вищ. Держ. н.-т. зб. – Івано-Франківськ, 1997. – № 34 (т.1). – С. 87-91.

велла. Розрахунок тензорних коефіцієнтів є одним з “вузьких” місць методу.

Метод граничних інтегральних рівнянь заснований на представленні поля у вигляді інте-

УДК 550.837

# ДО ПИТАННЯ ПРО ТРИВИМІРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОЛЯ ПОТЕНЦІАЛІВ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

*О.В.Станкін, Е.Д.Кузьменко*

*ІФНТУНГ, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (03422) 42098, e-mail: kuzmenko@ukrpack.net*

*Рассмотрен способ моделирования потенциала электрического поля источника постоянного тока в неоднородной среде. В процессе решения прямой задачи предусматривается разбиение среды на прямоугольные параллелепипеды, то есть аппроксимация неоднородной среды кусочно-однородной. При этом осуществляется замена распределения удельных проводимостей распределением плотностей вторичных источников. Полученные аналитические выражения могут быть использованы при решении обратной задачи трехмерной электроразведки.*

*The method of modelling of a potential of the electrical field of the source of continuous current in the heterogeneous medium is considered in this paper. In the process of solution of a direct problem it‘s possible to divide the medium into restangular parallelepipeds, that is to approximate heterogeneous medium to segment homogeneous. It‘s also provided the exchange of specific conductions distribution for distribution of secondary sources densities. The obtained analytical expressions can be used for solution of the reverse problem of three dimensional prospecting.*

При проведенні геофізичних досліджень, спрямованих на пошук і підготовку до буріння нафтогазових структур, в останні роки спостерігається тенденція до комплексування геофізичних методів, зокрема сейсмо-, граві-, магніто- та електророзвідки. При цьому ставляться вимоги побудови тривимірних результуючих інтерпретаційних моделей. Якщо для методів сейсмо- та гравірозвідки задача 3D моделювання є вирішеною, то для інших методів триває процес досліджень. В даній роботі розглянуті деякі питання розвитку теоретичних основ тривимірної електророзвідки постійним струмом.

Недивлячись на значну кількість різноманітних підходів, досі все ще немає ефективних та надійних алгоритмів і програм, які б уможливили моделювання тривимірних електричних полів в достатньо широкому класі геоелектричних моделей. Одна з головних причин такого становища полягає, на наш погляд, в тому, що до останнього часу для чисельного моделювання тривимірних електромагнітних полів відповідні математичні методи скінченних різниць, скінченних елементів, інтегральних рівнянь та ін. застосовувались дещо формально, без урахування специфіки задач електричного моделювання, а також того, що в цій ситуації обмеженість ресурсів ЕОМ пред‘являє підвищені вимоги до всіх етапів розрахунків і вимагає комплексного підходу до проблеми загалом.

Наведемо більш докладну порівняльну характеристику існуючих методів моделювання з оцінкою їх переваг і недоліків.

Метод інтегральних рівнянь заснований на чисельному розв’язанні рівняння Фредгольма 2-го роду, яке можна вивести з рівнянь Максграла по поверхні області за участю допоміжних (фіктивних) джерел. Метод має одну очевидну перевагу порівняно з методом інтегральних рівнянь: при чисельному розв’язанні рівнянь, записаних по поверхні області, а не по об‘єму, розмірність відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь істотно зменшується.

До методів диференціальних рівнянь відносяться метод скінчених різниць і метод скінчених елементів.

В основі методу скінчених різниць лежить різницева апроксимація похідних. Метод застосовується для чисельного рішення диференціального рівняння стану електричного поля в деякій області простору, що містить в собі неоднорідності провідності. Метод відрізняють простота чисельної реалізації, а також стрічкова структура матриці. Однак, недивлячись на значний досвід застосування, коло розв’язаних за допомогою методу задач обмежене локальними моделями з порівняно простою структурою електропровідності, при цьому необхідно досить точно апроксимувати другі похідні.

Метод скінчених елементів інтерпретується як метод зважених залишків. Недивлячись на те, що теоретичні скінчені елементи добре пристосовані для моделювання геологічних розрізів із складним розподілом електропровідності, гнучкість методу досягається ціною значних зусиль обчислювального характеру.

Таким чином, кожний із вказаних чисельних методів має групу моделей, для якої його використання є оптимальним, тому розвивають гібридні схеми, а саме – застосування змішаних підходів, які об‘єднують в собі позитивні якості методів диференціальних та інтегральних рівнянь.

