

**ІВАНО-ФРАНКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
НАФТИ І ГАЗУ**

*На правах рукопису*

**КАБАНОВА ОЛЕНА ВОЛОДИМИРІВНА**

*620.48.01.001*  
УДК 517: 533 : 537 : 620 : 621  
*К12*

**МЕТОД РЕКОНСТРУКЦІЇ ЗОБРАЖЕНЬ ВНУТРІШНЬОЇ  
СТРУКТУРИ ОБ'ЄКТІВ КОНТРОЛЮ З ВИКОРИСТАННЯМ  
АЛГОРИТМУ ЗВОРОТНОГО ПРОЕКТУВАННЯ**

**Спеціальність 05.11.13 – Прилади і методи контролю та визначення складу  
речовин**

Дисертація на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук

Науковий керівник:  
Кандидат технічних наук, професор  
**Чеховський Степан Андрійович**



Івано – Франківськ – 2004

*250*

## ЗМІСТ

Перелік умовних скорочень	4
Вступ.	6
1. Сучасний стан розвитку рентгенівської тривимірної томографії для контролю внутрішнього складу технічних об'єктів.	11
1.1. Аналіз об'єктів контролю методом рентгенівської томографії.	13
1.2. Принципи і методи тривимірної реконструкції зображень об'єктів.	16
1.3. Аналіз методів реконструкції тривимірних зображень:	20
1.3.1. Схеми отримання проєкційних даних для тривимірної реконструкції.	21
1.3.2. Методи тривимірної реконструкції для площинного та циліндричного детекторів.	24
1.4. Постановка задачі.	37
2. Теоретичні дослідження та реалізація швидкого методу реконструкції тривимірних зображень в рентгенівській томографії.	39
2.1. Розробка алгоритму швидкого зворотного проєктування для реконструкції двовимірних зображень.	39
2.2. Розробка і технічна реалізація швидкої реконструкції тривимірних зображень з використанням алгоритму зворотного проєктування:	58
2.2.1. Отримання аналітичних залежностей методу швидкої реконструкції.	58
2.2.2. Дослідження комплексності швидкого алгоритму.	64
2.2.3. Визначення об'єму пам'яті для реалізації методу швидкої тривимірної реконструкції.	69
2.3. Технічна реалізація методу швидкого зворотного проєктування	72
Висновки до другого розділу.	78

3. Моделювання проекційних значень рентгенівського випромінювання для експериментальної тривимірної томографії.	79
3.1. Принципи отримання проекційних даних для тривимірної реконструкції:	81
3.1.1. Моделювання реальних рентгенівських проекцій об'єкта у випадку монохроматичного і поліхроматичного випромінювання	85
3.1.2. Моделювання реальних проекційних даних з врахуванням ефекту розсіювання	89
3.2. Моделювання томографічної системи:	94
3.2.1. Моделювання детектора випромінювання	103
3.2.2. Моделювання джерела випромінювання.	104
3.2.3. Моделювання фантому .	105
3.2.4. Моделювання траєкторії руху скануючої системи	106
3.3. Параметри змодельованої томографічної системи.	108
3.4. Вибір об'єкта моделювання.	109
Висновки до третього розділу.	114
4. Швидкий алгоритм тривимірної реконструкції і його метрологічний аналіз.	116
4.1. Основні критерії порівняння алгоритмів реконструкції.	116
4.2. Дослідження якості методу швидкої реконструкції зображення.	118
4.3. Експериментальне дослідження методу реконструкції тривимірного об'єкту:	128
4.3.1. Дослідження внутрішньої структури біологічних об'єктів.	132
4.3.2. Дослідження технічних об'єктів.	136
Висновки до четвертого розділу.	137
Висновки	139
Список використаних джерел	141
Додатки	153

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

### Символів

проекційний кут при віяловій схемі сканування

віяловий кут

проекційний кут при паралельній схемі сканування

координата по горизонталі площинного детектора

координата по вертикалі площинного детектора

дискретне значення проекційного кута при віяловій схемі сканування

дискретне значення координати детектора при паралельній схемі сканування

дискретне значення координати по вертикалі циліндричного детектора

дискретне значення проекційного кута при паралельній схемі сканування

дискретне значення віялового кута

значення координати по вертикалі циліндричного детектора

координата вздовж променя

відстань від джерела випромінювання до пікселя

проекція відстані від джерела випромінювання до променя

радіус траєкторії джерела випромінювання

### Функцій

$\lambda(\beta, \gamma)$  проекційні значення при еківангулярній віяловій схемі сканування

$\gamma^F(\beta, a)$  проекційні значення при еквідистантній віяловій схемі сканування

$\gamma^P(\theta, t)$  проекційні значення при паралельній схемі сканування

$\lambda(\beta, \gamma, q)$  проекційні значення від циліндричного детектора при конусній схемі сканування

$\gamma^F(\beta, a, b)$  проекційні значення від площинного детектора при конусній схемі сканування

$[n_1, k_1; n_2, k_2]$  значення зв'язку для нефільтрованих проекційних значень

$\tilde{I}[n_1, k_1; n_2, k_2]$  значення зв'язку для фільтрованих проекційних значень

## ВСТУП

Неухильне зростання кількості та якості різноманітних виробів із різних матеріалів, виробництво яких базується на високих технологіях, визначає і принципово нові підходи до ролі методів і технологічних засобів їх контролю.

Ці методи традиційно базуються на прямих вимірюваннях і, здебільшого, дозволяють здійснити оцінку виробу за показниками, які піддаються такому контролю, що суттєво обмежує їх можливості. Сказане і визначає підвищені вимоги до використання універсальних засобів неруйнуючого контролю, здатних реєструвати не тільки кількісну і якісну зміну характеристик виробничого обладнання, але й вимірювати параметри продукції. Такий підхід дає змогу робити висновки щодо організації ефективної роботи виробництва, своєчасного виявлення і ліквідації відхилень від заданого режиму експлуатації та попередження аварійних ситуацій. Однак це є можливим тільки при наявності достатнього інформаційного забезпечення, яке можна отримати, зокрема, при використанні рентгенівської томографії.

**Актуальність теми.** На сьогоднішній день комп'ютерна томографія (КТ) є найбільш значним досягненням інформаційних технологій у вивченні внутрішньої структури досліджуваних об'єктів, яка базується на теорії розпізнавання образів. Застосування комп'ютерної томографії суттєво підвищує чутливість контролю до локальних порушень суцільності, включень, наявності відхилення густини матеріалу і малих відхилень геометричних розмірів [1-4]. В даний час існують різні види томографії, які істотно відрізняються між собою як використовуваними фізичними принципами і явищами, так і типами математичних рівнянь, що розв'язуються при створенні методів і алгоритмів реконструкції. В задачах інтегральної геометрії, що виникають при розробці методів тривимірної рентгенівської комп'ютерної томографії, тривимірний об'єкт представляють у вигляді набору тонких зрізів, і припускають, що густина в зрізі є функцією двох змінних. Відновлення такої функції здійснюється за інтегральними значеннями густини вздовж прямих, що

лежать у площині зрізу [5-7]. Використання даного підходу в задачах тривимірної реконструкції дає недостатньо високу роздільну здатність відновленого зображення внаслідок неможливості обробки великих масивів проекційних даних, і спотворення зображень через їх неповноту [8-10]. Крім того, відомі методи тривимірної томографії вимагають досить істотних витрат процесорного часу й об'єму оперативної пам'яті [11-13].

Очевидно, що такий підхід при контролі рухомих, чи змінних у часі об'єктів, стає неефективним, оскільки швидкість зняття інформації є набагато нижчою за зміну стану самого об'єкту. В цьому випадку необхідно розв'язати саме тривимірну задачу реконструкції, що досягається розробкою нових більш швидкісних алгоритмів реконструкції зображень, а не технічним вдосконаленням томографа.

Позбутися вказаних недоліків можна за допомогою використання схеми, в якій відновлюється функція трьох змінних за інтегральним значенням густини вздовж просторового сімейства прямих випромінювання. Відповідний до цього новий метод реконструкції дозволяє одержати розв'язок за рахунок спрощення математичних процедур, що зводяться до сумування проекційних зображень, і дає можливість швидкого незалежного синтезу безлічі томограм за обмеженим набором проекцій з мінімальною втратою інформації.

Отже, задача створення методу реконструкції тривимірного об'єкта, який би забезпечив високу роздільну здатність реконструйованого зображення і високу швидкодію, є актуальною, а її вирішення – доцільною і своєчасною.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Тематика дисертаційної роботи є частиною планової науково-дослідної програми з розвитку нафтопромислового комплексу України і базується на результатах держбюджетної науково-дослідної роботи ІФНТУНГ "Метрологія і вимірювальна техніка в нафтогазовій галузі та приладобудуванні" (номер державної реєстрації 0101U001664), де автор був виконавцем розділу, присвяченому аналізу і синтезу томографічних систем контролю.

**Мета і задачі досліджень.** Метою роботи є удосконалення методів і засобів математичного та комп'ютерного моделювання та обчислювальних методів при

реконструкції зображення, які б дозволили зменшити час відновлення зображення об'єкту у тривимірному просторі зі збереженням якості реконструйованого зображення. Для реалізації даної мети в дисертації необхідно вирішити наступні завдання:

- 1) Проаналізувати рівняння взаємодії моно- і поліхроматичного рентгенівського променя з речовиною об'єкта з врахуванням можливих спотворень отримуваних проекційних даних;
- 2) Дослідити залежність значення функції тривимірного зображення від проекційних даних;
- 3) Реалізувати метод тривимірної реконструкції зображення та дослідити його комплексність;
- 4) Побудувати математичну модель томографічного сканування, яка пов'язує інтенсивність рентгенівського випромінювання з проекційними значеннями.
- 5) Розробити програмну і технічну реалізацію методу та провести експериментальні дослідження процесу реконструкції зображення.

*Об'єкт дослідження* - внутрішня структура та склад виробів, металевих і неметалевих конструкцій, габарити яких не перевищують допустимі межі технічних томографів, у тому числі дефекти цієї структури, та зображення, отримане в результаті просвічування рентгенівським променем (рентгенівський образ об'єкта).

*Предмет дослідження* - методи реконструкції зображення в рентгенівській томографії для визначення просторової структури та складу об'єктів.

*Методи дослідження* базуються на теорії обробки сигналів, інтегральної та аналітичної геометрії. При розв'язанні поставлених задач використовувались методи статистичного аналізу, математичного моделювання, теорії похибок, розв'язку некоректно поставлених задач.

### **Наукова новизна отриманих результатів:**

1. Вперше одержано і реалізовано метод швидкої реконструкції внутрішньої структури тривимірного об'єкта, що дає можливість з високою вірогідністю оцінити його склад.



2. В роботі дістав подальший розвиток напрямок математичного моделювання зображення об'єкта у тривимірному векторному просторі, що дозволило отримати тривимірний радонівський образ зображення, який було використано для оцінки якості методів реконструкції.

3. На основі методу швидкої реконструкції вдосконалено практичний FDK – метод, що дозволило зменшити час реконструкції тривимірного зображення з проєкційних даних від конусної схеми сканування.

4. Вперше запропоновано математичну модель процесу отримання тривимірних проєкційних даних в результаті томографічного експерименту, яка адекватна реальним характеристикам та параметрам зображення .

### **Практичне значення одержаних результатів.**

Одержані теоретичні результати розширюють область застосування методів математичного моделювання на задачі створення апаратури для швидкої технічної діагностики.

1. На базі запропонованого методу швидкої реконструкції побудовано алгоритм реконструкції, що дозволяє отримувати якісні реконструйовані зображення за умов зменшення часу реконструкції, що в свою чергу розширює область застосування КТ для експрес-контролю або контролю рухомих або змінних у часі об'єктів.

2. Вперше розроблена і програмно реалізована математична модель процесу отримання тривимірних проєкційних даних, яка дозволяє вибирати довільні схеми сканування (позицію джерела, позицію детектора, їх орієнтацію, розмір тощо), задавати різні траєкторії руху джерела і детектора довкола об'єкта, високу точність проєкцій, здійснювати моделювання як ідеальних, так і спотворених (реальних) проєкційних даних, здійснювати створення моделей реальних об'єктів з можливістю їх подальшого дослідження.

3. Одержані практичні результати впроваджено в Інституті фізики напівпровідників НАН України, Івано-Франківській медичній академії та Івано-Франківському Національному університеті нафти і газу. Результати теоретичних та експериментальних досліджень впроваджено в навчальний процес підготовки

фахівців за спеціальностями "Прилади та системи неруйнівного контролю" та "Метрологія і вимірювальна техніка".

**Особистий внесок здобувача.** Основні положення, закономірності та результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. Вони опубліковані у 9 роботах (з них 3 без співавторів). У наукових статтях, опублікованих у співавторстві, участь здобувача є визначальною і полягає у теоретичній розробці алгоритму швидкої реконструкції, плануванні експерименту, аналізі та оформлення. Всі експериментальні дані, що включено в дисертаційну роботу, одержані безпосередньо автором. Аналіз літературних джерел, розробка способу одержання проєкційних даних для томографічного експерименту, програмна реалізація алгоритму, формулювання основних висновків дисертаційної роботи в цілому проведені дисертантом самостійно.

