

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВІБРОАГРЕГАТА З ЛАНЦЮГОВО-РОЗГАЛУЖЕНИМ СПОСОБОМ З'ЄДНАННЯ ТВЕРДИХ ТІЛ

Нісонський В. П., Незамай Б. С.

ВСТУП

Дослідження віброударних процесів і технологій в техніці і промисловості є актуальним науково-технічним завданням¹. Важливість вивчення роботи таких віброударних машин зумовлюється тим, що в багатьох технологічних процесах віброударні явища є більш ефективними, ніж суто вібраційні. Використання віброударної дії вигідне тим, що дає змогу одержати значний результат за допомогою мінімальних технологічних засобів. У багатьох технологічних процесах віброударні явища використовуються більш ефективно, ніж чисто вібраційні (будівельні машини, віброінструменти, транспортні засоби і грохоти, вібромайданчики для ущільнення бетонної суміші, машини для ливарного виробництва та інші).

Значний вклад у моделювання віброударних динамічних систем із використанням чисельних методів, а також методів комп'ютерного моделювання, внесли такі вчені: К.М. Рагульскіс, В.П. Франчук, І.І. Герєга, В.М. Шопа, І.С. Лозовий, М.Р. Козулькевич, М.А. Ткачук, Р.В. Чубик, В.М. Боровець, В.С. Шенбор, А.П. Беспалов, О.С. Ланець, Я.В. Шпак, Ю.П. Шоловій, А.Н. Марюта, Т.С. Ярошевич, З.А. Стоцько, Б.І. Сокіл, В.Г. Топільницький, Р.Д. Іскович-Лотоцький та інші.

В основу роботи покладені методи математичного моделювання; методи аналітичної механіки – використання системи рівнянь Лагранжа II роду, за допомогою якої виведені основні математичні співвідношення під час побудови математичної моделі; методи матричного числення; методи обчислювальної математики для чисельного розв'язування системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь II порядку та отримання значень параметрів складної віброударної системи під час динамічного режиму роботи. Використовувалися методи комп'ютерного моделювання для побудови фазових портретів під час коливань твердих тіл системи.

¹ Блехман И.И. Что может вибрация? Москва: «Наука», 1988. 208 с.

Пічугін С.Ф. Дослідження режимів ущільнення легкобетонних сумішей на ударно-вібраційній установці методом математичного планування експерименту. *Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво)*. Вип. 1 (36). Т. 1. Полтава: ПолтНТУ, 2013. С. 183–190.

Ісакович-Лотоцький Р.Д. Основи теорії розрахунку та розробка процесів і обладнання для віброударного пресування: монографія. Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2006. 338 с.

1. Постановка завдання дослідження динамічного режиму роботи віброагрегатів із ланцюгово-розгалуженим способом з'єднання твердих тіл із пружними в'язями

Для виробництва важливим є дослідження динамічного режиму роботи віброагрегатів із складнішою компоновкою з'єднання твердих тіл, а саме – ланцюгово-розгалуженим способом з'єднання. У ливарному виробництві знайшли широке використання багатосекційні вібраційні агрегати як із послідовним, так із ланцюгово-розгалуженим (інша назва – послідовно-паралельний) способом розміщення твердих інерційних тіл. Послідовне розміщення інерційних тіл використовується, наприклад, під час виробництва вибивних інерційних ґраток 31211-31219².

Компоновка твердих тіл віброагрегатів ланцюгово-розгалуженим способом дає можливість провадити технологічний процес вибивки технологічного вантажу більш ефективно. Математичному моделюванню таких вибивних віброагрегатів достатньої уваги дослідниками поки що не приділялося із причини складності такого моделювання, складності розв'язування системи нелінійних диференціальних рівнянь із значною кількістю змінних. Тому багатосекційні вібраційні вибивні агрегати з ланцюгово-розгалуженим способом з'єднання твердих тіл поки що не повністю освоєні промисловістю. Також залишається багато нез'ясованих питань динамічного режиму роботи віброагрегатів із причини недостатньої кількості теоретичних досліджень і методик розрахунку. У виробничій практиці багатосекційні віброагрегати, як правило, комплектуються споживачем самостійно на базі серійно вироблених промисловістю інерційно-ударних вібраційних машин. Недостатня кількість теоретичних досліджень призводить до того, що надійність роботи цих агрегатів має випадковий характер.

Загальна схема ланцюгово-розгалуженого способу з'єднання твердих тіл показана на рисунку 1. Тут на єдиній основі (фундаменті) за допомогою пружних в'язів встановлено фундаментну раму (тверде тіло з позначенням $i=1$). На фундаментній рамі встановлено N ударно-вибивних інерційних ґраток, які ще називають вібраторами (тіла $i=4, \dots, N+3$), що також мають пружні зв'язки з фундаментною рамою. Під час жорсткого зв'язку основи з фундаментною рамою коливання останньої не відбуваються, і тому її в моделі можна вважати власне фундаментом. Ливарна форма (технологічний вантаж, далі – ТВ, тіло з номером $i=3$) встановлюється на робочому органі

² Герєга І.І., Нісонський В.П. Математична модель ланцюгово-розгалуженої віброударної коливальної системи. *Доповіді НАН України*. 1994. № 5. С. 58–63.

Ісакович-Лотоцький Р.Д., Обертюх Р.Р., Севастьянов І.В. Процеси та машини вібраційних та віброударних технологій: монографія. Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2006. 291с.

опорної рами (далі – ОР), тіло з номером $i=2$. Між робочими органами ОР та робочими органами ударно-вибивних ґраток передбачено технологічний зазор δ . Умова виконання технологічного процесу – величина зазору δ амплітуди коливань робочих органів ударно-вибивних ґраток, тобто $\delta < A$.

