

УДК 532.612.08

МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ПРОЦЕСУ ОБЕРТАННЯ ТРУБКИ ІЗ ДВОМА НЕРОЗЧИННИМИ ОДНА В ОДНІЙ РІДИНАМИ РІЗНОЇ ГУСТИНИ

© Кісіль Р. І., 2001

Івано-Франківський державний технічний університет нафти і газу

Здійснено аналіз стану і поведінки краплі більш легкої рідини під час її обертання разом із трубкою і більш важкою рідиною з врахуванням виштовхувальної і відцентрової сил, а також сили в'язкості на поверхні контакту двох рідин. У результаті отримані залежності, які дозволяють визначити координати осі оберткової краплі по відношенню до осі оберткової трубки в залежності від кутової швидкості оберткової трубки, об'єму краплі, різниці густин рідин і динамічної в'язкості більш важкої рідини.

Усі відомі методики контролю міжфазного натягу методом оберткової краплі передбачають вимірювання різних геометричних параметрів оберткової краплі, на основі яких визначається міжфазний натяг на границі двох рідин. Проте у них не враховано вплив зовнішніх факторів (сили земного тяжіння, сили в'язкості тощо) на форму краплі, оскільки ця форма під дією цих сил значно змінюється, що приводить до неточності у визначенні міжфазного натягу.

Розглянемо трубку, яка при відсутності сили земного тяжіння обертається навколо своєї

горизонтальної осі з кутовою швидкістю обертання ω , в якій знаходяться дві нерозчинні одна в одній рідкі фази 1 і 2 і яка з двох сторін герметично закрита за допомогою пробок 3 і 4 (рис. 1). Причому об'єм рідини 2 є значно меншим об'єму рідини 1. Внаслідок різниці густин цих рідин ρ_1 і ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$) і наявності відцентрових сил рідина з меншою густиною в процесі обертання буде формуватися у вигляді краплі еліпсоподібної форми вздовж горизонтальної осі трубки, а рідина з більшою густиною буде зовні цієї краплі.

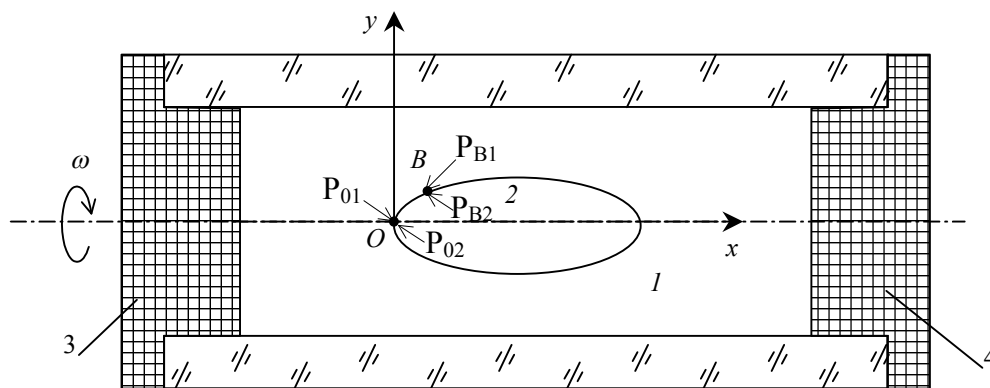


Рис. 1. Обертання герметично закритої трубки із двома нерозчинними одна в одній рідинами при відсутності сили земного тяжіння.

Нехай тиск зовні краплі на горизонтальній осі x в омболічній т. O буде становити P_{01} . Величина цього тиску залежить від надлишкового тиску в трубці. Тоді тиск всередині краплі P_{02} в цій же точці буде визначатися міжфазним натягом σ на межі контакту рідин і радіусом кривизни R_0

поверхні краплі в омболічній т. O . Залежність цього тиску від тиску P_{01} з врахуванням капілярного закону Лапласа [1] буде такою:

$$P_{02} - P_{01} = 2\sigma / R_0. \quad (1)$$

Тиск зовні краплі на її поверхні P_{B1} в будь-якій іншій її точці, яка не знаходиться на осі x , наприклад, в т. B , буде визначатися відцентровими силами, що виникають у результаті обертання капіляра, і буде більшим від тиску P_{01} :

$$P_{B1} = P_{01} + \rho_1 y^2 \omega^2 / 2, \quad (2)$$

де y - віддаль по вертикалі від осі x до т. B .

Аналогічно тиск всередині краплі P_{B2} в т. B також буде більшим від тиску P_{02} :

$$P_{B2} = P_{02} + \rho_2 y^2 \omega^2 / 2. \quad (3)$$

Таким чином, різниця тисків ΔP_B в т. B з врахуванням (2) і (3) буде такою:

$$\Delta P_B = P_{B1} - P_{B2} = P_{02} - P_{01} - \Delta \rho y^2 \omega^2 / 2, \quad (4)$$

де $\Delta \rho = \rho_1 - \rho_2$ - різниця густин двох рідин.