Тому в тих випадках, коли це можливо, доцільно вже на етапі постановки задачі врахововувати її специфіку з тим, щоб забезпечити найбільш ефективне рішення вузького класу проблем, який розглядається. Зрозуміло, що ціною такого підвищення ефективності є втрата універсальності. Далі пропонується спосіб моделювання потенціалу електричного поля джерела постійного струму в середовищі з тривимірним розподілом питомого електричного опору, який на певному етапі містить аналітичні рішення, що деякою мірою дає змогу вирішити проблему універсальності прямих і відповідно обернених задач, – подальша чисельна його реалізація цілком можлива для ЕОМ сучасного рівня.

Нехай дано середовище, питомий електричний опір якого є функцією трьох координат $\rho = \rho(x, y, z)$, джерело струму і заданий розподіл щільності сторонніх джерел $\mu_{cm} = \mu_{cm}(x, y, z)$. Необхідно знайти електричний потенціал $U(x, y, z)$ в будь-якій точці середовища.

Розподіл потенціалів в поставленій задачі описується диференціальним рівнянням [1]

$$div(\sigma\, gradU) = -\mu_{cm}\,, \qquad (1)$$

де $\sigma = 1/\rho$ – питома провідність.

Застосовуючи оператор дивергенції до виразу в дужках, перетворимо рівняння (1) до такого вигляду:

$$\sigma\, \Delta U + grad\sigma \cdot gradU = -\mu_{cm}\,, \qquad (2)$$

де $\Delta$ – лапласіан.

Для розв'язку задачі апроксимуємо середовище набором прямокутних паралелепіпедів, грані яких паралельні до координатних площин, припускаючи, що в межах кожного паралелепіпеда провідність – величина постійна. Значення потенціалу $U$ будемо шукати в точці $A(x_0, y_0, z_0)$. Оскільки в межах елементарного паралелепіпеда провідність постійна, $grad\sigma$ буде приймати ненульові значення тільки на границях.

Перейдемо від об'ємного градієнта у виразі (2) до поверхневого, котрий відповідно з роботою [2], на межі двох середовищ з провідностями $\sigma_1$ і $\sigma_2$ буде дорівнювати

$$grad\sigma = (\sigma_1 - \sigma_2)\vec{n}\,, \qquad (3)$$

де $\vec{n}$ – нормаль до межі.

Оскільки грані елементарних паралелепіпедів паралельні до координатних площин, нормалі, а значить і градієнти, будуть співпадати за напрямом з відповідними ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ на всій грані за виключенням точок перетину з іншими гранями. Оскільки в точках ребер і вершин градієнт має кінцевий розрив, то, не вносячи суттєвих похибок, будемо вважати, що напрям градієнта співпадає з ортом в межах усієї грані.

Скористаємось позначеннями

$$\sigma_x = \sigma_{ijk} - \sigma_{i+1jk}\,;$$

$$\sigma_y = \sigma_{ijk} - \sigma_{ij+1k}\,; \qquad (4)$$

$$\sigma_z = \sigma_{ijk} - \sigma_{ijk+1}\,,$$

де індекси $i, j, k$ означають номер розбиття по відповідній координатній осі.

Тоді градієнти для граней, перпендикулярних відповідно до осей $Ox$, $Oy$ та $Oz$, будуть рівні

$$grad\sigma = (\sigma_x, 0, 0),\ grad\sigma \perp yOz\,;$$

$$grad\sigma = (0, \sigma_y, 0),\ grad\sigma \perp xOz\,; \qquad (5)$$

$$grad\sigma = (0, 0, \sigma_z),\ grad\sigma \perp xOy\,.$$

Введемо поняття вторинних джерел, тобто джерел, які розташовані на межі середовищ з різною провідністю. Їх виникнення пов'язане з тим фактом, що на межі середовищ з різною провідністю нормальна компонента вектора напруженості має розрив, і її величина змінюється пропорційно контрасту провідностей [3]

$$\sigma_1 E_{n1} = \sigma_2 E_{n2}\,, \qquad (6)$$

де $E_n$ – нормальна компонента вектора напруженості.

