

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЗАДАЧАХ НЕРУЙНІВНОГО КОНТРОЛЮ

УДК 004.942

### КРИТЕРІЇ ПОДІБНОСТІ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ДЕТАЛЕЙ ЦИЛІНДРИЧНОГО ШАРНІРА

*Сторож Я. Б.*

*Національний науково-дослідний інститут промислової безпеки та охорони праці,  
м.Київ, вул. Вавілових, 13, yaroslav.storozh@gmail.com*

*Побудована параметрична двовимірна скінчено-елементна модель циліндричного шарніра. Проведено дослідження напружено-деформованого стану циліндричного шарніру в широкому діапазоні зміни геометричних і силових параметрів моделі. Показана можливість і доцільність використання критеріїв подібності для прогнозування напружено-деформованого стану таких конструкцій, запропоновано критерії подібності, а також виявлено обмеження, при яких можливе використання аналітичного розв'язку контактної задачі двох циліндрів (контактна задача Герца-Беляєва).*

*Ключові слова: контактна задача, циліндричний шарнір, критерії подібності, напружено-деформований стан, скінчено-елементний аналіз*

*Предложена параметрическая двухмерная конечно-элементная модель цилиндрического шарнира. Проведено исследование напряженно-деформированного состояния цилиндрического шарнира в широком диапазоне изменения геометрических и силовых параметров модели. Показаны возможность и целесообразность использования критериев подобия для прогнозирования напряженно-деформированного состояния таких конструкций, предложены критерии подобия и выявлены ограничения, при которых возможно использование аналитического решения контактной задачи для двух цилиндров (контактная задача Герца-Беляева).*

*Ключевые слова: контактная задача, цилиндрический шарнир, критерии подобия, напряженно-деформированное состояние, конечно-элементный анализ.*

*The cylindrical hinge finite elements two dimensional parametrical model has been constructed. The cylindrical hinge stress strained state testing has been realized in the wide range of the geometrical and force model parameters changing. It was shown possibility and advisability to use the criteria similiarity to forecast the such constructions stress-strained state. The similiarity criteria has been proposed. The limitation to make a possible the analytical solution for the two cylinder contact problems (the contact problem of Herth-Beliaev) has been revealed.*

*Key words: the contact problem, cylindrical hinge, the similiarity criteria, stress-strained state, finite-element analysis.*

**Постановка проблеми.** Циліндричні шарнірні з'єднання є одними з найпоширеніших у конструкціях машин і механізмів. Це циліндричні пари ковзання у важелях, підвісках, тягах, шатунах і под. В таких з'єднаннях навантаження передається від однієї зовнішньої деталі на спряжений з нею циліндричний палець (чи вісь) і далі до іншої спряженої з пальцем зовнішньої (шатуна, важеля, тяги, повзуна, коромисла тощо) через контакти між двома парами циліндричних поверхонь - пальця з додатним радіусом кривини та спряженої з ним деталі з від'ємними радіусами кривини. Їхня

силова взаємодія обмежується порівняно вузькою ділянкою з нерівномірним розподілом контактних напружень, що спричиняє підвищені напруження в приконтактних шарах з'єднаних деталей.

Задача про напружений стан у зоні контакту кругових циліндрів з паралельними осями розв'язана методами лінійної теорії пружності (Г.Герц, М.Беляєв). Однак ряд припущень, на яких ґрунтується отримання теоретичного розв'язку контактної задачі – плоский деформований стан, безконечність поперечних розмірів зовнішніх деталей, а також

відносно мала ширина контакту циліндричних поверхонь [1, 2], – відрізняються від реалій зазвичай використовуваних конструкцій.

Так, в реальних конструкціях довжина контактних поверхонь і їхні діаметри, як правило, співмірні. При такому співвідношенні розмірів з'єднання порівняно з плоским деформованим станом очікується поява істотних осьових деформацій у ділянці контакту, що, в свою чергу, супроводжуватиметься зменшенням контактного тиску і перерозподілом напружень у приконтактних ділянках спряжених деталей. Більше того, і що вагомніше, поперечні розміри реальних конструкцій сумірні з діаметром отвору. А ргіогу можна сподіватися, що вказана відмінність викличе значне зниження жорсткості з'єднання і, як наслідок, зміну форми та величини деформації отвору. Внаслідок цього можна очікувати істотне збільшення площадки контакту і перерозподіл як контактних локальних напружень, так і напружень в об'ємі деталей. Водночас, зменшення поперечних розмірів зовнішньої деталі має супроводжуватись появою напружень на її вільних зовнішніх поверхнях. В результаті зазначених особливостей можна сподіватися на значну відмінність напружено-деформованого стану (НДС) в деталях реальної конструкції від прогнозованого за теорією Герца-Беляєва. Очевидно, використання аналітичного розв'язку контактної задачі для виявлення НДС багатьох реальних конструкцій, на загал, слід розглядати лише як перше наближення [3, 4].

Тому, врахування обмежених розмірів спряжених циліндрів у розв'язуванні контактної задачі є проблемою важливого прикладного і теоретичного значення. Зважаючи на те, що в описаних умовах НДС конструкцій складний, то для його дослідження доцільно використати чисельні методи, зокрема, метод скінченно-елементного (СЕ) аналізу. Його належне теоретичне обґрунтування та широкі можливості застосування за допомогою сучасного програмного забезпечення (наприклад, програмний комплекс ANSYS Workbench) дають змогу розв'язувати задачі мало не всіх інженерних напрямів з достатньою для практики точністю [5-8].

**Мета праці:** дослідження напружено-деформованого стану деталей циліндричного шарніра від дії навантаження в контактні з урахуванням впливу їхніх розмірів і виявлення критеріїв подібності НДС методом його скінченно-елементного аналізу.

**Методика дослідження.** Насамперед сформулюємо загальні вимоги до шуканих критеріїв подібності. По-перше, вони мають

охоплювати визначальні чинники (параметри геометрії, навантаження та властивостей матеріалів деталей шарніра), що впливають на НДС шарніра. По-друге, це мають бути не абсолютні величини цих параметрів, а їх співвідношення, кожне з яких характеризуватиме важливу сукупність спільних ознак великого розмаїття конструкцій шарнірів і або їх навантаження. По-третє, вони не повинні бути надмірно складними і придатними для цілей прогнозування в інженерній практиці. І нарешті, критерії подібності мають дати змогу звести до мінімуму обсяг даних для прогнозування НДС реальних конструкцій.