**Апробація роботи.** Матеріали дисертації доповідалися на VIII науково-технічній конференції "Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах" (м. Хмельницький, 31 травня - 3 червня 2001 р.); на науково-технічній конференції "Приладобудування 2002: підсумки і перспективи" (м. Київ, 16-17 квітня 2002 р.); на третій Всеукраїнській конференції молодих науковців "Інформаційні технології в науці, освіті і техніці" (м. Черкаси, 17-19 квітня 2002 р.); на другій науково-технічній конференції "Приладобудування 2003: стан і перспективи" (22-23 квітня 2003р.); на III міжнародній конференції "Інформаційні технології в охороні здоров'я та практичній медицині" (М. Київ, 21-23 травня 2003 р.).

**Публікації.** За темою дисертації опубліковано 9 робіт, з них 4 - у фахових виданнях, 2 - у збірниках наукових праць, 3 - у збірниках тез доповідей конференцій.

**Структура і обсяг роботи.** Дисертаційна робота складається з переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, 10 додатків. Матеріал викладено на 167 сторінках, з них перелік умовних позначень займає 2 сторінки, список використаних джерел 119 найменувань - 12 стор., додатки - 15 стор. Робота ілюстрована 54 рисунками та містить 5 таблиць.

## РОЗДІЛ 1

# СУЧАСНИЙ СТАН РОЗВИТКУ РЕНТГЕНІВСЬКОЇ ТРИВИМІРНОЇ ТОМОГРАФІЇ ДЛЯ КОНТРОЛЮ ВНУТРІШНЬОГО СКЛАДУ ТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Неруйнівний контроль забезпечує перевірку якості, надійності і безпеки об'єктів без їх руйнування, тобто після нього продукція може використовуватися за призначенням і, у багатьох випадках, без зупинки роботи об'єкта. При проведенні контролю стану складних біологічних і технічних систем і агрегатів однією з актуальних є задача об'єктивного своєчасного виявлення дефектів різної природи й організація контролю за розвитком дефектів.

Дефекти типу порушень суцільності є наслідком недосконалості структури об'єкта і виникають на різних стадіях технологічного процесу, або в процесі експлуатації. До дефектів структури відносяться розшарування, порожнечі, чужорідні включення, просторова неоднорідність, тріщини і дислокації - особливі зони перекручувань атомних ґраток. Тріщини утворюються в процесі обробки і експлуатації об'єкту і значно знижують його міцність, особливо при роботі в умовах складного напруженого стану, або впливу поверхнево-активних середовищ.

Для зазначених дефектів характерна одна загальна ознака: вони викликають зміну фізичних характеристик матеріалу, таких, як питома електрична провідність, магнітна проникність, коефіцієнт затухання пружних коливань, густина, коефіцієнт послаблення випромінювання і т.д.

За цими характеристиками дефекти в структурі об'єктів контролю, як технічних так і медичних, є аналогічними. Наприклад, процеси розвитку тріщини в механічній деталі і пухлини в біологічній тканині є подібними, оскільки обидва супроводжуються зміною фізичних характеристик середовища (густина, температура, механічна міцність). Але необхідно зауважити, що дефекти механічних деталей досить легко виявити внаслідок значних різниць величин

вказаних фізичних характеристик, у порівнянні з дефектами біологічних тканин, де ці різниці є досить малими і їх досить важко виявити [14].

Проблема реконструкції внутрішньої структури неоднорідних об'єктів складної форми є головною як в технічній, так і в медичній діагностиці. На сьогоднішній день розвинуто кілька технологій для дослідження певних характеристик матеріалів, з яких складається об'єкт.

Одна з таких технологій - це *комп'ютерна томографія* (КТ). Цим терміном в даний час об'єднується цілий ряд зворотних задач в області теорії обробки зображень, загальною ознакою котрих є те, що параметри деякого поля (двовимірного чи тривимірного), що нас цікавлять, можна визначити (чи оцінити) лише шляхом "просвічування" цього поля.

Слід зауважити, що проблема дослідження внутрішньої структури або складу широкого класу об'єктів чи процесів завжди розглядалась як одна із основних в різних галузях науки, техніки і медицини. Традиційно вона вирішувалась методами інтроскопії при діагностиці виробів і спектроскопії при дослідженні складу об'єктів. Як правило, отримувані результати носили або якісний характер (виявлення та локалізація дефектів), або дозволяли визначити значення фізичної величини (характеристики) в досить малому об'ємі.

За процедурою досліджень реконструктивна томографія представляє собою двоетапний метод. На першому етапі (збір даних) об'єкт зондується проникаючим випромінюванням з різних напрямків і реєструють поле на виході багатоеlementної системи детекторів, тобто формується так званий набір проекцій. На другому етапі сукупність отриманих проекційних даних обробляється на комп'ютері або спеціальним процесором згідно заданого алгоритму відновлення зображень. Таким чином, з метрологічної точки зору томографічні вимірювання є опосередкованими (непрямими), тобто вимірювана характеристика чи параметр реєстрованого поля зв'язана з досліджуваною деяким функціональним співвідношенням. Крім того, обробка ускладнюється ще із тієї причини, що ми на виході системи детекторів отримуємо оцінки проекцій, тобто задача відновлення томограми зводиться до задачі розв'язку зворотної задачі по неточним даним.

Опромінюючи об'єкт рентгенівськими променями отримують трансмісійне зображення або рентгенівські проекції, тобто вимірюють послаблення рентгенівського випромінювання при проходженні крізь об'єкт вздовж деяких ліній. За допомогою таких проекцій отримують інформацію про внутрішню структуру об'єкта. Однієї проекції може вистачити, якщо ми маємо апіорні дані про об'єкт. Але на практиці дана інформація є відсутньою. Отже необхідно мати кілька проекцій під різними кутами (вздовж різних напрямків) для відновлення внутрішньої структури об'єкту. При цьому технічні об'єкти не мають обмежень щодо величини дози опромінення і її потужності на відміну від біологічних об'єктів. Але контроль рухомих або змінних в часі об'єктів вимагає від методів відновлення зображення структури максимальної швидкості і високої точності.

Отже, нові методи визначення складу об'єктів мають характеризуватися максимальною швидкістю і високою точністю.

### 1.1. Аналіз об'єктів контролю

Для одержання високоякісної інформації про причини відмовлень вузлів та систем, зокрема нафтогалузевої техніки звичайно застосовуються томографи, що дозволяють здійснювати контроль агрегатів у широкому діапазоні поперечних розмірів - від 5 до 1500 мм і з товщиною по сталі до 80 - 100 мм. Методом КТ можна контролювати відповідальні вироби складної форми, що виготовлені з матеріалів високої щільності і мають внутрішні порожнини.

Розглянемо деякі найбільш розповсюджені дефекти виробів та конструкцій, зокрема в нафтогазовій промисловості. Деталі нафтопромислового обладнання у порівнянні з деталями бурового обладнання мають менші розміри і більш складну конфігурацію. Крім того доступ до деяких елементів нафтопромислового обладнання обмежений.

Одними з найбільш розповсюджених дефектів в нафтогазовій області є так звані мікротріщини, які утворюються при крихкому руйнуванні під дією структурних напруг. При структурних змінах змінюються густини елементів структур, що приводить до зміни об'єму цих елементів. Оскільки розмір таких тріщин дуже малий, виявити їх традиційними методами неруйнуючого контролю

дуже важко. Серйозним питанням у нафтогазовій промисловості є дефекти типу розрихлення, які також важко ідентифікувати класичними методами.

Метод РКТ є найбільш ефективним при виявленні технологічних дефектів у виді раковин, пор, повітряних пухирців, сторонніх включень, довільно орієнтованих тріщин, розшарувань, для яких використання традиційних методів контролю не є оптимальними.

При контролі тонких шарів, розшарувань, тріщин паралельних площині контролю запас чутливості КТ до малих змін ефективного коефіцієнта послаблення настільки значний, що в багатьох випадках збільшення товщини контрольованого перерізу підвищує надійність і вірогідність контролю тонких шарів. Збільшення товщини контрольованого перерізу сприяє правильній оцінці властивостей неплоских шарів, підвищує продуктивність контролю, полегшує сполучення області контрольованого перерізу з досліджуваним шаром.

При контролі у нафтодобувній галузі інструментів, що використовується для підйомних операцій (елеватори, штропи, машинні ключі) найбільш типовими є дефекти типу розшарувань, мікротріщини, втомлювальні тріщини, флокени, інерідні включення, пористість. Особливістю контролю такого обладнання традиційними методами є те, що використовуються декілька методів і приладів контролю (наприклад ультразвуковий і магнітопорошковий).

Отже, об'єктом контролю є внутрішня структура виробів складної форми, дефекти цієї структури типу неоднорідності структури, тріщини, мікротріщини, інерідні включення, та отримане в результаті просвічування рентгенівським променем зображення, яке за фізичною суттю є результатом взаємодії об'єкту контролю з випромінюванням. Розмір об'єктів контролю обмежується допустимими габаритами технічних томографів [15].

Аналіз ОК методом КТ ґрунтується на основі обробки його зображення. Будь-яке зображення можна визначити як функцію двох (переріз або плоский ОК) або трьох (об'єм ОК) змінних, значення якої за її межами визначення рівні нулю, і відповідно зображення – це квадрат, центр якого знаходиться на початку довільно вибраної системи координат. У відповідності до цього використовуємо позначення

$(x, y)$ , яке визначає функцію  $f$  двох змінних  $x$  та  $y$ , або  $f(x, y, z)$  - як функція трьох просторових змінних  $x, y, z$  і, тим самим, математично цілісно визначає зображення, яке характеризує собою об'єкт дослідження.

Можливою фізичною інтерпретацією функції зображення  $f$ , на якій ґрунтується рентгенівська реконструктивна томографія, є те, що за умови рівності поля зображення і поля реконструкції, значення функції  $f(x, y)$  однозначно визначає значення лінійного коефіцієнта послаблення випромінювання в точці  $(x, y)$ , а отже і значення густини об'єкта.

Задача полягає в тому, щоб на основі відомого зображення об'єкта (за променевими сумами  $m$ , отриманими після просвічування об'єкта) отримати його фізичні характеристики.

Зображення і об'єкт пов'язані. Зображення об'єкту можна визначити за допомогою прямого перетворення Радону. Перетворення Радону відтворює функцію  $f(x, y)$ , що визначена у  $\mathbb{R}^n$  у множину її інтегралів по гіперплощинам

$$Rf(\theta, t) = \int_{x \cdot \theta = t} f(x) dx = \int_{\theta^\perp} f(t\theta + y) dy$$

Дане рівняння є першою математичною моделлю отримання зображення об'єкта (його проєкцій). Але воно справедливе для неперервних функцій, що унеможлиблює його застосування на практиці.

Для отримання двовимірних проєкцій існує програмний пакет SNARK [15-17], для тривимірних проєкцій - програмний пакет Доннера [18]. Дані моделі та їх програмні реалізації обмежені внаслідок їх прив'язки до певних схем сканування та траєкторій джерела.

В загальному вигляді задача отримання об'єкта з його відомого зображення була розв'язана Родоном у 1917 р. (зворотне перетворення Радону) [19]

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{q} \int_0^{2\pi} m_1(x \cos \theta + y \sin \theta + q, \theta) d\theta dq,$$

де  $l$  - відстань прямої  $L$ , вздовж якої відбувалося просвічування об'єкту, від початку координат,

$\theta$  - кут, який складає з віссю  $X$  перпендикуляр, опущений з початку координат на пряму  $L$ ,

$m(l, \theta)$  - променева сума, отримана детектором після просвічування об'єкта під кутом  $\theta$  ;

а  $m_1(l, \theta)$  означає часткову похідну від  $m(l, \theta)$  по  $l$ .

Математична суть цієї формули така: розподіл відносного лінійного послаблення в нескінченно тонкому шарі однозначно визначається множиною всіх лінійних інтегралів вздовж траєкторії випромінювання. Але Радон вивів математичну формулу – І математичну модель отримання фізичного об'єкта з його зображення, а потреба існує в ефективному алгоритмі розрахунку.

## 1.2. Принципи і методи тривимірної реконструкції зображень об'єктів

Вибір методу неруйнуючого контролю (НК) для розв'язку задач дефектоскопії, товщинометрії, структуроскопії і технічної діагностики залежить від параметрів контрольованого об'єкта й умов його обстеження. Жоден з методів НК не є універсальним, оскільки не забезпечує повної інформації про об'єкт контролю, і, отже, не може задовольнити в повному обсязі вимоги практики. Як базовий засіб вимірювання при контролі об'єктів необхідно використовувати апаратно-програмні комплекси збору й обробки вимірювальної інформації на базі персональних комп'ютерів, що дають високу точність і оперативність обробки результатів вимірювань, надають широкі можливості при аналізі і збереженні результатів, багатofункціональність, високу мобільність, відносно низьку вартість.

