lambda\zeta}, & \zeta \in [\alpha, 1] \end{cases} \quad (3.81)$$

В зоні проковзування ( $\partial u_z / \partial Q > 0$ ,  $\zeta \in [0, \beta]$ ) напруження виражаються формулами (3.72):

$$\begin{aligned}\sigma^{\text{III}}(\zeta) &= \sigma^{\text{I}}(\zeta), \quad \tau^{\text{III}}(\zeta) = \tau^{\text{I}}(\zeta), \\ \sigma_{\zeta}^{\text{III}}(\zeta) &= \sigma_{\zeta}^{\text{I}}(\zeta), \quad \zeta \in [0, \beta].\end{aligned}\quad (3.82)$$

З умови неперервності осьових напружень знаходимо параметр

$$\beta = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{P}{P_{\min}} \right)^{1/2} = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{Q}{Q_{\min}} \right)^{1/2}. \quad (3.83)$$

Результати (3.81), (3.82) зображено на рис. 3.9.

Описаний процес реалізується до того моменту, поки точка  $\beta$  не досягне точки  $\alpha$  (поки криві III не сумістяться з кривими I). Цей момент відповідає завершенню циклу ( $Q = Q_{\max}$ ).

Нарешті, інтегруючи осьову деформацію, визначимо переміщення поршня:

$$\delta^{\text{III}} = \delta_{\min}^{\text{II}} + \frac{a}{\pi R^2 E} \frac{2\varepsilon_2}{1+2\varepsilon_2} \frac{1}{\lambda} \left( \sqrt{Q_{\max}} - \sqrt{Q} \right)^2. \quad (3.84)$$

Нехай тепер  $0 \leq s \leq s_*$ . Тоді в зоні прямого проковзування  $\zeta \in [0, \beta]$  мають місце залежності (3.82), а в області зчеплення  $\zeta \in [\beta, 1]$  – напружений стан (3.75), зафіксований наприкінці розвантаження:

$$\begin{aligned}\sigma^{\text{III}}(\zeta) &= \sigma^{\text{II}}(\zeta) \Big|_{p=p_{\min}} = -\frac{P_{\min}}{1+2\varepsilon_2} e^{\lambda \zeta}, \\ \tau^{\text{III}}(\zeta) &= \tau^{\text{II}}(\zeta) \Big|_{p=p_{\min}} = \frac{f p_{\min}}{1+2\varepsilon_2} e^{\lambda \zeta},\end{aligned}$$



$$\sigma_{\zeta}^{III}(\zeta) = \sigma_{\zeta}^{II}(\zeta) \Big|_{\rho = \rho_{\min}} = -\rho_{\min} e^{\lambda \zeta}, \quad \zeta \in [\beta, 1].$$

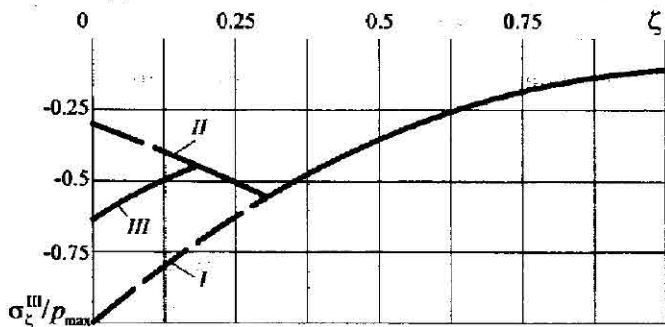
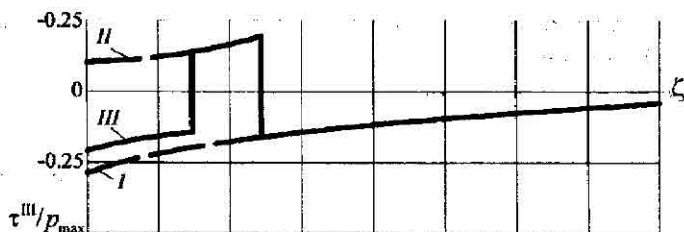
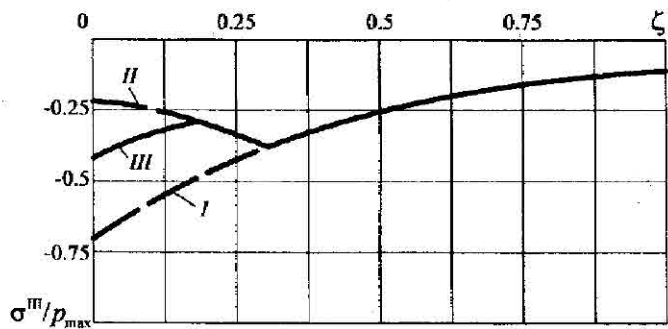


Рис. 3.9 Розподіл напружень на етапі повторного навантаження при  $1 \geq s \geq s_*$ .

Для обчислення параметра  $\beta$  та осадки на цьому етапі зберігаються відповідно формули (3.83) та (3.84). Характерний розподіл напружень ілюструється рис. 3.10.

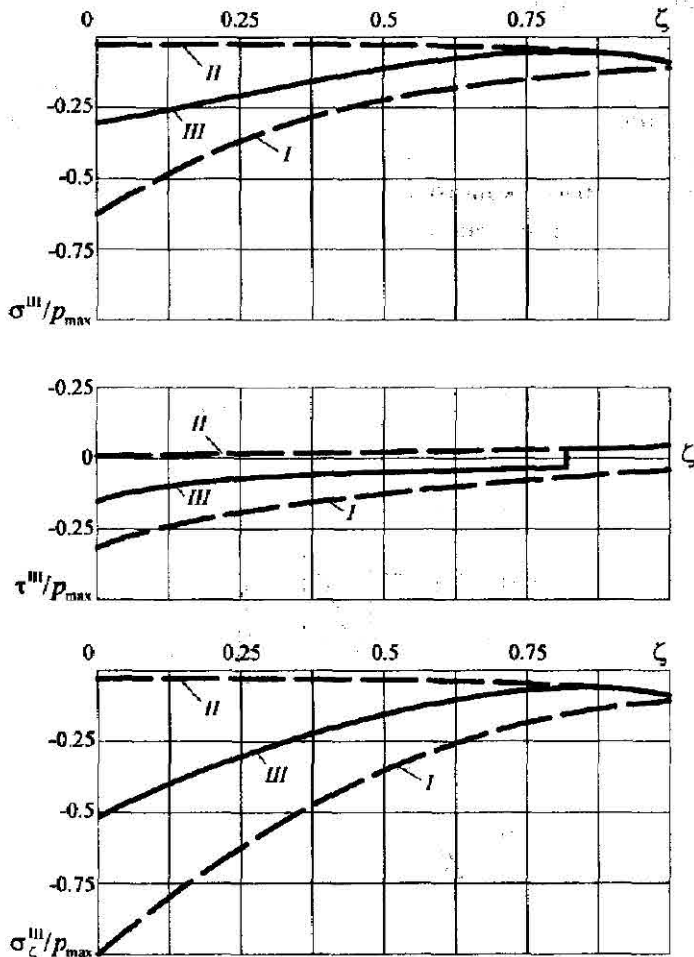


Рис. 3.10 Розподіл напружень на етапі повторного навантаження при  $0 \leq s \leq s_c$ .

Описаний випадок реалізується до того часу, поки точка  $\beta$  не досягне правого краю проміжку  $[0, 1]$ , що в термінах навантаження означає  $Q_{\min} \leq Q \leq Q_{\min}/s$ . При  $Q = Q_{\min}/s$  знову виходимо на режим навантаження з повним прямим проковзуванням на всій поверхні контакту.

Підіб'ємо підсумки дослідження, зібравши докупи вирази, які описують усі етапи циклу навантаження, та побудуємо петлю конструкційного демпфування (діаграму циклічного навантаження) рис. 3.11. Тут  $\bar{Q} = Q/Q_{\max}$ ,

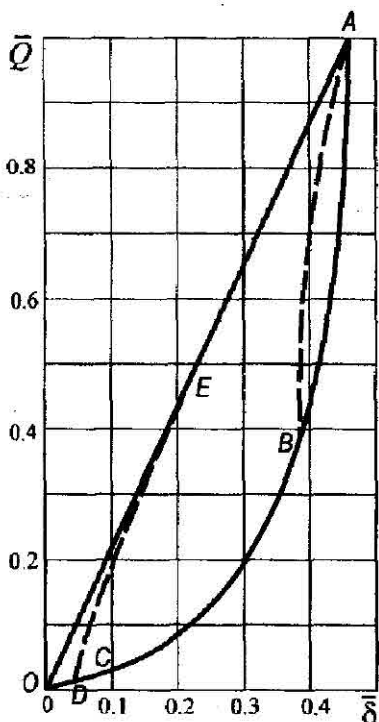


Рис. 3.11 Діаграма циклічного навантаження

$\bar{\delta} = c\delta / Q_{\max}$ , де  $c = \frac{\pi K^2 E}{a} \frac{1+2\varepsilon_2}{2\varepsilon_2}$  – лінійна жорсткість консервативної системи.

1. *Активне (початкове) навантаження* – лінійна ділянка  $OA$  ( $0 \leq Q \leq Q_{\max}$ ,  $\dot{Q} > 0$ ):

$$\delta^I = \frac{Q}{c} \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

2. *Розвантаження* ( $Q_{\max} \geq Q \geq 0$ ,  $\dot{Q} < 0$ ):

а) нелінійна ділянка  $ABC$  ( $Q_{\max} \geq Q \geq s_* Q_{\max}$ )

$$\delta^{II} = \delta_{\max}^I - \frac{1}{\lambda} \left( \sqrt{Q_{\max}} - \sqrt{Q} \right)^2;$$

б) лінійна ділянка  $CO$  ( $s_* Q_{\max} \geq Q \geq 0$ )

$$\delta^{II} = \frac{Q}{c} \frac{e^{\lambda} - 1}{\lambda}.$$

3. *Повторне навантаження* ( $Q_{\min} \leq Q \leq Q_{\max}$ ,  $\dot{Q} > 0$ ):

а) комбінована ділянка  $DFA$  ( $0 \leq s \leq s_*$ ):

– нелінійна ділянка ( $Q_{\min} \leq Q \leq Q_{\min}/s_*$ )

$$\delta^{III} = \delta_{\min}^{II} + \frac{1}{c\lambda} \left( \sqrt{Q} - \sqrt{Q_{\min}} \right)^2;$$

– лінійна ділянка (вихід на пряму активного навантаження) ( $Q_{\min}/s_* \leq Q \leq Q_{\max}$ )

$$\delta^{III} = \frac{Q}{c} \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda};$$

б) нелінійна ділянка  $BA$  ( $s_* \leq s \leq 1$ ):

$$\delta^{III} = \delta_{\min}^{II} + \frac{1}{c\lambda} (\sqrt{Q} - \sqrt{Q_{\min}})^2.$$

При  $s_* \leq s \leq 1$  петля гістерезису має структуру замкнутої кривої  $ABA$ , а при  $0 \leq s \leq s_*$  – кривої  $ABCD A$ .

Досягнуті співвідношення подамо в компактній підсумковій формі:

для активного навантаження

$$\delta^I = \frac{Q}{c} \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}, \quad 0 \leq Q \leq Q_{\max}; \quad (3.85)$$

для розвантаження

$$\delta^{II} = \begin{cases} \delta_{\max}^I - \frac{1}{c\lambda} (\sqrt{Q_{\max}} - \sqrt{Q})^2, & Q_{\max} \geq Q \geq s_* Q_{\max}; \\ \frac{Q}{c} \frac{e^{\lambda} - 1}{\lambda}, & s_* Q_{\max} \geq Q \geq 0; \end{cases} \quad (3.86)$$

для повторного навантаження

$$\delta^{III} = \begin{cases} \delta_{\min}^{II} + \frac{1}{c\lambda} (\sqrt{Q} - \sqrt{Q_{\min}})^2, \\ Q_{\min} \leq Q \leq \min\{Q_{\min}/s_*, Q_{\max}\}; \\ \delta^I, \quad \min\{Q_{\min}/s_*, Q_{\max}\} \leq Q \leq Q_{\max}. \end{cases} \quad (3.87)$$

Величину розсіяної за цикл енергії обчислимо як площу петлі конструкційного гістерезису. В результаті отримуємо

$$\psi = \begin{cases} \frac{Q_{\text{пmax}}^2}{3c\lambda} (1-s)(1-\sqrt{s})^2, & s \leq s \leq 1; \\ \frac{Q_{\text{пmax}}^2}{6c\lambda} \left[ (2+e^{-\lambda})(1-e^{-\lambda})^2 - s^2(e^{-\lambda}-1)^2(2+e^{-\lambda}) \right], & 0 \leq s \leq s. \end{cases} \quad (3.88)$$

На рис. 3.12 подана характерна залежність нормалізованої величини розсіяної енергії  $\tilde{\psi} = \psi/A$  від коефіцієнта асиметрії циклу, де  $A = Q_{\text{пmax}}^2/(2c)$  – енергія пружного деформування консервативної системи.

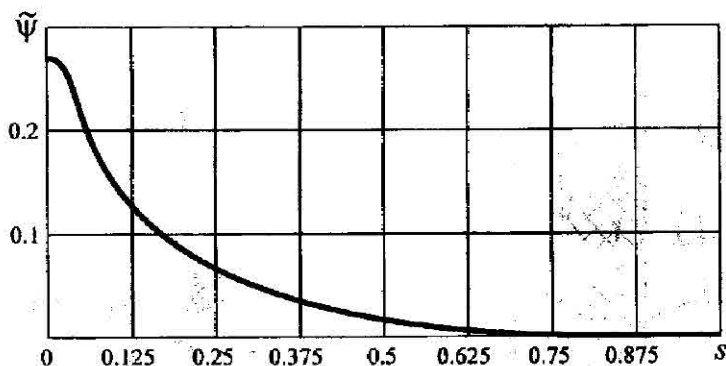


Рис. 3.12 Залежність нормалізованої величини розсіяної енергії від коефіцієнта асиметрії циклу

### 3.4. Розрахунок демпфера із зовнішньою розрізаною та внутрішньою суцільною оболонками

Практичне використання оболонкових пружин вказало на необхідність обладнання низки конструкцій поздовжнім наскрізним каналом, конче необхідним для виконання певних технологічних операцій (кріплення чи центрування пристрою, проходження робочої рідини, охолодження сис-

теми, тощо). Наприклад, в оболонкових пружинах бурових засобів віброзахисту наявність прохідного каналу зумовлена необхідністю прокачувати по бурильній колоні промивну рідину [35].

Для моделювання конструкцій такого типу розглянемо оболонкову систему рис. 3.13, складену з коаксіально встановлених суцільної внутрішньої оболонки 2 та розрізаної вздовж твірної зовнішньої оболонки 4, розділених деформівним заповнювачем 3, який стискається на торцях жорсткими кільцевими поршнями 1.

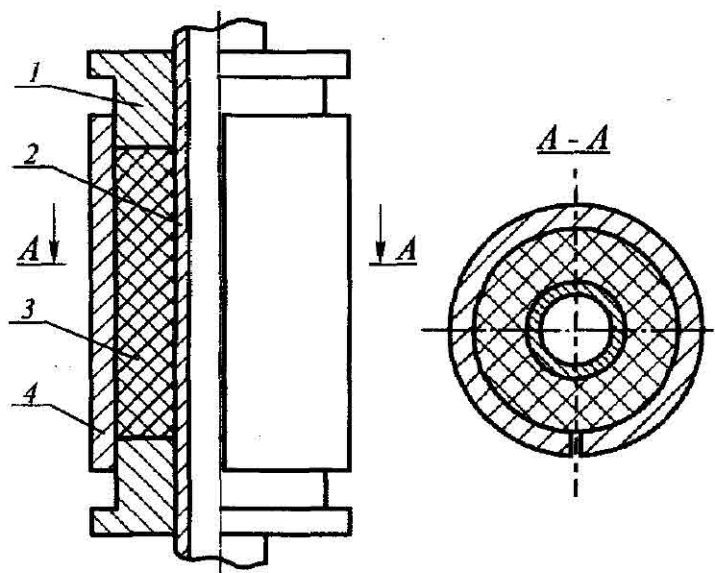


Рис. 3.13 Схема демфера з розрізаною оболонкою, обладнаного ствольом

Внаслідок симетрії конструкції відносно площини, рівновіддаленої від торців поршнів, розглянемо половину вихідної системи, зображену на рис. 3.14. Нехай порожнис-

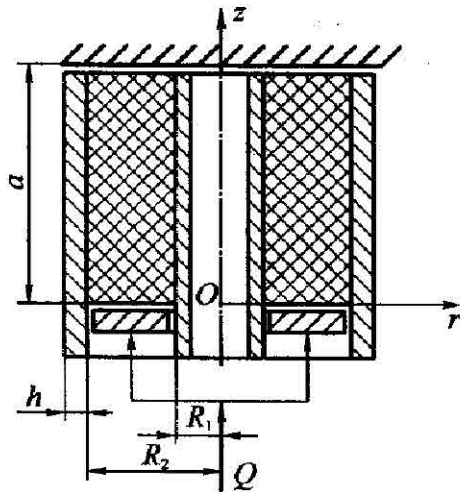


Рис. 3.14 Система коаксіальних циліндричних оболонок розділених заповнювачем

тий циліндр завдовжки  $a$  із зовнішнім радіусом  $R_1$  та внутрішнім радіусом  $R_2$  заповнює простір між коаксіально встановленими зовнішньою оболонкою завтовшки  $h$  та внутрішньою оболонкою. На один торець циліндра через абсолютно жорсткий гладкий поршень передається зовнішнє навантаження  $Q$ ; другий торець циліндра гладко впертий в жорстку перепону. Заповнювач та оболонки взаємодіють із сухим тертям.

Основний вклад у податливість системи буде вносити розкриття зовнішньої оболонки з розрізом вздовж твірної. Тому для моделювання пружного елемента приймемо такі припущення. Заповнювач вважаємо нестисливим, внутрішню оболонку – абсолютно жорсткою. Зовнішня оболонка з розрізом моделюється еквівалентною суцільною сильно ортотропною оболонкою, аналогічно як у § 3.2.



Зважаючи на прийняті припущення та використовуючи результати праці [100], запишемо усереднені рівняння рівноваги, рівняння нестисливості та закон Гука для деформівного заповнювача

$$\frac{d\sigma_\zeta}{d\zeta} + 2\alpha \frac{R_1\tau_1 - R_2\tau_2}{R_1^2 - R_2^2} = 0; \quad (3.89)$$

$$\frac{du}{d\zeta} + 2\alpha \frac{R_1w_1 - R_2w_2}{R_1^2 - R_2^2} = 0; \quad (3.90)$$

$$\frac{w_1}{R_1} = \frac{1}{E(R_1^2 - R_2^2)} \left\{ \left( \frac{3}{2}R_2^2 + \frac{1}{2}R_1^2 \right) \sigma_1 - 2R_2^2\sigma_2 \right\} - \frac{1}{2E}\sigma_\zeta, \quad (3.91)$$

$$\frac{w_2}{R_2} = \frac{1}{E(R_1^2 - R_2^2)} \left\{ 2R_1^2\sigma_1 - \left( \frac{3}{2}R_1^2 + \frac{1}{2}R_2^2 \right) \sigma_2 \right\} - \frac{1}{2E}\sigma_\zeta.$$

Тут  $\zeta = z/a \in [0, 1]$ ,  $\sigma_\zeta$  і  $u$  – осьове напруження та переміщення,  $w_1, w_2$  – радіальні переміщення зовнішньої та внутрішньої бічних поверхонь заповнювача,  $\sigma_j, \tau_j$  – нормальні та дотичні контактні напруження на поверхнях контакту  $r = R_j$  ( $j=1,2$ ),  $E$  – модуль Юнга матеріалу заповнювача.