Очевидно, що вторинні джерела будуть розташовуватись у вигляді простого шару, тому що у випадку подвійного шару не виконувалась би умова нерозривності потенціалу на межі $U_1 = U_2$. Припустимо, що сторонні джерела також розташовуються у вигляді простого шару. Остання умова практично завжди виконується в електророзвідці постійним струмом, оскільки електроди, з поверхні котрих стікає струм, мають малі відносно розглядуваної моделі середовища, але не нульові розміри (інакше потенціал в точці джерела прямував би до $\infty$, чого не стається на практиці). Густину вторинних джерел будемо позначати $\mu_{вт}$, а сумарну густину сторонніх і вторинних джерел –

$$\mu = \mu_{cm} + \mu_{вт}\,. \qquad (7)$$

Для простого шару справедлива рівність [1]

$$U(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\mu(x, y, z)}{r}\, dS, \qquad (8)$$

де $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ – відстань від точки $(x_0, y_0, z_0)$ до поточної елементарної площинки інтегрування.

Метою наших досліджень є отримання загального виразу для $\mu(x, y, z)$ у формулі (8), виходячи з постановки задачі відповідно з наведеними тут законами та закономірностями. При цьому будемо дотримуватись такої послідовності: отримання розв'язку для двовимірного варіанта (площина), розповсюдження рішення на тривимірну модель рисунка.

Розв'язок для двовимірного варіанта запропонований О.І.Кобруновим, О.М.Даниленком в роботі [4]. Шлях розв'язання такий. Знайдемо $gradU(x, y, z)$ з (8), отримаємо вираз (9), далі запишемо добуток градієнтів з (2) з урахуванням (3) та (9)

$$gradU(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{\mu(x,y,z)(x-x_0)dS}{r^3}\vec{i}+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{\mu(x,y,z)(y-y_0)dS}{r^3}\vec{j}+ \qquad (9)$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{\mu(x,y,z)(z-z_0)dS}{r^3}\vec{k};$$
$$grad\sigma\cdot gradU=$$
$$=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{4\pi}\int_S\frac{\mu(x,y,z)cos(\vec{n},\vec{r})}{r^3}dS. \qquad (10)$$

Після ділення виразу (2) на провідність на межі розділу середовищ $\overline{\sigma}=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$ (останній вираз обгрунтовано в [2]) з урахуванням формули (10) після групування отримуємо

$$\Delta U=-\frac{\mu_{cm}(x_0,y_0,z_0)}{\overline{\sigma}}-$$
$$-\frac{\lambda}{4\pi}\int_S\frac{\mu(x,y,z)cos(\vec{n},\vec{r})}{r^3}dS, \qquad (11)$$

де $\lambda=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}$ – коефіцієнт відображення струму.

Зважаючи на співвідношення (8), з котрого маємо $\Delta U=-\mu$, перепишемо (11) так:

$$\frac{\mu_{cm}(x_0,y_0,z_0)}{\overline{\sigma}}=\mu(x_0,y_0,z_0)-$$
$$-\frac{\lambda}{4\pi}\int_S\frac{\mu(x,y,z)cos(\vec{n},\vec{r})}{r^3}dS. \qquad (12)$$

Вираз (12) являє собою інтегральне рівняння Фредгольма другого роду, з рішенням його знайдемо розподіл μ – густини джерел, а відтак з (8) – розподіл потенціалів. Для розв'язання цього типу рівнянь пропонуються методи ітерації або апроксимуючих функцій [5]. Наприклад, при простій ітерації

$$\mu^{n+1}=\frac{\mu_{cm}}{\sigma}-\frac{1}{4\pi\overline{\sigma}}\int_S\frac{\mu^n(\bar{r}\cdot grad\sigma)}{r^3}dS, \qquad (13)$$

де $n$ – номер ітерації.

Як початкове наближення використаємо $\mu^0=\mu_{cm}$. Критерієм зупинки ітераційного процесу виберемо нев'язку

$$\left\|\mu^{n+1}-\mu^n\right\|_{L_2}, \qquad (14)$$

де $\|\cdot\|_{L_2}$ – норма в просторі $L_2$.