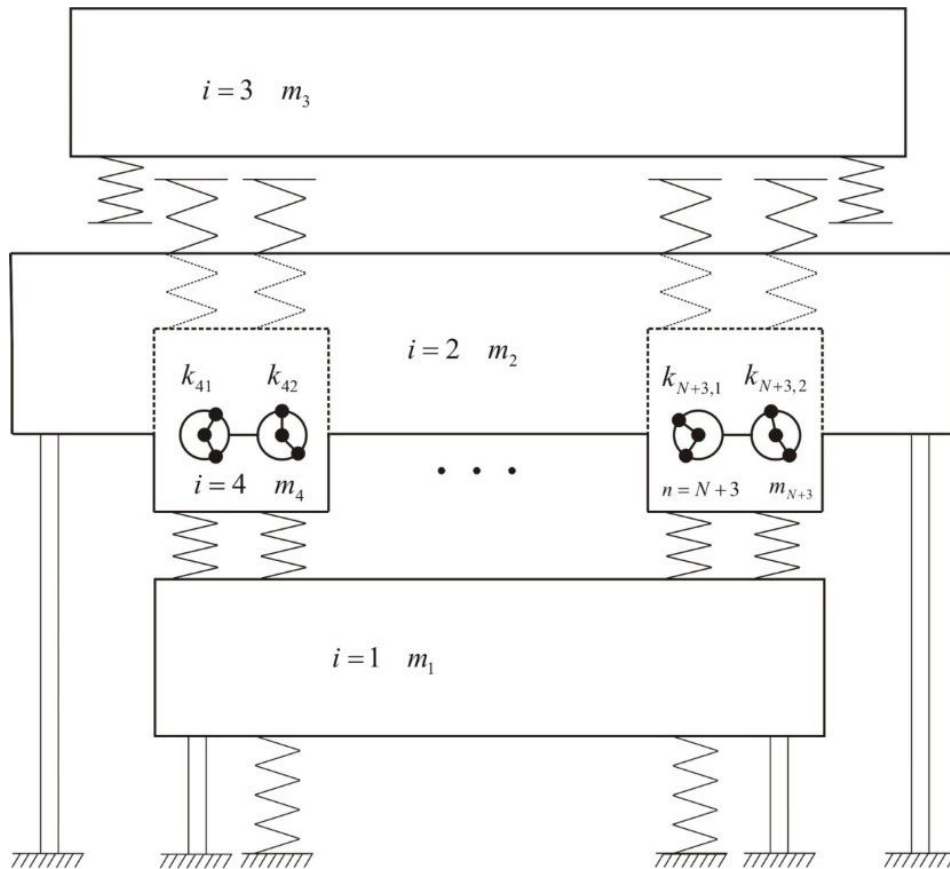


Рис. 1. Ланцюгово-розгалужений спосіб з'єднання твердих тіл

Між опорною рамою та основою також можливий жорсткий зв'язок, при цьому ОР коливатися не буде.

У зв'язку з недостатньою кількістю наукових праць із питань математичного моделювання динамічного режиму роботи віброударних агрегатів із ланцюгово-розгалуженим способом з'єднання твердих тіл виникла теоретична, а також і практична для ливарного виробництва потреба:

- побудови математичної моделі динамічного режиму роботи віброударних агрегатів із ланцюгово-розгалуженим способом з'єднання твердих тіл;
- побудови математичної моделі контакту робочих органів технологічного вантажу з робочими органами опорної рами агрегату;

- експериментального дослідження явища синхронізації дебалансних мас і віброударних ґраток у динамічному режимі роботи;
- отримання чисельних розрахунків динамічного режиму роботи простіших моделей віброґраток із ланцюгово-розгалуженим способом з'єднання твердих тіл і розрахунків власних частот, амплітуди та прискорення технологічного вантажу;
- побудови графіків залежності амплітуди коливань та амплітуди віброприскорень від часу та фазових портретів руху технологічного вантажу під час динамічного режиму роботи та дослідження залежності власних частот технологічного вантажу від механічних параметрів системи;
- дослідження питання про стійкість отриманих розв'язків розглянутої механічної віброударної системи;
- імітаційного моделювання динамічного режиму роботи віброагрегату;
- розроблення наукової класифікації віброударних агрегатів із ланцюговим і ланцюгово-розгалуженим способом з'єднання твердих тіл.

2. Побудова математичної моделі динамічного режиму віброагрегатів із ланцюгово-розгалуженим способом з'єднання твердих тіл із пружними в'язями

Динамічна схема віброагрегату являє собою коливальну систему твердих тіл із ланцюгово-розгалуженим (послідовно-паралельним) способом з'єднання мас пружними елементами.

Введемо такі системи координат для коливальної системи, що зображена вище на рисунку 2:

– XOY – нерухома система координат, що жорстко з'єднується з основою і вибирається довільним чином;

– $X_iO_iV_i$, $X_nO_nV_n$ – рухомі системи координат, що жорстко з'єднуються відповідно з i -тим твердим тілом ($i = 1, 2, 3$) і n -ною ґраткою ($n = 4, 5, \dots, N+3$). Осі рухомих систем координат O_nV_n , O_nX_n вибираються так, щоби моменти сил тертя під час складання рівнянь руху дорівнювали нулю. Тому відповідні осі спрямовані вздовж поверхонь контакту, як показано на рисунку 2.

Для твердих тіл системи, за винятком технологічного вантажу, відповідні осі O_iX_i розміщені на лінії, що з'єднує точки кріплення верхніх пружних елементів; для технологічного вантажу – на лінії, що з'єднує точки кріплення нижніх пружних елементів.

Назвемо вільним такий стан системи, що відповідає недеформованому стану всіх пружних зв'язків³. У вільному стані рухомі системи координат, що показані на рисунку 2, паралельні.

Рівняння руху інерційних елементів розрахункової схеми складається за допомогою рівнянь Лагранжа 2-го роду⁴:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (1)$$

де T – кінетична енергія системи; q_i – узагальнена координата; Q_i – узагальнена сила, $s = 1, \dots, s$.