При контролі деяких виробів методом РКТ важливу роль відіграє можливість отримання кількісної інформації про контрольовану структуру, що створює основу для автоматизованої розшифровки результатів контролю і підвищення ефективності їх подальшого використання.

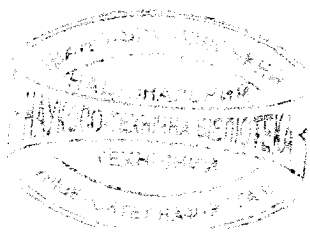


Адекватною характеристикою оцінки внутрішньої структури (чи стану) матеріалу виступають фізичні параметри власне матеріалу. Очевидно, що однорідність структури характеризується однорідністю просторового розподілу фізичних параметрів, ізотропністю фізичних чи механічних властивостей матеріалу. Локальні порушення (зміни) структури на рівні дуже слабкоконтрастних неоднорідностей можуть виступати як зародки майбутніх дефектів чи власне слабкоконтрастні дефекти структури матеріалу (наприклад, нерозкрита тріщина, дислокація і т.п., що можуть в майбутньому привести до , вагомого з точки зору якості матеріалу, дефекту структури). Такі неоднорідності можуть виступати як концентратори напружень і мають тенденцію до розвитку у відповідні відчутні дефекти під дією експлуатаційних навантажень.

Слід розрізнити дві задачі:

1. Дослідження внутрішньої структури матеріалу з метою оцінки стану матеріалу (задача технічної діагностики стану матеріалу по об'єму, технологічного контролю якості виготовлення традиційних марок сталей (після виплавки, прокату, технологічної обробки і т.п.) або при металознавчих дослідженнях, для прикладу при дослідженні нових матеріалів чи щось подібне. Тут використовується тінювий метод просвічування, і відповідні цьому методу схеми розміщення парн випромінювач-приймач.
2. Виявлення слабкоконтрастних дефектів (задача дефектоскопії)

Згідно схеми сканування на тіло об'єкта діє випромінювання, яке взаємодіє з речовиною (матеріалом), що складає об'єкт, і за допомогою лінійки детекторів проводиться реєстрація цього випромінювання на виході із об'єкта. При цьому приймаються два базових припущення: по-перше, поширення опромінюючих променів в середовищі досліджуваного об'єкта описується променевим рівнянням по заданій траєкторії (в більшості випадків вона приймається прямолінійною), і, по-друге,- взаємодія випромінювання із середовищем поширення є лінійною. При виконанні цих умов вздовж кожного променя в процесі поширення відбувається накопичення ефекту взаємодії. Таким чином, величина випромінювання на виході із



250

об'єкта представляє собою інтеграл вздовж траєкторії променя від шуканого розподілу фізичної величини в перерізі об'єкта.

У комп'ютерній томографії процедура відновлення зображення обов'язково повинна відповідати схемі сканування об'єкта [5-7]. Відновити саме тривимірне зображення об'єкта можливо при використанні проєкційних даних, отриманих тільки від конусної або спіральної схеми сканування [20-22]. Конусна схема сканування є найпоширенішою в сучасних томографах і є аналогом віялової схеми сканування, яка використовується для реконструкції двовимірних об'єктів [23-25]. У згаданих схемах сканування джерело рентгенівського випромінювання рухається неперервно з швидкістю обертання (циклічного зміщення) до двох і більше обертів за секунду. Об'єкт контролю фіксується нерухомо, щоб запобігти отриманню однакових повторних перерізів. Відносно об'єкта джерело випромінювання переміщується по колу (спіралі) з достатньо малим кроком (рис. 1.1).

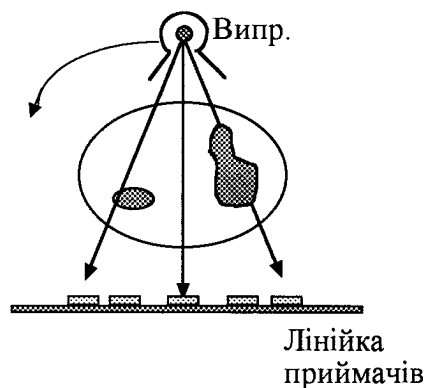


Рис. 1.1. Схема сканування

На початку виникнення методів спіральної і конусної томографії у перших КТ-системах детектор складався з одного ряду елементів (рис 1.1), розміщених по коловій дузі, з центром напроти джерела. Отримані таким чином проєкційні дані реконструювалися за допомогою певних алгоритмів. В результаті отримувалася тривимірна функція зображення об'єкта, значення якої в будь-якій точці відповідало коефіцієнту послаблення випромінювання, тобто густині матеріалу об'єкта.

Не зважаючи на те, що дані методи сканування дозволяли значно збільшити швидкодію, очевидним стало, що наступні покоління КТ-машин повинні містити багаторядкові детектори, для того, щоб не втрачалася інформація, яку дає конусний

промінь джерела. У 1998 році на ринку з'явилися нові КТ-машини здатні фіксувати і обробляти дані з чотирьох рядків детектора одночасно, які мають суттєво більшу швидкодію [26-31]. Перші алгоритми реконструкції для проєкційних даних від багаторядкових детекторів базувалися на алгоритмах для одного рядка детекторів.

На рис. 1.2 показана детекторна система для томографа з багаторядковим детектором. Промінь реєструється вісьмома рядками детектора різної ширини.

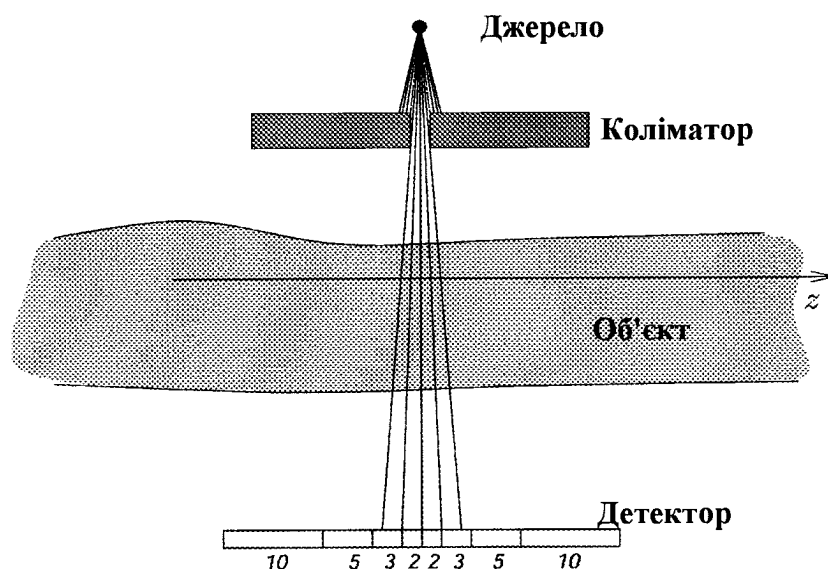


Рис. 1.2. Комп'ютерна система з багаторядковим детектором

Шляхом зміни швидкості обертання, колімації конусного променя і підбором рентгенівської трубки багаторядкові системи забезпечують оптимальне співвідношення між такими параметрами як доза опромінювання, швидкодія, відношення “сигнал/шум” і роздільна здатність. Значні швидкості обертання не тільки дозволяють підвищувати продуктивність контролю, але також відкривають можливість для застосування томографії рухомих об'єктів [32], [33]. Перший приклад використання томографії для рухомих об'єктів із застосуванням багаторядкового детектора подано в [26].

Отже, тривимірна реконструкція дозволяє детально контролювати геометричну структуру і характер об'ємного розподілу густини структурних елементів, тобто визначати склад об'єкту без руйнування самого виробу. Але в деяких випадках, коли важлива швидкість контролю, або контролюється рухомий чи

змінний в часі об'єкт, використання навіть сучасних алгоритмів реконструкції зображень на основі даних від багаторядкових детекторів не є оптимальним. Вони фактично залишаються адаптацією й апроксимацією алгоритмів для реконструкції двовимірного зображення, не дають досить якісного зображення навіть при розширенні вибірки даних [36] і потребують подальшої розробки. Будь-яке подальше збільшення кроку і конусного кута пучка випромінювання не приведе до оптимізації алгоритмів і, відповідно, зображення [37, 38]. Отже, рівень технічного досягнення у комп'ютерній томографії значно випередив методологічний, що вимагає впровадження нових, саме тривимірних методів реконструкції для конусного променя. Такі методи реконструкції [39-42] у своїй більшості використовують тривимірне зворотне проектування, яке є основною і найбільш громіздкою у об'ємі і тривалості обчислень частиною.

Кількість математичних операцій, необхідних для відновлення однієї точки зображення, називається комплексністю методу (алгоритму). Зменшивши комплексність зворотного проектування можна прискорити і зменшити кількість обчислень багатьох існуючих методів тривимірної реконструкції, або за той самий час відновлення отримати зображення з вищою якістю. Дане досягнення дає можливість контролювати, досліджувати склад рухомих або змінних в часі тривимірних об'єктів, прискорювати процес неруйнівного контролю, зменшувати дози опромінення при просвічуванні об'єктів дослідження.

### 1.3. Аналіз методів реконструкції тривимірних зображень

Тривимірні методи (алгоритми) реконструкції поділяються на точні і неточні. Точний алгоритм здатний реконструювати об'єкт без спотворень при незашумлених проекційних даних, зафіксованих з достатньою малим кутом повороту скануючої системи. Неточність алгоритму може залежати від декількох факторів. Найпоширеніший серед них – неповні дані. Точна реконструкція зображення є неможливою, якщо відсутні проекційні дані при деякому куті повороту. Однак неточність в реконструйованому зображенні може також виникати через штучне

спрощення алгоритму реконструкції. В деякому випадку, збільшенню швидкодії і зменшенню комплексності алгоритму при оптимізації методу реконструкції може надаватися перевага над точністю реконструкції. Точний алгоритм реконструкції був запропонований у 1987 Грангейтом [43]. Математично цей алгоритм є узагальненням двовимірного згорткового алгоритму, в якому виконується зворотне тривимірне проектування.

Реконструкція зображення, з математичної точки зору, відноситься до класу некоректно поставлених задач. Задачі даного класу характеризуються тим, що доволіно мала зміна вихідних даних приводить до доволіно великої зміни розв'язків [44]. Якщо, як у методі реконструктивної томографії, вихідні дані відомі наближено, нестійкість розв'язку приводить до існування декількох розв'язків у межах заданої точності. Реконструкція зображення – це некоректна задача з неповними даними. В результаті відновлене зображення містить артефакти різних типів. При відновленні функції зображення за неповними даними артефакти в основному виникають поблизу тих прямих (площин), до є дотичними до кривих (площин) розриву функції, для яких невідомі радонівські значення.

1.3.1. Схема отримання проєкційних даних для тривимірної реконструкції. Для більш ефективного отримання даних у тривимірній комп'ютерній томографії використовується двовимірний детектор. Скануючі промені формують пучок у вигляді конуса з центром основи на детекторі і вершиною на джерелі. Джерело рентгенівського випромінювання на практиці випромінює саме конусний пучок променів, так що використання конусного пучка не тільки збільшує швидкість сканування, але й дозволяє ефективніше використовувати промені, які у віяловій і паралельній схемах сканування вилучаються коліматором.

Розглянемо конусну схему сканування (рис. 1.2) [36]. Джерело обертається на кут  $\nu$  в  $xu$ -площині по колу радіусом  $R$ . Промені, що реєструються одним рядком детектора, формують віяло променя. Будь-який промінь віяла характеризується кутом між ним і центральним променем віяла, так званим віяловим кутом  $\gamma$ , та кутом між ним і середньою площиною, так званим конусним кутом  $k$ . Координата рядка  $q$

детектора визнається як  $q = R \cdot \operatorname{tg} k$ . Висота детектора обмежена по величині  $\pm q_{\max}$  і значенням віялового кута  $\pm \gamma_{\max}$ .

Проекційні дані у тривимірній томографії можуть реєструватися площинним або циліндричним детектором. Фактично, величина радіусу циліндричного детектора не є суттєвою, тому прирівнюємо її до радіусу траєкторії джерела,  $R$ , яка залежить від координат детектора  $(\gamma, q)$  (рис. 1.2). Розмістимо площину  $(a, b)$  площинного детектора на осі обертання так, щоб  $b$ -вісь цього детектора співпадала з  $z$ -віссю. Проекційні дані від двох типів детекторів (циліндричного і площинного) є  $p(\beta, \gamma, q)$  і  $p^F(\beta, \gamma, q)$  відповідно.

Дискретизація рядків циліндричного детектора визначається з виразу

$$q_m = (m + 0,5)\Delta q - q_{\max}, \quad \Delta q = \frac{2q_{\max}}{N_q}, \quad m = 0, \dots, N_q - 1, \quad (1.1)$$

де  $2q_{\max}$  - висота віртуального детектора;

$N_q$  - кількість рядків вказаного детектора.