Щодо першої вимоги, то зауважимо, що аналітичний розв'язок контактної задачі Герца-Беляєва по суті є окремим граничним випадком (безмежні розміри, відносно малі контакти) загальної проблеми виявлення НДС деталей довільних розмірів з циліндричним контактом. Тому виявлені в ньому параметри пружних властивостей матеріалів циліндрів, їхньої геометрії й навантаження можуть бути надійною основою для формування критеріїв подібності. Однак їх недостатньо. Аналітичний розв'язок не містить параметрів, що враховують вплив поперечних розмірів зовнішнього деталі шарніра на його НДС. Очевидно, одним із них може бути відстань між отвором і зовнішньою поверхнею циліндра, оскільки, і на це вказують результати аналітичного розв'язку та наших пошукових комп'ютерних досліджень, саме в меридіональній площині циліндрів концентруються найбільші напруження. Для врахування другої вимоги до критеріїв подібності, напевно слід розглядати відносну величину цього розміру, тобто його відношення до діаметра отвору. Тому критерій поперечних розмірів зовнішньої деталі шарніра можна описати такою залежністю

$$K_{T1} = \frac{H - D}{2D}, \quad (1)$$

де  $H$  - габаритний розмір зовнішньої деталі шарніра в меридіональній площині циліндрів, мм;

$D$  - діаметр отвору зовнішньої деталі, мм. Водночас, з принципу Сен-Венана впливає, що спосіб прикладення сили на НДС тіл практично обмежується ділянкою, величина якої залежить від розміру ділянки прикладення сили. Характерним розміром для контакту циліндрів є ширина контакту. Отож, більш обґрунтовано критерій подібності НДС шарніра для сумісної характеристики як поперечних розмірів зовнішньої деталі, так і розмірів ділянки

прикладення сили, можна відобразити формулою

$$K_{T2} = \frac{H - D}{2D}, \quad (2)$$

де  $a$  - половина ширини контакту спряжених циліндрів, мм.

Однак критерій подібності  $K_{T2}$  містить наперед невідомий параметр - ширину контакту. Через це застосувати його для цілей прогнозування ускладнено. Тому ми в подальшому аналізі будуть розглянуті обидва критерії.

Для пошуку визначальних критеріїв скористаємося аналітичним розв'язком контактної задачі Герца-Беляєва. Найбільший тиск  $q_{max}$  у циліндричному контакті й половини його ширини  $a$  за умови, що матеріал пальця і корпусу однаковий, можна обчислити відповідно за формулами [9]:

$$q_{max} = 0.798 \sqrt{p \frac{R_1 - R_2}{2R_1 R_2} \cdot \frac{E}{2(1-\nu^2)}}; \quad (3)$$

$$q_{max} = 0.798 \sqrt{p \frac{2R_1 R_2}{R_1 - R_2} \cdot \frac{2(1-\nu^2)}{E}}, \quad (4)$$

де  $p$  - сила стискання циліндрів на 1 мм довжини контакту, Н/мм;

$R_1$  і  $R_2$  - радіуси кривини циліндричних поверхонь отвору зовнішньої деталі і пальця відповідно, мм;

$E$  і  $\nu$  - модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріалів пальця і зовнішньої деталі. Для зручності користування залежностями (3) і (4) в цілях нашого дослідження виконаємо в них такі заміни:

$$D = 2R_1; \quad \varepsilon_D = \frac{D-d}{D}; \quad d = 2R_2 = D(1 - \varepsilon_D) \quad (5)$$

де  $D$  і  $d$  - діаметри отвору зовнішньої деталі і пальця відповідно, мм;

$\varepsilon_D$  - відносний зазор між пальцем і отвором зовнішньої деталі шарніра.

Після підставлення залежностей (5) у (3) і (4) та спрощення виразів отримаємо:

$$q_{max} = 0.798 \sqrt{\frac{p}{D} \cdot \frac{\varepsilon_D}{1-\varepsilon_D} \cdot \frac{E}{2(1-\nu^2)}}; \quad (6)$$

$$a = 0.798 \sqrt{p \cdot D \cdot \frac{1-\varepsilon_D}{\varepsilon_D} \cdot \frac{2(1-\nu^2)}{E}}; \quad (7)$$

Поділимо праву та ліву частини виразу (7) на  $D$  і отримаємо

$$\frac{a}{D} = 0.798 \sqrt{\frac{p}{D} \cdot \frac{1-\varepsilon_D}{\varepsilon_D} \cdot \frac{2(1-\nu^2)}{E}}. \quad (8)$$

Формули (6) і (8) дають підстави для вибору критеріїв подібності НДС циліндричного шарніра:

- силовий критерій  $K_c$ , Н/мм<sup>2</sup>. Він характеризує силу стискання пальця і зовнішньої деталі

$$K_c = \frac{p}{D}; \quad (9)$$

- критерій Геометрії спряження (відносного зазору в спряженні)  $K_3$ ,

$$K_3 = \frac{\varepsilon_D}{1 - \varepsilon_D}; \quad (10)$$

- критерій пружних властивостей матеріалу деталей спряження  $K_M$ , мм<sup>2</sup>/Н

$$K_M = \frac{p}{D}. \quad (11)$$

Тоді залежності (6) і (8) з урахуванням запропонованих критеріїв подібності (9-11) набудуть вигляду:

$$q_{max} = 0.798 \sqrt{\frac{K_c}{K_M} \cdot K_{T2}}, \quad (12)$$

$$\frac{a}{D} = 0.798 \sqrt{K_c \cdot \frac{K_3}{K_M}}, \quad (13)$$

де емпіричні множники  $A$  можна виявити з експериментальних даних (в рамках нашого дослідження - результатів чисельного моделювання НДС шарніра), а інші критерії можна обчислювати за формулами (9-11).

Важливо підкреслити, що доцільність використання запропонованих критеріїв подібності і, зокрема, у складі формул (12) і (13) можна вважати обґрунтованою, якщо буде підтверджена незмінність коефіцієнтів  $A$  хоча б для деякої частини значень критеріїв та їх співвідношень. Принагідно нагадаємо, що справедливість формул (12) і (13) є очевидною в рамках обмежень теорії Герца-Беляєва, а геометричні параметри всіх досліджуваних нами конструкцій знаходяться поза межами цих рамок.

Розглянемо план експериментальної апробації працездатності запропонованих критеріїв, який сприятиме зручності візуального спостереження за результатами моделювання.

Тест 1. Всі критерії подібності (1, 9-11) незмінні, але змінюється діаметр  $D$  спряження циліндрів у  $m$  разів. Для збереження незмінності силового критерію  $K_c$  сила  $p$  теж має змінюватися в  $m$  разів згідно з виразом (9). З формул (12) і (13) випливає, що такі взаємоузгоджені зміни розмірів і навантаження

не повинні змінювати (звичайно, в межах точності експерименту) як найбільшого тиску  $q_{max}$  в контакті циліндрів, так і відносної ширини контакту  $a/D$ . При цьому слід очікувати також і подібного розподілу напружень усередині спряжених деталей. Тестування виконаємо для різної ширини контакту циліндрів.