Крайові умови на торцях порожнистого циліндра мають вигляд:

$$\sigma_\zeta(0) = -p \equiv -\frac{Q}{\pi(R_1^2 - R_2^2)}, \quad u(1) = 0. \quad (3.92)$$

Для зовнішньої ортотропної оболонки, використавши співвідношення (3.90) і (3.92) при закладених припущеннях, одержимо:

$$w_1^{(1)} = -\frac{\sigma_1 R_1^2}{\bar{E}_e h}, \quad \zeta \in (0,1), \quad \bar{E}_e = \frac{1}{18} \frac{h^2}{R_1^2} E_0, \quad (3.93)$$

де  $E_0$  – модуль Юнга матеріалу оболонки з розрізом.

Для жорсткого ствола

$$w_2^{(2)} = 0, \quad \zeta \in (0,1). \quad (3.94)$$

На поверхнях контакту заповнювач та оболонки взаємодіють з кулонівським тертям:

$$w_i = w_i^{(i)}, \quad \sigma_i \leq 0,$$

$$\tau_i = f_i \sigma_i, \quad i = 1, 2, \quad \zeta \in [0,1], \quad (3.95)$$

де  $f_i$  – коефіцієнт тертя на поверхнях  $r = R_i$ .

Через те, що ствол вважається абсолютно жорстким, а ортотропна оболонка – недеформівною в напрямку  $z$ , ділянка проковзування охоплює усю область контакту.

Задовольнивши за допомогою формули (3.91) кінематичні умови контакту (3.93), (3.94), отримаємо співвідношення:

$$\frac{1}{E(R_1^2 - R_2^2)} \left\{ \left( \frac{3}{2} R_2^2 + \frac{1}{2} R_1^2 \right) \sigma_1 - 2R_2^2 \sigma_2 \right\} - \frac{1}{2E} \sigma_\zeta = -\frac{R_1^2}{\bar{E}_e h} \sigma_1,$$

$$\frac{1}{E(R_1^2 - R_2^2)} \left\{ 2R_1^2 \sigma_1 - \left( \frac{3}{2} R_1^2 + \frac{1}{2} R_2^2 \right) \sigma_2 \right\} - \frac{1}{2E} \sigma_\zeta = 0.$$

Звідси можемо виразити зв'язок між контактними напруженнями  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  та осьовим  $\sigma_\zeta$ :

$$\sigma_1 = \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^2(1+2\bar{\varepsilon}_2) - R_2^2\left(1 - \frac{2}{3}\bar{\varepsilon}_2\right)} \sigma_\zeta,$$

$$\sigma_2 = \frac{(R_1^2 - R_2^2)\left(1 - \frac{2}{3}\bar{\varepsilon}_2\right)}{R_1^2(1+2\bar{\varepsilon}_2) - R_2^2\left(1 - \frac{2}{3}\bar{\varepsilon}_2\right)} \sigma_\zeta, \quad (3.96)$$

де  $\bar{\varepsilon}_2 = \frac{LR_1}{E_0 h} = 18 \frac{ER_1^3}{E_0 h^3}$ .

Підставляючи формули (3.95) та (3.96) у співвідношення (3.89), одержуємо диференціальне рівняння для осьового напруження

$$\frac{d\sigma_\zeta}{d\zeta} + \bar{\lambda}\sigma_\zeta = 0, \quad \zeta \in (0,1), \quad (3.97)$$

де параметр експоненціального згасання осьових та контактних напружень

$$\bar{\lambda} = 2a \frac{f_1 R_1 + f_2 R_2 \left(1 - \frac{2}{3}\bar{\varepsilon}_2\right)}{R_1^2(1+2\bar{\varepsilon}_2) - R_2^2\left(1 - \frac{2}{3}\bar{\varepsilon}_2\right)}. \quad (3.98)$$

Розв'язок рівняння (3.97) при першій крайовій умові (3.92) дається формулою

$$\sigma_\zeta(\zeta) = -pe^{-\bar{\lambda}\zeta}, \quad \zeta \in (0,1). \quad (3.99)$$

За основним результатом (3.99) на основі співвідношень (3.90), (3.91), (3.95), (3.96) можемо знайти всі характеристики системи.

Зокрема, для контактних напружень та для осадки штовхача одержимо формули:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -p \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^2 (1 + 2\bar{\epsilon}_2) - R_2^2 \left(1 - \frac{2}{3}\bar{\epsilon}_2\right)} e^{-\bar{\lambda}\zeta}, \\ \tau_1 &= -f_1 p \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^2 (1 + 2\bar{\epsilon}_2) - R_2^2 \left(1 - \frac{2}{3}\bar{\epsilon}_2\right)} e^{-\bar{\lambda}\zeta}, \\ \sigma_2 &= -p \frac{(R_1^2 - R_2^2) \left(1 - \frac{2}{3}\bar{\epsilon}_2\right)}{R_1^2 (1 + 2\bar{\epsilon}_2) - R_2^2 \left(1 - \frac{2}{3}\bar{\epsilon}_2\right)} e^{-\bar{\lambda}\zeta}, \\ \tau_2 &= -f_2 p \frac{(R_1^2 - R_2^2) \left(1 - \frac{2}{3}\bar{\epsilon}_2\right)}{R_1^2 (1 + 2\bar{\epsilon}_2) - R_2^2 \left(1 - \frac{2}{3}\bar{\epsilon}_2\right)} e^{-\bar{\lambda}\zeta}; \quad (3.100)\end{aligned}$$

$$\delta = u(0) = \frac{pa}{E} \frac{2\bar{\epsilon}_2 R_1^2}{R_1^2 (1 + 2\bar{\epsilon}_2) - R_2^2 \left(1 - \frac{2}{3}\bar{\epsilon}_2\right)} \frac{1 - e^{-\bar{\lambda}}}{\bar{\lambda}}. \quad (3.101)$$

Порівнюючи максимальні напруження в ортотропній оболонці з еквівалентним допустимим

$$\frac{QR_1}{\pi h \left( R_1^2 (1 + 2\bar{\varepsilon}_2) - R_2^2 \left( 1 - \frac{2}{3}\bar{\varepsilon}_2 \right) \right)} \leq \frac{h [\sigma]}{R_1 12},$$

одержимо формулу для максимального експлуатаційного навантаження

$$Q_{\max} \leq \frac{\pi h^2}{12} [\sigma] \left\{ 1 + 2\bar{\varepsilon}_2 - \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( 1 - \frac{2}{3}\bar{\varepsilon}_2 \right) \right\}. \quad (3.102)$$

Підіб'ємо підсумки отриманих результатів. Як слідує із формул (3.100), контактний тиск на стволі є завжди меншим, аніж на зовнішній оболонці. Цей ефект настільки відчутний, що для податливих оболонок (великі  $\bar{\varepsilon}_2$ ) може проявлятися явище відлипання заповнювача від внутрішньої оболонки. Щоб цього не сталося, тобто, щоб забезпечити умову  $\sigma_2 < 0$ , повинна виконуватись нерівність  $(1 - 2/3\bar{\varepsilon}_2) > 0$ , або

$$\bar{\varepsilon}_2 < 1,5. \quad (3.103)$$

Вплив ствола виявляє себе також у тому, що наявність тертя на внутрішній поверхні контакту призводить до суттєвого збільшення параметра  $\bar{\lambda}$  експоненціального згасання осьових та контактних напружень (див.(3.98)). Цей ефект підсилюється із зростанням  $R_2$ .

Як видно з формул (3.101) та (3.102), наявність внутрішньої оболонки призводить до незначного підвищення податливості пружного елемента та до зниження його утримувальної здатності.

Отже, ці результати є якісно аналогічними до одержаних в п. 3.2 і відрізняються від них лише кількісними поправками. Це дає можливість стверджувати, що петля

конструкційного гістерезису для оболонкового демпфера з внутрішньою оболонкою буде також описуватись співвідношеннями (3.85)–(3.88), в яких слід прийняти для жорсткості консервативної системи замість

$$c = \frac{\pi R^2 E}{a} \frac{1 + 2\varepsilon_2}{2\varepsilon_2}$$

вираз

$$\bar{c} = \frac{\pi(R_1^2 - R_2^2)E}{a} \frac{1 + 2\bar{\varepsilon}_2 - R_2^2/R_1^2(1 - 2\bar{\varepsilon}_2/3)}{2\bar{\varepsilon}_2},$$

а замість показника загасання  $\lambda$  відповідний вираз (3.98) для  $\bar{\lambda}$ .

Таким чином, мета цього розділу досягнута. Отримані результати дозволяють оцінити поведінку демпферів з робочою ланкою у вигляді циліндричної оболонки із розрізом вздовж твірної в умовах циклічного навантаження та проводити інженерний розрахунок їх податливості і утримувальної здатності, орієнтований на практичні потреби використання та ефективної експлуатації.

## РОЗДІЛ 4

### ДОСЛІДЖЕННЯ ВЗАЄМОДІЇ ПРОРІЗАНИХ ОБОЛОНОК З ПРУЖНИМ ТІЛОМ ЗАСОБАМИ ВІРТУАЛЬНОГО ТА ЛАБОРАТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Метою цього розділу є перевірка адекватності одновимірних моделей контактної взаємодії розрізаної та прорізної оболонки з пружним тілом шляхом ідентифікації низки результатів одержаних методом скінченних елементів та за допомогою лабораторного експерименту з окремими результатами аналітичних розв'язків.

#### 4.1 Скінченно-елементний аналіз

На сьогодні відома ціла низка підходів щодо вирішення контактних задач з урахуванням тертя методом скінченних елементів. Загалом при застосуванні будь-якого підходу основна складність розв'язування таких задач полягає у виконанні умов непроникнення, а також додаткових кінематичних умов на заздалегідь невідомих межах. Для виконання умов контакту при скінченно-елементній реалізації часто застосовують метод множників Лагранжа, метод штрафу (penalty method), узагальнений метод множників Лагранжа (Augmented Lagrange Method), пряме розв'язування варіаційної задачі методами квадратичного програмування тощо [51, 171, 172, 183, 184].

Найбільш простий з алгоритмічної точки зору прийом заснований на обчисленні коефіцієнтів взаємного впливу точок контактуючих тіл в нормальному і дотичному напрямках. За допомогою класичного методу сил для опису рівноваги кожного тіла знаходиться розподіл контактних напружень. Пізніше отримані значення контактних напружень використовуються як граничні умови для ви-

значення напруженого стану контактної пари. Межі контактних ділянок та ділянок проковзування знаходять ітераційним шляхом. Поряд з відносною простотою такий метод не позбавлений недоліків, основним з яких є необхідність розв'язування задачі на етапі визначення коефіцієнтів податливості  $2n$  разів, де  $n$  – число точок контакту [184].

Ще одна група методів розв'язання контактних задач методом скінченних елементів базується на тому, що умови взаємодії між тілами моделюються за допомогою співвідношень фізично нелінійних задач механіки твердого тіла. Зазвичай тут проводиться аналогія механіки контактної середовища із законами пластичності і повзучості. Переваги такого підходу є відчутними при вирішенні контактних задач пружнопластичності [183].

Інший підхід полягає у використанні спеціальних з'єднувальних чи розривних елементів, що моделюють діаграму сила – переміщення на поверхнях розмежування контактуючих тіл [172].

Дієвими є способи розв'язування контактної задачі без використання будь-яких аналогій і стикувальних елементів. Тут контактуючі тіла розглядаються як окремі елементи. Загальну систему рівнянь доповнюють певною кількістю рівнянь сумісності, яка є кратною до числа контактуючих вузлів. Для отримання розв'язків застосовується покроковий процес навантаження з уточненням граничних умов на кожному кроці ітераційним методом. Прирости навантаження вибираються малими, щоб зберегти лінійний зв'язок між переміщеннями та деформаціями в межах кожного кроку навантаження. Саме такий підхід, що вимагає багаторазового розв'язування крайової задачі та використання ітераційних алгоритмів корегування граничних умов, обрали тут для отримання числових розв'язків.

Розглянули задачу про фрикційну взаємодію пружно-го заповнювача  $(r, \beta, z) \in [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, l/2]$  із пружною



оболонкою  $(r, \beta, z) \in [R, R+h] \times [0, 2\pi] \times [0, l_0/2]$  за стиску заповнювача гладкими абсолютно жорсткими поршнями із силою  $Q$ .

Тривимірну контактну задачу теорії пружності розв'язували за таких крайових умов.

На поверхні контакту  $r = R$ ,  $\beta \in [0, 2\pi]$ ,  $|z| \in [0, l/2]$

$$\begin{cases} \sigma_r \leq 0, [u_r] = 0; \\ \sigma_r = 0, [u_r] \geq 0, \end{cases} \begin{cases} \bar{\tau}_r = f \sigma_r \frac{[\bar{v}]}{[\bar{v}]}, [\bar{v}] \neq 0; \\ |\bar{\tau}_r| \leq -f \sigma_r, [\bar{v}] = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

На торцях заповнювача:

при  $r \in [0, R]$ ,  $\beta \in [0, 2\pi]$ ,  $z = l/2$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma_r r dr d\beta = -Q, \bar{\tau}_z = 0, u_z = -\delta; \quad (4.2)$$

при  $r \in [0, R]$ ,  $\beta \in [0, 2\pi]$ ,  $z = 0$

$$\bar{\tau}_z = 0, u_z = 0. \quad (4.3)$$

Зовнішня поверхня оболонки та грані розрізу вільні від напружень:

при  $r = R+h$ ,  $\beta \in [0, 2\pi]$ ,  $z \in [0, l_0/2]$

$$\sigma_z = 0, \bar{\tau}_r = 0; \quad (4.4)$$

при  $r \in [R, R+h]$ ,  $\beta = 0, 2\pi$ ,  $z \in [0, l_0/2]$

$$\sigma_\beta = 0, \bar{\tau}_\beta = 0. \quad (4.5)$$

На торцях оболонки:

при  $r \in [R, R+h]$ ,  $\beta \in [0, 2\pi]$ ,  $z = l_0/2$

$$\sigma_z = 0, \bar{\tau}_z = 0; \quad (4.6)$$

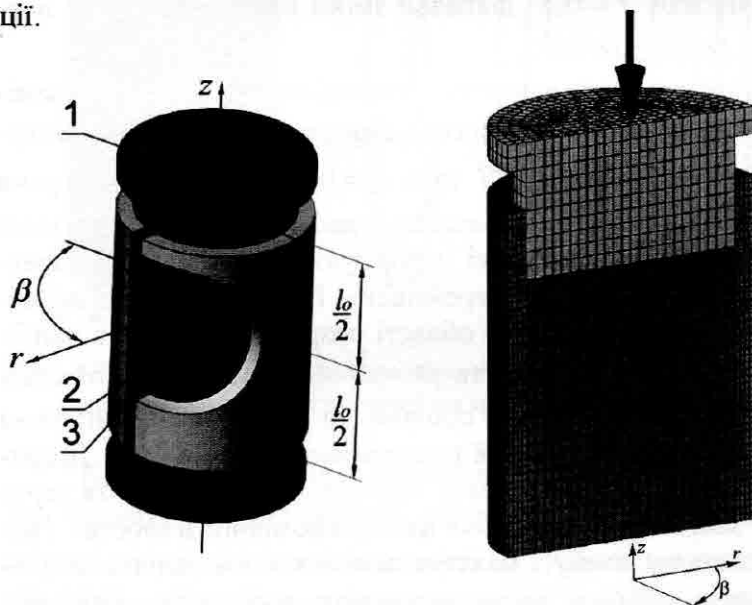
при  $r \in [R, R+h]$ ,  $\beta \in [0, 2\pi]$ ,  $z = 0$

$$u_z = 0, \bar{\tau}_z = 0. \quad (4.7)$$

Тут  $\sigma_r, \sigma_\beta, \sigma_z$  – компоненти нормальних, а  $\vec{\tau}_r, \vec{\tau}_\beta, \vec{\tau}_z$  – вектори дотичних напружень на контактних поверхнях,  $u_r, u_z$  – компоненти переміщення;  $[\vec{v}]$  – вектор швидкості взаємного проковзування, а  $[u_r]$  – стрибок переміщень на поверхні контакту  $r=R$ ;  $f$  – коефіцієнт тертя;  $l, R$  – довжина та радіус заповнювача;  $l_o, h$  – довжина та товщина оболонки.

Для даного дослідження скористалися гексагональними восьмивузловими елементами з лінійними функціями форми. Тіла, що контактують, подали як окремі масиви скінченних елементів із заздалегідь визначеною кількістю вузлів в області контакту.

На рис. 4.1 подано схему скінченно-елементного розбиття оболонки і заповнювача [36] для половини конструкції.

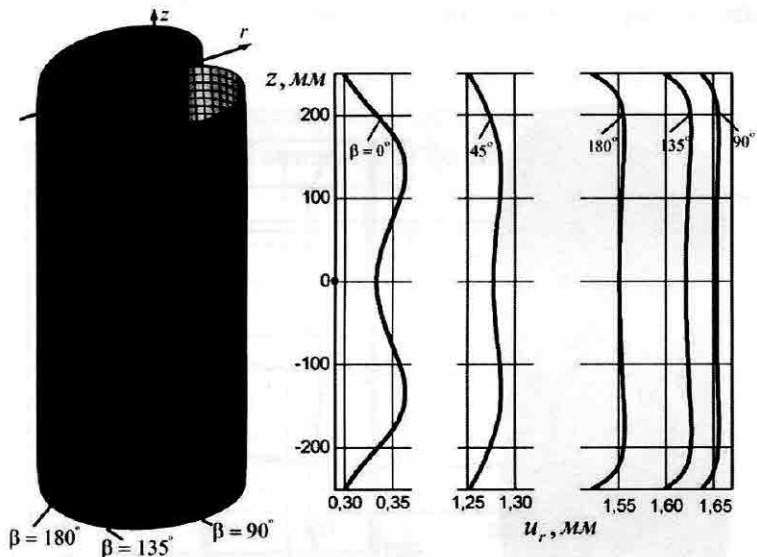


**Рис. 4.1.** Схема скінченно-елементної моделі контактної взаємодії розрізаної оболонки з пружним тілом:  
 1 – жорсткий поршень; 2 – оболонка з розрізом вздовж твірної; 3 – слабостисливий заповнювач

Проілюструємо декілька характерних результатів графічно. Як приклад, розглядали систему з такими параметрами: матеріал оболонки – сталь конструкційна легована 40ХНМА (межа текучості –  $\sigma_T = 950 \text{ МПа}$ , модуль Юнга –  $2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ , модуль зсуву –  $8 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ , коефіцієнт Пуассона – 0,31); заповнювач – сира гума підвищеної маслобензостійкості марки 7-3826С (модуль Юнга –  $2 \cdot 10^7 \text{ Па}$ , модуль зсуву –  $7 \cdot 10^6 \text{ Па}$ , коефіцієнт Пуассона – 0,4995); внутрішній радіус оболонки  $R = 0,08 \text{ м}$ ; довжина оболонки  $0,5 \text{ м}$ ; довжина заповнювача –  $0,4 \text{ м}$ ; товщина стінки оболонки  $h = 0,015 \text{ м}$ ; коефіцієнт тертя пари оболонка-заповнювач  $f = 0,5$ , діапазон зміни навантаження на поршень  $Q = 0 \dots 100 \text{ кН}$ .