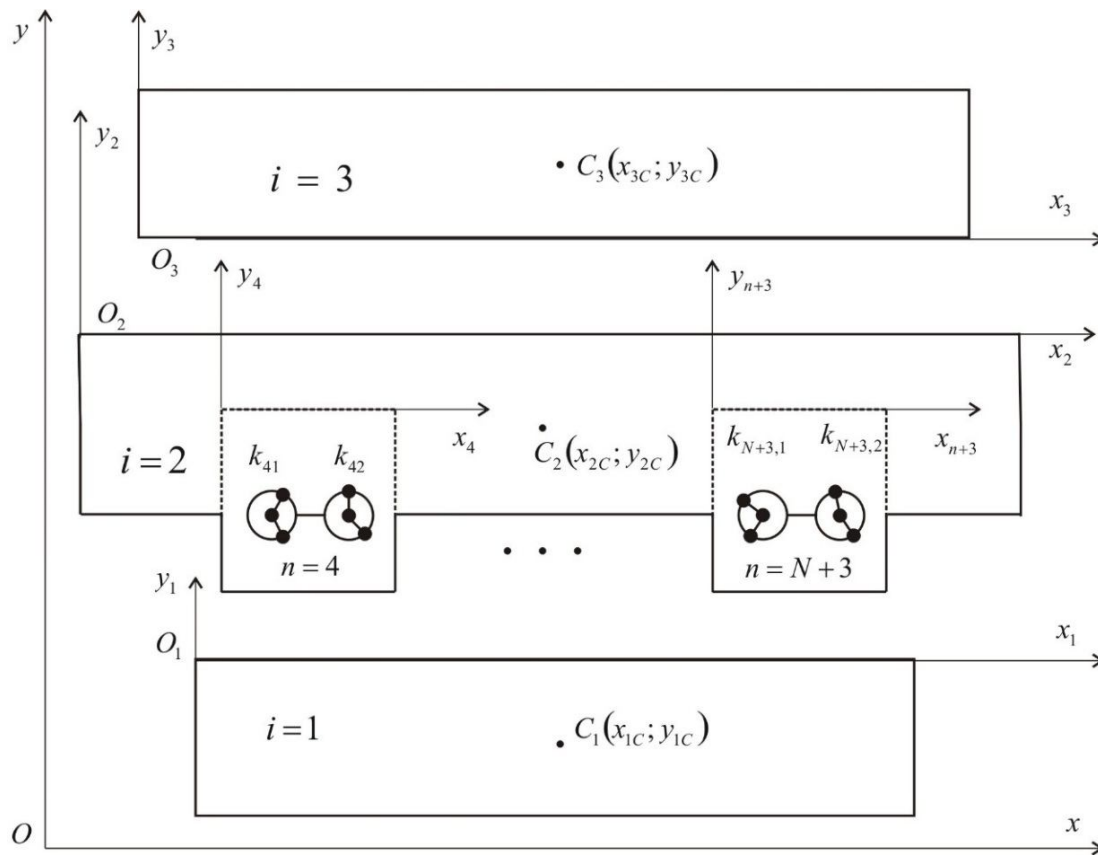


Рис. 2. Системи координат для віброударної коливальної системи

Кількість узагальнених координат s у (1) визначається у [8] та має такий вигляд⁵:

³ Нісонский В.П. Математичне моделювання віброагрегатів для ливарного виробництва. *Методи та прилади контролю якості*. 2016. № 1 (36). С. 100–107.

⁴ Лурье А.И. Аналитическая механика. Москва: «Физматгиз», 1961. 824 с.

⁵ Нісонский В.П., Герега И.И., Козулькевич М.Р., Гуцуляк Ю.В. Математическая модель многосекционных выбивных агрегатов с учётом рассеяния энергии. *Проблемы прочности*. 1994. № 10. С. 30–36.

$$s = 3 \cdot [N + 1 + \sigma(\xi_1) + \sigma(\xi_2)] + \sum_{n=4}^{N+3} [K_n + \sum_{k=1}^{K_n} P_{nk} + L_n], \quad (2)$$

де $\sigma(\xi_1), \sigma(\xi_2)$ – одинична функція Хевісайда: $\sigma(\xi)=1$ за $\xi \geq 0$; $\sigma(\xi)=0$ за $\xi < 0$. У нас $\xi_{1,2} = +1$ за пружного з'єднання відповідної рами з фундаментом (основою) та $\xi_{1,2} = -1$ за жорсткого з'єднання відповідної рами з фундаментом (основою); K_n – кількість віброзбудників, встановлених на вібромашині; P_{nk} – кількість рухомих дебалансних мас, з'єднаних із валом віброзбудника пружними зв'язками; L_n – кількість привідних електродвигунів, які встановлено разом із віброзбудником або на нерухомій рамі.

За узагальнені координати системи прийняті такі:

– X_i, Y_i, X_n, Y_n – координати початку системи координат X_i, O_i, Y_i точки O_i та початку системи координат X_n, O_n, Y_n точки O_n , жорстко зв'язаної відповідно з i -тим інерційним тілом і з n -ною ґраткою, щодо нерухомої системи координат XOY ;

– $a_i, b_i, u_k, v_k, c_n, d_n$ – координати відповідно центру мас i -го тіла, осей обертання k -го віброзбудника та n -го електродвигуна в системі X_i, O_i, Y_i ;

– φ_i, φ_n – кути повороту інерційного елемента і робочого органу вібраційного агрегату (ґратки) відповідно;

– φ_{nk}, β_{nl} – кути повороту вала віброзбудника і привідного двигуна відповідно;

– $\psi_{нкp}$ – кут повороту дебалансної маси.

Кути $\varphi_i, \varphi_n, \varphi_{nk}, \beta_{nl}, \psi_{нкp}$ відраховуються проти руху годинникової стрілки від позитивного напрямку вісі OX .

Під час розроблення математичної моделі динамічного режиму роботи віброагрегату прийнято такі допущення:

– пружні елементи неінерційні;

– маси, що входять у систему, являють собою жорсткі інерційні тіла, які виконують плоскопаралельний рух;

– враховується жорсткість пружних елементів на розтяг і зсув.