Тест 2. Критерії  $K_{T1}$  і  $K_m$ , а також діаметр  $D$  незмінні. Критерії  $K_c$  і  $K_z$  змінюють узгоджено так, щоб їхня частка у формулі (12) залишалась незмінною. Наприклад, зі зменшенням критерію відносного зазору спряження  $K_z$  в  $m$  разів синхронно зменшують силовий критерій через зміну сили  $p$  теж в  $m$  разів. У результаті таких змін відносна ширина контакту  $a/D$  (формула (13)) має бути незмінною. При цьому також слід очікувати незмінність характеру розподілу напружень усередині спряжених деталей. Рівночасно, найбільший тиск в контакті  $q_{max}$  за формулою (12) має змінитися в  $m$  разів, оскільки значення підкореневого виразу змінюється в  $m^2$  разів.

Таким чином, група з 5 віртуальних експериментів тестів 1 і 2, дасть змогу пересвідчитись в спроможності залежностей (9-11) виконувати роль критеріїв подібності. Підкреслимо, що результати тестування можуть вважатися позитивними лише в разі незмінності множників  $A$  для цієї групи у формулах (12, 13).

Повторення використання таких груп з іншим навантаженням і, відповідно, з іншими параметрами утворюваних контактів дасть змогу виявити вплив цих змін на НДС важеля і ступінь відмінностей результатів СЕ аналізу від аналітичного розв'язку контактної задачі.

Для дослідження в програмному комплексі ANSYS Workbench побудована двовимірна параметрична модель циліндричного шарнірного з'єднання (рис. 1) [10]. Оскільки вплив пружних властивостей матеріалів шарніра на його НДС не передбачається досліджувати, то матеріал обох його деталей вибрано однаковий - конструкційна сталь (модуль пружності і коефіцієнт Пуассона  $E=2 \cdot 10^5$  Н/мм<sup>2</sup> і  $\nu=0,3$  відповідно). При цьому критерій пружних властивостей матеріалів деталей спряження  $K_m$  є незмінним. Крім того, матеріал ізотропний лінійно-пружний, тертя в контакті немає.

Модель шарніра створена з урахуванням вимог забезпечення високої точності аналізу й економії машинного ресурсу і часу симулювання.

Позаяк меридіональна площина шарніра є геометричною і силовою площиною його симетрії, то всі елементи НДС цієї половинки є репрезентативними і для другої половинки.

Симетричність моделі забезпечується накладанням на її деталі опори, яка обмежує переміщення кожного вузла СЕ моделей пальця і зовнішньої деталі шарніра, що знаходяться в цій площині симетрії, тільки вздовж осі X (див. обмеження A і B Frictionless Support на рис. 1a). Подібна опора, але з обмеженням можливості переміщення лише по осі Y, застосована і для верхньої грані зовнішньої деталі (див. обмеження C на рис. 1a). Це дає змогу мінімізувати вплив способу закріплення шарніра на його НДС, як у його верхній частині - така опора не привносить напружень по осі X, так і нижній - нижня грань залишається вільною, тобто без додаткових напружень в напрямках осей X і Y. Спосіб прикладення сили

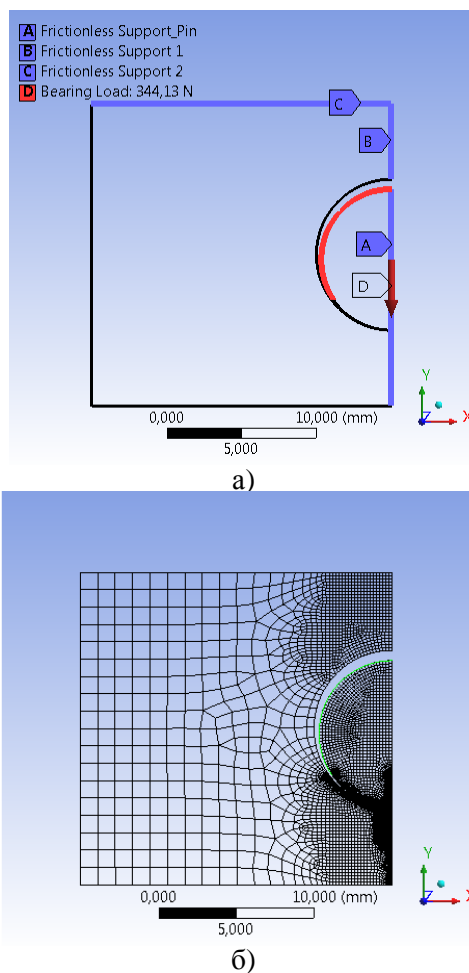


Рисунок 1 – Двовимірна модель циліндричного шарніра: а) геометрична з ілюстрацією прикладених обмежень та навантаження; б) сіткова

стискування до моделі пальця (див. навантаження D Bearing Load на рис. 1a) забезпечує силову дію лише по осі Y з її найбільшим значенням в меридіональній

площині і не обмежує деформацію пальця в напрямку осі X.

Сіткова модель (див. рис. 1б) містить три ділянки з різними розмірами скінченних елементів - найдрібніші розміри (0,01 мм) мають ділянки, де очікуються найбільші градієнти напружень і деформацій - у місцях очікуваного контакту і приконтактних ділянках меридіональної площини.

Геометричні параметри моделі відповідають прийнятим схемам тестування працездатності критеріїв подібності (див. опис тестів 1 і 2). Конструкція з параметрами базового рівня:  $D=10$  мм,  $\varepsilon_D=0,01$ ,  $H=2D$ . Торці моделі пальця і зовнішньої деталі лежать в одній площині. В усіх варіантах довжина пальця і зовнішньої деталі вибрана рівною діаметру отвору (10 мм) оскільки, як відомо, приблизно при такому співвідношенні розмірів спостерігається значна відмінність між результатами обчислення НДС з припущенням ідеалізованих станів плоского напруженого і плоского деформованого.

В тестуванні за 1-ю схемою геометричні параметри моделі  $D$  і  $H$  змінювали за допомогою множників  $m=2$  і  $m=0,5$  щодо базового рівня. Навантаження для базової геометрії варіювали на 8 рівнях: 50, 100, 200, 400, 800, 1600, 3200 і 6400 Н, що створювало силу  $p$  стискання циліндрів на 1 мм довжини контакту 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320 і 640 Н/мм відповідно. Оскільки дослідна модель містить лише половинки спряжених циліндрів, то їх фактичне навантаження є удвічі меншим. Навантаження у варіантах аналізу змінювали синхронно зі зміною  $D$  з умовою незмінності силового критерію подібності ( $p/D=\text{const}$ ).