На рис. 4.2 наведено розподіли радіальних переміщень  $u_r$  оболонки з розрізом вздовж твірної для характерних значень азимута  $\beta$  при  $l_0 = 0,5 \text{ м}$ . Об'ємна діаграма візуалізує неосесиметричність деформування розрізаної оболонки, а окремі криві інформують про кількісні характеристики радіальних переміщень. Найменші радіальні переміщення виникають в області розрізу оболонки, а найбільші при значенні азимута  $\beta = 90^\circ$ . В результаті контактної взаємодії заповнювача з оболонкою радіальні переміщення оболонки уздовж твірної розподілені нерівномірно. Додатковий аналіз показав, що зі збільшенням коефіцієнта тертя пари заповнювач-оболонка ця нерівномірність зростає. При фіксованому азимуті максимальні значення радіальних переміщень робочої ланки, виникають в областях, близьких до площин торців поршнів. З віддаленням від торців поршнів радіальні переміщення зменшуються. Це вказує на те, що збільшення довжини оболонки та заповнювача, не су-

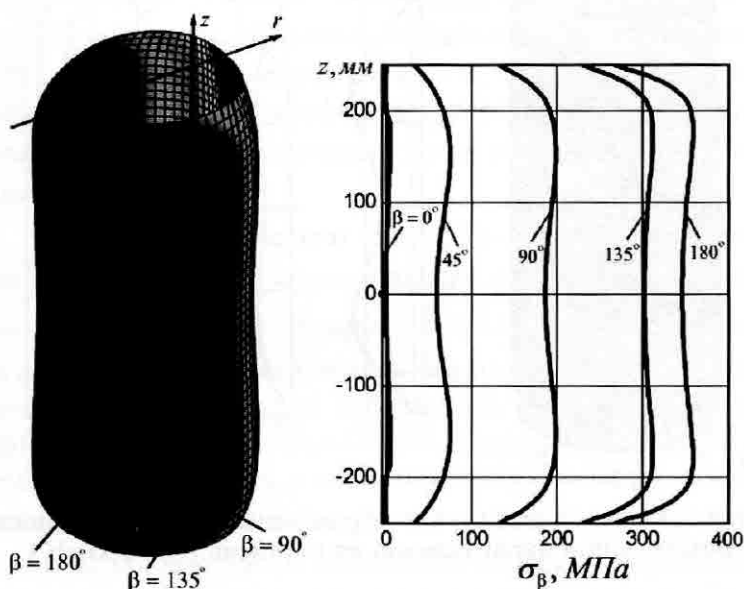
проводжуватиметься постійним збільшенням податливості конструкції (автори переконалися в цьому, змінюючи довжину моделі). Слід звернути увагу на те, що осьові переміщення оболонки порівняно з радіальними досить малі і істотно не впливають на експлуатаційні характеристики пружного елемента. Тому характер зміни їх величин тут не показаний.



**Рис. 4.2.** Розподіл радіальних переміщень несучої оболонки з розрізом при навантаженні на поршень ( $Q = 100 \text{ кН}$ )

На рис. 4.3 подано розподіли кільцевих напружень  $\sigma_\beta$  на внутрішній поверхні розрізаної оболонки уздовж твірної для різних значень азимута  $\beta$ . Аналіз напруженого стану матеріалу оболонки вказує на те, що саме ці напруження є визначальними щодо оцінки міцності несучої ланки. Деформування розрізаної оболонки в умовах контактної взаємодії із заповнювачем призводить до зміни значень

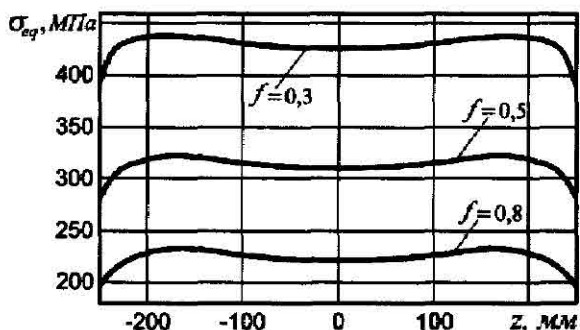
кільцевих напружень за товщиною оболонки. Зокрема на її внутрішній поверхні виникають найбільші кільцеві напруження розтягу (на зовнішній – стиску), найнебезпечнішим є поздовжній перетин при  $\beta = 180^\circ$ . Характер зміни значень кільцевих напружень уздовж твірної якісно схожий на характер зміни радіальних переміщень. Вочевидь найбільш навантаженими виявляються поперечні перерізи, які розташовані поблизу торців поршнів.



**Рис. 4.3. Розподіл кільцевих напружень на внутрішній поверхні несучої оболонки з розрізом ( $Q = 100 \text{ кН}$ )**

Під час експлуатації оболонкової пружини з розрізом переважна більшість матеріалу оболонки перебуває в складному напруженому стані. Для оцінки міцності ми використовували класичний енергетичний критерій Губера-Мізеса.

На рис. 4.4 подано розподіли еквівалентних напружень в найбільш небезпечному поздовжньому перетині оболонки з розрізом (внутрішня поверхня оболонки з азимутом  $\beta = 180^\circ$ ). Коефіцієнт тертя між заповнювачем та розрізаною оболонкою варіювався  $f = 0,3; 0,5; 0,8$ . Аналіз таких залежностей вказує на те, що граничний стан розрізаної оболонки найперше досягається на її внутрішній поверхні в області торців поршнів. Зі зменшенням коефіцієнта тертя між заповнювачем і оболонкою запас міцності конструкції зменшується. Зокрема, для коефіцієнта тертя  $f = 0,8$  коефіцієнт запасу міцності конструкції становить 4,1, а при  $f = 0,3$  він знижується до значення 2,2.



**Рис. 4.4.** Еквівалентні напруження на внутрішній поверхні несучої оболонки з розрізом при азимуті  $\beta = 180^\circ$

На початковому етапі аналізу напружено-деформованого стану та при побудові залежностей поданих на рис. 4.2 – 4.4 зовнішнє навантаження ми вважали сталим, або таким, що монотонно зростає. Наступний етап досліджень був присвячений аналізу гістерезису, який виникає в системі розрізана оболонка – пружне тіло у відповідь на вплив зовнішнього немонотонного навантаження [36, 37].

Для декількох історій зміни зовнішнього навантаження побудували діаграми деформування пружного елемента (рис. 4.5 та рис. 4.6).

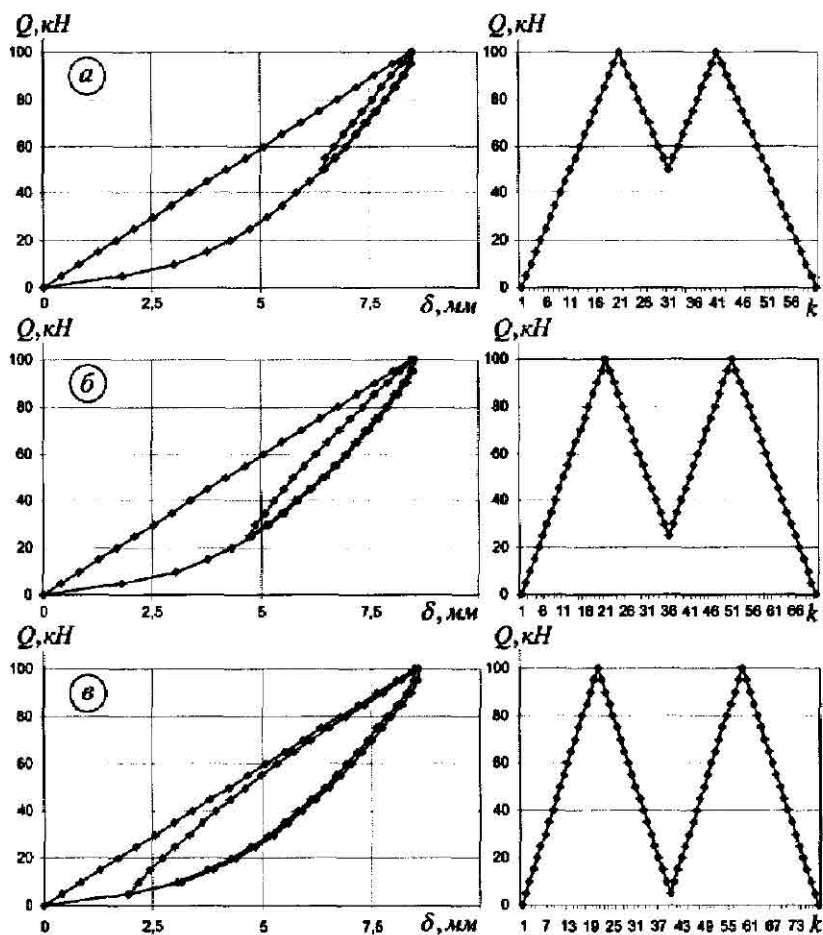


Рис. 4.5. Діаграми деформування пружного елемента за різних коефіцієнтів асиметрії циклу навантаження:  
 $a - s = 0,5$ ;  $b - s = 0,25$ ;  $v - s = 0,05$

Маючи діаграми демпфування, можемо за відомою історією навантаження спрогнозувати поведінку пружного елемента в довільний момент часу, а також оцінити величину поглинутої енергії. На рис. 4.5 та рис. 4.6 ліворуч подано власне петлі демпфування, праворуч – історії навантаження (тут  $k$  – кількість інтервалів навантаження).

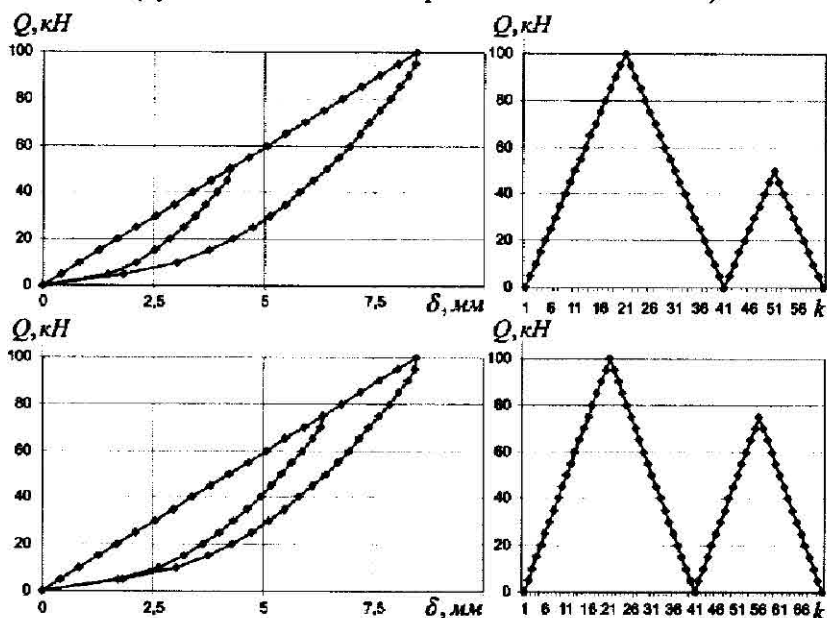


Рис. 4.6. Діаграми деформування пружного елемента (віднульовий цикл навантаження)

На рис. 4.7 проілюстровано вплив зміни величини коефіцієнта тертя пари заповнювач – розрізана оболонка на вигляд діаграм деформування пружного елемента. На графіках яскраво виражений очікуваний ефект збільшення податливості оболонкової пружини при зниженні коефіцієнта тертя між заповнювачем і оболонкою. Втрата підведена до пружного елемента енергії за цикл навантаження чисельно дорівнює площі петлі демпфування. При фіксованій амплі-



туді циклу із збільшенням коефіцієнта тертя пари заповнювач-оболонка кількість розсіяної за цикл енергії поступово зменшується (наприклад, площа петлі демпфування при  $f = 0,8$  візуально явно менша, ніж при  $f = 0,3$  ).

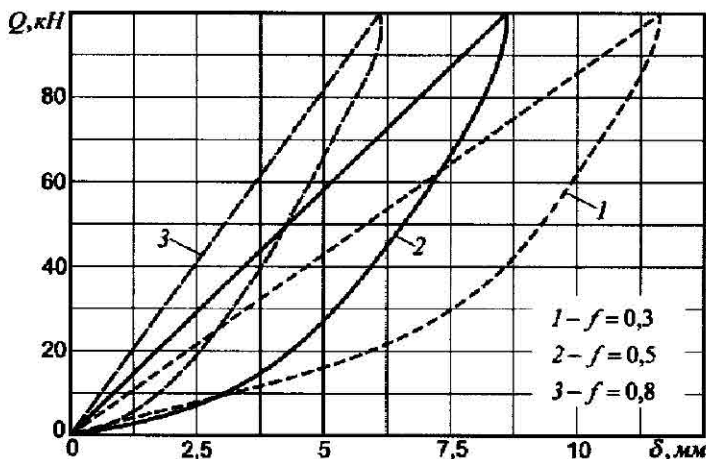
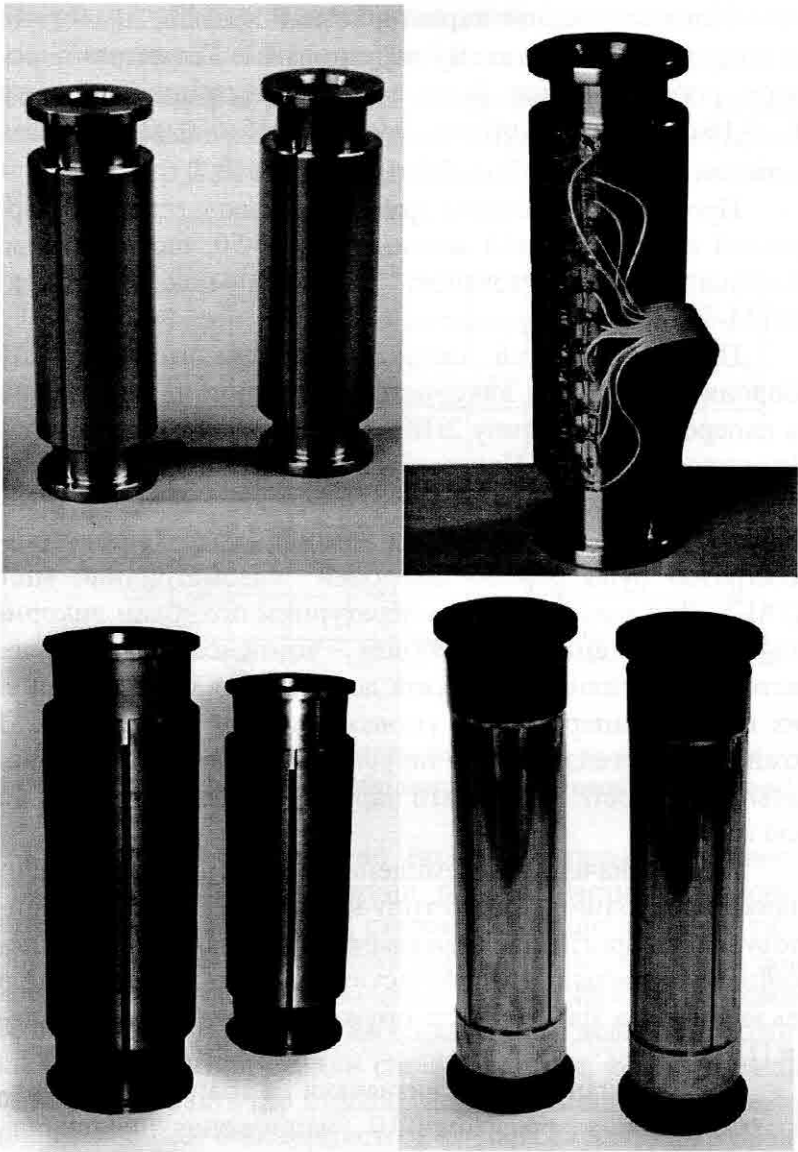


Рис. 4.7. Діаграми деформування пружного елемента для різних коефіцієнтів тертя контактної пари

Розглядаючи сумісно графічні залежності подані на рис. 4.4 та рис. 4.5 – рис. 4.7 і варіюючи на стадії проектування геометричні та трибологічні параметри оболонкової пружини, для кожної конкретної моделі можна забезпечити баланс достатньої міцності і необхідного рівня демпфування [38].

#### 4.2 Результати лабораторного експерименту

Лабораторні зразки виготовляли на серійному обладнанні вітчизняного виробництва, точність виготовлення зразків контролювалась мікрометром. Також для експерименту використовували пружні елементи реальних машинобудівних конструкцій (рис. 4.8). Застосовували уже апробовану методику лабораторних досліджень зразків такого типу [182].



**Рис. 4.8. Зразки оболонкових пружних елементів**

Фізико-механічні характеристики зразків, аналогічні до поданих у попередньому параграфі 4.1. Геометричні розміри робочих ланок були такими: внутрішній діаметр  $d = 0,16\text{ м}$ , товщини стінок:  $0,01\text{ м}$ ;  $0,015\text{ м}$ ;  $0,02\text{ м}$ ;  $0,025\text{ м}$ , довжини оболонок:  $0,2\text{ м}$ ;  $0,3\text{ м}$ ;  $0,4\text{ м}$ ;  $0,5\text{ м}$ ;  $0,6\text{ м}$ ;  $0,7\text{ м}$ .

Процес навантаження зразків здійснювався на універсальній випробувальній машині типу Р-50, що додатково обладнана автоматизованою вимірною системою ASTM-Digital.

При дослідженні напружено-деформованого стану оболонкових пружин використовували дротяні тензодавачі на паперовій основі типу 2ПКБ з базою  $10\text{ мм}$  та номінальним опором  $100\text{ Ом}$ . Наклеєні на оболонку від 25 до 50 давачів підбирались з однієї партії так, щоб забезпечити мінімальне відхилення опору від номінального. За пристрій-реєстратор було обрано цифровий тензометричний міст ЦТМ-5. Для запобігання температурним похибкам використано метод схемної компенсації – компенсаційні тензорезистори виносились до об'єкта дослідження і перебували в тих самих температурних умовах, що й активні давачі. З кожної групи тензодавачів таруванню піддавали 5% від загальної кількості. Результати тарування поширювались на всю групу.

Для визначення переміщень використовувався набір індикаторів годинникового типу ИЧ 10 МН. Також використовувались оригінальні тензометричні давачі лінійних переміщень у вигляді пластинчастих пружинних елементів з наклеєними на пластинчасті пружини електротензодавачами [182].