Дискретизація площинного детектора визначається наступним чином. Зв'язок між двома системами координат виражається формулами

$$a = R \operatorname{tg} \gamma \quad \text{і} \quad b = \frac{q}{\cos \gamma} \quad (1.2)$$

Конусний кут  $k$  визначається наступним чином:

$$k = \operatorname{arctg} \frac{q}{R} = \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{R^2 + a^2}} \quad (1.3)$$

і є сталою величиною вздовж рядка циліндричного детектора, але змінною по рядку площинного детектора.

Точні тривимірні алгоритми реконструкції в основному базуються на тривимірному перетворенні Радона. Для виконання точної реконструкції повинні бути відомі радонівські значення функції зображення для всіх перетинаючих об'єкт площин. Умова достатності Тьюї - Сміта [45] стверджує, що точна реконструкція

можлива, якщо всі перетинаючі об'єкт площини також перетинають траєкторію джерела принаймні один раз. З цієї умови можна зробити висновок, що джерело повинно бути розташоване в площині об'єкта.

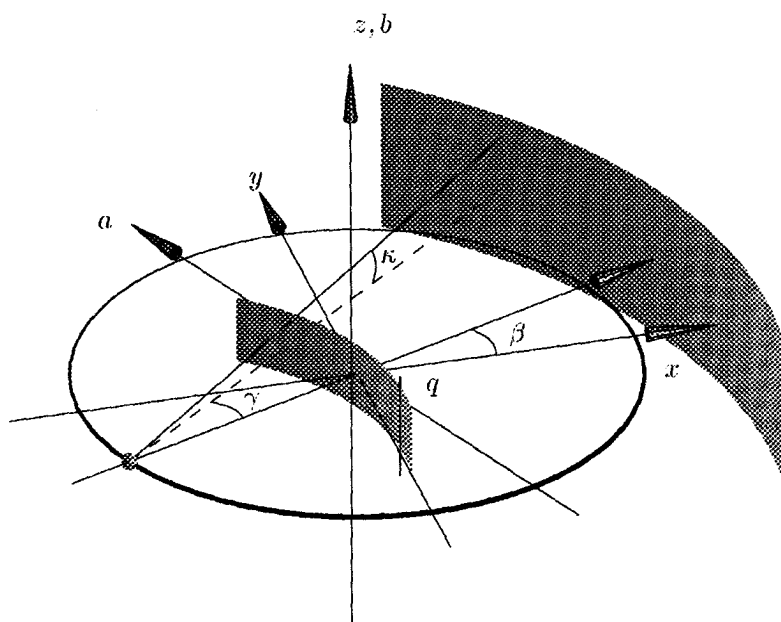


Рис. 1.2. Схема сканування конусним променем з циліндричним  $(\gamma, q)$ -детектором (з нанесенням осей  $(a, b)$  площинного детектора)

Очевидно, що колова траєкторія джерела в конусній схемі сканування не задовольняє умову Тюї - Сміта, тому що площина, яка одночасно перетинає об'єкт і є паралельною до траєкторії, не може перетинати площину самої траєкторії. Отже доступні радонівські дані при конусній схемі сканування обмежені поверхнею тора (рис.1.3) [41]. Область, де радонівські дані відсутні, називається тіньовою зоною.

На практиці, об'єкт контролю є кінцевих розмірів і отримати повний набір радонівських значень можливо тільки при умові, якщо детектор фіксує повністю всі проекції об'єкта, і значення коефіцієнтів послаблення випромінювання за межами об'єкта можуть бути прирівняними до нуля [5-7]. Такі проекційні дані називаються неусіченими. В технічній томографії недоцільно ставити стільки детекторів, щоб повністю покривати об'єкт контролю у всіх напрямках. Від детектора отримуються

неусічені дані в напрямку віяла променя і усічені дані у поздовжньому напрямку [37].

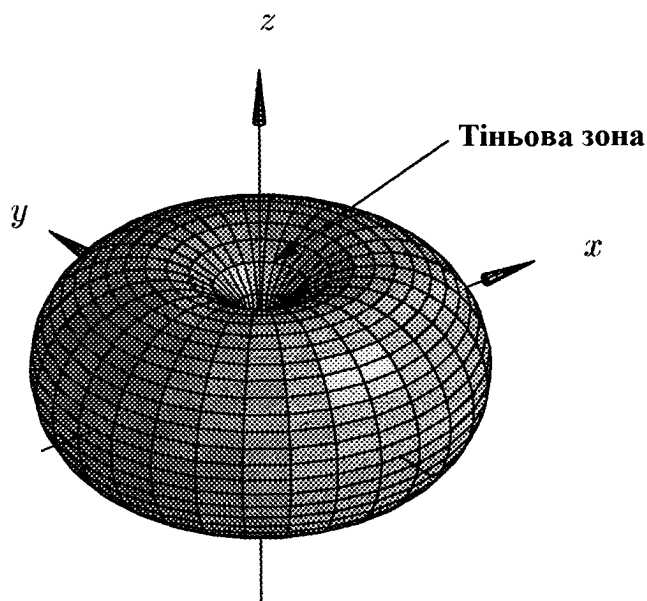


Рис. 1.3. Розташування вимірних радонівських значень при колівій траєкторії джерела

1.3.2. Методи тривимірної реконструкції для площинного та циліндричного детекторів. Першим успішно реалізованим тривимірним алгоритмом для усічених даних є FDK-алгоритм [46]. Даний алгоритм отримав назву в честь трьох розробників (Feldkamp L.A., Devis L., Kress J.). Проекційні дані для цього алгоритму отримуються від колівій схеми сканування. Вихідна траєкторія джерела - коло. Кожне значення, отримане від горизонтального рядка детектора, фільтрується. Профільтровані проекційні дані піддаються операції зворотного проектування вздовж променів. Дана процедура називається тривимірним зворотним проектуванням. Середній переріз об'єкта відновлюється точно. Точки об'єкта, розташовані далі від центра площини даного зрізу реконструюються зі зростаючими артефактами при збільшенні конусного кута. Частина об'єкта, що є більшою за розміри детектора, може також бути відновлена даним алгоритмом, хоча область реконструкції обмежена ділянкою, точки об'єкта якої представлені у всіх проекціях. Форма даної області подібна на зрізаний подвійний конус (рис.1.4).



Результат реконструкції зображення FDK- алгоритмом буде мати відхилення від зображення контрольованого об'єкта незалежно від роздільної здатності процесу вимірювання [46]. Для помірних конусних кутів величина даного відхилення буде малою.

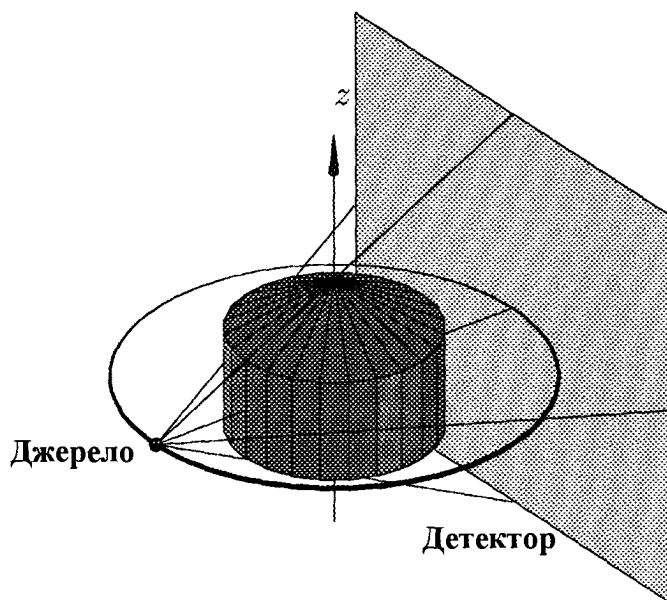


Рис. 1.4. Область реконструкції, яка відновлюється без спотворень при колійній схемі сканування

Простота FDK - методу робить його найбільш використовуваним алгоритмом для конусно-променевої реконструкції. Іншою його перевагою є те, що на відміну від точних методів FDK-метод працює з усіченими даними в повздовжньому напрямку.

У першому формулюванні FDK - алгоритму припускається, що проєкційні дані отримуються з площинного детектора. Реконструкція виконується методом фільтрованого зворотного проєктування (згортковий алгоритм), за структурою подібного до відповідного двовимірного алгоритму. На відміну від точного алгоритму фільтрованого зворотного проєктування для конусного променя [41], де згортка двовимірна, FDK- метод обробляє проєкційні дані по рядках детектора. Крім згортки з фільтром  $g^p(\gamma)$  (пилоподібний сигнал), застосовується коефіцієнт "надбавки" (нормування), який залежить від віялового і конусного кутів [43]. У

результаті виконання даних операцій отримуємо проєкційні значення, з яких буде відбуватися відновлення зображення

$$\tilde{p}^F(\beta, a, b) = \left( \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2 + b^2}} \cdot p^F(\beta, a, b) \right) * g^P(a), \quad (1.4)$$

де знак “\*” означає лінійну згортку  $f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x - \tau)d\tau$ .

“~” означає профільтовані і пронормовані проєкційні дані.

Коефіцієнт нормування геометрично може бути інтерпретований як косинус кута між деяким променем і центральним променем скануючого пучка, тобто

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2 + b^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}} \frac{\sqrt{R^2 + a^2}}{\sqrt{R^2 + a^2 + b^2}} = \cos \gamma \cos k \quad (1.5)$$

Пронормовані і профільтовані проєкційні дані піддаються зворотному проєктуванню, в результаті отримуються реконструйовані значення функції

$$f_{FDK}(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{U(x, y, \beta)^2} \tilde{p}^F(\beta, a(x, y, \beta), b(x, y, z, \beta)) d\beta, \quad (1.6)$$

де  $U(x, y, \beta)$  - функція відстані між джерелом і лінією паралельною до детектора, яка проходить через точку зображення  $(x, y)$  (рис.1.5),

$$a(x, y, \beta) = R \frac{-x \sin \beta + y \cos \beta}{R + x \cos \beta + y \sin \beta} = R \frac{-x \sin \beta + y \cos \beta}{U(x, y, \beta)}$$

$$b(x, y, z, \beta) = z \frac{R}{R + x \cos \beta + y \sin \beta}. \quad (1.7)$$

Функція  $U(x, y, \beta)$  не залежить від координати  $z$  вокселя (елементарний об'єм об'єкта, значення густини в якому залишається сталим), а залежить тільки від відстані між джерелом і відновлюваним вокселем, зпроектованої на центральний промінь пучка випромінювання (рис. 1.5)

$$U(x, y, \beta) = R + x \cos \beta + y \sin \beta. \quad (1.8)$$

Для дискретних даних інтеграл у виразі (1.6) заміняється сумою по кутах проектування. Попередня двовимірна інтерполяція фільтрованих проекційних даних є необхідною умовою для кожного кроку сумування зворотного проектування.

Значення, отримані з площинного детектора і переріз, який необхідно реконструювати, пов'язані проекційним перетворенням. Таке перетворення описане на прикладі проекційної матриці розміром  $4 \times 4$  з використанням гомогенних координат [57]. Це полегшує покрокове обчислення координат площинного детектора  $a$  і  $b$  для фіксованих приростів координат  $x$ ,  $y$ , і  $z$  у внутрішньому циклі обчислення зворотного проектування. У [58] представлено реалізацію такого перетворення з використанням покрокових модифікацій.

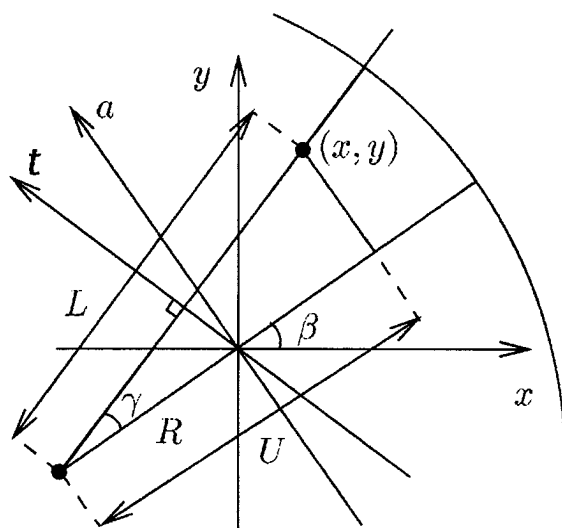


Рис. 1.5. Геометрія отримання проекцій

Вищезгаданий алгоритм (1.4) - (1.6) застосовується для систем сканування, які використовують площинні детектори або цифрові плоскопанельні детектори. Якщо дискретизація детектора відрізняється від дискретизації площинного детектора, проекційні дані можуть бути інтерпольовані на координатну сітку площинних детекторів в декартовій системі координат. В [52] повторно сформовано FDK-метод у випадку циліндричного детектора з центром навпроти джерела.