В тестуванні за 2-ю схемою в геометрії базового рівня варіювали лише величину відносного зазору на трьох рівнях  $\varepsilon_D=0,0025$ , 0,01 (базовий рівень) і 0,065 завдяки зміні діаметра  $d$  пальця відповідно 9,975, 9,9 (базовий рівень) і 9,35 мм при  $D=10$  мм. Така зміна відносного зазору супроводжувалась зміною критерію геометрії спряження (формула (10)) щодо базового рівня відповідно в  $m=0,2478$  і  $m=6,8824$  рази. Для збереження величини відношення критеріїв силового  $K_c$  і геометрії спряження  $K_3$  на незмінному рівні у варіантах аналізу навантаження змінювали відносно базових рівнів синхронно зі зміною  $K_3$  у стільки разів.

В ході дослідження фіксували такі керовані змінні: геометричні параметри спряження ( $D$ ,  $d$ ,  $H$ ) і силу стискання циліндрів, на основі яких обчислювали  $\varepsilon_D$ ,  $p$ ,  $K_{T1}$ ,  $K_3$ , і  $K_c$ ; та виявляли залежні змінні:

половину ширини контакту  $a$ ;  
 найбільший тиск в контакті  $q_{\max}$ ;  
 деформацію отвору в меридіональній площині - збільшення його радіусу  $\Delta R$ ;  
 розподіл напружень еквівалентних (за Мізесом) і найбільших дотичних у меридіональній площині зовнішньої деталі шарніра.

На основі виявлених у процесі СЕ моделювання залежних змінних обчислювали: емпіричні множники  $A_a$  і  $A_q$  за формулами:

$$A_a = \frac{a}{D} \sqrt{\frac{K_M}{K_c \cdot K_2}}; \quad A_q = q_{\max} \sqrt{\frac{K_2}{K_c \cdot K_M}};$$

їхні середні арифметичні  $A_{a, \text{сеп}}$  і  $A_{q, \text{сеп}}$ , стандартні відхилення  $S_{Aa}$  і  $S_{Aq}$ , а також граничні похибки  $\Delta_{Aa}$  і  $\Delta_{Aq}$  [11]

$$A_{\text{сеп}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i;$$

$$S_A = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (A_i - A_{\text{сеп}})^2}; \quad (14)$$

$$\Delta_A = S_A \cdot t,$$

де  $n$  - кількість варіантів комп'ютерного симулювання НДС шарніра, в яких згідно з тестами 1 і 2 очікується незмінність множників  $A$ ,  $n=5$ ;

$t$  - коефіцієнт довіри статистичного оцінювання похибки.  $t=2,776$  для ймовірності 0,950 і  $n=5$ ;

розбіжність  $delA$  (%) між емпіричними й теоретичним значеннями множників за допомогою формули

$$delA = \frac{A_{\text{сеп}} - 0,798}{0,798} \cdot 100;$$

жорсткість  $J$  в (Н/мм)/мкм зовнішньої деталі як відношення сили стискання циліндрів  $p$  (Н/мм) до збільшення радіусу  $\Delta R$  отвору (мкм) в меридіональній площині

$$J = \frac{p}{\Delta R};$$

середнє арифметичне  $J_{\text{сеп}}$ , стандартні відхилення  $S_J$  і граничні похибки  $\Delta_J$  для жорсткості за методикою, описаною в формулах (14);

відносну ширину контакту  $a/D$  і критерій подібності  $K_{T2}$  (формули (13) і (2) відповідно, їхні середні арифметичні  $a/D_{\text{сеп}}$  і  $K_{T2, \text{сеп}}$ , стандартні відхилення  $S_{a/D}$  і  $S_{K_{T2}}$ , а також граничні похибки  $\Delta_{a/D}$  і  $\Delta_{K_{T2}}$  за методикою, викладеною у формулах (14).

**Результати дослідження та їх аналіз.** Розглянемо результати СЕ симулювання НДС моделей циліндричного шарніра, подані в таблицях 1 і 2 та на рис. 2 і 3.

Дані таблиць 1 і 2 ілюструють досить високий рівень близькості значень відносної ширини контакту  $a/D$  та емпіричних множників  $A_a$  і  $A_q$  для кожної групи з 5 експериментів, що засвідчує їхню спільність у межах точності дослідження.

Обсудимо точність виявлення цих параметрів. З даних табл. 1 видно, що точність обчислення  $A_a$  доволі висока. Так, найбільша гранична похибка  $\Delta_{Aa}$  складає 0,012, що дещо менше 1,5% для  $A_{a,сеп}=0,815$ . Більше того, зі збільшенням навантаження і, відповідно, ширини контакту ця похибка зменшується до 0,003 тобто в 4 рази. Підвищення точності пов'язане, головню, з точністю виявлення ширини контакту. Абсолютне значення останньої близьке до четвертої частини розміру скінченного елемента контакту в чисельній моделі з восьмивузловими квадратичними скінченими елементами. При розмірі елемента 0,01 мм похибка близька до 0,0025 мм, що складає 1,45%  $(0,0025/a \cdot 100 = 0,0025/0,173 \cdot 100 = 1,45\%)$ . Зрозуміло, що зі збільшенням ширини  $a$  контакту відносна гранична похибка обчислення  $A_a$  зменшується і вплив на неї неточності виявлення ширини контакту перестане бути визначальною. Такою стає питома похибка СЕ аналізу, яка є найменшою для виявлення деформацій і напружень [5]. В цьому зв'язку, стає зрозумілою висока і стабільна, тобто практично незалежна від ширини контакту, точність виявлення множника  $\Delta_{Aq}$  і жорсткості з'єднання  $\Delta_J$  (див табл. 2) - відносна похибка цих параметрів не перевищує 0,15%.