Кільцеві напруження визначали на зовнішній поверхні оболонки з розрізом. Ці напруження виявились від'ємними. Їх найбільші за модулем значення виникали в поздовжньому перерізі оболонки з азимутом  $\beta = 180^\circ$ . Ра-

діальні переміщення зовнішньої поверхні оболонки виявились максимальними при  $\beta = 90^\circ$  та  $\beta = 270^\circ$ . На рис. 4.9 подано характерні розподіли кільцевих напружень та радіальних переміщень за довжиною твірної оболонки (товщина оболонки 0,015 м; навантаження на пружний елемент 100 кН).

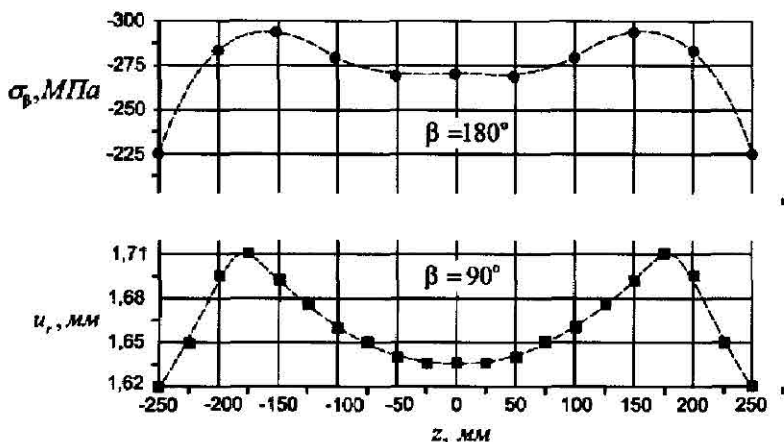
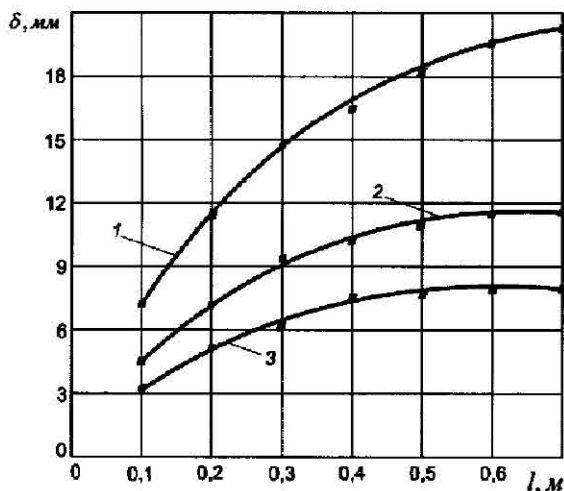


Рис. 4.9. Розподіл кільцевих напружень та радіальних переміщень в розрізаній оболонці (експериментальні дані)

На рис. 4.10 наведено експериментальні залежності осадки поршнів від довжини робочої частини оболонки пружного елемента. При сталому коефіцієнті тертя пари оболонка-заповнювач осадка поршнів зі збільшенням довжини робочої частини оболонки швидко зростає до певного значення  $l$ . З подальшим збільшенням довжини оболонки темп зростання осадки сповільнюється, або ж вона залишається практично сталою, незалежно від росту довжини. Таке явище спостерігається порівняно швидше в пружних елементах з більшою товщиною стінки оболонки. Очевидно, це пов'язане з тим, що в пружному елементі з біль-

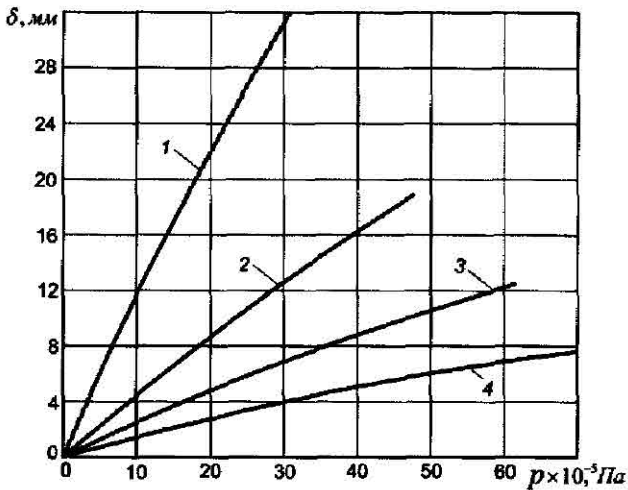
шою товщиною оболонки зменшується довжина зони проковзування.



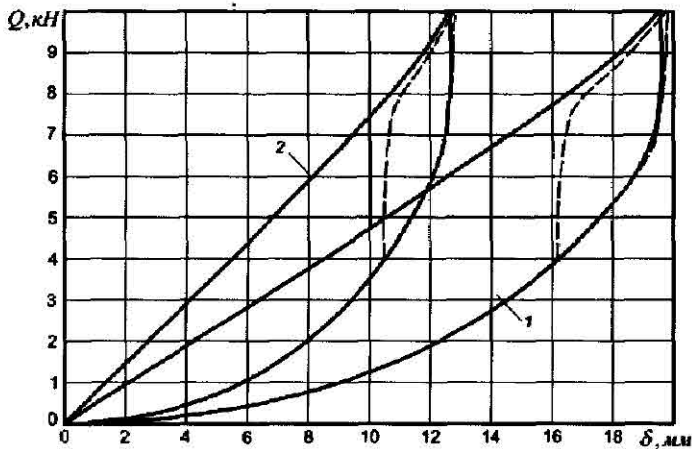
**Рис. 4.10.** Залежність осадки пружного елемента від довжини оболонки (експериментальні дані):  
 1 –  $Q=100 кН$ ,  $h=0,015 м$ ; 2 –  $Q=120 кН$ ,  $h=0,02 м$ ;  
 3 –  $Q=150 кН$ ,  $h=0,025 м$

Діаграмні залежності “навантаження – осадка поршнів” для різних товщин оболонок, які подані на рис. 4.11, показують, що пружні елементи з меншою товщиною стінки оболонки очікувано забезпечують більшу осадку поршнів, а отже податливішими. Слід зауважити, що зміна кута нахилу віток до осей координат нелінійно залежить від товщини оболонки.

На рис. 4.12 зображено експериментальні петлі демпфування пружного елемента з розрізаною оболонкою для різних значень коефіцієнта тертя пари оболонка–заповнювач. Штриховою лінією позначено криві, що відповідають етапу повторного навантаження.



**Рис. 4.11.** Залежність осадки поршнів пружного елемента від  $p$  (експериментальні дані):  $l = 0,5 \text{ м}$ ;  
 $1 - h = 0,01 \text{ м}$ ;  $2 - h = 0,015 \text{ м}$ ;  $3 - h = 0,02 \text{ м}$ ;  $4 - h = 0,025 \text{ м}$



**Рис. 4.12.** Експериментальні петлі демпфування (оболонка з розрізом):  
 $h = 0,015 \text{ м}$ ,  $l = 0,5 \text{ м}$ ,  $1 - f = 0,5$ ;  $2 - f \approx 0,8$

Петлі демпфування пружного елемента з прорізами подано на рис. 4.13 [21]. Принципова схема зразків, які випробовувались, зображена на рис. 2.1. Внутрішній діаметр прорізаної оболонки 0,142 м, а зовнішній діаметр ствола 0,06 м, довжина прорізів 0,4 м.

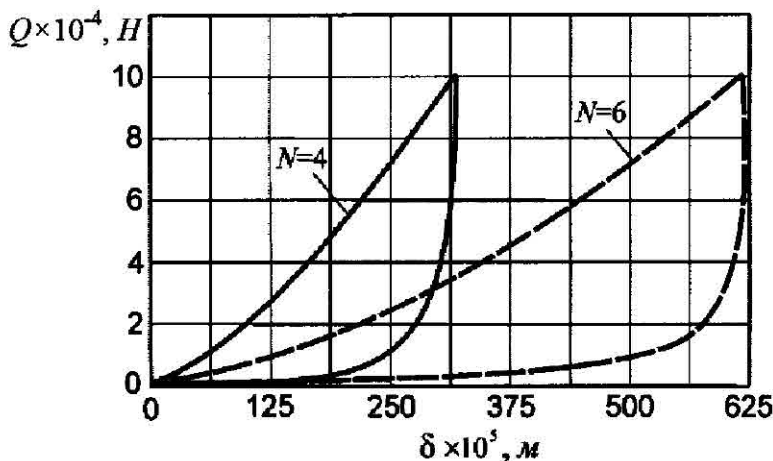


Рис. 4.13. Експериментальні петлі демпфування (оболонка з прорізами):

$h = 5 \text{ мм}$ ,  $l = 0,5 \text{ м}$ ,  $l_0 = 0,6 \text{ м}$ ,  $f = 0,5$ ,  $N$  – кількість прорізів

Підсумуємо викладене. Експериментально продемонстровано вплив на величину податливості оболонкової пружини з розрізом трьох основних конструктивно-технологічних факторів: довжини оболонки, товщини оболонки, коефіцієнта тертя пари оболонка-заповнювач. При цьому підтверджено, що осадка поршнів інтенсивно зростає зі збільшенням довжини робочої частини оболонки до певної межі з подальшим незначним зростанням. Крім того, осадка поршнів зменшується при збільшенні товщини оболонки та при зростанні коефіцієнта тертя пари оболонка-заповнювач. Також отримано експериментальні петлі гістерезису пружних елементів при немонотонному навантаженні.

### 4.3 Порівняння теоретичних та експериментальних результатів

Загалом результати лабораторного та віртуального експериментів якісно узгоджуються з теоретичними результатами. Оцінку деяких кількісних порівнянь подаємо нижче.

Основним обраним інтегральним параметром для порівняльного аналізу є осадка поршнів оболонкової пружини з розрізом. Зокрема в лабораторному експерименті цей параметр вимірювався безпосередньо, тому коректність і точність вимірювань не викликає сумнівів. У табл. 4.1 подано теоретичні та експериментальні значення осадки поршнів  $\delta$  залежно від довжини робочої частини оболонки пружного елемента  $l$  за різних товщин стінки оболонки  $h$  та при різних навантаженнях на поршні  $Q$ . Теоретичні дані отримано в результаті розрахунку за аналітичними формулами з розділу 3. При обчисленнях прийняли значення коефіцієнта тертя пари заповнювач-розрізана оболонка 0,5, внутрішній радіус оболонки 0,08 м.

Таблиця 4.1

№	$l, \text{ м}$	$h=0,01 \text{ м}$			$h=0,015 \text{ м}$			$h=0,02 \text{ м}$	
		$Q=70 \text{ кН}$			$Q=100 \text{ кН}$			$Q=120 \text{ кН}$	
		$\delta, \text{ мм}$							
		вірт. експ.	теор.	лаб. експ.	вірт. експ.	теор.	лаб. експ.	теор.	лаб. експ.
1	0,1	8,46	9,1	10,2	5,87	6,4	6,8	4,1	4,3
2	0,2	15,09	16,4	17,1	9,79	10,6	11,5	6,6	7,2
3	0,3	20,83	22,4	24,8	12,33	13,4	14,7	8,2	9,4
4	0,4	25,48	27,4	30,6	14,63	15,9	16,2	9,0	10,8
5	0,5	28,89	31,4	33,1	16,68	18,1	19,2	9,6	10,9
6	0,6	32,02	34,8	35,9	17,13	18,5	20,1	10,1	11,4
7	0,7	34,41	37,4	39,1	17,61	18,8	20,4	12,0	11,9

Аналізуючи наведені в таблиці числові значення та характер залежностей рис. 4.10 і рис. 3.3, відзначимо узго-



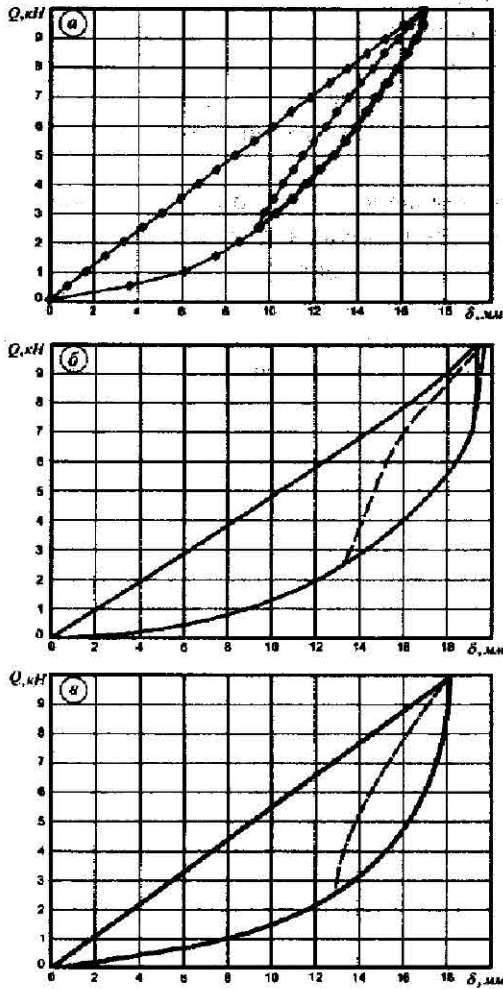
дженість теоретичних та експериментальних даних. Середньо квадратична розбіжність між теоретичними результатами, та даними віртуального експерименту становить 8 %. Відхилення між даними лабораторного експерименту і теоретичними результатами перебуває в межах 11 %. Слід зазначити, що в описаній серії експериментів, при використанні оболонок завтовшки більш ніж 0,02 м, розбіжність між теоретичними та експериментальними результатами зростала.

Для візуалізації збіжності результатів, використовуючи однаковий масштаб, побудували діаграми деформування оболонкового пружного елемента з розрізом при немонотонному навантаженні, які отримані різними способами (рис. 4.14). Діаграми оцифровано в табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Активне навантаження				Розвантаження				Повторне навантаження, $s = 0,25$			
$Q$ , кН	$\delta$ , мм			$Q$ , кН	$\delta$ , мм			$Q$ , кН	$\delta$ , мм		
	Вірт. експ.	Теор.	Лаб. експ.		Вірт. експ.	Теор.	Лаб. експ.		Вірт. експ.	Теор.	Лаб. експ.
10	1,56	1,82	2,05	100	16,91	18,16	19,24	25	9,63	12,08	13,25
20	3,45	3,63	4,21	90	16,67	18,10	19,20	30	9,76	12,85	13,51
30	5,11	5,45	6,26	80	15,94	17,91	19,04	40	10,68	13,18	14,02
40	6,76	7,26	8,39	70	14,46	17,58	18,90	50	11,55	13,73	14,35
50	8,39	9,08	10,41	60	14,00	17,06	18,42	60	12,60	14,44	15,15
60	10,09	10,89	12,19	50	12,99	16,29	17,23	70	13,56	15,26	16,01
70	11,87	12,71	14,35	40	14,56	15,23	15,98	80	14,71	16,18	17,19
80	13,53	14,53	16,21	30	10,49	13,72	14,25	90	15,85	17,17	18,36
90	15,26	16,34	17,90	20	8,35	11,52	12,15	100	17,09	18,16	19,40
100	16,91	18,16	19,24	10	6,10	8,00	8,86	—			

На різних етапах циклу навантаження аналітичний розрахунок постійно видає дещо вищі значення осадки порівняно з віртуальним експериментом і занижені порівняно з результатами лабораторного дослідження.



**Рис. 4.14.** Діаграми деформування пружного елемента  
 $h = 0,015 \text{ м}, l = 0,5 \text{ м}, f = 0,5$ ;  
*а* – віртуальний експеримент; *б* – лабораторний експеримент; *в* – аналітичний результат

Середня розбіжність результатів теоретичних досліджень за одновимірною моделлю (розділ 3) порівняно з віртуальним експериментом (рис. 4.14, а, в) становить 14%. Середня розбіжність результатів теоретичних досліджень порівняно з лабораторним експериментом (рис. 4.14, б, в) – в межах 9%.

Загалом виявлено добру збіжність результатів експериментальних досліджень з результатами отриманими за допомогою аналітичних залежностей. Це свідчить про адекватність вибраної розрахункової моделі та вірність теоретичних висновків і дозволяє рекомендувати запропоновану методику та отримані аналітичні вирази для розрахунку оболонкових пружних елементів з розрізом.

## РОЗДІЛ 5

### ОСОБЛИВОСТІ КОНСТРУКЦІЙ ПРОРІЗНИХ ОБОЛОНКОВИХ ПРУЖНИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ДЕФОРМІВНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ

Загалом робота прорізних оболонкових пружних елементів з деформівним заповнювачем [74] базується на такому принципі. Зовнішнє навантаження діє на поршні і змушує їх рухатись назустріч один одному, стискаючи заповнювач. Останній, змінюючи свою форму, вступає у контактну взаємодію із тонкостінною робочою ланкою (прорізною оболонкою, пакетом тощо). Внаслідок цього оболонка, деформуючись, накопичує потенціальну енергію пружної деформації. При зникненні (зменшенні) зовнішнього навантаження рухомі частини системи за рахунок накопиченої енергії повертаються у вихідне (проміжне) положення. Частина підведеної до системи енергії зовнішніх впливів розсіюється переважно за рахунок взаємного проковзування з тертям заповнювача та оболонки. Таким чином, пружні елементи володіють як амортизаційними, так і демпфувальними властивостями.

Для якісної реалізації описаного принципу роботи та досягнення необхідних експлуатаційних характеристик віброізолятора його складові елементи повинні володіти певними характерними властивостями. Від головного накопичувача енергії (прорізної оболонки) вимагається поєднання низької жорсткості із необхідним рівнем міцності та довговічності. Для спрямованої трансформації переміщень заповнювач повинен легко змінювати свою форму (тобто володіти низьким модулем зсуву). З цієї позиції матеріал заповнювача – м'який порівняно з матеріалом оболонки. З іншого боку, щоб змусити оболонку деформуватись в умовах контактної взаємодії, матеріал заповнювача повинен

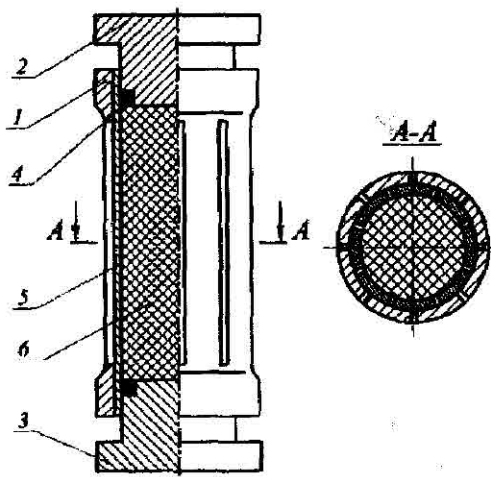
бути слабостисливим (тобто володіти високим модулем об'ємного стиску). Трибологічні властивості пари заповнювач-оболонка підбираються з міркувань забезпечення необхідного в конкретній експлуатаційній ситуації рівня конструкційного демпфування (гістерезисного розсіяння енергії при сухому терті).