Технологічний процес вибивки формувальної суміші з опок під час роботи вібраційного вибивного агрегату, зображеного на рисунку 2, супроводжується зміною маси технологічного вантажу. Це приводить до прийняття допущення, що в процесі виконання технологічної операції маса і момент інерції є функціями часу:

$$\begin{aligned} m_3 &= f_{m3}(t); \\ I_3 &= f_{I3}(t), \end{aligned} \quad (3)$$

де m_3, I_3 – маса і центральний момент інерції технологічного вантажу відповідно.

Введемо такі позначення для моделей рисунку 2, що відповідають вибивній віброгратці, 31327 з рисунку 2:

T_1 – кінетична енергія твердих тіл;

T_2 – кінетична енергія валів віброзбудників;

T_3 – кінетична енергія рухомих щодо вала віброзбудників дебалансних мас;

T_4 – кінетична енергія приводних електродвигунів.

Тоді отримаємо таке:

$$T = \sum_{i=1}^4 T_i, \quad (4)$$

де T – загальна (сумарна) кінетична енергія системи.

Візьмемо такі позначення для досліджуваної моделі:

– m_i, I_i, m_n, I_n – відповідно маси і моменти інерції i -го та n -го твердих тіл, $i = 1, 2, 3; n = 4, 5, \dots, N + 3$;

– m_{nk}, I_{nk} – відповідно маса і момент інерції вала k_n -го віброзбудника, встановленого на n -му твердому тілі (гратці);

– m_{nkp}, I_{nkp} – відповідно маса і момент інерції щодо осі валу віброзбудника p_{nk} -го дебаланса, встановленого на n -му тілі;

– $x_{ic}, y_{ic}, x_{nc}, y_{nc}$ – координати центру ваги i -го та n -го твердих тіл відповідно в системі координат XOY ;

– m_{nl}, I_{nl} – відповідно маси і моменти інерції l_n -го електродвигуна, встановленого на n -ому тілі;

– x_{nk}, y_{nk} – координати осі обертання валу віброзбудника, в системі координат XOY ;

– x_{nl}, y_{nl} – координати осі обертання валу електродвигуна, встановленого на n -ому тілі, в системі координат XOY ;

– x_{nkp}, y_{nkp} – координати центру ваги p_{nk} -го дебалансу в системі координат XOY ;

– a_i, b_i – координати центру ваги i -го твердого тіла в системі координат $X_iO_iY_i$;

– a_n, b_n – координати центру ваги n -го твердого тіла в системі координат $X_nO_nY_n$;

– u_k, v_k – координати центру ваги вала k_n -го віброзбудника в системі координат $X_nO_nY_n$;

– c_l, d_l – координати осі обертання вала l_n -го електродвигуна в системі координат $X_nO_nY_n$;

– ε_{nkp} – ексцентриситет p_{nk} -ої дебалансної маси k_n -го віброзбудника, що є на n -ому тілі.

Для цієї динамічної схеми математична модель у матричній формі буде мати такий вигляд:

$$\begin{bmatrix} A_1^\Sigma & & & O \\ & A_2^\Sigma & & \\ & & A_1 & \\ O & & & A_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} K_1^\Sigma \\ K_2^\Sigma \\ K_1 \\ K_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^\Sigma \\ B_2^\Sigma \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

де $[A_n^\Sigma], [A_i]$ – матриці інерційних величин; $[K_n^\Sigma], [K_i]$ – матриці-стовпці других похідних узагальнених координат; $[B_n^\Sigma], [B_i]$ – матриці-стовпці вільних членів.

Для остаточної побудови математичної моделі потрібно мати початкові умови для побудованих вище рівнянь руху інерційних елементів. Початкові умови надаються, спираючись на геометричні розміри та параметри вибивної інерційно-ударної ґратки (або іншого аналогічного агрегату коливально-ударної дії), а також на фізичний стан агрегату в момент початку руху.

У момент початку руху всі інерційні елементи віброударної ґратки будемо вважати нерухомими, що перебувають у вільному стані. Тож будемо вважати, що в початковий момент часу на інерційні елементи не діють жодні сили, крім сил тяжіння, а початкові деформації пружних зв'язків відсутні (дорівнюють нулю). Усі кути повороту інерційних елементів також будемо вважати рівними нулю. Це означає, що до систем рівнянь (5) треба приєднати такі умови:

$$\begin{aligned} \varphi_n = \varphi_{n1} = \dots = \varphi_{nk} = \psi_{n11} = \dots = \psi_{n1p} = \psi_{n2p} = \dots = \psi_{nkp} = \beta_{n1} = \beta_{n1} = 0; \\ \dot{x}_n = \dot{y}_n = \dot{\varphi}_n = \dot{\varphi}_{n1} = \dots = \dot{\varphi}_{nk} = \dot{\psi}_{n11} = \dots = \dot{\psi}_{n1p} = \dot{\psi}_{n21} = \dots = \dot{\psi}_{n2p} = \dots = \dot{\psi}_{nkp} = \\ = \dot{\beta}_{n1} = \dots = \dot{\beta}_{n1} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Отже, система рівнянь (5) разом із початковими умовами (6) дають змогу знайти єдиний розв'язок системи.

3. Розрахунки динамічного режиму віброагрегатів із ланцюгово-розгалуженим способом з'єднання твердих тіл із пружними в'язями

Числові розв'язки системи (5) отримано методом Адамса⁶ для різних значень механічних параметрів системи. Зокрема, досліджували вплив в'язкості в'язів на значення амплітуди коливань та амплітуди прискорення технологічного вантажу. З метою спрощення аналізу результатів розглянуто синхронне обертання двигунів із зрівноваженими дебалансами для різних значень коефіцієнтів. На рисунках 3 і 4 подано графіки залежностей

⁶ Бахвалов Н.С. Численные методы. Москва: «Наука», 1975. 632 с.