Вказаний перепад тисків ΔP_B буде визначати форму поверхні межі контакту двох рідин у т. B , і тому з врахуванням закону Лапласа для будь-якої точки вісесиметричної поверхні крім т. O можемо записати, що

$$\Delta P_B = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (5)$$

де R_1 і R_2 - відповідно радіус кривизни поверхні краплі в т. B у площині рис. 1 і радіус кривизни поверхні краплі в цій же точці в площині, яка перпендикулярна до площини рис. 1.

Це означає, що при досягненні статичної рівноваги в т. B при обертанні краплі тиск, що виникає внаслідок дії відцентрових сил, буде зрівноважений тиском, що виникає внаслідок дії капілярних сил.

Підставляючи вираз для ΔP_B згідно (5) в ліву частину (4), а вираз (1) в праву частину (4), отримуємо, що

$$\sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2\sigma}{R_0} - \frac{\Delta \rho y^2 \omega^2}{2}. \quad (6)$$

Отримана залежність (6) описує взаємозв'язок між відповідними геометричними розмірами обертаної краплі рідини з меншою густиною (R_0 , R_1 , R_2 і y), кутовою швидкістю обертання краплі

ω , різницею густин рідин $\Delta \rho$ та σ на межі контакту рідин з врахуванням дії відцентрових і капілярних сил у процесі обертання трубки, заповненої двома нерозчинними одна в одній рідинами різної густини і герметично закритої з двох сторін при відсутності сили земного тяжіння. В цьому випадку форма краплі буде симетричною відносно осі x , розподіл значень тисків по поверхні краплі внаслідок дії відцентрових і капілярних сил також буде вісесиметричним.

Наявність сили земного тяжіння вносить певну асиметрію в розподіл тисків від дії відцентрових сил. У цьому випадку вісь симетрії відцентрових сил, враховуючи, що $\rho_1 < \rho_2$ і $\omega \neq 0$, буде знаходитися вище осі x . На краплю будуть діяти одночасно виштовхувальна сила Архімеда, відцентрова сила більш важчої рідини і закручуюча сила, яка обумовлена в'язкістю важчої рідини, які в результаті переміщують краплю на деяку віддаль l під певним кутом γ вверх від осі x .

З метою аналізу вказаного допустимо, що σ є досить значним ($\sigma \rightarrow \infty$), що в свою чергу дозволяє краплі зберігати осьову симетрію, хоча очевидно, що деформація форми краплі буде тим більшою, чим меншим буде σ , більшим буде $\Delta \rho$ і меншим буде ω . Крім цього, допускаємо, що крапля буде обертатися із такою ж кутовою швидкістю, що і трубка із важчою рідкою фазою.

З врахуванням вищевказаного схематично обертана крапля у двох проєкціях буде виглядати так, як показано на рис. 2.

Проведені раніше [2] теоретичні дослідження поведінки обертаної краплі з врахуванням вказаних допущень показали, що у зв'язку із наявністю краплі легшої рідини в трубці із важчою рідиною, що також обертається, навколо краплі формується граничний шар Екмана. Локальна вісь обертання внутрішньої стінки x_1 цього шару паралельна осі обертання трубки x , але не є співвісною з нею, а вісь обертання зовнішньої стінки цього шару є співвісною з віссю обертання трубки x . Тобто утворюється так звана колонка Тейлора [2], в середині якої знаходиться крапля. При цьому, по мірі віддалення від країв краплі, міцність вказаного граничного шару зменшується, з двох сторін краплі має місце деяка втягуюча сила, що може при відсутності горизонтального положення осі обертання x і викликаній цим деякою зміни форми обертаної краплі привести до різних значень втягуючих сил і, як наслідок, до сприяння переміщенню краплі у відповідному горизонтальному напрямку в обертаній трубці. Вісь x_1 по мірі віддалення від країв краплі асимптотично наближається до осі x .

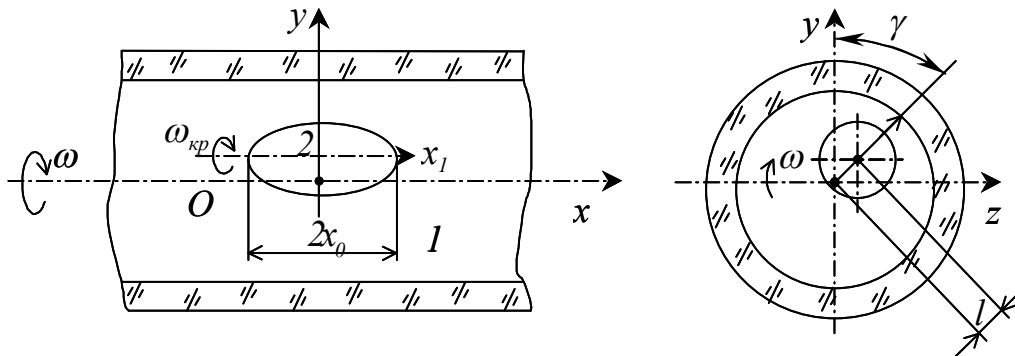


Рис. 2. Положення краплі в процесі обертання трубки із двома нерозчинними одна в одній рідинами в результаті дії різних факторів.