### 5.1 Оболонкові пружини з прорізами

Глобально, ідея використання деформації згину несучих тонкостінних ланок для збільшення податливості оболонкових пружних елементів виявилась досить плідною. Саме вона покладена в основу цілої низки технічних рішень, які описано далі в цій книзі.

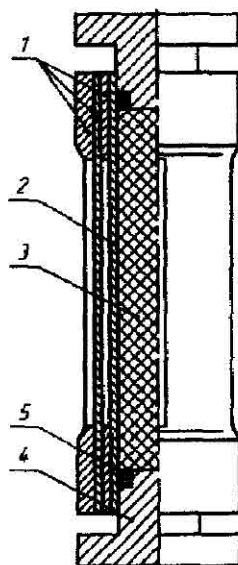
На рис. 5.1, 5.2 зображено пружні елементи [11] з несучими ланками у вигляді оболонок та пакетів оболонок з прорізами вздовж твірних. Пружний елемент (рис. 5.1) з однією головною оболонкою обладнано так званою технологічною втулкою 5, яка може мати невелику порівняно з несучою оболонкою товщину або може бути виготовлена з еластичного матеріалу, і слугує для перекриття прорізів. Прорізи технологічної 5 та несучої 1 оболонок взаємно зміщені на половину ширини панелі (див. вигляд А-А, рис. 5.1). За рахунок цього досягається надійна герметизація замкнутого об'єму. Таке виконання пружного елемента забезпечує достатню податливість, дає змогу легко її регулювати зміною кількості та довжини прорізів в оболонці чи товщини стінки робочої ділянки оболонки. Слід зазначити, що обладнання пружного елемента (рис. 5.1) додатковою втулкою, виготовленою чи то з матеріалу з низьким коефіцієнтом тертя (наприклад, капрону), чи утвореною покриттям (з відповідними фізико-механічними властивостями), яке наноситься на внутрішню поверхню оболонки 1 або зовнішню поверхню технологічної оболонки 5, забезпечує спрацювання

більш м'якої додаткової втулки. Внаслідок цього оболонки 1 і 5 зберігають свою товщину і забезпечують тривалу стабільність робочої характеристики пружного елемента [6].



**Рис. 5.1. Прорізний пружний елемент:**

1 – оболонка із прорізами вздовж твірної; 2, 3 – поршні; 4 – розрізне пружинне кільце; 5 – технологічна втулка; 6 – заповнювач

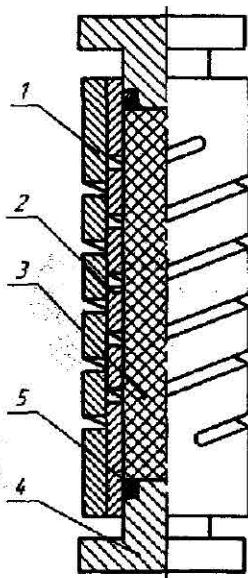


**Рис. 5.2. Багатошаровий пружний елемент:**

1 – пакет оболонок; 2 – герметизуюча втулка; 3 – заповнювач; 4 – поршні; 5 – розрізне пружинне кільце

У пружному елементі [12] (рис. 5.3) проріз несучої оболонки виконано вздовж гвинтової лінії. Таке технічне рішення дає змогу поєднати переваги оболонкових вібро-

золяторів з деформівним заповнювачем і гвинтових пружин. Наявність гвинтових прорізів надає можливість цьому пружному елементові виконувати деякі функції, що



**Рис. 5.3. Прорізний пружний елемент:**

- 1 – оболонка із прорізом за гвинтовою лінією;*
- 2 – герметизуюча втулка; 3 – заповнювач; 4 – поршень;*
- 5 – розрізне пружинне кільце*

невластиві іншим оболонковим пружним елементам, наприклад, демпфування крутних та просторових коливань. За необхідності крутний момент прикладають безпосередньо до торців оболонки. Слід зауважити, що при навантаженні пружного елемента осьовою силою торці оболонки повертаються у різні сторони. Тому в процесі проектування таких пружних елементів при необхідності забезпечують фіксацію торців робочої оболонки чи використовують пакет оболонок з протилежно спрямованими гвинтовими

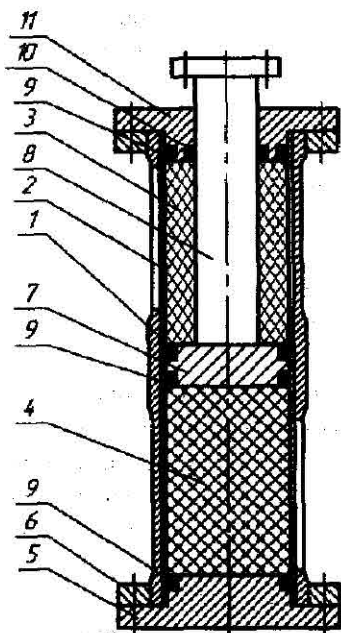
прорізами. Область застосування даного пристрою – віброзахист об'єктів, що здійснюють просторові коливання.

Конструкції [105], що зображені на рис. 5.4, 5.5, є варіантами використання оболонкових пружних елементів як віброізоляторів подвійної дії. Вони здатні сприймати не лише стиск, але й розтяг, забезпечуючи в обох випадках ефективний віброзахист. Слід відзначити, що для пружного елемента (рис. 5.4) притаманна асиметрія діаграми навантаження, викликана різницею площ поперечних перерізів заповнювачів 3 і 4, а діаграма пружного елемента (рис. 5.5) – симетрична.

На рис. 5.6 зображено пружний елемент [76] з системою регулювання жорсткості, яка складається з двох кілець 7, що можуть пересуватися напрямними 5 за допомогою гвинта 6. Цей механізм забезпечує можливість зміни довжини чи поділу робочої частини пакета прорізних оболонок, що дає змогу регулювати жорсткість пристрою.

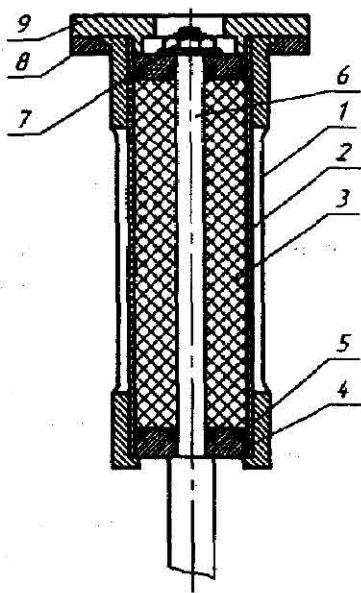
Метою наступного технічного рішення (рис. 5.7) є підвищення ефективності роботи прорізного оболонкового пружного елемента, та забезпечення можливості регулювання його жорсткості при збереженні несучої здатності. Це завдання вирішується шляхом виконання кінців прорізів на певній відстані від торців поршнів. Оскільки контактний тиск між заповнювачем та оболонкою спадає по довжині від торців до середини конструкції, то товщина розрізаної ділянки пружного елемента буде невеликою порівняно з товщиною оболонки біля поршнів. Однак при таких товщинах стінки розрізаної ділянки оболонки є небезпека втрати стійкості за рахунок осьового навантаження, зумовленого наявністю сил тертя між оболонкою і заповнювачем, а також за рахунок можливих екстремальних навантажень, коли хід поршнів повністю вичерпається. Тому прорізну оболонку





**Рис. 5.4. Пружний елемент подвійної дії:**

1 – оболонка; 2 – герметизуюча втулка; 3 – заповнювач кільцевий; 4 – заповнювач суцільний; 5 – кришка; 6 – фланець; 7 – поршень; 8 – шток; 9 – розрізне пружинне кільце; 10 – кільце штока; 11 – наскрізна кришка

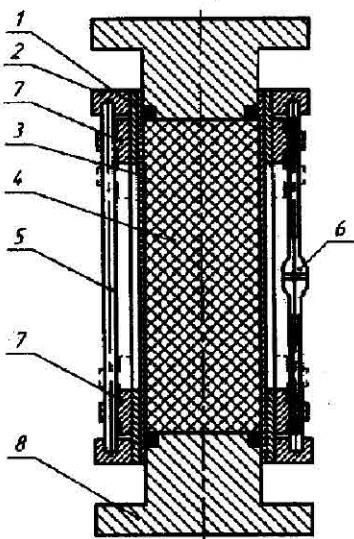


**Рис. 5.5. Пружний елемент подвійної дії:**

1 – оболонка; 2 – герметизуюча втулка; 3 – заповнювач; 4 – поршень; 5 – розрізне пружинне кільце; 6 – шток; 7 – гайка; 8 – фланець; 9 – кришка

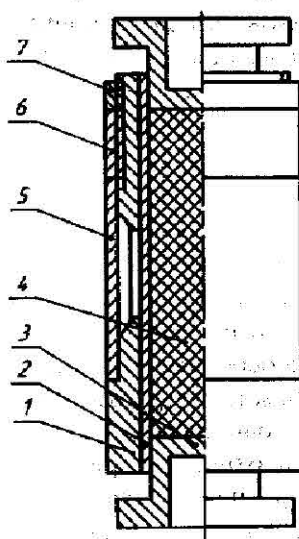
обладнано додатковим підкріпленням – втулкою, яку розміщено між буртом на одному з нерозрізаних кінців оболонки, і гайкою, що накручена на різі протилежного кінця. До-

даткова втулка захищає розрізану ділянку оболонки від



**Рис. 5.6. Пружний елемент з регульованою жорсткістю:**

1 – оболонка; 2 – фланець;  
3 – герметизуюча втулка;  
4 – заповнювач; 5 – рейка;  
6 – гвинт; 7 – рухоме кільце;  
8 – поршень



**Рис. 5.7. Прорізний пружний елемент:**

1 – оболонка; 2 – технологічна втулка; 3 – поршень;  
4 – заповнювач; 5 – додаткова втулка;  
6 – гайка; 7 – контргайка

надмірного осьового навантаження стиску та попереджує виникнення небезпечних осьових та радіальних деформацій в панелях.

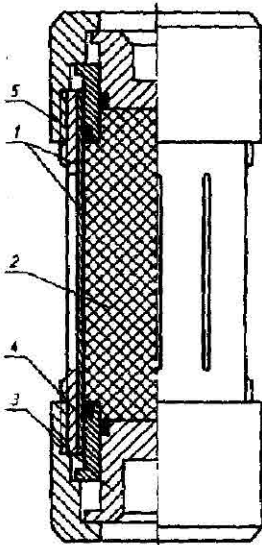
У разі необхідності за допомогою гайки можна забезпечити попереднє напруження розтягу в панелях розрізаної ділянки, тобто регулювати жорсткість пружного елемента [89].

Досвід конструювання і використання пружних елементів свідчить про необхідність створення пристроїв, що допускають можливість регулювання жорсткості в певному діапазоні, а в деяких випадках ця можливість повинна реалізовуватись у процесі роботи. При великих значеннях сили та обмеженнях на величину ходу пружного елемента іноді навмисно доводиться забезпечувати нелінійність його характеристики. У віброзахисних системах це досягається шляхом побудови складених конструкцій з окремих пружних ланок. Однак часто виникає необхідність у нелінійній характеристиці пружного елемента як окремої конструктивної одиниці. Такий пружний елемент [1, 94] з диференційними поршнями зображено на рис. 5.8. Його конструктивна особливість – наявність системи поршнів 3, 4 різного діаметра. Працює пружний елемент таким чином. Під дією зовнішнього навантаження суцільні поршні 3 починають входити усередину кільцевих поршнів 4. Внутрішній тиск в заповнювачі 2 перебуває у обернено пропорційній залежності від площі поршнів. Допоки в дії перебувають тільки поршні 3, тиск у заповнювачі відносно високий, а отже деформації оболонки 1 значні і жорсткість пружного елемента у цьому випадку невелика. Подальше збільшення навантаження призводить до того, що поршні 3 вичерпують запас ходу і своїми буртами впираються у торці поршнів 4. Тепер навантаження розподіляється на сумарну площу поршнів 3 і 4, при цьому зростає жорсткість та несуча здатність пружного елемента. При зниженні навантаження у вихідне положення повертаються спочатку поршні 4, а відтак – поршні 3.

Для діаграми навантаження такого пристрою характерна жорстка нелінійність, при цьому найменшу жорсткість пружний елемент має, працюючи на внутрішніх поршнях 3, і стає більш жорстким при підключенні зовнішніх

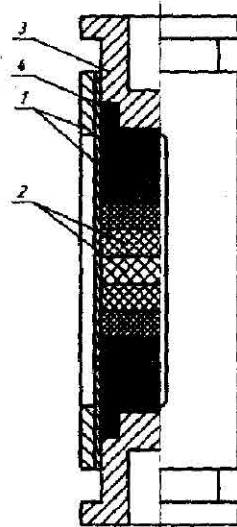
поршнів 4. Дещо згладити нелінійну характеристику пристрою можна, збільшивши кількість пар поршнів (при їх незмінній сумарній площі), які із збільшенням діючого навантаження поступово вступатимуть в роботу.

У пружному елементі (рис. 5.9) завдання підвищення працездатності та розширення функціональних можливостей пристрою вирішено виконанням вузла трансформації



**Рис. 5.8.** Пружний елемент з диференційними поршнями:

1 – прорізна оболонка та технологічна втулка;  
2 – заповнювач; 3 – суцільний поршень; 4 – кільцевий поршень; 5 – планшайба.

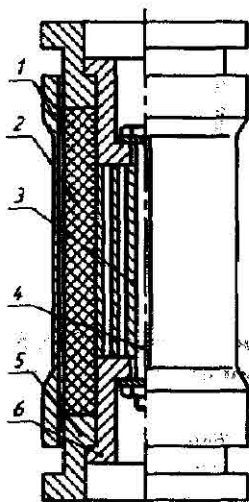


**Рис. 5.9.** Пружний елемент з рівномірним за довжиною навантаженням оболонки:

1 – прорізна оболонка та технологічна втулка;  
2 – заповнювач; 3 – поршень;  
4 – ущільнювальне кільце

переміщень з неоднорідного матеріалу, об'ємний модуль якого змінюється від торця поршня до середини оболонки [85]. Характер цієї зміни визначається поведінкою контактного тиску однорідного заповнювача на оболонку і описується кусково-сталою або неперервною функцією, яка визначається з використанням критерію максимальної податливості

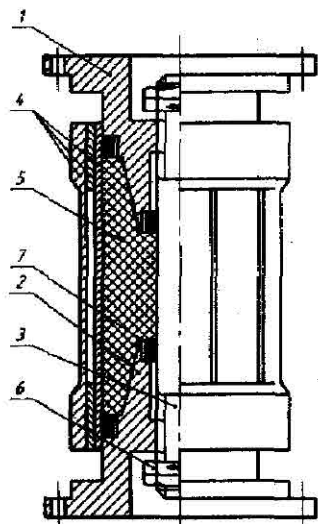
Пружний елемент [123] (рис. 5.10) призначено для переважного використання в амортизаторах удару. Він володіє жорстко-нелінійною характеристикою. Величина ходу пружного елемента в основному залежить від величини деформації спіральної пружини 3 (найменш жорсткого елемента конструкції). Суттєве деформування пакета прорізних оболонок 1 починається при певному значенні зовнішнього навантаження.



**Рис. 5.10. Буферний пружний елемент:**  
 1 – оболонка; 2 – заповнювач; 3 – спіральна пружина;  
 4 – з'єднувальний болт; 5 – штовхач;  
 6 – напрямний стакан

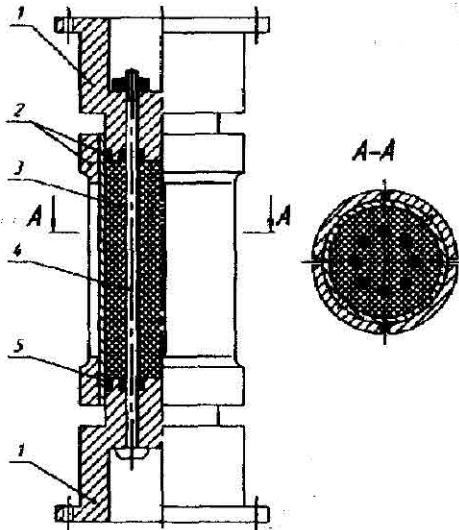
Регулюючи жорсткість спіральної пружини, можна підібрати необхідну характеристику пружного елемента для конкретної віброударної системи.

На рис. 5.11 зображено пружну муфту [5], яка призначена для з'єднання валів значної довжини (наприклад, карданних) з можливістю передачі осьового зусилля. Пружна муфта (рис. 5.12) призначена для демпфування крутих та поздовжніх коливань. Перевагою цього пристрою є наявність значної конструкційної дисипації енергії за рахунок фрикційної взаємодії заповнювача із торсіонами і пакетом оболонок [74].



**Рис. 5.11. Пружна муфта:**

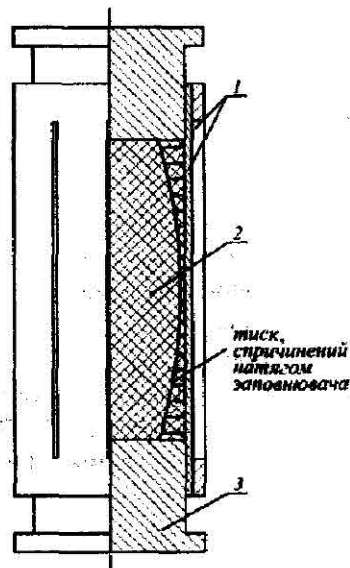
- 1, 2 – ведуча і ведена напіумуфти; 3 – шпилька;  
4 – пакет оболонок; 5 – заповнювач; 6 – гайка;  
7 – ущільнювальні кільця



**Рис. 5.12. Оболонкова пружна муфта з торсіонами:**

- 1 – піємуфта; 2 – пакет прорізнлих оболонок; 3 – заповнювач; 4 – стрижневий торсіон; 5 – розрізне пружинне кільце*

Особливістю пружного елемента, поданого на рис. 5.13 є те, що заповнювач виконано з натягом відносно внутрішньої поверхні оболонки. При цьому величина натягу за довжиною оболонки може бути змінною (плавно чи ступінчасто) [83]. Таке виконання пружного елемента забезпечує реалізацію процесу проковзування із тертям в парі заповнювач-оболонка вже на початку навантаження, що створює сприятливі умови для роботи контактної пари заповнювач-оболонка і підвищує працездатність та надійність пристрою.