відповідно амплітуд коливання та прискорення технологічного вантажу від часу. У верхній лівій частині рисунка 3 показано залежність коливання технологічного вантажу за $C_{13}=C_{32}=2\cdot 10^6$ кг/м. По осі ОХ відкладається час у секундах, по осі ОУ – координата y_2 технологічного вантажу. З отриманих розв'язків робимо висновок, що наявність в'язкого опору стабілізує коливальний процес, зменшуючи амплітуду коливань збурення на стадії розгону. Зокрема, за відсутності в'язкого опору та збігу однієї з власних частот технологічного вантажу коливань із частотою збурюючої сили амплітуда коливань і віброприскорення технологічного вантажу необмежено зростають (настає резонанс), що видно на лівій нижній частині рисунка 3. $C_{13}=1,4\cdot 10^6$ н/м, $C_{32}=1,2\cdot 10^6$ н/м, де C_{13} , C_{32} – жорсткості пружних зв'язків відповідно фундаментної рами з віброграткою (C_{13}) та віброгратки з технологічним вантажем (C_{32}). На лівій частині рисунка 3 показано графіки амплітуд технологічного вантажу, коли в'язкий опір відсутній, тобто $\gamma_{13}=\gamma_{32}=0$. Під час врахування в'язкості опору дістаємо обмежені значення цих величин. Очевидно, що із збільшенням величини в'язкості опору усталений режим настає швидше, що видно на правій частині рисунка 3, де в'язкий опір узятो $\gamma_{13}=\gamma_{23}=5\cdot 10^3$.

На рисунку 4 показано залежність амплітуд прискорень технологічного вантажу для різних значень пружного та в'язкого опору. Ліва частина рисунка 4 відповідає лівій частині рисунка 3; по осі ОУ беруться значення віброприскорення технологічного вантажу в м/сек², по осі ОХ – час у секундах. Відповідні значення жорсткості на лівій частині рисунка 4 аналогічні значенням жорсткості на лівій частині рисунка 3; в'язкий опір відсутній, $\gamma_{12}=\gamma_{32}=0$. Права частина рисунка 4 відповідає правій частині рисунка 3; жорсткості пружних зв'язків $C_{13}=C_{32}=2\cdot 10^6$ кг/м, в'язкий опір так само взятो $\gamma_{13}=\gamma_{23}=5\cdot 10^3$ кг/м.

Експлуатація віброустановки здійснюється переважно в умовах усталеного режиму. Тоді момент приводу двигуна урівноважується з моментом опору руху і, як наслідок, швидкість обертання валів дебалансів мало змінюється ($\dot{\psi}_{3j} \approx const$), а прискорення обертання – мала величина ($\ddot{\psi}_{3j} \approx 0$). У цьому разі коливання системи спричинюють лише складники інерційних сил дебалансів.

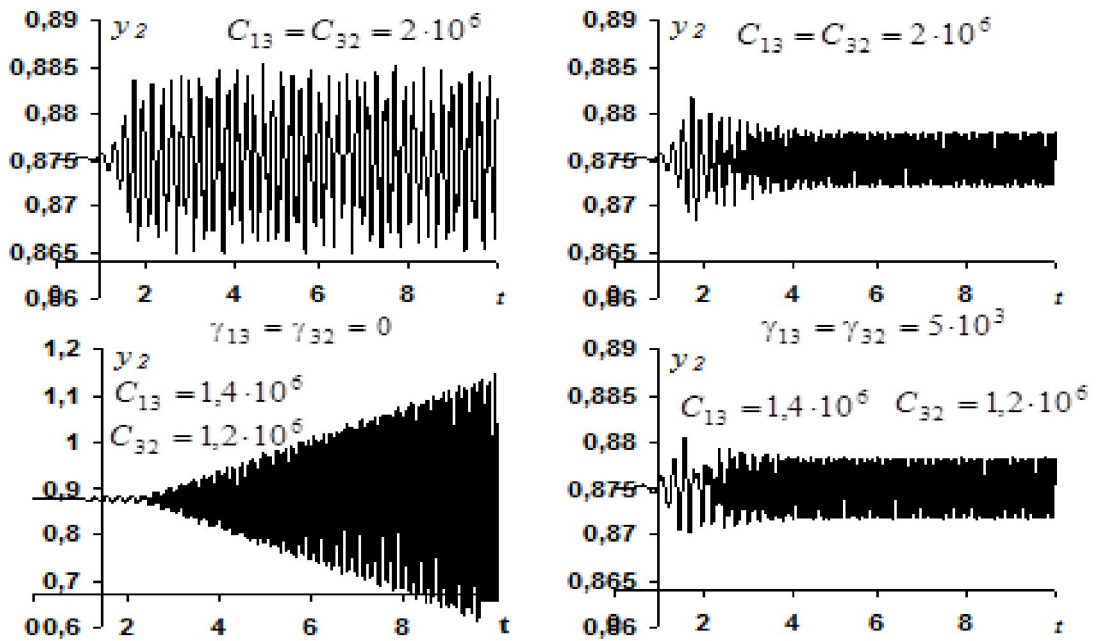


Рис. 3. Залежність амплітуди коливань технологічного вантажу від часу за різних значень пружного та в'язкого опору