У [53] доводиться, що алгоритм, ідентичний FDK-методу має виконувати фільтрацію не по прямих лініях, а за вигнутими кривими вздовж циліндричного детектора. Для спрощення в запропонованому алгоритмі знехтувано даною

траєкторією фільтрації даних шляхом їх апроксимації. Фільтрація виконується по горизонтальних рядках циліндричного детектора. Даний алгоритм отримав назву С-FDK-метод. Обчислення у С-FDK-методі після фільтрації є дуже схожими до обчислень FDK - методу (1.4) - (1.8):

$$\tilde{p}(\beta, \gamma, q) = \left( \cos \gamma \frac{R}{\sqrt{R^2 + q^2}} p(\beta, \gamma, q) \right) * g(a) \quad (1.9)$$

з наступним зворотним проектуванням

$$f_{C-FDK}(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \frac{R}{L(x, y, \beta)^2} \tilde{p}(\beta, \gamma(x, y, \beta), q(x, y, z, \beta)) d\beta, \quad (1.10)$$

де  $\gamma(x, y, \beta) = \arctg \frac{-x \sin \beta + y \cos \beta}{R + x \sin \beta + y \cos \beta}$  і

$$q(x, y, z, \beta) = z \frac{R}{\sqrt{(R + x \sin \beta + y \cos \beta)^2 + (x \sin \beta - y \cos \beta)^2}} \quad (1.11)$$

Величина  $L(x, y, \beta)$  є незалежною від значень координати  $z$  і визначається

$$L(x, y, \beta) = \sqrt{(R + x \sin \beta + y \cos \beta)^2 + (-x \sin \beta + y \cos \beta)^2}.$$

Точний алгоритм реконструкції [43] може бути спрощений до FDK-реконструкції, якщо рух джерела здійснюється тільки по колу.

У FDK- алгоритмі приймається, що радонівські значення, які неможливо виміряти, і які знаходяться в тіньовій зоні (рис.1.3) рівні нулю. Якщо заповнити тіньову зону інтерпольованими з вимірянних по поверхні торуса значеннями, це значно покращує якість реконструкції [48-49], [51]. Незважаючи на факт, що FDK-метод використовує тільки виміряні (усічені) радонівські дані, можна стверджувати про можливість досягнення кращої якості зображення завдяки їх модифікації [50], [61].

Методи реконструкції на основі перетворення Радона застосовуються тільки для неусічених проєкційних даних, але деякі з них на практиці неможливо одержати. Важливою перевагою FDK- методу є те, що він успішно працює з

усіченими проєкційними даними, і незважаючи на свій апроксимуючий характер, має наступні властивості [46]:

1. Метод є точним для середньої площини,  $z = 0$ . Оскільки при  $z = 0$  алгоритм стає ідентичним двовимірній реконструкції віяловим променем. Величина відхилення між реконструйованим і вихідним зображенням зростає по мірі віддалення реконструйованої площини від середньої;

2. Метод є точним для об'єктів, гомогенних у  $z$ -напрямку, тобто коли функція густини тривимірного об'єкту (стр.15)  $f(x, y, z) = f(x, y)$ , оскільки коефіцієнт нормування залежить від конусного кута, а саме від  $\cos k$  (1.4). Таким чином, найдовший шлях послаблення променя зменшується при збільшенні конусного кута, і реконструкція відбувається аналогічним чином як і реконструкція в середній площині. Коли об'єкт є гомогенним, коефіцієнт нормування проєкційних значень по різних рядках буде однаковим, тобто  $\tilde{p}(\beta, \gamma, q) = \tilde{p}(\beta, \gamma)$  і обчислення в алгоритмі зведуться до двовимірної реконструкції віяловим променем;

3. Значення інтегралу  $\int_L f(x, y, z) dz$  є сталим. Це є наслідком того, що всі тривимірні радонівські дані в  $z$ -напрямку рівні нулю, тобто всі подвійні інтеграли вздовж площини, перпендикулярної до середньої, можуть бути обчислені з проєкцій, отриманих за одне коло сканування.

З третьої властивості випливає, що основне спотворення реконструйованого зображення, яке передбачається, буде його змазування в осьовому напрямку. Враховуючи всі наведені властивості можна зробити висновок, що таке розмиття відбувається тільки для частин об'єкта, які не є  $z$ -гомогенні.

У випадку циліндричного детектора перша і друга властивості FDK-методу є практично аналогічними як і у випадку площинного детектора, а третя властивість не є притаманною для C-FDK-методу.

Множник  $U^{-2}$  у (1.6) ускладнює обчислення у внутрішньому циклі зворотного проєктування, але якщо є можливим виконати перепаківку проєкційних даних в дані для паралельної схеми сканування, можна позбутися даного множника у формулі зворотного проєктування. І в результаті отримаємо схему сканування

в'яловим променем паралельну у напрямку в'яла, але розсіюючу в напрямку конуса, алгоритм для даної схеми отримав назву P-FDK (parallel FDK).

Проекційні дані від конусного променя, отримані при коловій траєкторії руху джерела, не можуть бути перепаковані до даних паралельної схеми сканування. Однак, можна застосовувати двовимірну паралельну перепаківку даних від кожного рядка детектора окремо. Вперше даний підхід був запропонований для спіральної схеми сканування [54].

У випадку площинного детектора, перепаківка проекційних даних здійснюється згідно виразу

$$p^{FP}(\theta, t, b) = p^F\left(\theta - \arcsin\frac{t}{R}, \frac{tR}{\sqrt{R^2 - t^2}}, b\right). \quad (1.12)$$

Необхідно звернути увагу, що рядок координат  $b$  фіксується. В результаті отримуються перепаквані проекційні дані від паралельних вздовж осі  $z$  променів (рис. 1.7 *a*). Промені, що реєструються рядком детектора з координатою  $b$ , перетинають віртуальний площинний детектор  $(t, s)$ , що розташований на осі  $z$ , по криволінійних сегментах, які описуються рівнянням

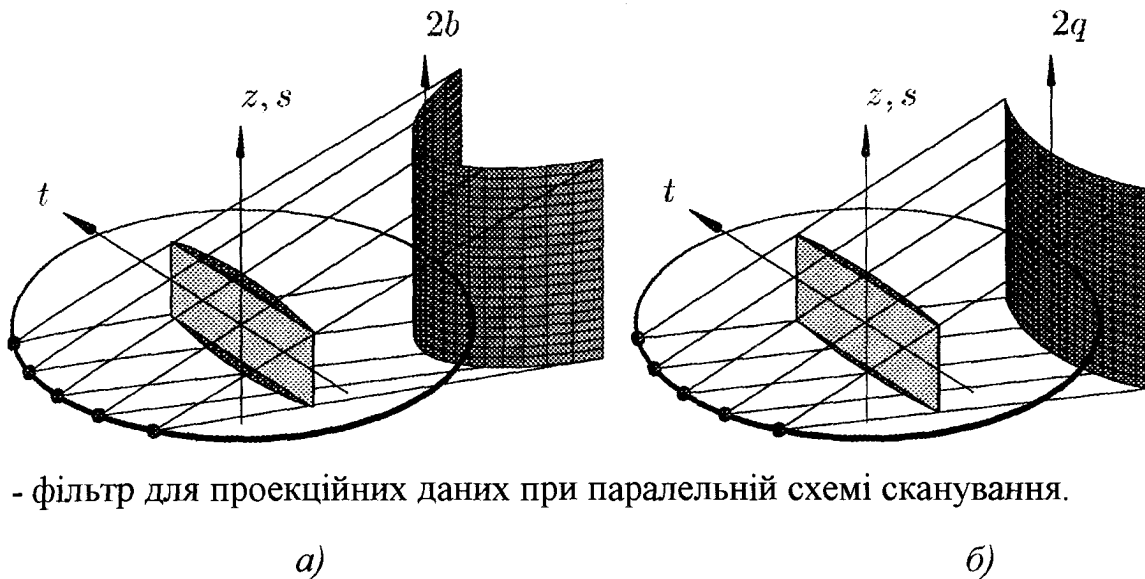
$$s(b, t) = b \cdot \left(1 - \frac{t^2}{R^2}\right) \quad (1.13)$$

На рис. 1.6 *a* приведена паралельна схема сканування з віртуальним детектором, який всі промені, що фіксуються специфічним рядком  $b$  дійсного детектора, перетинають його на однакових рівнях  $z$ . Якщо рухатися до центру обертання, дійсний детектор встановлюється вздовж кривої  $v - t^2 / \sqrt{R^2 - t^2}$ .

Алгоритм реконструкції P-FDK для циліндричного детектора нормує і фільтрує перепаквані дані згідно виразу:

$$\tilde{p}^{FP}(\theta, t, b) = \left( \frac{R^2}{\sqrt{R^4 + R^2 b^2 - b^2 t^2}} p^{FB}(\theta, t, b) \right) * g^p(t), \quad (1.14)$$

де коефіцієнт нормування – це косинус конусного кута;



$\tilde{p}^p(t)$  - фільтр для проєкційних даних при паралельній схемі сканування.

Рис. 1.6. Паралельна схема сканування з віртуальним детектором:

- а) - первісні дані з площинного детектора;  
 б) - Первісні дані з циліндричного детектора.

В такому випадку формула зворотного проєктування позбавляється недоліку множник  $U^{-2}$ ) у (1.6) і може бути подана у виді

$$f_{P-FDK}(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \tilde{p}^{FP}(\theta, t(x, y, \theta), b(x, y, z, \theta)) d\theta \quad (1.15)$$

є координати детектора  $t$  і  $b$ , з якого отримується проєкція вокселя  $(x, y, z)$ , (рис.1.7) знаходяться за формулами

$$t(x, y, \theta) = y \cos \theta - x \sin \theta \quad (1.16)$$

$$b(x, y, z, \theta) = \frac{zR^2}{\nu(x, y, \theta) \sqrt{R^2 - t(x, y, \theta)^2} + R^2 - t(x, y, \theta)^2} \quad (1.17)$$

$$\nu(x, y, \theta) = x \cos \theta + y \sin \theta. \quad (1.18)$$

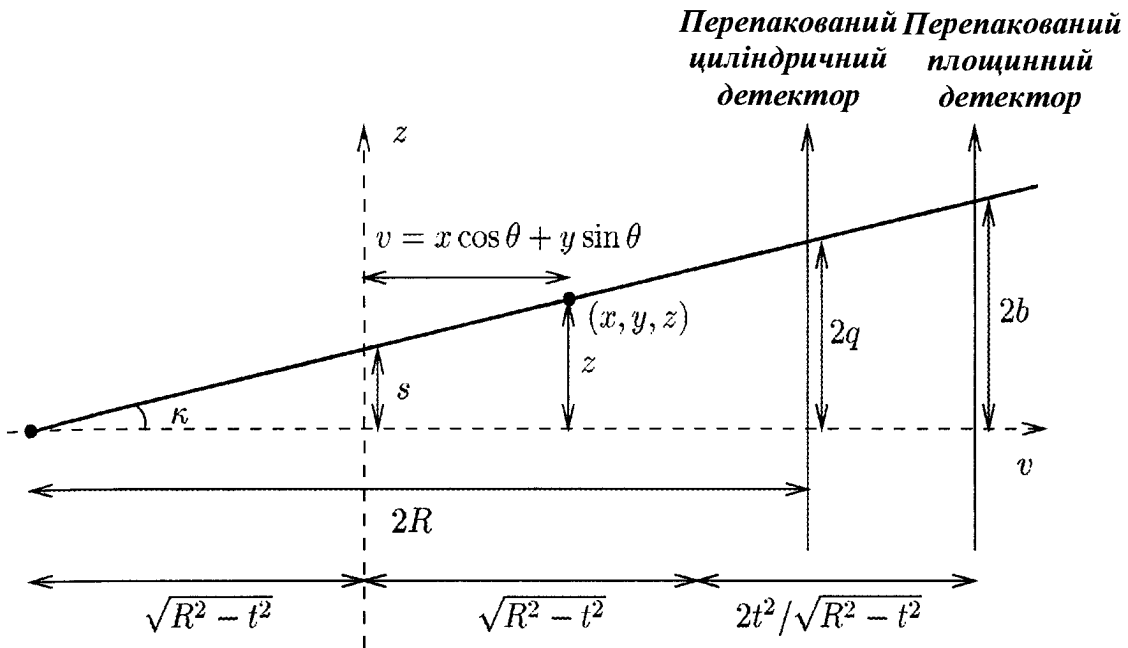


Рис.1.7. Проектування точки  $(x, y, z)$  на детектори при перепакованій схемі сканування. (Проектування відбувається в площині  $z0v$ , яка повернута на кут  $\theta$  відносно площини  $z0x$ ).

P-FDK алгоритм може також бути сформульований для даних з циліндричного детектора. Зафіксувавши значення рядка координат  $q$ , перепаковані дані отримуються з виразу

$$p^{CP}(\theta, t, q) = p\left(\theta - \arcsin \frac{t}{R}, \arcsin \frac{t}{R}, q\right) \quad (1.19)$$

Виникаючий у результаті перепаковки промінь, показаний на рис.1.6 б, перетинає віртуальний площинний детектор  $(t, s)$  вздовж кривих

$$s(q, t) = q\sqrt{1 - (t/R)^2}, \quad (1.20)$$

які є менш вигнутими у порівнянні з кривими (1.13) у випадку, коли первісні проекційні дані реєструються площинним детектором. Детектор, де всі промені, що перетинають специфічний рядок  $q$ , перетинають також детектор у однакових  $z$ -значеннях, розташовується по поверхні циліндру радіусом  $R$  з віссю, що є паралельною  $z$ -осі, і центром на довільно вибраній відстані вздовж осі  $v$ .