Наведений вище спосіб розв'язання представлений в загальному вигляді. Перетворимо вираз (12) з урахуванням нашого конкретного розбиття на паралелепіпеди. Припустимо, що в межах кожної грані паралелепіпеда $\mu$ – величина постійна. Тоді, вводячи позначення $\mu_{ijk}$ – густина джерел на відповідній грані, можемо записати вираз (12) таким чином:

$$\frac{\mu_{cm}(x_0,y_0,z_0)}{\overline{\sigma}}=\mu(x_0,y_0,z_0)-$$
$$-\frac{1}{4\pi\overline{\sigma}}\left[\sum_i\int_S\frac{\mu_{ijk}\sigma_x(x-x_0)}{r^3}dydz+\right.$$
$$+\sum_j\int_S\frac{\mu_{ijk}\sigma_y(y-y_0)}{r^3}dxdz+ \qquad (15)$$
$$\left.+\sum_k\int_S\frac{\mu_{ijk}\sigma_z(z-z_0)}{r^3}dxdy\right],$$

де $\sum\limits_i,\sum\limits_j,\sum\limits_k$ – суми інтегралів для відповідних граней, перпендикулярних до $Ox,Oy,Oz$.

Вираз для $grad\sigma\cdot gradU$ перетворюється в добуток тільки для однієї компоненти кожного вектора, оскільки для $grad\sigma$ (5) інші компоненти дорівнюють нулю. Суми $\sum\limits_i,\sum\limits_j,\sum\limits_k$ треба розуміти як суми інтегралів всіх площинок, перпендикулярних до відповідних осей. Таким чином, вирази $\mu_{ijk}$ під інтегралами будуть різними для кожної з груп сумування і будуть змінюватися всі індекси за $i,j,k$. Тобто $\sum\limits_i$ слід розуміти як $\sum\limits_{ijk}$ для всіх площинок, перпендикулярних до осі $Ox$, $\sum\limits_j$ – як $\sum\limits_{ijk}$ для всіх площинок, перпендикулярних до осі $Oy$, і $\sum\limits_k$ – як $\sum\limits_{ijk}$ для всіх площинок, перпендикулярних до осі $Oz$.

Знайдемо значення для потенціалу від прямокутних площинок, перпендикулярних до осі $Ox$. Через вказану перпендикулярність вираз $r$ у формулі (8) для потенціалу не буде залежати від змінної $x$, а інтеграл за поверхнею $S$ заміниться на подвійний інтеграл за $dy$ і $dz$

$$U_{\perp Ox}(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{\mu(x,y,z)}{r}dydz=$$
$$=\frac{\mu}{4\pi}\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\frac{dydz}{r}=\frac{\mu}{4\pi}\int_{z_1}^{z_2}\left(ln\left|Y+r\right|\Big|_{y_1}^{y_2}\right)dz= \qquad (16)$$
$$=\frac{\mu}{4\pi}\left(Y\,ln\left|Z+r\right|+Z\,ln\left|Y+r\right|-Xarctg\frac{YZ}{Xr}\right)\Bigg|_{y_1z_1}^{y_2z_2},$$

де $X=x-x_0$, $Y=y-y_0$, $Z=z-z_0$.

Для даного випадку осі $X$ будуть рівні, тому підстановки виконуються за $z$ и $y$. Густина $\mu$ як постійна винесена за знак інтеграла.

Аналогічні вирази виводяться для площинок, перпендикулярних до $Oy$,

$$U_{\perp Oy}(x_0,y_0,z_0)=\frac{\mu}{4\pi}\times$$
$$\times\left(X\,ln\left|Z+r\right|+Z\,ln\left|X+r\right|-Yarctg\frac{XZ}{Yr}\right)\Bigg|_{x_1z_1}^{x_2z_2} \quad (17)$$

і для площинок, перпендикулярних до $Oz$,

$$U_{\perp Oz}(x_0,y_0,z)=\frac{\mu}{4\pi}\times$$
$$\times\left(X\,ln\left|Y+r\right|+Y\,ln\left|X+r\right|-Zarctg\frac{XY}{Zr}\right)\Bigg|_{x_1y_1}^{x_2y_2} \quad (18)$$

Знайдемо часткові похідні для площинок, перпендикулярних до $Ox$,

$$\frac{\partial U_{\perp Ox}}{\partial x}=-\frac{\mu}{4\pi}arctg\frac{YZ}{Xr}\Bigg|_{y_1z_1}^{y_2z_2};$$
$$\frac{\partial U_{\perp Ox}}{\partial y}=\frac{\mu}{4\pi}ln\left|Z+r\right|\Bigg|_{y_1z_1}^{y_2z_2}; \quad (19)$$
$$\frac{\partial U_{\perp Ox}}{dz}=\frac{\mu}{4\pi}ln\left|Y+r\right|\Bigg|_{y_1z_1}^{y_2z_2};$$