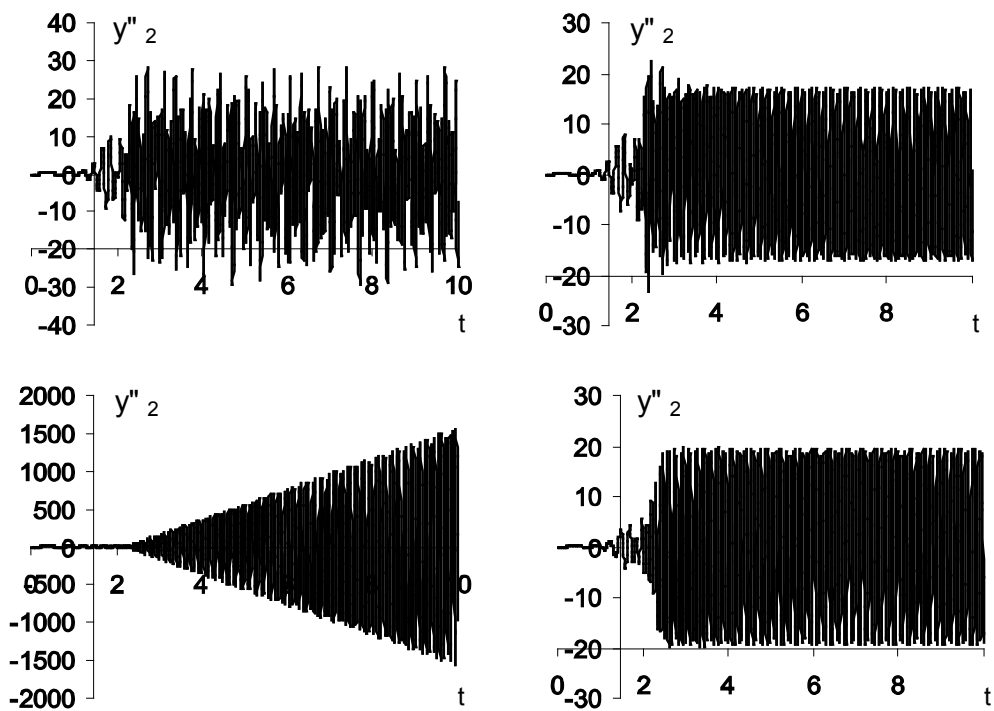


Рис. 4. Залежність прискорення технологічного вантажу від часу за різних значень пружного та в'язкого опору

Рух такої системи за умови зрівноваженого синхронного обертання двигунів зі сталою швидкістю Ω буде здійснюватися лише у вертикальному напрямі та моделюється з високою точністю такою системою рівнянь⁷:

$$M_2 \ddot{y}_2 + 2\gamma_{32}(\dot{y}_2 - \dot{y}_3) + 2C_{32}(y_2 - y_3) = 0;$$

$$M_3 \ddot{y}_3 + 2\gamma_{32}(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + 2C_{32}(y_3 - y_2) + 2\gamma_{13}\dot{y}_3 + 2C_{13}y_3 = 2m_d r \Omega^2 \cos(\Omega t). \quad (6)$$

Як відомо, частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь (2) буде таким:

$$y_i(t) = A_i \cos(\Omega t + \psi_o), \quad i = 2,3; \quad (7)$$

де A_i – амплітуда коливань та прискорення технологічного вантажу та віброгратки відповідно, які визначаються такими формулами:

$$A_2 = \frac{2m_d \varepsilon \Omega^2 \sqrt{C_{32}^2 + \Omega^2 \gamma_{32}^2}}{\sqrt{\Delta}}$$

$$A_3 = \frac{m_d \varepsilon \Omega^2 \sqrt{(-M_2 \Omega^2 + 2C_{32})^2 + 4\Omega^2 \gamma_{32}^2}}{\sqrt{\Delta}}, \quad (8)$$

$$A_{w_i} = \Omega^2 A_i, \quad i = 2,3$$

тут Δ – вираз, що містить сталі $C_{13}, C_{32}, \gamma_{13}, \gamma_{32}, M_2, M_3$.

Аналіз розрахунків доцільно проводити, знаючи власні частоти коливань механічної системи. Характеристичне рівняння системи (6) для знаходження перших власних частот матиме такий вигляд:

$$\begin{vmatrix} M_2 \cdot \lambda^2 + 2\gamma_{32} \cdot \lambda + 2C_{32} & -2\gamma_{32} \cdot \lambda - 2C_{32} \\ -2\gamma_{32} \cdot \lambda - 2C_{23} & M_3 \cdot \lambda^2 + 2(\gamma_{13} + \gamma_{32}) \cdot \lambda + 2(C_{13} + C_{32}) \end{vmatrix} = 0; \quad (9)$$

тут λ – корені характеристичного рівняння (9), що відповідають власним частотам коливань системи.

Аналіз формул (8) і (9) проведено для значень параметрів в'язко-жорсткого опору, які вказані вище. Порівняльні результати обчислень амплітуд і власних значень частот наведено в таблиці 1, де C_{13}, C_{32} – відповідні жорсткості, γ_{13}, γ_{32} – в'язкий опір, λ_2, λ_3 – власні частоти технологічного вантажу та віброгратки відповідно, які позначені на рисунку 1 цифрами 2 і 3 відповідно; ε – радіус для дебалансних мас.

Отримані аналітичні результати добре узгоджуються з числовими розрахунками. Цікавим є останній випадок (рядок 5), який показав, що підібрані певним чином параметри забезпечили коливання технологічного вантажу з величиною амплітуди коливання $4 \cdot 10^{-3}$ м та прискорення $23,43$ м/сек², тоді як показники у віброгратки на два порядки менші.

⁷ Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. Москва: «Наука», 1964. 254 с.

Таблиця 1

Амплітуди, віброприскорення і власні частоти технологічного вантажу та віброгратки за різних механічних параметрів системи

	C_{13}	C_{32}	γ_{13}	γ_{32}	λ_2	λ_3	ε	A_2	A_3	A_{W2}	A_{W3}
1.	$2 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$	0	0	29,61	95,51	0,1	$2,9 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	16,78	32,26
2.	$2 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	29,59	94,83	0,1	$2,59 \cdot 10^{-3}$	$4,9 \cdot 10^{-3}$	15,08	28,61
3.	$1,4 \cdot 10^6$	$1,2 \cdot 10^6$	0	0	24,02	76,31	0,1	0,25	0,89	1409	5455
4.	$1,4 \cdot 10^6$	$1,25 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	24,22	76,46	0,1	$3,3 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	19,75	68,45
5.	10^6	$5,8 \cdot 10^6$	10^3	10^3	24,85	137	0,2	$4 \cdot 10^{-3}$	$6,1 \cdot 10^{-5}$	23,43	0,3

Графіки фазових портретів для розглянутих випадків для різних значень пружного та в'язкого опору наведено на рисунках 5–8.