**Рис. 5.13. Пружний елемент**

*1 – прорізна оболонка та технологічна втулка;  
2 – заповнювач; 3 – поршень*

### **5.2 Оболонкові пружини з розрізом**

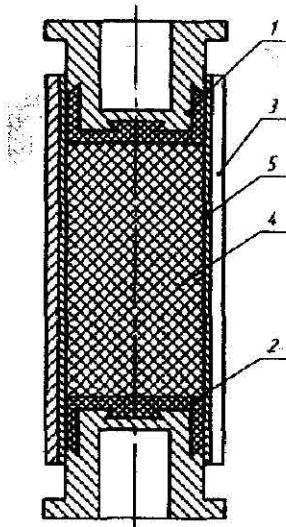
Пружний елемент [27] з несучою ланкою у вигляді розрізаної вздовж твірної циліндричної оболонки зображено на рис. 5.14. Працює пружний елемент таким чином: прикладене до поршнів 1 навантаження стиску змушує їх заходити всередину втулки 5, стискаючи при цьому заповнювач 3, який трансформує поздовжні переміщення поршнів в радіальні прогини оболонки. При розвантаженні система повертається у вихідне положення. Основний вклад у податливість системи вносить зміна форми заповнювача за рахунок деформації згину розрізаної оболонки (зменшення кривини розімкненого кільця в поперечному перерізі). Технологічна втулка 5 (зазвичай теж розімкнута) слугує пе-



рекриттям розрізу оболонки і запобігає виходу заповнювача при виникненні в ньому великих тисків. Оскільки в таких пружних елементах головний внесок у величину розсіяної енергії роблять гістерезисні втрати на зовнішнє тертя, то слід зазначити, що технологічна втулка 5 може бути як металевою, так і неметалевою. Це дає змогу, за необхідності, легко змінювати трибологічні властивості контактуючої пари заповнювач-технологічна втулка, регулюючи рівень конструкційного демпфування.

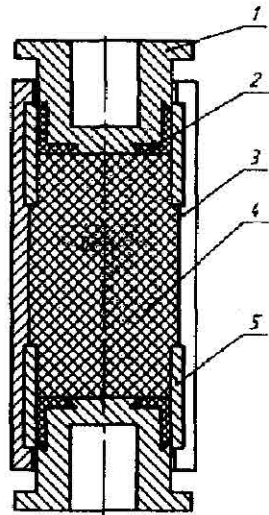
У разі потреби підвищити утримувальну здатність віброзахисної системи доцільніше використати пружний елемент [86], зображений на рис. 5.15. Працює пружний елемент за аналогією з попереднім. Особливістю його конструкції є наявність внутрішніх цільнометалевих оболонок 5. У пружних елементах такого типу контактний тиск між заповнювачем та оболонкою спадає з віддаленням від торців заповнювача. Тому найбільший контактний тиск буде діяти між заповнювачем і суцільними оболонками 5, а ділянка розрізаної оболонки буде менш навантаженою. За рахунок цього підвищується міцність пружного елемента порівняно з попереднім. Її рівень регулюється зміною довжини суцільних оболонок. Очевидно, що підвищення тиску заповнювача спричинятиме виштовхування суцільних оболонок 5 з оболонки 3. Щоб цього не сталося, на її внутрішній поверхні виконано виточки необхідних розмірів.

Рис. 5.16 ілюструє технічне рішення, яке дає змогу легко варіювати характеристики пружного елемента з розрізаною оболонкою. Шляхом установки чи перестановки спеціальних бандажів 5 можна досягнути бажаної жорсткості, запасу міцності та демпфувальних властивостей пружного елемента. Кількість бандажів, їх розміри та геометрична форма, характеристики матеріалу та місце установ-



**Рис. 5.14. Пружний елемент (несуча оболонка розрізана вздовж твірної):**

*1 – поришень; 2 – ущільнювальна втулка; 3 – розрізана оболонка; 4 – заповнювач; 5 – технологічна втулка*



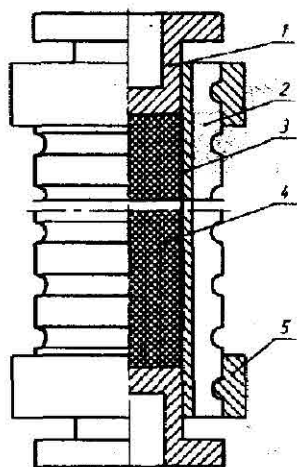
**Рис. 5.15. Пружний елемент підвищеної несучої здатності:**

*1 – поришень; 2 – ущільнювальна втулка; 3 – розрізана оболонка; 4 – заповнювач; 5 – суцільна оболонка*

лення визначаються розрахунком і залежать від функціонального призначення пружного елемента.

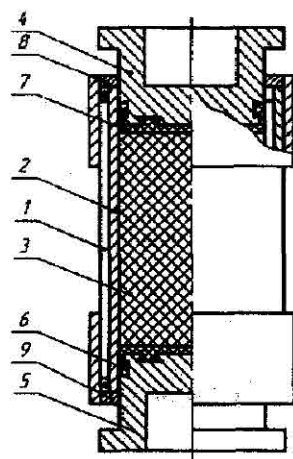
На рис. 5.17 зображена конструкція пружного елемента [25], в якому для підвищення утримувальної здатності використано пакет розрізаних оболонок.

Тут регулювання жорсткості здійснюється шляхом монтажу пакета коаксіальних оболонок з розрізом вздовж твірної і їх фіксації одна відносно одної. При установленні оболонок їх розрізи зміщують у коловому напрямі на деякий кут  $\varphi$ .



**Рис. 5.16.** Пружний елемент з регульованою жорсткістю:

- 1 – поршень;*
- 2 – розрізана оболонка;*
- 3 – технологічна втулка;*
- 4 – заповнювач;*
- 5 – бандаж*

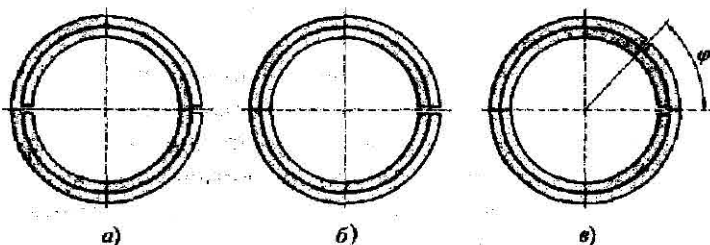


**Рис. 5.17.** Пружний елемент (пакет розрізаних оболонок):

- 1, 2 – зовнішня та внутрішня розрізані оболонки;*
- 3 – заповнювач;*
- 4, 5 – верхній та нижній порині;*
- 6, 7 – ущільнюючі втулки;*
- 8, 9 – вузли фіксації відносного зміщення розрізів оболонок*

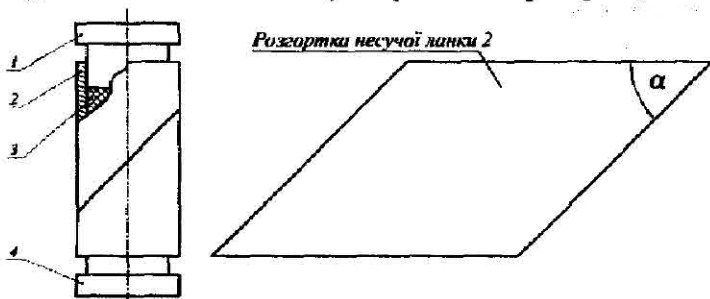
На рис. 5.18 [9] показані вигляди з торця двошарових пакетів оболонок максимальної, мінімальної та проміжної жорсткостей.

Доступний і економічний спосіб регулювання жорсткості пружного елемента – важливий фактор, що часто визначає експлуатаційну придатність такого пристрою. В



**Рис. 5.18. Поперечня двошарового пакету оболонок з максимальною (а), мінімальною (б) та проміжною (в) жорсткістю**

наступній конструкції це завдання пропонується вирішити таким чином. В оболонковому амортизаторі (рис. 5.19), робочою ланкою якого слугує оболонка обертання із розрізом вздовж твірної, розріз виконують під кутом до твірної так, що розгортка оболонки набуває вигляду паралелограма, внутрішній гострий кут якого  $90^\circ \geq \alpha \geq 45^\circ$ . При цьому коли  $\alpha = 45^\circ$ , забезпечується максимальна жорсткість амортизатора. Якщо  $\alpha = 90^\circ$  (тобто розріз виконано вздовж твірної), матимемо мінімальну жорсткість пристрою; а коли

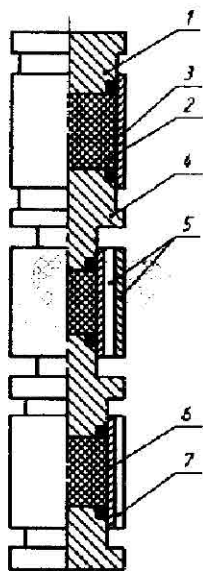


**Рис. 5.19. Пружний елемент з гвинтовим розрізом:**  
 1, 4 – поршні; 2 – несуча оболонка з гвинтовим розрізом;  
 3 – заповнювач

кут  $\alpha$  набуває значень з інтервалу  $90^\circ > \alpha > 45^\circ$ , – проміжне значення жорсткості [95].

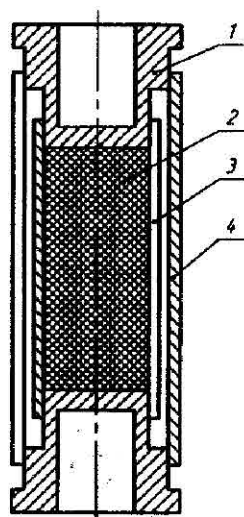
Досвід конструювання і використання віброзахисних систем свідчить про необхідність розробки таких пристроїв, що допускають регулювання жорсткості в широкому діапазоні. У випадках, коли немає обмеження на поздовжній габарит пружного елемента (нафтогазова промисловість, гірництво тощо), проблему легко вирішує конструкція, зображена на рис. 5.20. Даний пружний елемент сконструйовано у вигляді кільцевої пружини з тонкостінними елементами різної податливості (розрізана оболонка 7, пакет розрізаних оболонок 5, суцільна оболонка 3). Це дає змогу, варіюючи індивідуальні запаси ходу кожної ланки, регулювати нелінійність діаграми навантаження багатоланкової системи [24].

Якщо поздовжній габарит конструкції обмежений, доцільно застосувати пружний елемент (рис. 5.21), що забезпечує плавну зміну експлуатаційних характеристик у процесі роботи. У випадку, коли навантаження прикладене до поршнів майже вичерпує несучу здатність внутрішньої оболонки 3, остання, деформуючись в межах зазору, поступово входить у контакт з оболонкою 4. Внаслідок того, що входження в контакт розрізаних оболонок відбувається не всією поверхнею одночасно, а поступово, із зростанням зовнішнього навантаження, зміна жорсткості, міцності та демпфувальної здатності пружного елемента відбувається більш плавно, ніж в інших конструкціях з подібним призначенням. У випадку, коли зовнішнє навантаження на поршні наближається до максимального допустимого (визначеного розрахунком), запас ходу поршнів ліквідується і пружний елемент вилучається з роботи [87].



**Рис. 5.20. Багатошаровий пружний елемент:**

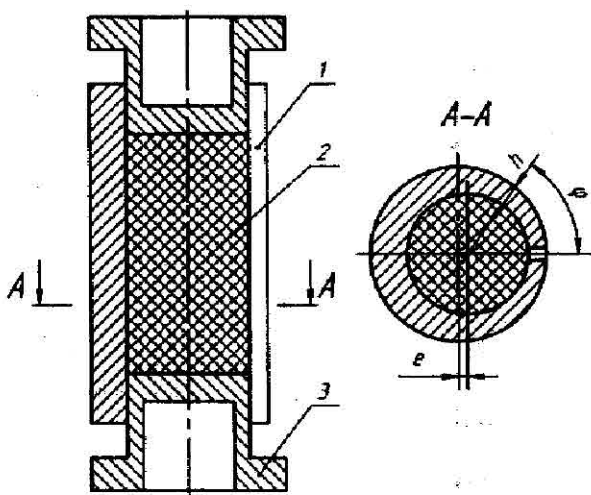
- 1 – поршень; 2 – заповнювач;*
- 3 – суцільна оболонка;*
- 4 – проміжний поршень;*
- 5 – пакет розрізаних оболонок;*
- 6 – технологічна втулка;*
- 7 – розрізана оболонка*



**Рис. 5.21. Пружний елемент зі змінною жорсткістю:**

- 1 – поршень; 2 – заповнювач;*
- 3 – внутрішня розрізана оболонка;*
- 4 – зовнішня розрізана оболонка*

Пружний елемент (рис. 5.22) [90], в якому розрізана вздовж твірної оболонка виготовлена із змінною по колу товщиною стінки має порівняно низьку питому матеріаломісткість і може працювати із однією робочою ланкою чи декількома, установленими коаксіально. При цьому в пружних елементах відносно малих розмірів, які працюють в діапазоні невеликих навантажень, оболонки у площині, перпендикулярній до твірної, мають змінну товщину, яка ви-



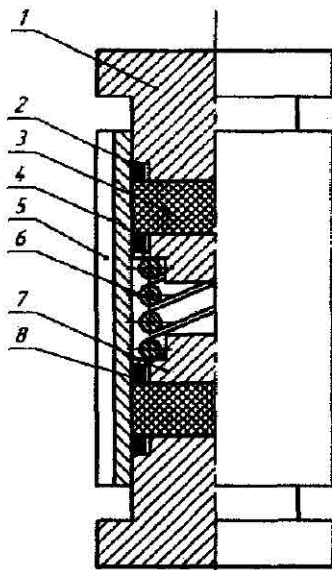
**Рис. 5.22. Пружний елемент (розрізана оболонка зі змінною товщиною стінки):**  
*1 – оболонка; 2 – заповнювач; 3 – поршень*

значається ексцентриситетом внутрішньої і зовнішньої циліндричних поверхонь [8].

Утворення оболонки змінної товщини шляхом ексцентричного виконання циліндричних поверхонь не потребує виготовлення і використання копіра для виробництва оболонки, що знижує витрати праці на виготовлення пружного елемента за рахунок покращання технологічності. Порівняльний аналіз оболонок із змінною товщиною та оболонок, утворених ексцентричними циліндричними поверхнями, показав, що для оболонок невеликих розмірів із зовнішнім діаметром до 0,25 м і довжиною 0,40 м перевищення ваги є незначними – до 3,5%. Але при більших габаритах оболонки цей відсоток зростає. Метою такого виконання

робочих ланок пружних елементів є підвищення ефективності їх роботи за рахунок раціонального використання конструкційних матеріалів.

Пружні елементи, що виконані у вигляді оболонки обертання із заповнювачем і поршнями, є ефективними не у всіх випадках, оскільки при забезпеченні працездатності (виконання умов міцності матеріалу деталей конструкції) вони можуть мати досить велику жорсткість за рахунок малої деформативності робочої ланки пружного елемента – оболонки. Особливо це відчутно за наявності ділянки зчеплення у віддаленій від торців ділянці контакту. Через це в конструкції пружного елемента [88] (рис. 5.23) запропоновано звільнити середню малодеформівну частину пакета



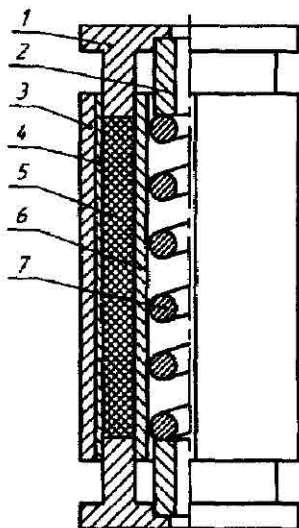
**Рис. 5.23. Пружний елемент підвищеної податливості:**  
 1 – поршень; 2 – ущільнююче кільце; 3 – заповнювач; 4, 5 – внутрішня та зовнішня розрізані оболонки; 6 – гвинтова пружина;  
 7 – додатковий поршень; 8 – ущільнююче кільце



оболонку від заповнювача і на його місце установити пружину *б* (гвинтову, тарільчасту, прорізну чи блок пружин), обладнану додатковими поршнями *7*. У процесі роботи в такому пружному елементі проявляється явище конструкційного гістерезису переважно внаслідок наявності пар тертя “заповнювачі-оболонка” при їх взаємному проковзуванні. Відзначимо, що значна частина зовнішнього навантаження витрачається на подолання сил тертя між заповнювачами *3* та оболонкою *4*. Це забезпечує реальність прачездатності пружини стиску в умовах великих статичних і динамічних навантажень та обмеження діаметральних розмірів. З іншого боку, наявність пружини *б* забезпечує зниження жорсткості пружного елемента (за рахунок додаткової податливості) без шкоди для утримувальної здатності.

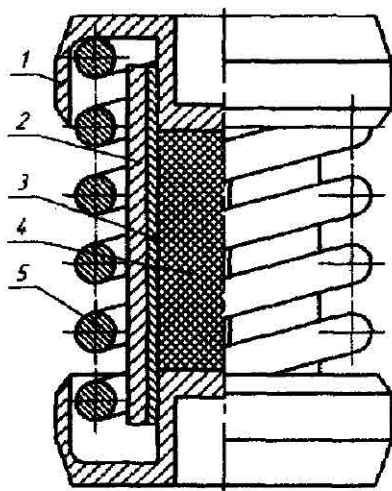
У конструкціях, показаних на рис. 5.24, 5.25, гвинтова пружина поряд із розрізаною оболонкою відіграє роль додаткової робочої ланки. При цьому пружина може бути встановлена із зазором відносно одного із поршнів і включатись до паралельної роботи при певному рівні зовнішнього навантаження. У пружних елементах такого типу, варіюючи на стадії проектування довжину робочої частини оболонки, товщину оболонки, коефіцієнт тертя пари оболонка-заповнювач та жорсткість гвинтової пружини, можна досить вдало поєднати амортизаційні властивості пружини і демпфувальну здатність оболонкового пружного елемента. Нагадаємо, що гвинтова пружина може бути замінена іншою пружиною стиску чи блоком таких пружин.

Метою технічного рішення (рис. 5.26) є підвищення несучої здатності оболонкового пружного елемента без шкоди для його демпфувальних властивостей в умовах обмеженого поперечного габариту. Для цього між торцями оболонки *1* та буртами поршнів *2* коаксіально до поршнів



**Рис. 5.24. Пружний елемент зі стволем:**

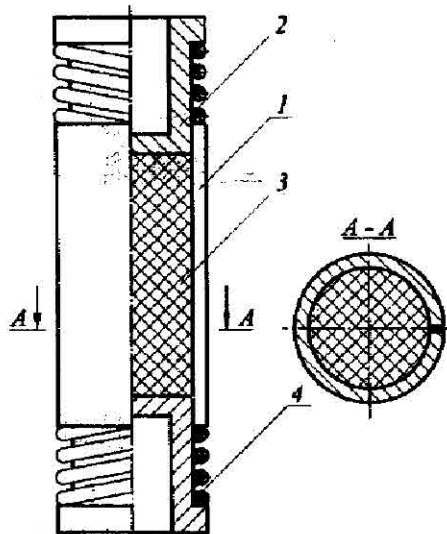
1 – поршень; 2 – втулка;  
3 – розрізана вздовж твірної оболонка; 4 – технологічна втулка; 5 – заповнювач; 6 – ствол; 7 – гвинтова пружина



**Рис. 5.25. Пружний елемент (сумісна робота двох несучих ланок):**

1 – поршень; 2 – оболонка з розрізом; 3 – технологічна втулка; 4 – заповнювач; 5 – гвинтова пружина

встановлено пружини стиску 4, зовнішній діаметр яких не перевищує діаметра оболонки [84]. В такому разі при навантаженні пружного елемента усі три робочі ланки (розрізана оболонка із заповнювачем та дві пружини стиску) працюватимуть паралельно, їх жорсткості сумуватимуться, а кожна з цих ланок нестиме частку зовнішнього навантаження, пропорційну до своєї жорсткості при деформуванні. Зазначимо, що тепер, коли зовнішнє навантаження розподіляється між трьома ланками пружного елемента, застосу-



**Рис. 5.26. Пружний елемент**  
**(паралельна робота несучих ланок):**  
 1 – оболонка з розрізом; 2 – поршень;  
 3 – заповнювач; 4 – пружина стиску

вання технологічної втулки, яка запобігала виходу заповнювача крізь розріз несучої оболонки стає не обов'язковим.