перпендикулярних до $Oy$,

$$\frac{\partial U_{\perp Oy}}{\partial x}=\frac{\mu}{4\pi}ln\left|Z+r\right|\Bigg|_{x_1z_1}^{x_2z_2};$$
$$\frac{\partial U_{\perp Oy}}{\partial y}=-\frac{\mu}{4\pi}arctg\frac{XZ}{Yr}\Bigg|_{x_1z_1}^{x_2z_2}; \quad (20)$$
$$\frac{\partial U_{\perp Oy}}{\partial z}=\frac{\mu}{4\pi}ln\left|X+r\right|\Bigg|_{x_1z_1}^{x_2z_2};$$

перпендикулярних до $Oz$,

$$\frac{\partial U_{\perp Oz}}{\partial x}=\frac{\mu}{4\pi}ln\left|Y+r\right|\Bigg|_{x_1y_1}^{x_2y_2};$$
$$\frac{\partial U_{\perp Oz}}{\partial y}=\frac{\mu}{4\pi}ln\left|X+r\right|\Bigg|_{x_1y_1}^{x_2y_2}; \quad (21)$$
$$\frac{\partial U_{\perp Oz}}{\partial z}=-\frac{\mu}{4\pi}arctg\frac{XY}{Zr}\Bigg|_{x_1y_1}^{x_2y_2}.$$

Не важко помітити, що вищенаведені вирази схожі з виразами для старших похідних гравітаційного потенціалу для паралелепіпеда і відрізняються постійним множником і підстановками [6]. Володіючи аналітичними виразами для градієнтів потенціалу (19)-(21), з урахуванням дискретного виду виразу для густини джерел (15) знайдемо сумарну густину $\mu$, використовуючи ітераційний процес (13). Якщо знати розподіл $\mu$, можна визначити значення потенціалу в будь-якій точці середовища, використовуючи вирази (16)-(18). Сумарний потенціал буде сумою потенціалів від всіх граней елементарних паралелепіпедів. Недоліком вказаної методики розв'язання прямої задачі є необхідність використання достатньо дрібного кроку дискретизації, особливо поблизу сторонніх джерел, бо в іншому випадку через припущення про постійність $\mu$ в межах грані розв'язок буде мати велику похибку. Зменшити похибку можна за рахунок того, що частина граней додатково розбивається на більш дрібні площинки. Для того, щоб похибки обчислень $\mu$ для кожної площинки були співставимі, необхідно, щоб їх площі були пропорційні нормальній похідній потенціалу на них, тобто, щоб з кожної площинки стікав однаковий струм. Реалізація розв'язання прямої задачі запропонованим способом створює передумови для створення алгоритму розв'язання оберненої задачі методом підбору або в автоматизованому режимі з використанням критеріального підходу без істотних обмежень на конфігурацію геоелектричних гра-ниць. Аналіз результатів розрахунків для конкретних моделей є наступним етапом дослід-жень.

**Висновки**

1. Електрична розвідка є одним з основних методів комплексних наземних геофізичних досліджень, які використовуються при пошуках і розвідці вуглеводнів, перспективи її розвитку пов'язуються із створенням 3D – інтерпретаційних систем.

2. Досі ще немає ефективних та надійних алгоритмів і програм, які б давали змогу моделювати тривимірні електромагнітні поля в достатньо широкому класі геоелектричних моделей.

3. Запропонований спосіб моделювання електричних полів дає можливість підвищити універсальність електророзвідки при вирішенні прямих задач без істотних обмежень на складність геоелектричних моделей і тим самим створює передумови для побудови алгоритму розв'язку оберненої задачі.

***Література***


1. Овчинников И.К. Теория поля. – М.: Недра, 1979.- 352 с.
2. Демирчан К.С., Чечурин В.Л. Машинные расчеты электромагнитных полей. – М.: Высшая школа, 1986. – 240 с.
3. Альпин Л.М., Даев Д.С., Каринский А.Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике: Учебник для вузов. – М.: Недра, 1985. – 407 с.
4. Кобрунов А.И., Даниленко А.Н. К вопросу об интерпретации результатов измерения естественного электрического поля / Известия ВУЗов. Нефть и газ. – 1991. – №6. – С. 7-13.
5. Корн Г.А., Корн Т.М. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1973. – 832 с.
6. Справочник геофизика. Гравиразведка. – М.: Недра, 1968. – Т. 5. – 512 с.