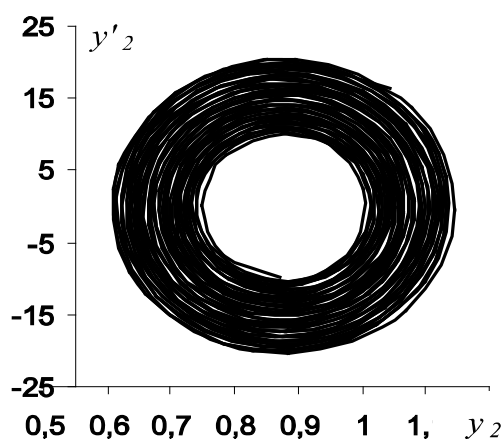


Рис. 5. Фазовий портрет коливань технологічного вантажу для значень пружного та в'язкого опору $C_{13}=C_{32}=1,4 \cdot 10^6$, $\gamma_{13}=\gamma_{23}=0$

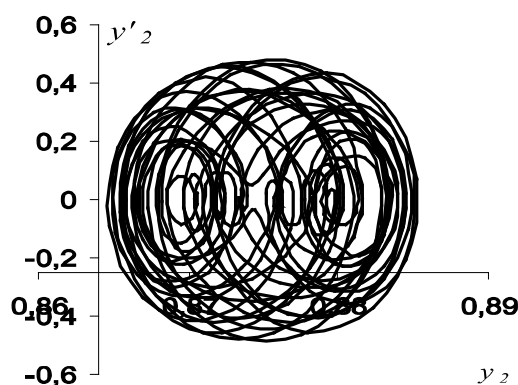


Рис. 6. Фазовий портрет коливань технологічного вантажу для значень пружного та в'язкого опору $C_{13}=C_{32}=2,0 \cdot 10^6$, $\gamma_{13}=\gamma_{23}=0$

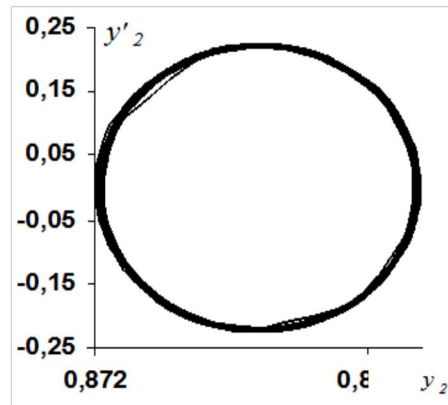


Рис. 7. Фазовий портрет коливань технологічного вантажу для значень пружного та в'язкого опору $C_{13}=C_{32}=2 \cdot 10^6$, $\gamma_{13}=\gamma_{23}=5 \cdot 10^3$

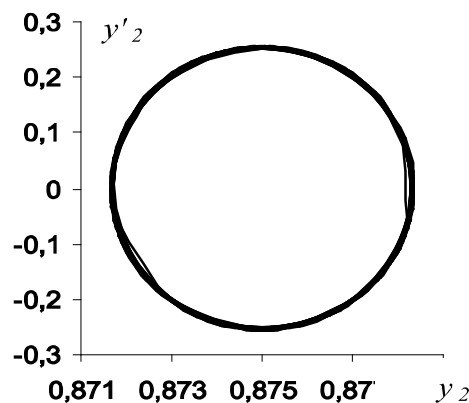


Рис. 8. Фазовий портрет коливань технологічного вантажу для значень пружного та в'язкого опору $C_{12} = 1,2 \cdot 10^6$; $\gamma_{13} = \gamma_{23} = 5 \cdot 10^3$

Як видно з діаграм наведених фазових кривих, в'язкий опір суттєво покращує стійкість динамічних систем. Фазові портрети показують, що рух технологічного вантажу є стійким, причому стійкість покращується з введенням в'язкого опору.

Із збільшенням жорсткості пружних в'язів між вибивною ґраткою та фундаментною рамою амплітуда коливань, як і швидкість руху технологічного вантажу, зменшується. При цьому можуть збільшуватися і власні частоти системи. Ці результати відповідно відображені в таблиці 1.

Похибка, яка вноситься на цьому етапі чисельних розрахунків, складається із двох складників⁸:

⁸ Нісонський В.П., Незамай Б.С., Дідух Ю.В. Оцінка точності чисельних розрахунків параметрів динамічного режиму роботи віброґратки. *Інформаційні технології в освіті, техніці та промисловості*: матер. III Всеукр. наук.-практ. конф. молодих учених і студентів (Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 10–13 жовтня 2017 р.). Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2017. С. 86–87.

- похибка чисельного методу Адамса;
- похибка обчислювального процесу.

Метод Адамса належить до скінченно-різницевого багатокрокового методу. Інтегрування відбувається на сітці із сталим кроком $x_j - x_{j-1} = h$ за допомогою співвідношень виду:

$$\sum_{i=0}^k a_{-i} y_{j-i} - h \sum_{i=0}^k b_{-i} (x_{j-i}, y_{j-i}) = 0, \quad (10)$$

де a_i – сталі, $\left| \frac{\partial b_{-i}}{\partial y_{j-1}} \right| \leq C$ за $h \leq h_0$. Залишковий член цієї формули рівний:

$$r_j = \frac{251}{750} h^5 f^{IV}(x). \quad (11)$$

Графіки залежності амплітуди коливань та амплітуди віброприскорень від часу, показані на рисунках у роботі вище, дають змогу зробити висновки, що графіки амплітуд коливань та амплітуд віброприскорень за квазігармонічних коливань, що характеризують усталений динамічний режим роботи, є обмеженими, і $f^{IV}(x) \leq 10$ при цьому кроці $h = 0,01$ (с). Отож похибка методу Адамса на одному кроці $\approx 10^{-9}$. Чисельні розрахунки проводилися на інтервалі 100 с за усталеного динамічного режиму. Враховуючи, що було прораховано 10^4 кроків, можна стверджувати, що похибка методу становить $\approx 10^{-9} \cdot 10^4 = 10^{-5}$.

Під час обчислювального процесу на комп'ютері задавалась точність 10^{-8} для одного кроку інтегрування. Враховуючи 10^4 кроків обчислення, можна стверджувати, що точність обчислення $\approx 10^{-8} \cdot 10^4 = 10^{-4}$.