Прослідкуємо зміну параметрів НДС з'єднання зі збільшенням навантаження (силового критерію  $K_c$ ) у 2-128 разів відносно базового рівня. Як видно з даних табл. 1 і 2, для всіх рівнів навантаження емпіричний множник  $A_a$  більший, а множник  $A_q$  менший за теоретичний. Крім того, для порівняно невеликої відносної ширини контакту ( $a/D$  менше приблизно 0,05) значення емпіричних множників досить близькі до теоретичного. Збільшення  $a/D$  понад 0,05 супроводжується збільшенням такої різниці. Отриманий результат добре узгоджується з тим фактом, що зменшені габаритні розміри охопленої деталі шарніра порівняно з безмежними, покладеними в основу аналітичного розв'язку контактної задачі, спричинять зниження жорсткості з'єднання і, як наслідок, збільшення деформації отвору і ширини контакту. Результати

визначення жорсткості спряження наведені в табл. 2. Для доповнення обґрунтування виконано додатковий експеримент на моделі, що відрізняється від базової лише збільшеним удвічі розміром  $H=20$  мм,  $K_{T1}=1,0$ . При навантаженні  $p/D=4$  Н/мм<sup>2</sup> жорсткість з'єднання в цій моделі зросла порівняно з базовою до 57,25 (Н/мм)/мкм, тобто на 26,55%, а ширина контакту зменшилась до 0,4836 мм, або на 0,92%  $(0,4881-0,4836)/0,4881 \cdot 100=0,92\%$ , найбільший тиск у контакті зріс до 53,21 Н/мм<sup>2</sup>, або на 0,72%  $(53,21-52,83)/52,83 \cdot 100=0,72\%$ . Зауважимо, що збільшення жорсткості з'єднання зі збільшенням ширини контакту має виразно нелінійний характер (див. табл. 2), що притаманно з'єднанням з контактами.

Простежимо залежність критерію  $K_{T2}$  від відносної ширини контакту  $a/D$  (див. табл. 2). Вона досить однозначна й істотна. Зауважимо, що описаний вище діапазон НДС шарніра з близькими емпіричними і теоретичним множниками спостерігається як при  $a/D < 0,05$ , так і при  $K_{T2} > 5$ . Але використання критерію подібності  $K_{T2}$  є доцільнішим через зрозуміліший його фізичний зміст, зокрема в термінах принципу Сен-Венана. Він показує у скільки разів товщина зовнішньої деталі має перевищувати ширину контакту, щоб крайові ефекти істотно не впливали на результати відомого аналітичного розв'язку контактної задачі, або інакше щоб мати змогу застосувати аналітичний розв'язок для достатньо точного виявлення НДС шарніра реальної конструкції.

Розглянемо зміну розподілення еквівалентних і максимальних дотичних напружень у меридіональній площині контакту зовнішньої деталі шарніра (рис. 2, 3 і 4).

З рис. 2а,б,в видно, що при  $p/D \leq 4$  і  $K_{T2} \geq 5,13$  еквівалентні й найбільші дотичні напруження локалізуються, в основному, у вузькій приконтактній ділянці з різким екстремумом на невеликій відстані від контакту. Зі збільшенням відстані від контакту (середня і основна частина меридіональної площини) напруження зменшуються до величин приблизно на порядок менших за екстремальні. Подібна залежність прогнозується аналітичним розв'язком контактної задачі [9]. Крім того, спостерігається також невелике збільшення напружень у припериферійній ділянці. Остання особливість НДС шарніра цілком очевидно зумовлена його обмеженими розмірами.

Таблиця 1 – Результати тестування критеріїв подібності за шириною контакту і множителем  $A_a$  (тести 1 і 2,  $K_{r1}=0,5$ ,  $K_m=9,10 \cdot 10^{-6}$  мм<sup>2</sup>/Н)

$D$	$D-d$	$K_c = \frac{p}{D}$	$K_3$	$a$	$a/D$	$a/D_{cep}$	$\frac{\Delta a/D}{*10^4}$	$A_a$	$A_{a,cep}$	$\Delta A_a$	$delA_a$
мм	мм	Н/мм <sup>2</sup>		мм							%
10	0,025	0,1239	0,00251	0,1727	0,0173	0,0173	1,6	0,814	0,814	0,012	1,98
	0,65	3,4412		0,1725	0,0173			0,813			
	0,1	0,5		0,1738	0,0174			0,819			
20	0,2		0,3464	0,0173	0,816						
5	0,05		0,0857	0,0171	0,812						
10	0,025	0,2478	0,00251	0,2440	0,0244	0,0243	2,8	0,813	0,811	0,010	1,60
	0,65	6,8824		0,2436	0,0244			0,812			
	0,1	1		0,2447	0,0245			0,815			
20	0,2		0,4849	0,0245	0,808						
5	0,05		0,1212	0,0244	0,808						
10	0,025	0,4956	0,00251	0,3458	0,0346	0,0344	4,0	0,815	0,811	0,009	1,57
	0,65	13,7648		0,3447	0,0345			0,812			
	0,1	2		0,3430	0,0343			0,808			
20	0,2		0,6855	0,0343	0,808						
5	0,05		0,1719	0,0344	0,810						
10	0,025	0,9915	0,00251	0,4877	0,0488	0,0488	6,2	0,813	0,812	0,010	1,79
	0,65	27,530		0,4886	0,0488			0,812			
	0,1	4		0,4881	0,0488			0,813			
20	0,2		0,9672	0,0484	0,806						
5	0,05		0,2448	0,0490	0,816						
10	0,025	1,9830	0,00251	0,6986	0,0699	0,0697	5,3	0,823	0,821	0,006	2,91
	0,65	55,059		0,6953	0,0695			0,819			
	0,1	8		0,6988	0,0699			0,823			
20	0,2		1,3960	0,0698	0,822						
5	0,05		0,3474	0,0696	0,820						
10	0,025	3,966	0,00251	0,9842	0,0984	0,0988	9,6	0,820	0,824	0,008	3,11
	0,65	110,12		0,9859	0,0986			0,821			
	0,1	16		0,9867	0,0987			0,822			
20	0,2		1,9863	0,0993	0,827						
5	0,05		0,4945	0,0989	0,824						
10	0,025	7,9320	0,00251	1,4273	0,1427	0,1429	9,8	0,841	0,841	0,006	5,45
	0,65	220,24		1,4316	0,1427			0,843			
	0,1	32		1,4235	0,1424			0,838			
20	0,2		2,8644	0,1432	0,844						
5	0,05		0,7142	0,1428	0,841						
10	0,025	15,864	0,00251	2,0792	0,2078	0,2076	6,8	0,866	0,865	0,003	8,37
	0,65	440,27		2,0774	0,2077			0,865			
	0,1	64		2,0778	0,2078			0,865			
20	0,2		4,1482	0,2074	0,864						

Таблиця 2 – Результати СЕ аналізу НДС шарніра (тести 1 і 2,  $K_{T1}=0,5$ ,  $K_M=9,10 \cdot 10^{-6}$  мм<sup>2</sup>/Н)