З врахуванням того, що σ має кінцеве значення і особливо, коли $\sigma \ll 1$ мН/м, вісь x_1 по мірі віддалення від середини краплі буде з двох сторін наближатися асимптотично до осі x . Форма краплі в цьому випадку буде мати вигляд, який зображений на рис. 3 і у вертикальній площині перерізу не буде мати симетричної форми. Однак із збільшенням ω при тих же значеннях σ і $\Delta\rho$, які можна характеризувати капілярною сталою $b^2 = \sigma / \Delta\rho g$, вісь x_1 буде співпадати з віссю x з відхиленнями, що практично неможливо виявити (менше $1 \cdot 10^{-6}$ м).

Виштовхувальна сила, яка діє на краплю більш легкої рідини, є такою:

$$F_1 = V(\rho_1 - \rho_2)g, \quad (7)$$

де V -об'єм краплі, g - прискорення земного тяжіння.

Сила F_1 , яка напрямлена вертикально вгору у процесі обертання системи "трубка - рідини 1 і 2", повинна бути в кінцевому зрівноважена вертикальною складовою F_2 відцентрової сили F_4 , яка викликана обертанням важчої рідини 1 і яка саме зумовлює переміщення краплі до осі x , а також вертикальною складовою F_5 сили Екмана F_6 (рис. 4).

Модуль сили F_4 згідно раніше проведених досліджень [2] є таким:

$$F_4 = 2\pi x_0 R^2 l \omega^2 \rho_1, \quad (8)$$

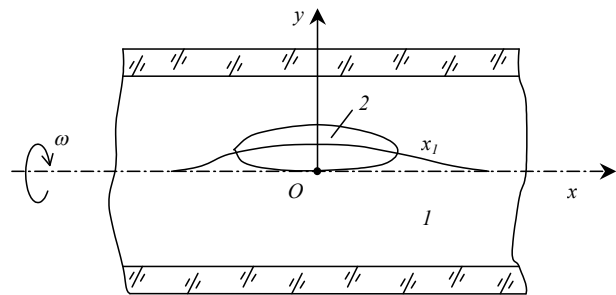


Рис. 3. Положення і форма краплі при низьких значеннях σ і ω і значних $\Delta\rho$ в полі сил земного тяжіння.

де x_0 - половина довжини обертової краплі, R - найбільший радіус обертової краплі у її перерізі. Вертикальна складова F_2 сили F_4 буде залежати від положення осі x_1 краплі, яка досліджується. При положенні осі x_1 строго над віссю x $F_2 = F_4$, строго на горизонтальному рівні осі x $F_2 = 0$, хоча F_4 буде визначатися згідно з (2.8). Тому вираз для F_2 для будь-якого іншого положення осі x_1 краплі, крім вказаних, буде таким:

$$F_2 = F_4 \cdot \cos \gamma = 2\pi x_0 R^2 l \omega^2 \rho_1 \cdot \cos \gamma, \quad (9)$$

а вираз для горизонтальної складової цієї сили відповідно таким:

$$F_3 = F_4 \cdot \sin \gamma = 2\pi x_0 R^2 l \omega^2 \rho_1 \cdot \sin \gamma, \quad (10)$$

де γ - кут між радіальним положенням осі x_1 обертової краплі по відношенню до вертикальної осі y (рис. 2).

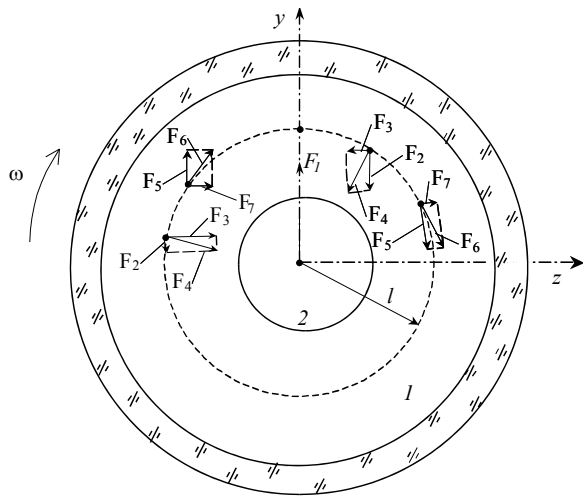


Рис. 4. Діаграма сил, що діють на краплю в процесі обертання трубки із двома нерозчинними одна в одній рідинами різної густини.