Реконструкція завершується послідовним виконанням нормування, фільтрації і зворотного проектування:

$$\tilde{p}^{CP}(\theta, t, q) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + q^2}} p^{CP}(\theta, t, q) * g^p(t), \quad (1.21)$$

$$f_{P-FDK}(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \tilde{p}^{CP}(\theta, t(x, y, \theta)q(x, y, z, \theta)) d\theta, \quad (1.22)$$

де

$$q(x, y, z, \theta) = \frac{zR}{v(x, y, \theta) + \sqrt{R^2 - t(x, y, \theta)^2}}, \quad (1.23)$$

Висота перетину  $q(x, y, z, \theta)$  у (1.23) визначена з рис.1.7.

Експерименти показують відсутність різниці у виникаючих артефактах для FDK- і P-FDK-методу [52]. Однак ці алгоритми не є ідентичними через наступне. Досліджено, що для реконструкції довільної точки об'єкта  $(x, y, z)$  P-FDK-методом використовуються проекційні дані для циліндричного детектора. Тривимірне зворотне проектування використовує дані  $p^{CP}(\theta, t, q)$  профільтровані вздовж кривої, що описується формулою

$$\left\{ (\theta, t, q) \left| \theta \in [0, 2\pi), t = y \cos \theta - x \sin \theta, q = \frac{zR}{\sqrt{R^2 - t^2} + x \cos \theta + y \sin \theta} \right. \right\} \quad (1.24)$$

і представленої на рис.1.8 а. Такі профільтровані дані отримуються в результаті згортки (1.21) і, отже, всі проекційні дані,

$$\left\{ (\theta, t, q) \left| \theta \in [0, 2\pi), t \in [-t_{max}, t_{max}], q = \frac{zR}{\sqrt{R^2 - (y \cos \theta - x \sin \theta)^2} + x \cos \theta + y \sin \theta} \right. \right\}, \quad (1.25)$$

що утворюють поверхню зображену на рис. 1.8 а, будуть використовуватися для відтворення точок об'єкта.

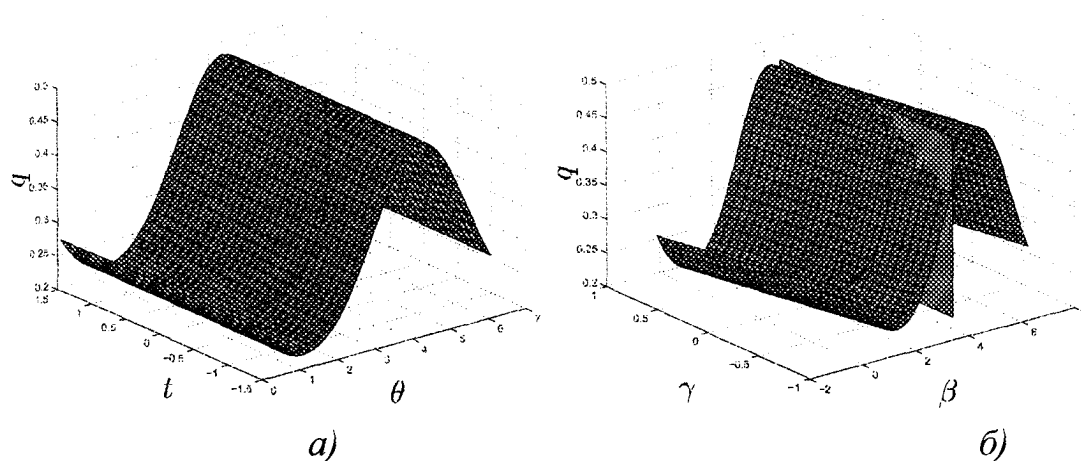


Рис. 189. Поверхня в перепакованому проекційному просторі, утворена даними, що використовуються для реконструкції вокселя зображення  $(x, y, z)$ :

а) - перепакований проекційний простір  $p^{CP}(\theta, t, q)$ ;

б) - початковий проекційний простір  $p(\beta, \gamma, q)$ .

Ці проекційні значення також будуються у первісному проекційному просторі для конусного променя, утвореного в результаті перепаковки. Така поверхня показана на рис.1.8 б. Фільтрація в паралельному проекційному просторі відповідає фільтрації вздовж кривої перетину поверхні і  $(\gamma, q)$ -площини. Крім того, фільтрація повинна бути різною для різних точок об'єкта. Звідси випливає, що форма поверхні залежить від координат  $(x, y, z)$ , і P-FDK алгоритм неможливо зформулювати як гортковий алгоритм для даних конусного променя [53].

У випадку розглянутого віртуального площинного детектора  $((t, s)$  - площина), фільтрація у P-FDK-методі виконується вздовж кривих, описаних у (1.13) або (1.20). З [54] запропоновано виконувати перепаковку проекційних даних горизонтальними лініями на  $(t, s)$  - площині. Ці проекційні дані позначаються як  $p^P(\theta, t, s)$ . Вони можуть бути інтерпольовані у дані виду  $p^{FP}(\theta, t, b)$  з використанням (1.13) або у  $p^{CP}(\theta, t, q)$  з використанням (1.20). Для виконання гатр-фільтрації (фільтрація пилоподібним сигналом) дані повинні бути неусіченими. Проекційні дані, що знаходяться за межами незатінених прямокутників віртуальних детекторів (рис.1.6)

відкидаються. Відкинута область значень може бути також отримана з дійсного детектора, зображеного на рис.1.9 а. Колімація променя в цьому випадку може використовуватися для зменшення дози опромінення. Виникаючий у результаті паралельної перепаківки промінь буде схожий на намет (тент) прямокутної форми. Звідси даний алгоритм отримав назву T-FDK (tent-FDK).

Алгоритм складається з операцій нормування, ramp-фільтрації і тривимірного зворотного проектування. Для кута проектування  $\theta$  воксель  $(x, y, z)$  отримується в результаті зворотного проектування профільтованих значень від детектора по  $s$ -координаті, яка визначається з рис.1.7 за формулою

$$s(x, y, z, \theta) = \frac{z\sqrt{R^2 - t(x, y, \theta)^2}}{\sqrt{R^2 - t(x, y, \theta)^2 + v(x, y, \theta)}}, \quad (1.26)$$

де  $t(x, y, \theta)$  і  $v(x, y, \theta)$  визначаються рівняннями (1.16) і (1.18) відповідно.

T-FDK-метод має суттєве покращення якості реконструйованого зображення [54], і крім того, має таку схему сканування, яка дозволяє визначити вплив на реконструйоване зображення кількості кутів, для яких здійснюється зворотне проектування. Розглянемо рис.1.9. Повноскануемі вокселі є обмеженими всередині усіченого подвійного конуса як при FDK і P-FDK методах. При використанні коліматора висота цього конуса дорівнює величині  $\cos^2 \gamma_{max}$  і є меншою ніж у FDK-методі, якщо використовується площинний детектор, і меншим за  $\cos \gamma_{max}$ , якщо використовується циліндричний детектор. Наполовину скануемі вокселі розміщуються всередині циліндра, описаного навколо подвійного конуса. В [62] запропоновано метод відновлення всіх повноскануємих вокселів  $360^\circ$  зворотнім проектуванням, і всі короткоскануєми вокселі з  $180^\circ$  зворотним проектуванням. Алгоритм отримав назву HT- FDK (hybrid tent FDK) алгоритм реконструкції. Даний алгоритм може працювати з більшими масивами проекційних значень у порівнянні з наведеними алгоритмами.

FDK - алгоритм відновлює точки об'єкта, що розташовані всередині темної зони алмазної форми (рис. 1.9). HT-FDK-метод здатний відновити точки об'єкта всередині світлого циліндра.

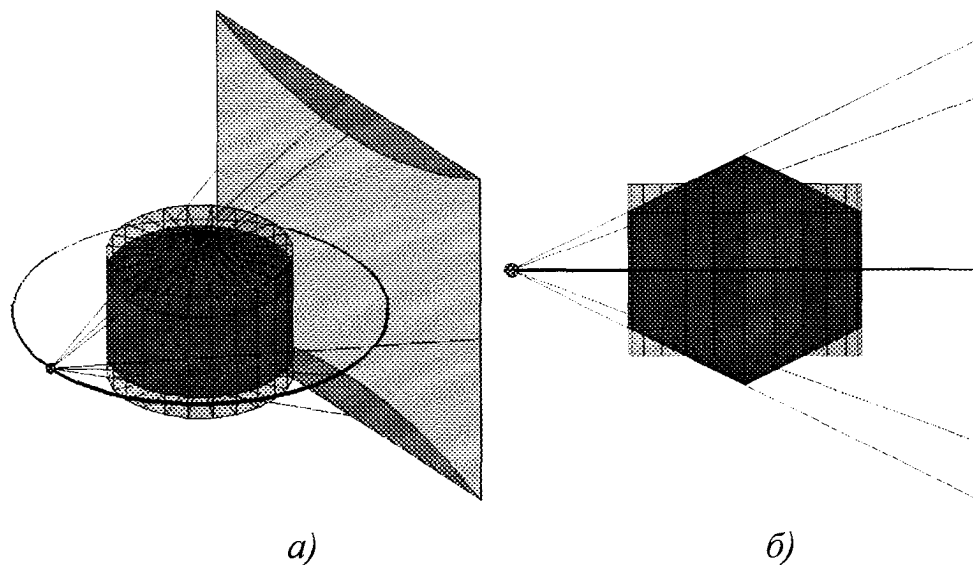


Рис. 1.9. Зони об'єкта, які відновлюються FDK і P-FDK – алгоритмами:

а) - аксонометрична проекція;

б) - бічна проекція.

В [62] досліджено наскільки покращується результат реконструкції HT-FDK-методом, якщо короткоскануємі вокселі відновлюються більше ніж за  $180^\circ$  зворотне сканування.

Якщо об'єм, який повинен бути відновлений, є більшим за циліндр (рис.1.9), то траєкторія джерела повинна бути розширена. Одна з таких можливих траєкторій є спіральна траєкторія (рис.1.10). Недоліком спіральної схеми сканування є те, що вокселі просвічені тільки на початку, або закінченні спіралі не можуть бути реконструйовані і, отже, даремно підданні опроміненню.

В [61] доведено, що променева спіральна схема сканування підходить для HT-FDK – методу (рис.1.10). Запропонований алгоритм реконструкції отримав назву S-FDK -методу (sequential FDK). Якщо детектор досить високий, щоб створити віртуальний детектор у формі прямокутника на  $(t,z)$ -площині висотою  $Z$ , то всі вокселі можна відновити з проекційних даних від кожного кута проектування, отриманих за одне сканування. Вокселі всередині подвійних конусів одержуються з даних найближчого кола траєкторії джерела, у той час як інші вокселі одержуються з даних найближчого або суміжного кола. Факт, що зворотне проектування даних

для двох суміжних кіл є додатковим, доведено з рис.1.10. Спроектоване на циліндр, в якому розміщені колові траєкторії джерела, прямокутне вікно детектора заповнює область, обмежену двома суміжними колами траєкторії. Тільки за умови, що довільна точка зображення  $(x,y,z)$  не просвічена з найближчого кола під деяким кутом проектування  $\theta$ , вона буде просвічена із сусіднього кола під кутом проектування  $\theta \pm \pi$ . Отже всі воксели будуть просвічені за  $360^\circ$ .

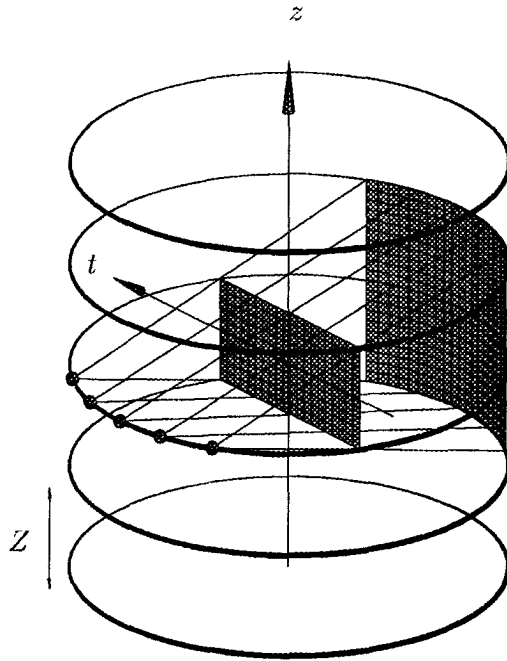


Рис. 1.11. Спіральна схема сканування у S-FDK-методі

FDK- алгоритм був би точним, якщо б проєкційні дані на площині при коловій траєкторії джерела можливо було б продиференціювати. Усі точки зображення, які знаходяться в полі зору з даної площини, потім могли б використовуватися у всіх фільтраціях без будь-якого спотворення точок зображення за межами площини. Однак це є нездійсненним для проєкційних даних, обмежених коловою траєкторією.