$D$	$D-d$	$K_c = \frac{p}{D}$	$q_{max}$	$A_{q.cep}$	$delA_q$	$K_{T2}$	$K_{T2.cep}$	$\Delta K_{T2}$	$J$	$J_{cep}$	$\Delta J$
мм	мм	Н/мм <sup>2</sup>	Н/мм <sup>2</sup>		%				(Н/мм)/МкМ		
10	0,025	0,1239	4,655	0,797	-0,12	14,39	14,40	0,17	39,71	39,70	0,021
	0,65	3,4412	129,27						14,41		
	0,1	0,5	18,774						14,30		
20	0,2		18,781	14,44							
5	0,05		18,777						39,69		
10	0,025	0,2478	6,579	0,797	-0,18	10,22	10,28	0,13	41,38	41,36	0,023
	0,65	6,8824	182,71						10,31		
	0,1	1	26,534						10,21		
20	0,2		26,541	10,31							
5	0,05		26,538						41,37		
10	0,025	0,4956	9,291	0,795	-0,33	7,23	7,27	0,07	43,21	43,20	0,021
	0,65	13,765	258,0						7,25		
	0,1	2	37,469						7,29		
20	0,2		37,477	7,29							
5	0,05		37,479						43,20		
10	0,025	0,9915	13,099	0,793	-0,63	5,13	5,13	0,07	45,25	45,24	0,022
	0,65	27,530	363,80						5,12		
	0,1	4	52,833						5,12		
20	0,2		52,839	5,17							
5	0,05		52,840						45,24		
10	0,025	1,9830	18,414	0,788	-1,22	3,58	3,59	0,03	47,55	47,54	0,020
	0,65	55,059	511,77						3,60		
	0,1	8	74,275						3,58		
20	0,2		74,280	3,58							
5	0,05		74,279						47,54		
10	0,025	3,966	25,741	0,779	-2,35	2,54	2,53	0,03	50,25	50,24	0,020
	0,65	110,12	715,29						2,54		
	0,1	16	103,83						2,54		
20	0,2		103,84	2,52							
5	0,05		103,84						50,24		
10	0,025	7,9320	35,642	0,763	-4,40	1,75	1,75	0,02	53,55	53,55	0,024
	0,65	220,24	990,10						1,75		
	0,1	32	143,78						1,76		
20	0,2		143,78	1,75							
5	0,05		143,78						53,55		
10	0,025	15,864	48,756	0,738	-7,51	1,20	1,20	0,02	57,92	57,92	0,024
	0,65	440,27	1354,4						1,20		
	0,1	64	196,74						1,20		
20	0,2		196,74	1,21							



Водночас можна побачити, що зі збільшенням  $p/D$  (див. рис. 2) відбувається розширення ділянки з екстремальними напруженнями по меридіальній площині, збільшення відстані від контакту до екстремальних точок і збільшення напружень у припериферійній ділянці

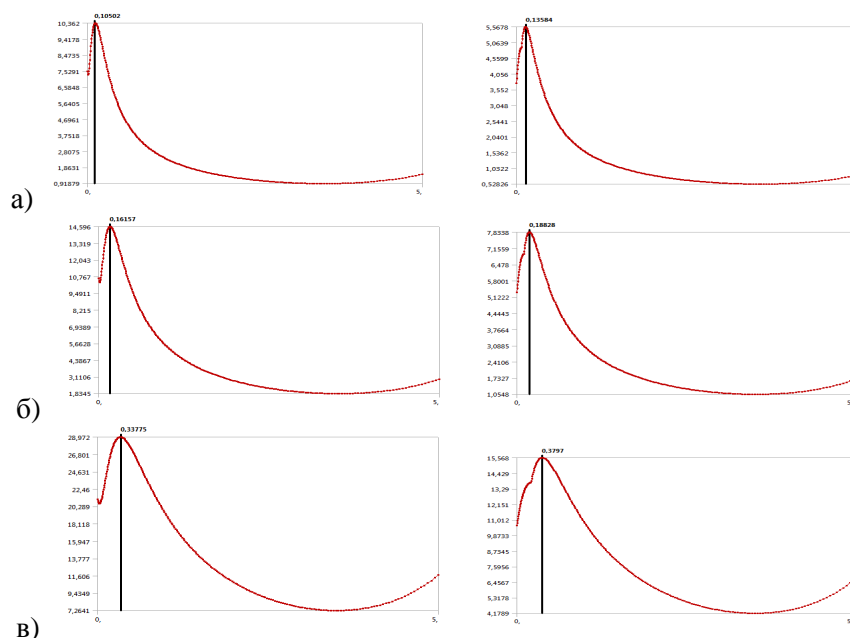
При  $p/D > 4$  спочатку напруження на периферії наближаються до значень у точках екстремуму, а при  $p/D > 16$  периферія зовнішньої деталі набуває напружень, які перевищують екстремальні всередині меридіональної площини. Отож, ця частина результатів моделювання НДС не може прогнозуватися відомим аналітичним розв'язком контактної задачі.

Звернемо увагу на те, що розподіл напружень у меридіональній площині зовнішньої деталі залишається стабільним для досліджених варіантів конструкцій, що відповідають умовам тестів 1 і 2. Для підтвердження цього порівняємо графіки розподілу еквівалентних напружень на рис. 2,а і 3,а,б, рис. 2,в і 3,в,г, рис. 2,д і 3,д,е - вони практично однакові. Єдина відмінність - на рис. 3,д довжина абсцис графіка (товщина зовнішньої деталі в меридіональній площині) становить 10 мм, а на решті графіків ця довжина 5 мм.

Зі збільшенням  $p/D$  спостерігається також

розширення найбільш напруженої ділянки біля екстремуму в меридіональній площині в перпендикулярному до неї напрямках. При  $p/D > 4$  екстремальні напруження на цих ділянках перевищують напруження в меридіональній площині, однак вони дещо менші за найбільші в пальці.

Наведені вище результати СЕ дослідження НДС циліндричного шарніра показали, що запропоновані критерії подібності однозначно характеризують його НДС для широкого діапазону конструкцій і навантаження. При цьому для прогнозних обчислень потрібні значення цих критеріїв - їх розраховують за простими формулами, та залежність емпіричних множників  $A_a$  і  $A_q$  від цих же критеріїв, наприклад від  $K_{T1}$  і  $K_{T2}$ . Зауважимо, що для  $K_{T2} > 5$  і  $K_{T1} = 0,5$  для прогнозування НДС циліндричного шарніра довільних розмірів можна використовувати з достатньою для інженерних розрахунків точністю теоретичний множник (0,798). Для  $K_{T2} < 5$  і  $K_{T1} = 0,5$  множники  $A_a$  і  $A_q$  виявлені вище. Їхні значення для  $K_{T1} \neq 0,5$  планується визначити в подальшому. Планується також представити значення емпіричних множників у вигляді регресійної залежності, що спростить їх застосування.