Проведені дослідження [2] показали, що вертикальна складова F_5 сили Екмана F_6 є такою:

$$F_5 = 2\pi R^2 l \sqrt{\rho_1 \omega^3 \mu} \cdot \sin \gamma, \quad (11)$$

а горизонтальна складова F_7 сили F_6 відповідно такою:

$$F_7 = 2\pi R^2 l \sqrt{\rho_1 \omega^3 \mu} \cdot \cos \gamma \quad (12)$$

де μ - динамічна в'язкість рідини, в якій знаходиться обертова крапля. Тобто при перебуванні осі x_1 обертової краплі строго вертикально над віссю x $F_5 = 0$, а F_7 є найбільшою, а коли осі x_1 і x горизонтально знаходяться на одному рівні, то тоді $F_7 = 0$, а F_5 є найбільшою.

Слід також зауважити, що дія сили F_4 на обертову краплю завжди напрямлена до осі x і не залежить від напрямку обертання краплі, в той же час як напрям дії сили F_6 на обертову краплю завжди співпадає з напрямком обертання краплі. Вказане приводить до висновку, що в процесі обертання при зменшенні кутової швидкості обертання і досягненні інших умов для зміщення краплі з осі x крапля завжди почне зміщуватися спочатку вверх, а потім за напрямком обертання трубки (рис. 4). Причому в залежності від значень $\Delta\rho$, ω , об'єму краплі V і в'язкості μ крапля може або перебувати, обертаючись, в 1-ому квадранті за напрямком ω , або, змістившись спочатку в 1-ий квадрант, буде послідовно проходити всі квадранти разом із трубкою та іншою рідиною.

З метою визначення координат l і γ осі x_1 обертової краплі одержимо таку систему рівнянь з врахуванням напрямків дії вертикальних і горизонтальних складових сил для 1-ого квадранту:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= F_2 + F_5, \\ F_3 &= F_7. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Підставляючи відповідні вирази для F_1 , F_2 , F_3 , F_5 і F_7 , які приведені вище, отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} V(\rho_1 - \rho_2)g &= 2\pi x_0 R^2 l \omega^2 \rho_1 \cdot \cos \gamma + \\ &+ 2\pi R^2 l \sqrt{\rho_1 \omega \mu} \cdot \sin \gamma, \\ x_0 \omega^2 \rho_1 \cdot \sin \gamma &= \sqrt{\rho_1 \omega^3 \mu} \cdot \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Розв'язавши систему рівнянь (2.14) відносно γ і l , отримаємо, що

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \arctg \left[\frac{\sqrt{\rho_1 \omega^3 \mu} / (x_0 \omega^2 \rho_1)}{\sqrt{\mu / (\rho_1 \omega)} / x_0} \right], \\ &= \arctg \left(\frac{\sqrt{\mu / (\rho_1 \omega)} / x_0}{\sqrt{\rho_1 \omega^3 \mu} / (x_0 \omega^2 \rho_1)} \right) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$l = \frac{V(\rho_1 - \rho_2)g}{2\pi R^2 \left(x_0 \omega^2 \rho_1 \cdot \cos \gamma + \sqrt{\rho_1 \omega^3 \mu} \cdot \sin \gamma \right)}. \quad (16)$$

Розглянемо приклад: визначити γ і l для $\rho_2 = 1$ кг/м³, $\rho_1 = 1001$ кг/м³, $\mu = 10^{-3}$ кг/(м·с), $\omega = 100$ рад/с, $x_0 \approx R = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м, $V = 4\pi R^3 / 4$, тобто крапля по формі є майже круглою.

Тоді $\gamma = \arctg 0,2 \approx 11,2^\circ$; $l = 0,0007$ м.

Отримані залежності (15) і (16) дають можливість оцінити вплив таких параметрів, як ω , ρ_1 , ρ_2 , μ , V і R на поведінку обертової краплі в трубці, визначити допустимі значення вказаних параметрів, при яких вісь обертової краплі x_1 буде із заданою точністю співпадати із віссю обертання трубки x і при яких крапля торкнеться внутрішньої стінки капіляра, або займе таке положення, при якому проводити вимірювання її розмірів вже недоцільно.

1. Іващенко Ю. М., Єременко В. Н. Основи прецизійного вимірювання поверхневої енергії розплавів за методом лежачої краплі. - К.: Наукова думка, 1972. - 232 с. 2. Currie P. K., Nieuwkoop J. Buoyancy Effect in the Spinning Drop Interfacial Tensiometer // J. Colloid Interface Sci. - 1982. - Vol. 87. - № 2. - P.301-316.