Викладені в даному розділі результати дослідно-конструкторського пошуку презентують групу нового класу конструкцій для вібраційної техніки – оболонкові пружні елементи. Ці пристрої покликані працювати як виконавчі органи вібромашин і віброзахисних систем, що експлуатуються в екстремальних умовах.

На сьогодні описані вище пристрої добре зарекомендували себе в окремих галузях промисловості [35, 74, 141, 147]. Так, наприклад, для потреб нафтової і газової промисловості на базі оболонкових пружних елементів створено комплекс засобів віброзахисту бурильної колони: аморти-

затори поздовжніх коливань, амортизатори поздовжніх і крутних коливань, бурові амортизатори подвійної дії, пружні шпинделі вибійних двигунів, пружні муфти, амортизатори для буріння неглибоких свердловин та шурфів. У машинобудуванні оболонкові віброізолятори застосовують при конструюванні пружних підвісів вибивних і транспортуючих модулів автоматичних ліній ливарного виробництва, для кривошипно-шатунних механізмів поршневих машин з пальцевим чи штоковим закріпленням поршнів, а також для віброзахисту деяких вузлів спеціальної техніки.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. А. с. 1104319 СССР, МКИ F16 F1/34. Амортизатор / В. М. Шопа, С. В. Величкович, Б. Н. Полевой, З. Д. Червак. – Оpubл. 23.07.84, Бюл. № 27.
2. А. с. 1527425 СССР, МКИ F16 F1/34. Амортизатор / С. В. Величкович, И. И. Попадюк, И. П. Шацкий, В. М. Шопа // Оpubл. 07.12.1989 г., Бюл. № 45.
3. А. с. 1548553 СССР, МКИ F16 F1/34. Упругий элемент / С. В. Величкович, В. М. Шопа, И. П. Шацкий, И. И. Попадюк // Оpubл. 07.04.1990 г., Бюл. № 9.
4. А. с. 1601315 СССР, МКИ E21 B17/07. Забойный амортизатор / А. С. Величкович, С. В. Величкович (СССР) // Оpubл. 23.10.90, Бюл. № 39.
5. А. с. 1668768 СССР, МКИ F16 D3/72. Упругая муфта / С. В. Величкович, В. М. Шопа, И. П. Шацкий, И. И. Попадюк. – Оpubл. 07.08.91, Бюл. № 29.
6. А. с. 1670225 СССР, МКИ F16 F1/40. Упругий элемент / С. В. Величкович, В. М. Шопа, И. П. Шацкий, И. И. Попадюк. – Оpubл. 15.08.91, Бюл. № 30.
7. А. с. 1719741 СССР, МКИ F16 F1/40. Упругий элемент / С. В. Величкович, В. М. Шопа, А. С. Величкович // Оpubл. 15.03.1991, Бюл. № 10.
8. А. с. 1747757 СССР, МКИ F16 F1/40. Амортизатор / С. В. Величкович, В. М. Шопа, И. П. Шацкий и др. – Оpubл. 15.07.92, Бюл. № 26.
9. А. с. 1768811 СССР, МКИ F16 F1/34. Способ регулирования жесткости оболочечного амортизатора / С. В. Величкович, В. М. Шопа, И. П. Шацкий, И. И. Попадюк. – Оpubл. 15.10.92, Бюл. № 38.
10. А. с. 1810665 СССР, МКИ F16 F1/40. Амортизатор / С. В. Величкович, В. М. Шопа, И. П. Шацкий, И. И. Попадюк. – Оpubл. 23.04.93, Бюл. № 15.
11. А. с. 637572 СССР, МКИ F16 F1/40. Упругий элемент / В. М. Шопа, С. В. Величкович. – Оpubл. 15.12.78, Бюл. № 46.
12. А. с. 968531 СССР, МКИ F16 F1/40. Упругий элемент / С. В. Величкович, В. М. Шопа, З. Д. Червак и др. – Оpubл.

- 23.10.82, Бюл. № 39.
13. Александров В. М., Кудиш И. И. Асимптотические методы в контактных задачах с нелинейным трением // Прикл. механика. – 1981. – 17, № 6. – С. 76–84.
  14. Александров В. М., Чебаков М. И. Введение в механику контактных взаимодействий. – Ростов-на-Дону: ООО «ЦВВР», 2007. – 114 с.
  15. Афанасьев П. П. Конструкционное демпфирование. – М.: МАИ, 1972. – 97 с.
  16. Бедзир А. А. Моделирование фрикционного взаимодействия прорезной цилиндрической оболочки с деформируемым заполнителем // XVI конф. по вопросам рассеяния энергии при колебаниях механических систем. Тез. докл. – Киев ИПП АН УССР, 1992. – С. 4.
  17. Бедзир О. О. Контактна взаємодія прорізної оболонки з деформівним заповнювачем // Вісник Терноп. нац. техн. ун-ту. – 2015. – № 2. – С. 29–36.
  18. Бедзир О. О., Величкович А. С. Розсіювання енергії при немонотонному навантаженні пружного заповнювача в прорізній циліндричній оболонці // Тез. докл. міжнародної конф. Інтегральні рівняння і їх застосування. – Одеса, 2005. – С. 8.
  19. Бедзир О. О., Шацький І. П., Шопа В. М. Методика розв'язування змішаних задач про фрикційний контакт заповнювача з прорізним оболонковим елементом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, № 1. – С. 111–114.
  20. Бедзир О. О., Шопа В. М. Контактна взаємодія циліндричної оболонки з розрізами та деформівного заповнювача // Машинознавство. – 2003. – № 10. – С. 11–14.
  21. Бедзир О., Шопа В., Величкович А. Експериментальні дослідження прорізних оболонкових пружних елементів // Сучасні проблеми механіки та математики: В 3-х т. / Під заг. ред. Р. М. Кушніра, Б. Й. Пташника. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2013. – Т. 2. – С. 66.
  22. Биргер И. А., Шор Б. Ф., Иосилевич Г. Б. Расчет на прочность деталей машин. – М.: Машиностроение, 1979. – 702 с.
  23. Величкович А. С. Амортизатор для штанговой скважинной насосной установки // Хим. и нефтегазовое машиностроение.

- ние. – 2005. – № 10. – С. 21–23.
24. Величкович А. С. Буровой амортизатор на базе новой оболочечной пружины // Хим. и нефтегазовое машиностроение. – 2005. – № 7. – С. 9–11.
  25. Величкович А. С. Некоторые конструктивные особенности оболочечных пружин для буровых амортизаторов // Хим. и нефтегазовое машиностроение. – 2007. – № 8. – С. 26–29.
  26. Величкович А. С. Оболочковый амортизатор штанговой свердловинной насосной установки // Нафтова і газова промисловість. – 2006. – № 2. – С. 30–32.
  27. Величкович А. С. Оптимізація роботи оболочкових пружних елементів бурових амортизаторів // Розвідка і розробка нафтових і газових родовищ. Сер.: Буріння нафтових і газових свердловин. – Ів.-Франківськ: ІФДТУНГ. – 1996. – № 33. – С. 112–117.
  28. Величкович А. С. Пружинні елементи бурових амортизаторів з розширеним діапазоном робочих навантажень // Розвідка і розробка нафтових і газових родовищ. Сер.: Буріння нафтових і газових свердловин. – Ів.-Франківськ: ІФДТУНГ. – 1997. – № 34. – С. 51–57.
  29. Величкович А. С., Величкович С. В. Буровые амортизаторы двойного действия для регулирования динамического режима бурильной колонны // Хим. и нефтегазовое машиностроение. – 1997. – № 6. – С. 20–22.
  30. Величкович А. С., Величкович С. В. Забойный амортизатор с оболочечным упругим элементом переменной жесткости // Хим. и нефтяное машиностроение. – 1994. – № 8. – С. 10–11.
  31. Величкович А. С., Величкович С. В. Оболочечный буровой амортизатор повышенной податливости // Хим. и нефтегазовое машиностроение. – 2002. – № 31. – С. 12–15.
  32. Величкович А. С., Величкович С. В. Повышение надежности, долговечности и эффективности буровых амортизаторов с оболочечными упругими элементами // Хим. и нефтегазовое машиностроение. – 2000. – № 2. – С. 4–15.
  33. Величкович А. С., Величкович С. В. Упругий шпindelь забойного двигателя // Хим. и нефтяное машиностроение. – 2000. – № 5. – С. 14–15.

34. Величкович А. С., Величкович С. В. Упругий элемент бурового амортизатора для бурения скважин в аномальных температурных условиях // Хим. и нефтегазовое машиностроение. – 1998. – № 12. – С. 38–39.
35. Величкович А. С., Величкович С. В., Шопа В. М. Комплекс засобів віброзахисту та регулювання динамічного режиму бурильної колони. – Івано-Франківськ: Сіверсія ЛТД, 2000. – 86 с.
36. Величкович А. С., Даляк Т. М. Експериментальна верифікація скінченно-елементної моделі контактної взаємодії розрізаної оболонки з пружним тілом // Науковий вісник ІФНТУНГ. – 2012. – № 1(31). – С. 80–86.
37. Величкович А. С., Даляк Т. М. Контактна взаємодія розрізаної оболонки та пружного тіла в бурових засобах віброзахисту // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – 2014. – № 4(53). – С. 33–42.
38. Величкович А. С., Даляк Т. М. Оценка напряженного состояния и рабочей характеристики оболочечной пружины с разрезом для бурового амортизатора // Хим. и нефтегазовое машиностроение. – 2015. – № 3. – С. 28–33.
39. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. – Киев: Наук. думка, 1986. – 544 с.
40. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. В. М. Челомей. – М.: Машиностроение, 1981. – Т. 6. – 456 с.
41. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
42. Гогилашвили В. И., Хвингия М. В. Рассеяние энергии и оптимальная посадка в цилиндрических соединениях // В кн.: Рассеяние энергии при колеб. мех. систем. – Киев: Наук. думка, 1970. – С. 421–430.
43. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия / Отв. ред. А. Ю. Ишлинский. – М.: Наука, 2001. – 478 с.
44. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 411 с.
45. Гриліцький Д. В. Термопружні контактні задачі в трибології: навч. посіб. – К., 1996. – 204 с.
46. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.:



- Мир, 1989. – 509 с.
47. Зубко В. И., Полевой Б. Н., Шопа В. М. Цилиндрический изгиб пакета трансверсально-изотропных пластин при наличии зон сцепления, проскальзывания, отслоения // *Механика композитных материалов*. – 1990. – № 3. – С. 508–512.
  48. Зубко В. И., Шопа В. М. Згин пакетів трансверсально ізотропних пластин. – Івано-Франківськ: Факел, 2001. – 265 с.
  49. Ильгамов М. А., Иванов В. А., Гулин Б. В. Расчет оболочек с упругим наполнителем. – М.: Наука. – 1987. – 260 с.
  50. К расчету двухслойных конструкций с учетом трения / М. А. Артемов, О. Г. Кудашов, Г. П. Митрофанов, Ю. М. Мяснянкин // *Прикл. задачи мех. сплош. сред*. – Воронеж, 1988. – С. 119–121.
  51. Кабанов Ю. Контактные технологии в действии // *ANSIS Solutions*. – 2007. – № 4. – С. 5–10.
  52. Кантор В. Я., Зозуля В. В. Контактные задачи теории оболочек: математические аспекты проблемы // *ИПМ АН УССР*. – Харьков, 1988. – 95 с. – Деп. в ВИНТИ, 1988. – № 1251 – В88.
  53. Конструкционное демпфирование в буровом амортизаторе / В. М. Шопа, И. П. Шацкий, С. В. Величкович, И. И. Попадюк // *Нефтяное хозяйство*. – 1990. – № 3. – С. 28–29.
  54. Конструкционное демпфирование в неподвижных соединениях / Н. Г. Калинин, Ю. А. Лебедев, В. И. Лебедева и др. – Рига: Изд-во. АН Латв. ССР, 1960. – 170 с.
  55. Конструкционное демпфирование в узлах вибрационных машин / М. В. Хвингтя, Г. Г. Цулая, В. Н. Гогилашвили, Т. Г. Татишвили. – Тбилиси: Изд-во ГПИ, 1973. – 138 с.
  56. Конструкционный гистерезис в оболочечном демпфере с распределенным трением / С. В. Величкович, И. И. Попадюк, И. П. Шацкий, В. М. Шопа // *Пробл. прочности*. – 1991. – № 3. – С. 36–37.
  57. Кравчук А. С. К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // *Прикл. математика и механика*. – 1980. – 44, № 1. – С. 122–129.
  58. Кравчук А. С. Об учете трения в контактных задачах // *Прикл. вопр. деформируем. тел*. – Томск, 1980. – С. 78–84.
  59. Крэндалл С. Роль демпфирования в теории колбаний //

- Механика. – 1971. – 129, № 5. – С. 1–22.
60. Кузнецов Е. А., Гороховский Г. А. Фрикционное взаимодействие шероховатых тел с позиций механики твердого тела // Трение и износ. – 1980. – 1, № 4. – С. 638–649.
  61. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонки з дефектами. – Львів : СПОЛЮМ, 2003. – 320 с.
  62. Лебедев Н. Ф. Динамика гидравлических забойных двигателей. – М.: Недра, 1981. – 251 с.
  63. Левин А. А. Численное решение квазистатических контактных задач с сухим трением // Горьк. ун-т. – Горький, 1987. – 30 с. – Деп. в ВИНТИ 14.04.87, № 2567 – В87.
  64. Логинов В. К., Матвеев В. В., Страхов Г. И. Совещание по проблеме конструкционного демпфирования колебаний. Рига, 24–26 февр. // Пробл. прочности. – 1970. – № 9. – С. 114–119.
  65. Маковійчук М. В. Згин пологої сферичної оболонки на пружній основі з урахуванням контакту берегів тріщини // Машинознавство. – 2004. – № 10. – С. 12–15.
  66. Маковійчук М. В. Згин пологої сферичної оболонки на пружній основі з урахуванням закриття колінсарних тріщин // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2010. – Вип. 8. – С. 119–124.
  67. Максак В. И. Предварительное смещение и жесткость механического контакта. – М.: Наука, 1975. – 59 с.
  68. Мартиняк Р. М., Кіт Г. С., Криштафович А. А., Мачишин І. М. Вплив сил тертя на параметри термічного і дифузійного контакту пружних тіл з регулярним рельєфом // Машинознавство. – 2000. – № 3. – С. 3–8.
  69. Мартыняк Р. М., Маланчук Н. И. О влиянии локального фрикционного проскальзывания на контактную прочность взаимодействующих тел // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 62–69.
  70. Матвеев В. В. Демпфирование колебаний деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1985. – 264 с.
  71. Мирзаджанзаде А. Х., Керимов З. Г., Копейкис М. С. Теория колебаний в нефтепромысловом деле. – Баку: Маариф, 1976. – 308 с.
  72. Мяснянкин Ю. М., Свиридов Ю. Т., Спорыхин А. Н. К тео-

- рии безмоментных многослойных цилиндрических оболочек с учетом трения между слоями // Аналіт. и числ. методы решения задач мех. деформир. тверд. тела / Воронеж. ун-т. – Воронеж, 1990. – С. 91–97. – Деп. в ВИНТИ 12.06.90, № 3346 – В90.
73. Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. Демпфирование колебаний. – М.: Мир, 1988. – 448 с.
  74. Оболонкові пружини / В. М. Шопя, А. С. Величкович, С. В. Величкович та ін. – Івано-Франківськ: Факел, 2002. – 92 с.
  75. Оболонкові пружні елементи для бурових амортизаторів: досвід конструювання та розрахунку / В. М. Шопя, І. П. Шацький, А. С. Величкович та ін. // Науковий вісник ІФНТУНГ. – 2007. – № 2/16.
  76. Оболочечные упругие элементы: основы конструирования / В. М. Шопя, С. В. Величкович, И. П. Шацкий, И. И. Попадюк // Препринт ИППММ АН УССР № 21–88. – Львов, 1990. – 61 с.
  77. Осадчук В. А. К определению оптимальных параметров продольных разрезов в замкнутых цилиндрических оболочках-демпферах // В кн.: Обобщенные функции в термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1980. – С. 64–69.
  78. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
  79. Осадчук В. А., Николишин М. М. Напряженное состояние ослабленной трещиной замкнутой трансверсально-изотропной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1975. – № 7. – С. 619–623.
  80. Осадчук В. А., Николишин М. М., Регейло С. П. Влияние упругого заполнителя на напряженное состояние замкнутой цилиндрической оболочки с системой трещин // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1979. – Вып. 9. – С. 70–76.
  81. Острык В. И., Улятко А. Ф. Метод Винера-Хопфа в контактных задачах теории упругости. – К.: Наук. думка, 2006. – 328 с.
  82. Пановко Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. – М.: Физматгиз, 1960. – 193 с.

83. Пат. на корисну модель № 63228, МПК F16F 1/36. Пружний елемент / Т. В. Шопя, І. В. Шопя, А. С. Величкович, В. М. Шопя. – Опубл. 10.10.2011, Бюл. № 19.
84. Пат. України № 108295, МПК F16F1/40. Пружний елемент / А. С. Величкович – Опубл. 10.04.2015, Бюл. № 7.
85. Пат. України № 52639, МПК F16F1/40. Пружний елемент / В. М. Шопя, І. Й. Попадюк, І. П. Шацький та ін. – Опубл. 15.01.2003, Бюл. № 1.
86. Пат. України № 54442, МПК E21B17/07. Буровий амортизатор / А. С. Величкович, В. М. Шопя, В. П. Кравець та ін. – Опубл. 17.03.2003, Бюл. № 3.
87. Пат. України № 54443, МПК E21B17/07. Буровий амортизатор / А. С. Величкович, В. М. Шопя, В. П. Кравець та ін. – Опубл. 17.03.2003, Бюл. № 3.
88. Пат. України № 56176, МПК E21B17/00. Буровий амортизатор / А. С. Величкович, В. М. Шопя, В. П. Кравець та ін. – Опубл. 15.05.2003, Бюл. № 5.
89. Пат. України 50754, МПК F16F1/40. Пружний елемент / В. М. Шопя, І. Й. Попадюк, І. П. Шацький та ін. – Опубл. 15.11.2002, Бюл. № 11.
90. Пат. 1810665 РФ, МКИ F16F1/40. Амортизатор / С. В. Величкович, В. М. Шопя, І. П. Шацький, І. Й. Попадюк. – Опубл. 23.04.93, Бюл. № 15.
91. Пат. 2015295 РФ, МКИ 5 E21 B17/07. Буровой амортизатор / С. В. Величкович, В. М. Шопя, А. С. Величкович, О. Ф. Ярмак (Україна) // Опубл. 30.06.94, Бюл. № 12.
92. Пат. 2031270 РФ, МКИ 6 F16 F1/42. Амортизатор / С. В. Величкович, В. М. Шопя, П. Е. Кравець, и др. (Україна) // Опубл. 20.03.1995, Бюл. № 8.
93. Пат. 2043558 РФ, МКИ 6 F 16 J 15/34. Торцевое уплотнение / С. В. Величкович, І. Й. Попадюк, І. П. Шацький, О. О. Бедзир // Опубл. 10.09.95, Бюл. № 25.
94. Пат. 2088741 РФ, МКИ 6 E 21 B 17/07. Забойный амортизатор / А. С. Величкович (Україна) // Опубл. 27.08.97, Бюл. № 24.
95. Пат. 74786, МПК F16F1/34. Спосіб регулювання жорсткості бурового амортизатора / А. С. Величкович – Опубл. 15.02.2006, Бюл. № 2.