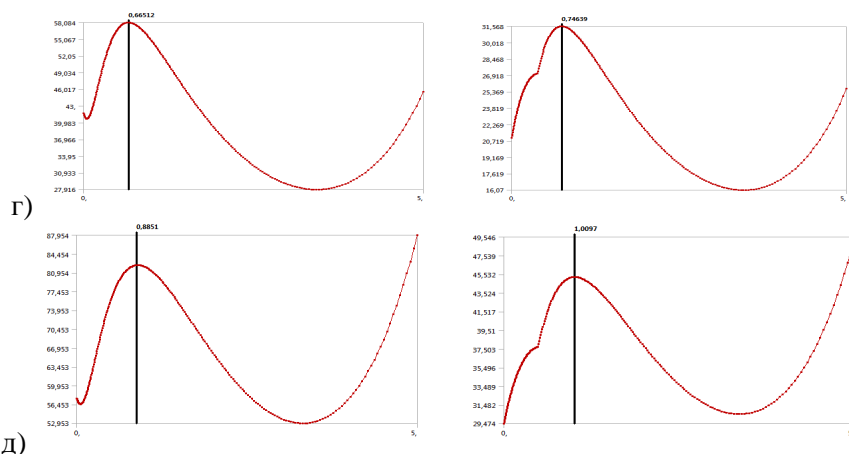


Рисунок 2 (а-д) – Графіки розподілу еквівалентних напружень (зліва) і найбільших дотичних напружень (справа) в меридіональній площині зовнішньої деталі залежно від відносного навантаження і критерія подібності  $K_{T2}$  ( $D=10$  мм,  $D-d=0,1$  мм,  $K_{T1}=0,5$ ,  $K_3=0,01010$ ):

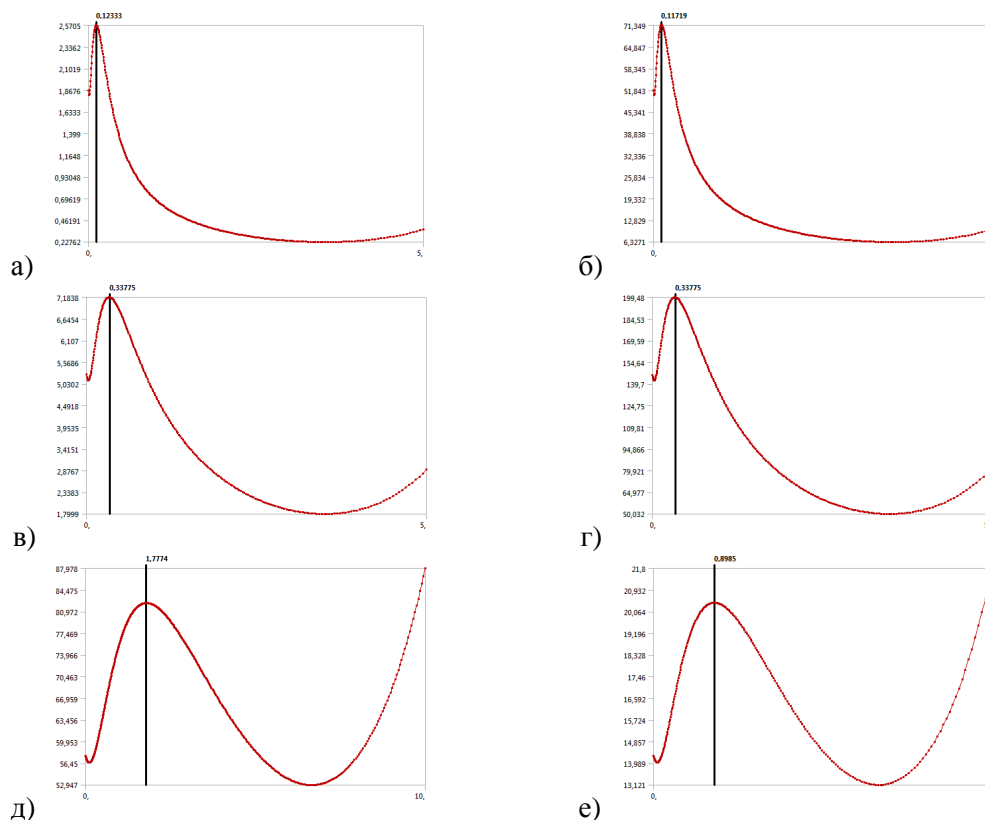


Рисунок 3 (а-е) – Графіки розподілу еквівалентних напружень для варіантів досліджень з однаковими  $K_{T1}=0,5$  і  $K_{T2}$ :

а)  $K_{T2}=14,40$ ,  $K_3=0,00251$ ,  $p/D=0,1239$ ; б)  $K_{T2}=14,40$ ,  $K_3=0,06952$ ,  $p/D=3,4412$ ; в)  $K_{T2}=5,13$ ,  $K_3=0,00251$ ,  $p/D=0,9915$ ; г)  $K_{T2}=5,13$ ,  $K_3=0,06952$ ,  $p/D=27,530$ ; д)  $K_{T2}=1,75$ ,  $K_3=0,01010$ ,  $p/D=32$ ; е)  $K_{T2}=1,75$ ,  $K_3=0,00251$ ,  $p/D=15,864$