#### 1.4. Постановка задачі

Незважаючи на інтенсивні дослідження сучасні методи тривимірної реконструкції зображень відстають від стану розвитку технічного забезпечення.

Методи відновлення тривимірних зображень, що застосовуються в сучасних томографічних установках, як в технічних так і в медичних, є адаптацією попередніх алгоритмів, і у повній мірі не дозволяють реалізувати технічні можливості томографічного контролю.

Нерозв'язаними задачами або розв'язаними частково, що виникають в реконструктивній томографії, є недостатньо висока роздільна здатність, що виникає внаслідок неможливості обробки великих масивів проекційних даних, значні затрати часу на відновлення зображення, спотворення зображень через втрату інформації від багаторядкового детектора в процесі реконструкції зображення адаптованим алгоритмом.

Цим обгрунтована розробка швидкого методу реконструкції тривимірного зображення, який би дозволив зменшити час реконструкції зі збереженням якості реконструйованого зображення. Для реалізації даної мети необхідно вирішити наступні задачі:

- 1) Проаналізувати рівняння взаємодії моно- і поліхроматичного рентгенівського променя з речовиною об'єкта з врахуванням можливих спотворень отримуваних проекційних даних;
- 2) Дослідити залежність значення функції тривимірного зображення від проекційних даних;
- 3) Реалізувати метод тривимірної реконструкції зображення та дослідити його комплексність;
- 4) Побудувати математичну модель томографічного сканування, яка пов'язує інтенсивність рентгенівського випромінювання з проекційними значеннями.
- 5) Розробити програмну і технічну реалізацію методу та провести експериментальні дослідження процесу реконструкції зображення.

## РОЗДІЛ 2

ТЕОРЕТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА РЕАЛІЗАЦІЯ ШВИДКОГО МЕТОДУ  
РЕКОНСТРУКЦІЇ ТРИВИМІРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ У РЕНТГЕНІВСЬКІЙ  
ТОМОГРАФІЇ

При проведенні контролю об'єктів методом рентгенівської комп'ютерної томографії необхідна швидка і точна реконструкція будь-якого перерізу об'єкта. Але, як правило, підвищення швидкості реконструкції призводить до зменшення точності відновлення зображення об'єкта. З одного боку, часто бажано отримати реконструкцію за декілька секунд, а з іншого - відновлене зображення має бути з високою роздільною здатністю, щоб уникнути неправильного тлумачення результатів контролю, або діагностики.

На практиці існують два різні методи реконструкції зображень: ітераційні і методи на основі перетворень. Хоча перший КТ-сканер використовував ітераційний метод, сучасні сканери не використовують його через низьку швидкодію. Друга категорія методів є значно швидшою. Вони побудовані на основі Фур'є теореми про перерізи [6], [58], тобто реконструкція відбувається за допомогою Фур'є перетворення. В комерційних сканерах [59] переважно застосовують так званий метод фільтрованого зворотного перетворення (згортковий алгоритм), який є одним з найпростіших методів за типом обчислень, але є обтяжений їх великою кількістю (висока комплексність методу). Отже, постає необхідність розробки алгоритму реконструкції об'єкту на основі зворотного проектування зі зменшенням його комплексності, але зі збереженням якості реконструйованого зображення.

### 2.1. Розробка швидкого зворотного проектування для реконструкції двовимірних зображень

Будь-яке зображення можна визначити як функцію двох змінних, значення якої за її межами визначення рівні нулю, і відповідно зображення – це квадрат,

центр якого знаходиться на початку довільно вибраної системи координат. У відповідності до цього використовуємо позначення  $f(x, y)$ , яке визначає функцію  $f$  двох змінних  $x$  та  $y$  і, тим самим, математично цілісно визначає зображення, яке необхідно реконструювати.

Можливою фізичною інтерпретацією функції зображення  $f$ , на якій ґрунтується рентгенівська реконструктивна томографія, є те, що за умови рівності поля зображення і поля реконструкції, значення функції  $f(x, y)$  однозначно визначає значення лінійного коефіцієнта послаблення випромінювання в точці  $(x, y)$ , а отже і значення густини об'єкта.

Для знаходження функції  $f$  в якості вхідних даних використовується набір значень променевих сум, отриманих при певному куті повороту джерела (об'єкта)  $\theta$  і координати детектора  $t$ .

Для виведення швидкого методу двовимірної реконструкції розглянемо лінію  $L$ , яка належить до набору паралельних променів, у результаті просвічування якими отримується проекція, показана на рис. 2.1 а. Під кутом проектування  $\theta$  і позицією детектора  $t$ , проекційні значення можуть бути отримані з відомого виразу [6] (формула зворотного проектування)

$$p^P(\theta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(y \cos \theta - x \sin \theta - t) dx dy, \quad (2.1)$$

де  $\delta(y \cos \theta - x \sin \theta - t)$  - дельта функція, імпульс якої відбувається вздовж прямої  $y \cos \theta - x \sin \theta - t$

Верхній індекс "P" у (2.1) вказує, що проекція отримана при паралельній схемі сканування. Проекційні значення (2.1) представляють собою відображення об'єкту у проекційному  $(\theta, t)$ -просторі. У роботі [60] даний простір названо синограмою.

Відомо, що деякій прямій  $L$ , вздовж якої відбувається випромінювання, і значення якого реєструється детектором, що знаходиться на віддалі  $t$  від початку координат (рис.2.1 а), відповідає одній точці в  $(\theta, t)$ - просторі.



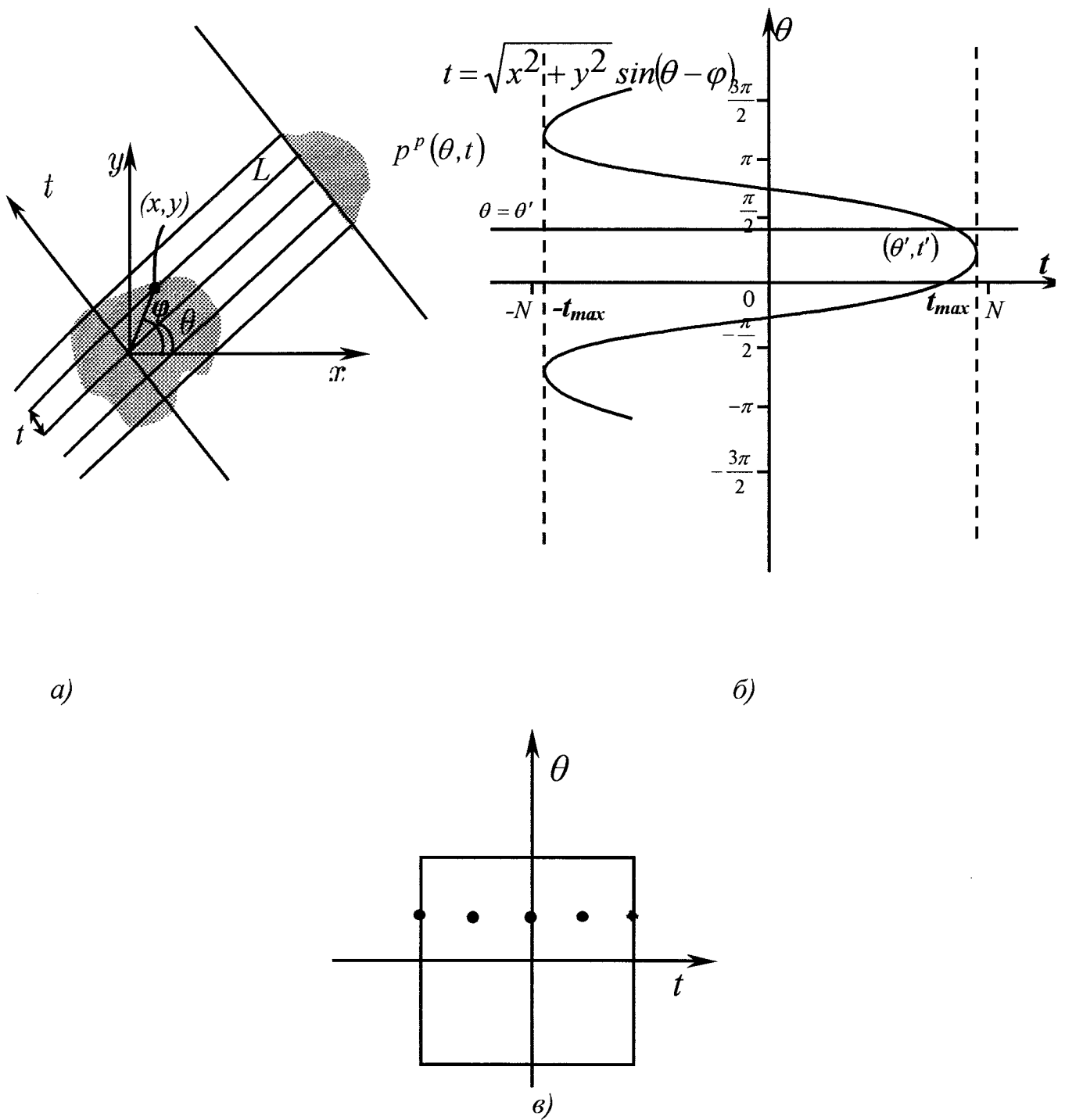


Рис. 2.1. Побудова синограми зображення:

- a) - отримання проєкційних значень функції зображення;
- б) - відображення точки  $(x, y)$  простору зображення у проєкційному  $(\theta, t)$ -просторі;
- в) - синограма;
- $\theta$  - кут повороту об'єкта (або джерела рентгенівського випромінювання);
- $t$  - координата детектора.

Розглянемо точку  $(x, y)$ , значення в якій  $f(x, y)$  є фізичною інтерпретацією густини об'єкта в цій точці, на рис. 2.1 а. Відстань від початку координат до променя, що пройшов через цю точку, знаходиться за формулою

$$t = \sqrt{x^2 + y^2} \sin(\theta - \phi), \quad (2.2)$$

де  $\phi = \arctg \frac{y}{x}$ .

Тому геометричним місцем точок в  $(\theta, t)$  - просторі, якому відповідають прямі, що проходять через точку  $(x, y)$ , є крива, що описується даним рівнянням (рис. 2.1 б). Отже в проекційному просторі точки, які відповідають променям, що пройшли через точку  $(x, y)$ , лежать на синусоїдній кривій (2.2). Щоб отримати значення функції  $f$  в деякій точці необхідно здійснити інтегрування вздовж цієї кривої.

Синограма складається з проекційних значень, отриманих при паралельній схемі сканування і розміщених на декартовій системі координат (рис. 2.1 в).

Кожна дискретна точка на синограмі – це значення інтегралу від функції густини об'єкта вздовж траєкторії поширення випромінювання в ньому. Відповідно кожна точка об'єкту може бути описана синусоїдою на синограмі. І навпаки, кожній синусоїді на синограмі відповідає елементарна площа двовимірного зображення (піксель). Якщо всі проекційні дані просумувати вздовж цієї кривої, то отримаємо значення цього пікселя. При реконструкції зображення розміром  $N \times N$  на сумування проекційних даних вздовж цих синусоїд необхідно  $O(N^3)$  операцій для відновлення кожної точки результуючого зображення [61].  $O(N^3)$  - це є комплексність алгоритму зворотного проектування.

Отже, суть реконструкції зображення методом зворотного проектування полягає в тому, що оцінку густини у будь-якій точці зображення знаходять шляхом додавання променевих сум для всіх променів, які проходять через дану точку. Для

отримання її значення необхідно здійснити інтегрування вздовж цієї кривої, тобто просумувати всі проекційні значення, які її утворюють.

Відомий спрощений вираз для зворотного проектування можна записати згідно [5]:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p^p(\theta, t) g_{\infty}^p(y \cos \theta - x \sin \theta - t) dt d\theta = \\
 &= \int_0^{2\pi} \underbrace{(p^p * g_{\infty}^p)}_{\text{Фільтрація}}(\theta, y \cos \theta - x \sin \theta) d\theta, \quad , \quad (2.3) \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Зворотне проектування}}
 \end{aligned}$$

де множник

$$g_{\infty}^p(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\rho| e^{j2\pi\rho t} d\rho \quad (2.4)$$

так званий “гамп-фільтр” (пилоподібний фільтр). Права частина (2.3) – це послідовність двох кроків. Спочатку дані проектування фільтруються. Фільтрація проекційних даних означає згортку функції перепакованих проекційних даних з функцією фільтра (2.4). Потім точка зображення відновлюється шляхом інтегрування профільтованих проекцій вздовж синусоїдної кривої на синограмі для всіх кутів проектування.

Для підвищення швидкодії замість просторової згортки фільтрацію можна виконувати як множення функції проекційних даних з функцією фільтра у Фур’є просторі [62]. Але дана операція не зменшить комплексності алгоритму.

Найтривалішою операцією у методі зворотного проектування є саме інтегрування даних для синусоїди. Кожній точці зображення відповідає синусоїда. Для прикладу синограма для зображення розміром 9x9 приведена на рис.2.1. Вздовж кожної кривої з рис.2.1 має бути здійснене інтегрування. Необхідно зауважити, на практиці роздільна здатність реконструйованого зображення, як правило складає 512x512.