96. Пелех Б. Л., Сухорольский М. А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – Киев: Наук. думка, 1980. – 216 с.
97. Писаренко Г. С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. – Киев: Наук. думка, 1970. – 379 с.
98. Попадюк И. И. О контактном взаимодействии несущих частей оболочечной пружины // В кн.: Матер. 12 конф. мол. ученых ИППММ АН УССР (Львов, 21–23 окт. 1987 г.) – Ин-т прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР, Львов, 1987. – С. 138–142. – Деп. в ВИНТИ 08.08.1988 г., № 6308 – В88.
99. Попадюк И. И. Упругое равновесие коаксиальных цилиндрических оболочек и деформируемого заполнителя в условиях фрикционного контакта // В кн.: Матер. 13 конф. мол. ученых Ин-та прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР (Львов, 11–12 мая 1989 г.) – Львов: ИППММ АН УССР, 1989. – С. 110–114. – Деп. в ВИНТИ 06.12.1989 г., № 7242 – В89.
100. Попадюк І. Й., Шацький І. П., Шопа В. М. Механіка фрикційного контакту оболонок з деформівним заповнювачем: Монографія. – Івано-Франківськ: Факел, 2003. – 180с.
101. Попадюк І. Й., Шацький І. П., Шопа В. М. Фрикційний контакт у конічному амортизаторі з пружним заповнювачем // Доп. НАН України. – 1997. – № 4. – С. 67–71.
102. Попадюк І. Й., Шацький І. П., Шопа В. М. Фрикційний контакт циліндричної оболонки з деформівним заповнювачем при немонотонному навантаженні // Доп. НАН України. – 2013. – № 1. – С. 59–64.
103. Попадюк І. Й., Шацький І. П., Шопа В. М., Величкович А. С. Фрикційна взаємодія циліндричної оболонки з деформівним заповнювачем при немонотонному навантаженні // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – 57, № 2. – С. 187–194.
104. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник. В 3-х т. / Ред. И. А. Биргера и Я. И. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 3. – 567 с.
105. Пружини двойного действия / В. М. Шопа, С. В. Величкович, Б. Н. Полевой и др. // Машиностроитель. – 1982. – № 7. – С. 36–37.

106. Равнопрочный упругий элемент оболочечной пружины / В. М. Шопа, И. П. Шацкий, С. В. Величкович, И. И. Попадюк // Вестн. машиностроения. – 1991. – № 2. – С. 25–26.
107. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л. А. Галина. – М.: Наука, 1976. – 483 с.
108. Рекач В. Г. Руководство к решению задач по теории упругости. – М.: Высш. школа, 1977. – 216 с.
109. Решение вариационным методом пространственных контактных задач качения с проскальзыванием и сцеплением / Р. В. Гольдштейн, А. Ф. Зазовский, А. А. Спектор, Р. П. Федоренко // Успехи механики. – 1982. – 5, № 3/4. – С. 61–102.
110. Решетов Д. Н., Палочкин С. В. Демпфирование колебаний в компенсированных муфтах // Изв. вузов. Машиностроение. – 1981. – № 12. – С. 13–18.
111. Решетов Д. Н., Палочкина Н. В. Исследование демпфирования колебаний в резьбовом соединении // Изв. вузов. Машиностроение. – 1972. – № 1. – С. 19–23.
112. Румянцев А. А. Итерационный алгоритм решения задачи о штампе произвольной формы с учетом трения // Пробл. прочности. – 1984. – № 7. – С. 101–105.
113. Страхов Г. И. Конструкционный гистерезис в амортизаторах резинометаллического типа // Вопр. динамики и прочности. – Рига: Изд-во АН Латв. ССР, 1959. – Вып. 6. – С. 5–35.
114. Страхов Г. И. Конструкционный гистерезис в прессовом соединении при растяжении – сжатии // Изв. АН Латв. ССР. – Рига, 1957. – № 5. – С. 129–138.
115. Телега Ю. И. Вариационные методы в контактных задачах механики // Успехи механики. – 1987. – 10, № 2. – С. 3–95.
116. Телия Т. Н. Метод оптимизации петли гистерезиса в упругой системе вибрационной машины // Сообщ. АН ГССР. – 1986. – 124, № 2. – С. 369–372.
117. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы сопротивления материалов. – М.: ГИТТЛ, 1950. – 289 с.
118. Филин А. П. Элементы теории оболочек. – Л.: Стройиздат, 1975. – 256 с.
119. Фрикційна взаємодія ортотропної циліндричної оболонки з

- деформівним заповнювачем / А. С. Величкович, І. Й. Попадюк, І. П. Шацький, В. М. Шопа // Доп. НАН України. – 1999. – № 11. – С. 67–69.
120. Хвингия М. В., Сулая Г. Г., Гогилашвили В. И. Конструкционное демпфирование в узлах вибрационных машин. – Тбилиси: Груз. политехн. ин-т., 1973. – 138 с.
  121. Хлуднев А. М. Контактная задача для пологой оболочки с трещиной // Прикл. математика и механика. – 1995. – 59, № 2. – С. 318–326.
  122. Шацкий И. П. Задача о разрезе с контактирующими кромками в изгибаемой пологой оболочке // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 5. – С. 164–173.
  123. Шацкий И. П., Величкович С. В., Попадюк И. И. Прорезной упругий элемент // Машиностроитель. – 1988. – № 4. – С. 24.
  124. Шацкий И. П., Маковийчук Н. В. Влияние закрытия коллинеарных трещин на напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие изгибаемых пологих оболочек // Прикл. механика и техн. физика. – 2011. – 52, № 3. – С. 159–167.
  125. Шацкий И. П., Маковийчук Н. В. Равновесие пологой сферической оболочки с учетом контакта берегов трещины при изгибе // Теорет. и прикл. механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 146–150.
  126. Шацкий И. П., Шопа В. М., Бедзир А. А. Неидеальный контакт в составной оболочечной конструкции с деформируемым наполнителем // Прикл. механика. – 1995. – 31, № 5. – С. 25–29.
  127. Шацький І. П. Закриття поздовжньої тріщини у пологій циліндричній панелі під час її згину // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – 41, № 2. – С. 45–48.
  128. Шацький І. П. Закриття поперечної тріщини при згині пологої циліндричної оболонки // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – 43, № 2. – С. 149–154.
  129. Шацький І. П. Інтегральні рівняння задачі згину пологої оболонки, ослабленої розрізом з контактуючими кромками // Доп. АН УРСР. – 1991. – № 2. – С. 26–29.
  130. Шацький І. П., Маковийчук М. В. Аналіз граничного стану

- циліндричних оболонок з тріщинами з урахуванням контакту берегів // Пробл. прочности. – 2009. – № 5. – С. 141–146.
131. Шацький І. П., Маковійчук М. В. Контактна взаємодія берегів тріщин у пологих оболонках за згину з розтягом // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – 41, № 4. – С. 45–52.
  132. Шацький І. П., Попадюк І. Й., Шопя В. М. Розподіл сил тертя у багатосекційному пружному елементі бурового амортизатора // Наук. вісник Івано-Франківського нац. техн. ун-ту нафти і газу. – 2004. – № 1. – С. 13–16.
  133. Шацький І. П., Шопя В. М. Контактна задача для балки з урахуванням тертя при немонотонному навантаженні // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1990. – № 12. – С. 30–32.
  134. Шацький І. П., Шопя В. М., Бедзір О. О. Фрикційна взаємодія прорізної циліндричної оболонки з пружним заповнювачем // Доп. АН України. – 1993. – № 8. – С. 70–73.
  135. Шацький І. П., Шопя В. М., Величкович А. С. Розрахунок демпфера з розрізаною циліндричною оболонкою // Розвідка і розробка нафтових і газових родовищ. Сер. Нафтопромислове обладнання. – 1998. – № 35. – С. 31–38.
  136. Шацький І., Маковійчук М. Закриття колінеарних тріщин при згині пологої циліндричної оболонки // Машинознавство. – 2011. – № 11–12. – С. 27–30.
  137. Шацький І., Маковійчук М. Рівновага сферичної пологої оболонки з урахуванням закриття колінеарних тріщин за згину // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2010. – № 12. – С. 189–195.
  138. Шацький І., Шопя В., Величкович А. Конструкційне демпфування у розрізаній циліндричній оболонці з пружним заповнювачем // Машинознавство. – 2009. – № 10. – С. 31–36.
  139. Шопя В. М., Бедзір О. О. Розрахунок оболонкового пружного елемента бурового амортизатора // Розвідка і розробка нафтових і газових родовищ. – Сер. Нафтогазпромислове обладнання. – 1996. – № 33. – С. 106–112.
  140. Шопя В. М., Бедзір О. О. Фрикційний контакт прорізної циліндричної оболонки з деформівним заповнювачем // Матер. доп. 3-го Міжнар. симп. “Некласичні проблеми теорії тонкостінних елементів конструкцій та фіз.-хім. механіки композиційних матеріалів”. – Івано-Франківськ: ІФДТУНГ. –



1997. – С. 175–178.
141. Шопа В. М., Величкович А. С., Шацький І. П., Попадюк І. Й. Розрахунок, конструювання та експлуатація бурових амортизаторів з оболонковими пружинами // Міжнар. наук.-практ. конф. “Стан, проблеми та перспективи нафтогазової промисловості України” (Борислав, 7-9 вересня 2012 р.). – С. 75.
  142. Шопа В. М., Попадюк І. Й. Конструкційне демпфування в рівномісній циліндричній оболонці з деформівним заповнювачем. – *Мат. методи і фіз.-мех. поля*. – Вип. 37. – 1994. – С. 86–91.
  143. Шопа В. М., Попадюк І. Й., Бездір О. О. Змішані задачі фрикційного контакту коаксіальних циліндричних оболонок і деформівного заповнювача // *Мат. методи і фіз.-мех. поля*. – 1998. – 41, № 3. – С. 103–108.
  144. Шопа В. М., Сухорольський М. А. Один клас контактних задач теорії оболонок // *Докл. АН УРСР*. – Сер. А. – 1987. – С. 48–52.
  145. Шопа В. М., Шацький І. П., Попадюк І. Й. Расчет податливости оболочечной пружины // *Изв. вузов. Машиностроение*. – 1989. – № 5. – С. 18–21.
  146. Шопа В. М., Шацький І. П., Попадюк І. Й. Элементарный расчет конструкционного гистерезиса в оболочечных пружинах // *Вестн. машиностроения*. – 1989. – № 3. – С. 31–32.
  147. Шопа В. М., Шацький І. П., Величкович А. С. Оболонкові пружини: конструювання, розрахунок та досвід промислового використання / *Сучасні проблеми механіки та математики*. – Львів, 2008. – Т. 2. – С. 247–249.
  148. Шопа В. М., Шацький І. П., Попадюк І. Й. Конструкційне демпфування в циліндричній оболонці з пружним заповнювачем // *Доп. АН УРСР. Сер. А*. – 1989. – № 2. – С. 44–47.
  149. Шопа В. М., Шацький І. П., Попадюк І. Й. Фрикційна взаємодія циліндричної оболонки з пружним заповнювачем // *Доп. АН УРСР. Сер. А*. – 1989. – № 3. – С. 48–50.
  150. Badrakhan F. Dynamic analysis of yielding and hysteretic systems by polynomial approximation // *J.Sound and Vibr.* – 1988. – 125, № 1. – P. 23–42.
  151. Bapat C. N., Sankar S. Multiunit impact damper – reexamined //

- J. Sound and Vibr. – 1985. – 103, № 4. – P. 457–469.
152. Beards C. F. The damping of structural vibration by controlled interfacial slip in joints // Trans. ASME: J. Vibr., Acoust., Stress and Reliab. Des. – 1983. – 105, № 3. – P. 369–373.
  153. Beards C. F., Imam I. M. A. The damping of plate vibration by interfacial slip between layers // Int. J. Mach. Tool Des. and Res. – 1978. – 18, № 3. – P. 131–137.
  154. Beards C. F., Robb D. A. The use of frictional damping to control the vibration of plates in structures // Rec. Adv. Struct. Dyn. Pap. Int. Conf., Southampton. – 1980. – Vol.2. – P. 749–760.
  155. Bielski W. R., Telega J. J. A contribution to contact problems for a class of solids and structures // Arch. Mech. – 1985. – 37, № 4–5. – P. 303–320.
  156. Brink K. Die Dämpfung bei Drehschwingungen der Kupplungen // Wohl. Inst. Mitt. – 1936. – H. 28. – P. 53–81.
  157. Bufler H. Derivation of the variational inequalities and extremum principles of the frictionless elastic contact problem // Comp. Meth. Eng. – 1985. – 53, № 2. – P. 163–182.
  158. Chow T. S., Hermans J. J. The effect of dry friction on the oscillatory behavior of fabrics // Text. Res. J. – 1970. – 40, № 11. – P. 982–985.
  159. Dämpfung von Schwingungen bei Maschinen und Bauwerken // VDI-Ber. – 1987. – № 627. – S. 1–446.
  160. Damping Applications for Vibration Control / Ed. by P. J. Torvik // Winter Annu. Meet. ASME. Chicago, Nov. 16–21, 1980. – New-York, 1980. – 158 p.
  161. Den-Hartog J. P. Mechanical Vibrations. – New-York, McGraw-Hill, 4th Ed., 1956. – 238 p.
  162. Dowell E. H., Schwartz H. B. Forced response of a cantilever beam with a dry friction damper attached. Part 2: experiment // J. Sound and Vibr. – 1983. – 91, № 2. – P. 269–291.
  163. Dowell E. H., Schwartz H. B. Forced response of a cantilever beam with a dry friction damper attached. Part 1: theory // J. Sound and Vibr. – 1983. – 91, № 2. – P. 255–267.
  164. Duvaut G. Equilibre d'un solide elastique avec contact unilatéral et frottement de Coulomb // C. R. Acad. Sc. – 1980. – 290. – P. 263–265.

165. Earles S. W. E., Mansoori F. S. Frictional damping applied to a cantilever-beam structure: a theoretical and experimental response comparison // *Int. J. Mach. Tool. Des. and Res.* – 1974. – 14, № 1. – P. 111–124.
166. Gangadharam D. A review of structural damping // *Indian Eng.* – 1970. – 14, № 4. – P. 9–19.
167. Goodman L. E., Klumpp J. H. Analysis of Slip Damping with Reference to Turbine-Blade Vibrations / *J. of Appl. Mech.* – 1956. – 23, № 3. – P. 42–50.
168. Haslinger J. On the approximation of the Signorini problem with friction // *Comp. math.* – Warsaw, 1984. – 13. – P. 149–157.
169. Kalker J. J. The quasistatic contact problem with friction for three-dimensional elastic bodies // *J. mec. theor. et appl.* – 1988. – 7, № 1. – P. 55–66.
170. Kravchuk A. S., Neittaanmäki P. J. *Variational and Quasi-Variational Inequalities in Mechanics.* – Springer-Verlag Berlin, 2007. – 338 P.
171. Larson Mats G., Bengzon F. *The Finite element method: Theory, Implementation and Applications.* – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. – 402 p.
172. Laursen A. *Computational contact and impact mechanics: fundamentals of modeling interfacial phenomena in nonlinear finite element analysis.* – Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong: Springer, 2002. – 454 p.
173. Martynyak R. M., Goryacheva I. G. Contact problems for textured surfaces involving frictional effects // *Proc. Inst. Mech. Eng., Part J: J. Eng. Tribol.* – 2014. – 228, № 7. – P. 707–716.
174. Murin J. Poznámky k tlmeniu torznych kmitov v tzv. nepohyblivých spojoch // *Strojn.cas.* – 1984. – 35, № 1–2. – S. 113–119.
175. Nayak P. Ranganath. Contact vibrations // *J. Sound and Vibr.* – 1972. – 22, № 3. – P. 297–322.
176. Nordlund E. Slip and energy dissipation in cylindrical friction joints loaded by impact-induced waves // *Int. J. Impact Eng.* – 1987. – 6, № 1. – P. 35–50.
177. Oden J. T., Pires E. B. Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity // *Tr. ASME: J. Appl. Mech.* – 1983. – 50, № 1. – P. 67–76.

178. Plynkett R. Friction damping // Damp. Appl. Vibr. Contr. Winter Annu. Meet. ASME. Chicago, Nov. 16–21, 1980. – New-York, 1980. – P. 65–74.
179. Rades M. Parameter identification of a structure with combined coulomb and hysteretic damping // Rev. roum. sci. techn. Ser. mec. appl. – 1982. – 27, № 2. – P. 299–308.
180. Roscl R. On the interpretation of structural damping // J. angew. Math. und Mech. – 1973. – 53, № 6. – P. 329–332.
181. Shatsky I. P. The cuts with the contacting edges in the bending shallow shells // Adv. in Fract. Resist. in Mater. / Ed. V. V. Panasyuk e.a. – New Delhi: Mc Craw-Hill. Publ., 1996. – V. 1. – P. 555–561.
182. Velichkovich A. S., Popadyuk I. I., Shopa V. M. Experimental study of shell flexible component for drilling vibration damping devices // Chemical and Petroleum Engineering. – New York: Springer – 2011. – 46, № 9–10. – P. 518–524.
183. Wriggers P. Computational Contact Mechanics. – John Wiley Sons: Chichester, West Sussex, England, 2002. – 442 p.
184. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The Finite element method: Solid mechanics, Vol. 2. – Bristol: Butterworth-Heinemann, 2000. – 445 p.

## Наукове видання

Шопа Василь Михайлович  
Шацький Іван Петрович  
Бедзір Олександр Олександрович  
Величкович Андрій Семенович

### Контактна взаємодія прорізаних оболонок з деформівними тілами

Затверджено до друку вченою радою Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України та вченою радою Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Коректор

А. С. Величкович

Комп'ютерна верстка

В. А. Корнута

Видавництво Івано-Франківського національного  
технічного університету нафти і газу

вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ, 76019, Україна  
тел. (03422) 42453, факс (04322) 42139,  
<http://nung.edu.ua>, e-mail: [public@nung.edu.ua](mailto:public@nung.edu.ua)

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців  
ІФ № 18 від 12.03.2002 р.

---

Підписано до друку 16.09.2015 Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub> Папір офсетний

Ум. друк. арк. 12,1 Тираж 300 прим. Замовлення № 207