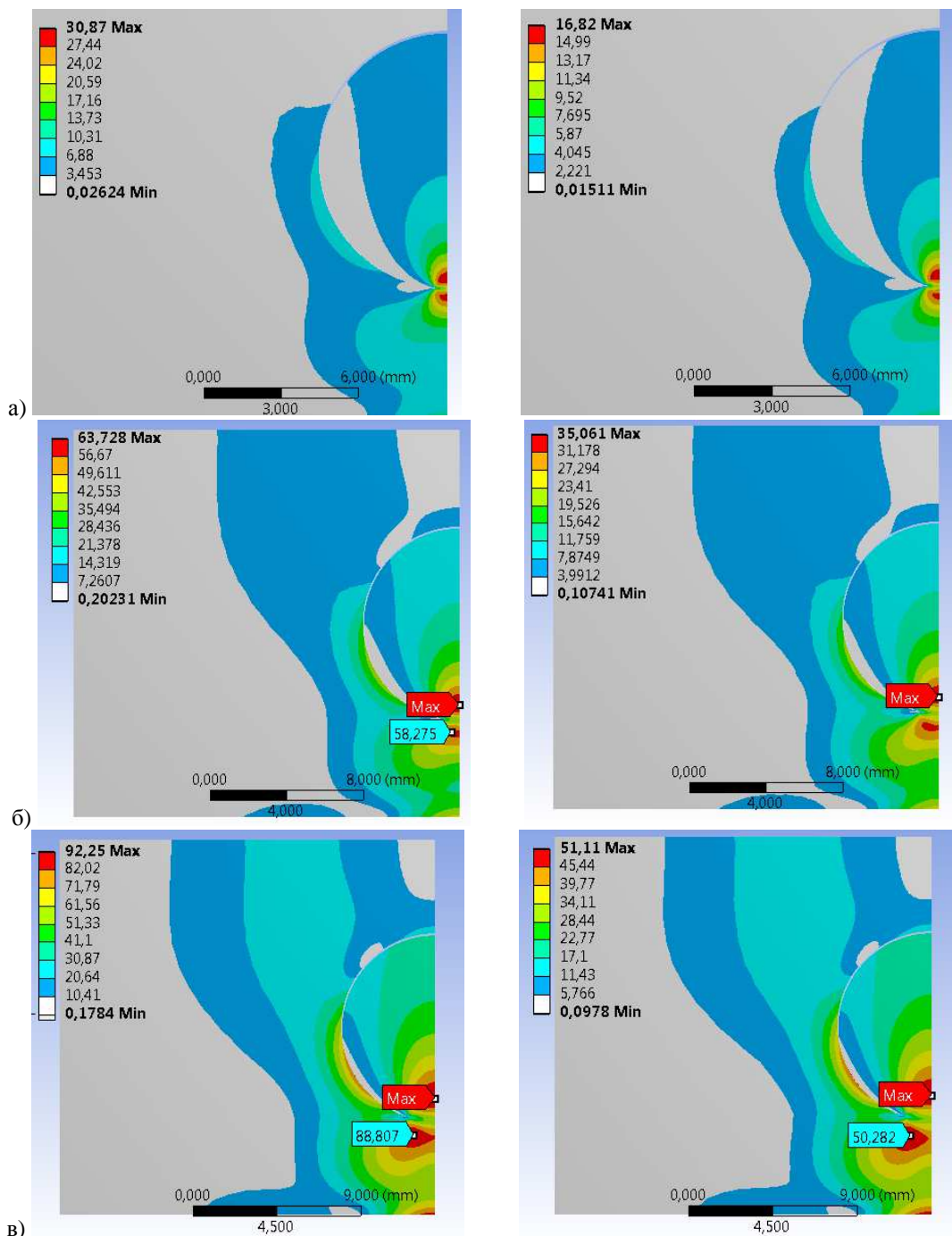


Рисунок 4 – Контурні діаграми розподілу еквівалентних (зліва) і найбільших дотичних напружень (справа) в деталях циліндричного шарніра: а)  $p/D=4$ ,  $K_{r2}=5,13$ ; б)  $p/D=16$ ,  $K_{r2}=2,53$ ; в)  $p/D=32$ ,  $K_{r2}=1,75$

### Висновки.

На основі аналізу обмежень, накладених для отримання аналітичного розв'язку контактної задачі двох кругових циліндрів з паралельними осями, та особливостей реальних конструкцій, показані причини виникнення

неточностей при використанні аналітичного розв'язку для прогнозування НДС конструкцій з обмеженими розмірами, запропоновано застосувати для цієї мети підхід з критеріями подібності і набір таких критеріїв, що враховують особливості реальних конструкцій -

параметри геометричні, силові, властивостей матеріалів, а також ширину контакту спряжених деталей.

Побудована параметрична двовимірна SE модель НДС циліндричного шарніра і на основі результатів її дослідження в широкому діапазоні зміни геометричних і силових параметрів моделі (окрім відносної товщини зовнішньої деталі та властивостей матеріалу деталей) показана спроможність критеріїв подібності однозначно описувати НДС шарніра довільних розмірів.

Показано також, що при великій товщині зовнішньої деталі шарніра порівняно з шириною контакту ( $K_{12} > 5$ ) результати аналітичного розв'язку контактної задачі двох циліндрів придатні для прогнозування НДС у шарнірі з точністю, достатньою для інженерних розрахунків. При меншій товщині суттєво змінюються ширина контакту і найбільший тиск у контактї, відбувається значний перерозподіл напружень в об'ємі деталей, в тому числі периферійні ділянки зовнішньої деталі стають найбільш напруженими.

1 Джонсон К. Механика контактного взаимодействия: Пер с англ. / К. Джонсон. - М.: Мир, 1989. - 510 с.

2 Беляев Н.М. Местные напряжения при сжатии упругих тел. - В сб.: Инженерные сооружения и строительная механика. - Л.: Путь, 1924. - С. 27-108.

3 Орлов П.И. Основы конструирования / П.И. Орлов. - М.: Машиностроение, 1968. - 568с.

4 Нахатакян Ф.Г. О решении Н.М. Беляева задачи по определению контактной деформации цилиндров / Ф.Г. Нахатакян. Вестник машиностроения. - 2013. - № 5. - С. 3-6.

5 Бруяка В.А. Инженерный анализ в ANSYS Workbench: Учеб. пособие / В.А. Бруяка, В.Г. Фокин, Е.А. Солдусова, Н.А. Глазунова,

И.Е. Адеянов. - Самара: Самарский гос.ун-т, 2010. - 271 с.

6 Сторож Б.Д. Комп'ютерне моделювання НДС фрикційної накладки стрічково-колодкового гальма // Б.Д. Сторож, Я.Б. Сторож Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. Всеукраїнський цюквартальний наук. технічний журнал 2010. - № 2(35). - С. 70-73.

7 Сторож Б.Д. Розв'язок задачі теорії різання методом скінченно-елементного моделювання / Б.Д. Сторож, Я.Б. Сторож, Я.М. Кулик // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. Всеукраїнський цюквартальний наук.-технічний журнал, 2010. - № 3(36). - С. 73-78.

8 Привалихин Р.С. Напряженное состояние в зоне контакта двух цилиндрических тел конечной длины / Р.С. Привалихин. Изв.Самарского научного центра РАН. Общие проблемы машиностроения. - №1(3), т. 13, 2011. - С. 599-603.

9 Биргер И.А. Расчет на прочность деталей машин: Справочник / И.А. Биргер, Б.Ф. Шор, Г.Б. Иосифилевич.

- М.: Машиностроение, 1970. - 702 с. 10 Лютак І.З. Комп'ютерне моделювання деталей циліндричного шарніра / Ігор Лютак, Ярослав Сторож // Вісник ХНТУСГ ім. П. Василенка. - Харків: ХНТУСГ, 2015. - Випуск 158. - С.20-27.

11 Статистика: теоретичні засади і прикладні аспекти: Навч. посібник / Р.В. Фецура, А.В. Барвінський, В.П. Кічор та інші; За ред. Р.В. Фецура. - Львів: «Інтелект-Захід», 2003. - 576 с.

Поступила в редакцію 29.05.2018 р.  
 Рекомендували до друку: докт.техн.наук,  
 проф. Олійник А. П., докт. техн. наук, проф.  
 Юрчишин В. М.