Отже, загальна похибка обчислювального процесу, яка складається із суми похибок методу обчислення та похибки комп'ютерного обчислення, становить $10^{-5} + 10^{-4} \approx 10^{-4}$. Похибка обчислення фізичних параметрів механічної системи (геометричних розмірів твердих тіл і дебалансних мас, мас твердих тіл і дебалансів, моментів інерції твердих тіл та іншого) становить $\approx 10^{-3}$. Отож можна стверджувати, що загальна похибка під час обчислення становить $\approx 10^{-3}$. Така похибка є цілком допустимою для фізичних процесів такого роду. Тому загальний алгоритм та його реалізація на комп'ютері вносять похибки, які не чинять суттєвого впливу на результат обчислення, тому відповідають фізичній картині процесу.

ВИСНОВКИ

Отже, з використанням рівнянь Лагранжа II роду запропоновано математичну двовимірну модель руху твердих тіл та дії технологічного вантажу в механічних системах із ланцюгово-розгалуженим способом з'єднання мас, в якій інерційні тіла з'єднані пружними в'язями, враховується змінна маса та змінні моменти інерції технологічного вантажу,

що, на відміну від наявних методів моделей, дає змогу одержати аналітичні залежності для опису характеристик об'єктів такого класу; в рамках вибраної моделі виведено рівняння руху та рівняння для узагальнених сил. Математична модель, що побудована, може використовуватись для опису динамічного режиму роботи всіх видів віброагрегатів із ланцюгово-розгалуженим способом з'єднання твердих тіл.

Подальший розвиток дістали методи дослідження розсіювання енергії в механічних багатосекційних системах із ланцюгово-розгалуженим способом з'єднання твердих тіл.

Удосконалено підхід до моделювання процесу динамічного режиму роботи віброударної ґратки, що, на відміну від наявних методів, дає змогу одержати фазові портрети руху технологічного вантажу та графічні залежності між амплітудами коливань, амплітудами віброприскорень і часом, залежність власних частот, фазових портретів та амплітуд і віброприскорення технологічного вантажу від механічних параметрів віброґратки, а також дослідити питання механічної стійкості досліджуваної системи з використанням її фазових портретів.

Удосконалено теоретичні підходи для оцінки точності розв'язання завдання моделювання процесів роботи віброударного агрегату з ланцюгово-розгалуженим способом з'єднання твердих тіл і перевірки адекватності моделей на основі аналізу точності використаних чисельних методів і методів імітаційного моделювання, які проводилися для віброґратки типу 31327.

Математична модель віброагрегату, що побудована, та отримані чисельні розрахунки мають практичне застосування, а саме – можуть використовуватись для знаходження оптимальних параметрів роботи віброударних агрегатів, що використовуються в ливарному виробництві, а також для обчислення важливих механічних параметрів (власних частот, амплітуд коливань та амплітуд віброприскорень, побудови фазових портретів та іншого) для великого спектру віброколивальних і віброударних механічних систем, що використовуються у машинобудуванні та промисловості.

АНОТАЦІЯ

Розв'язано науково-технічне завдання побудови математичної моделі динамічного режиму роботи віброагрегату з ланцюгово-розгалуженим способом з'єднання твердих тіл за допомогою пружних в'язів шляхом складання системи диференціальних рівнянь і чисельного розв'язування простіших систем з аналізом отриманих результатів. Під час побудови математичної моделі віброударного агрегату використовуються енергетичні принципи – використання системи рівнянь Лагранжа II роду, за допомогою якої виведено основні математичні співвідношення під час побудови математичної моделі; методи матричного числення; методи обчислювальної математики для чисельного розв'язування системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь II порядку та отримання значень параметрів складної віброударної системи під час динамічного режиму роботи. Використовувалися методи комп'ютерного моделювання для побудови фазових портретів під час коливань твердих тіл системи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Блехман И.И. Что может вибрация? Москва: «Наука», 1988. 208 с.
2. Пічугін С.Ф. Дослідження режимів ущільнення легкобетонних сумішей на ударно-вібраційній установці методом математичного планування експерименту. *Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво)*. Вип. 1 (36). Т. 1. Полтава: ПолтНТУ, 2013. С. 183–190.
3. Ісакович-Лотоцький Р.Д. Основи теорії розрахунку та розробка процесів і обладнання для віброударного пресування: монографія. Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2006. 338с.
4. Герєга І.І., Нісонський В.П. Математична модель ланцюгово-розгалуженої віброударної коливальної системи. *Доповіді НАН України*. 1994. № 5. С. 58–63.
5. Ісакович-Лотоцький Р.Д., Обертюх Р.Р., Севастьянов І.В. Процеси та машини вібраційних та віброударних технологій: монографія. Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2006. 291 с.
6. Нісонський В.П. Математичне моделювання віброагрегатів для ливарного виробництва. *Методи та прилади контролю якості*. 2016. № 1 (36). С. 100–107.
7. Лурье А.И. Аналитическая механика. Москва: «Физматгиз», 1961. 824 с.
8. Нісонський В.П., Герєга І.І., Козулькевич М.Р., Гуцуляк Ю.В. Математическая модель многосекционных выбивных агрегатов с учётом рассеяния энергии. *Проблемы прочности*. 1994. № 10. С. 30–36.
9. Бахвалов Н.С. Численные методы. Москва: «Наука», 1975. 632 с.

10. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. Москва: «Наука», 1964. 254 с.

11. Нісонський В.П., Незамай Б.С., Дідух Ю.В. Оцінка точності чисельних розрахунків параметрів динамічного режиму роботи віброгратки. *Інформаційні технології в освіті, техніці та промисловості*: матер. III Всеукр. наук.-практ. конф. молодих учених і студентів (Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 10–13 жовтня 2017 р.). Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2017. С. 86–87.

Information about authors:

Nisonyski V. P.,
Candidate of Technical Sciences,
Assistant of Professor of Applied Mathematical Department
Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas
15, Karpatska str., Ivano-Frankivsk, 76019, Ukraine

Nezamai B. S.,
Candidate of Technical Sciences,
Assistant of Professor of Applied Mathematical Department
Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas
15, Karpatska str., Ivano-Frankivsk, 76019, Ukraine