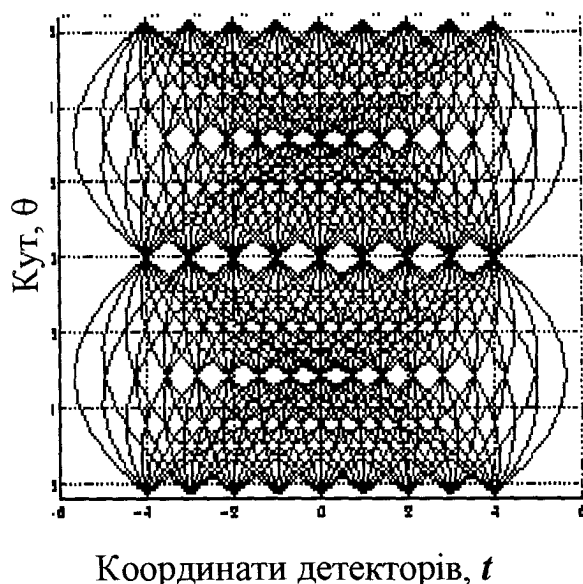


Рис. 2. 2. Синограма зображення розміром 9x9

Для зменшення часу реконструкції зображення, тобто зниження комплексності алгоритму пропонується новий підхід: кожен синусоїду розбити на маленькі кусочки, кожний з яких може належати декільком синусоїдам, і, отже, можуть приймати участь у реконструкції декількох точок зображення.

Для виведення аналітичної залежності між проєкційними значеннями і значенням функції зображення методу швидкої реконструкції приймаємо, що детектор має довжину  $2t_{\max}$ , займає  $N_t$  рівновіддалених позицій на відстані  $\Delta t$ . Аналогічно отримуються  $N_\theta$  кутів проєктування з інтервальною відстанню між ними  $\Delta\theta$ . У практичній томографії функція зображення  $f(x, y)$  і функція проєкційних даних  $p^p(\theta, t)$  є дискретною, а не неперервною, внаслідок чого, як вже згадувалося, виникає некоректність задачі. Як і в [63] позначимо дискретні значення функції квадратними дужками. Враховуючи прийняті допущення зв'язок між

неперервною функцією проєкційних даних  $p^P(\theta, t)$  і дискретною  $p^P[n, k]$  можна визначити з виразу

$$p^P[n, k] = p^P(\theta_n, t_k), \quad (2.5)$$

$$\theta_n = n\Delta\theta, \quad \Delta\theta = \frac{2\pi}{N_\theta}, \quad n = 0, \dots, N_\theta - 1 \quad (2.6)$$

$$t_k = (k + O_k + 0.5)\Delta t - t_{max}, \quad \Delta t = \frac{2t_{max}}{N_t}, \quad k = 0, \dots, N_t - 1, \quad (2.7)$$

$O_k$  - константа зміщення дискретизації по детектору.

Фільтрація дискретних проєкційних даних – це дискретна згортка з дискретними значеннями обмеженої по частоті функції гап-фільтру  $g_\infty^P(t)$ , що визначається згідно формули [5]

$$g^P(t) = \int_{-\frac{1}{2\Delta t}}^{\frac{1}{2\Delta t}} |\rho| e^{j2\pi\rho t} d\rho = \frac{1}{2(\Delta t)^2} \operatorname{sinc} \frac{2t}{2\Delta t} - \frac{1}{4(\Delta t)^2} \operatorname{sinc}^2 \frac{t}{2\Delta t}, \quad (2.8)$$

де функція  $\operatorname{sinc} x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$ .

Дискретні значення функції фільтру описуються виразом

$$g^P[k] = \Delta t \cdot g^P(k\Delta t) = \begin{cases} \frac{1}{4\Delta t}, & k = 0; \\ 0, & \text{для парного } k; \\ -\frac{1}{k^2 \pi^2 \Delta t}, & \text{для непарного } k. \end{cases} \quad (2.9)$$

Введення у вираз коефіцієнта масштабування  $\Delta t$  дає можливість виразити фільтрацію дискретних даних через дискретну згортку:

$$\tilde{p}^P[n, k] = p^P[n, k] * g^P[k]. \quad (2.10)$$

Отже, з врахуванням означення згортки можна записати:

$$\begin{aligned} p^P(\theta_n, t_k) * g^P(t) &= \int p^P(\theta_n, t_k - t') g^P(t') dt' \approx \sum_{k'} p^P[n, k - k'] g^P(k' \Delta t) \Delta t = \\ &= \sum_{k'} p^P[n, k - k'] g^P[k] = p^P[n, k] * g^P[k] \end{aligned} \quad (2.11)$$

В результаті отримуються профільтровані проєкції  $\tilde{p}^P[n, k]$ , які в подальшому піддаються зворотному проєктуванню згідно формули [6]

$$f_{FBP-P}(x, y) = \frac{2\pi}{N_\theta} \sum_{n=0}^{N_\theta-1} \tilde{p}^P[n, k(x, y, \theta)], \quad (2.12)$$

де  $k(x, y, \theta)$  індекс променя, що перетинає піксель  $(x, y)$ , може бути отриманий з координати даного перетину, яка визначається згідно формули

$$t(x, y, \theta) = y \cos \theta - x \sin \theta \quad (2.13)$$

з використанням (2.7) для переходу від неперервних до дискретних змінних. Координата даного променя точно не співпадає з дискретними позиціями променів, що вимагає інтерполяції для застосування в (2.12). Координата вздовж променя визначається з виразу

$$v(x, y, \theta) = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (2.14)$$

Результат реконструкції виконаний для  $N_x \times N_y$  пікселей зображення з центром, розміщеним на початку декартової системи координат, визначається згідно виразу

$$x_i = (i_1 + 0.5) \Delta x - x_{max}, \quad \Delta x = \frac{2x_{max}}{N_x}, \quad i_1 = 0, \dots, N_x - 1 \quad (2.15)$$

$$y_{i_2} = (i_2 + 0.5)\Delta y - y_{max}, \Delta y = \frac{2y_{max}}{N_y}, i_2 = 0, \dots, N_y - 1$$

де  $x_{i_1}$  і  $y_{i_2}$  - координати середньої точки пікселю.

Тільки пікселі, що просвічуються при всіх кутах проектування, відновлюються правильно, і вони складають поле зору (ПЗ). Дані пікселі розміщені всередині кола радіусом  $R_{ПЗ} = t_{max}$  навколо центра координат.

Схема отримання дискретних проєкційних даних для традиційного двовимірного зворотного проектування подана на рис.2.3.

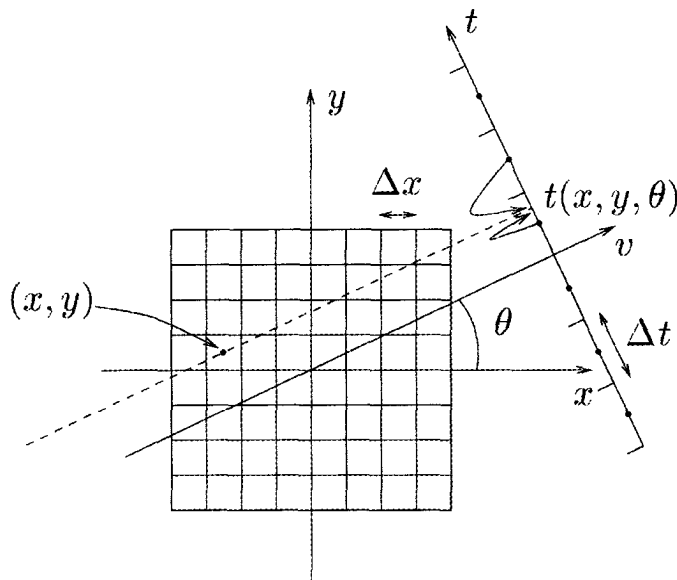


Рис. 2.3. Отримання дискретних проєкційних даних для зворотного проектування

Проекційні дані отримуються при зміні кута проектування від 0 до  $2\pi$ . Необхідно зауважити, що для променя  $(\theta_1, t_1)$  при використанні (2.3) отримуються ті ж самі проєкційні значення як і для променя  $(\theta_1 + \pi, -t_1)$ . Отже, одна з двох проєкцій, отримана при повороті сканера на кут  $\theta_1$  або  $\theta_1 + \pi$ , є зайвою. Однак, змінивши дискретизацію по детектору на чверть його довжини, тобто при  $O_k = 0.25$  у (2.7), проєкційні промені для кутів  $\theta_1$  і  $\theta_1 + \pi$  чергуюватимуться і будуть формувати пучок променів, в якому промені знаходяться на відстані  $\Delta t/2$  один від одного. Такий прийом підвищення якості зображення часто використовується на практиці, коли

дані зібрані при повному повороті скануючої системи [63]. Дана операція одночасно підвищує ефективність алгоритму. Проекційні значення для променів  $(\theta_1, t_1)$  і  $(\theta_1 + \pi, -t_1)$  стають різними при застосуванні зміщеної дискретизації, і отже, можуть бути об'єднані в одну вибірку проекційних значень як показано на рис. 2.4. Отримані об'єднані проекційні значення в проекційному просторі будуть знаходитися в інтервалі кута проектування від 0 до  $\pi$ . В результаті роздільна здатність в  $t$  - напрямку збільшується удвічі.

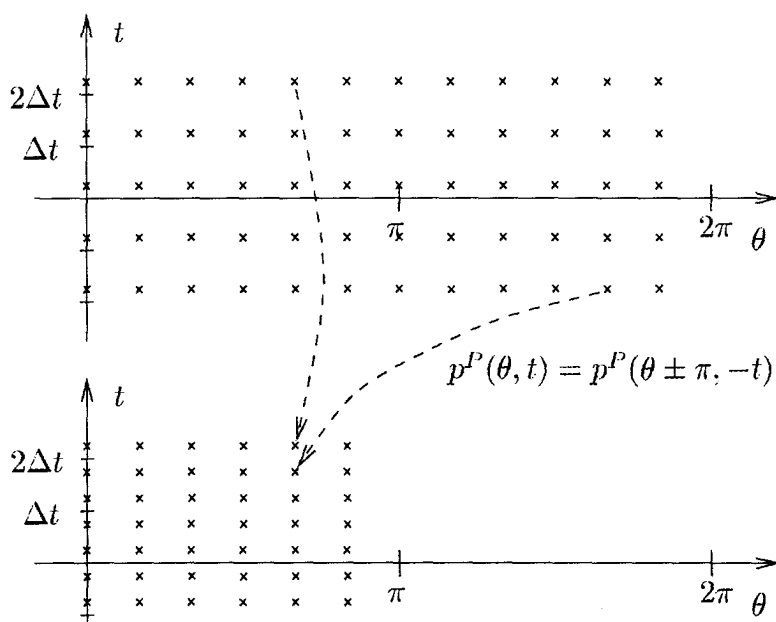


Рис. 2.4. Об'єднання проекційних значень при застосуванні зміщеної дискретизації по детектору

Основою методу швидкого зворотного проектування для дискретних проекційних даних є виконання сумування в (2.12) крок за кроком шляхом покрокової розбивки даної суми на проміжні суми, які можуть бути використані в обчисленнях у наступному кроці. Реалізацію даного методу буде здійснено у проекційному просторі – синограмі. В дискретному проекційному просторі зворотне проектування виконується сумуванням профільтованих проекційних даних вздовж синусоїди для кожного пікселя, який необхідно реконструювати. Отже синусоїду будемо апроксимувати фрагментами кривих, які обчислюються з коротших



кривих, обчислених у попередньому кроці. Для таких сегментів синусоїди застосовується термін “зв’язок” (лінк) у [64].

Позначимо зв’язок між точками  $(\theta_{n_1}, t_{k_1})$  і  $(\theta_{n_2}, t_{k_2})$  сітки проекційного простору як  $(\theta_{n_1}, t_{k_1}; \theta_{n_2}, t_{k_2})$  і його відповідне дискретне значення як  $\tilde{I}[n_1, k_1; n_2, k_2]$  (використання позначення тильди вказує, що значення зв’язку обчислене з профільтованих даних).

Як вже було доведено, точці в проекційному просторі відповідає промінь у просторі зображення, і, отже, дві кінцеві точки зв’язку відповідають двом променям, що перетинаються в деякій точці зображення. Зв’язок  $(\theta_{n_1}, t_{k_1}; \theta_{n_2}, t_{k_2})$  визначає точку зображення, координати якої знаходяться з виразу

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_{n_1} & \cos\theta_{n_1} \\ -\sin\theta_{n_2} & \cos\theta_{n_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t_{k_1} \\ t_{k_2} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

І навпаки, точка з координатами  $(x, y)$  в просторі зображення цілком визначається деякою синусоїдою на синограмі. Так як синусоїду ми апроксимували деякими криволінійними сегментами (зв’язками), то можна зробити висновок, що значення точки зображення можна обчислити як суму декількох таких зв’язків певної довжини. Довжину зв’язку можна визначити як  $\theta$  - відхилення його кінцевих точок. Також довжину зв’язку можна вказати в радіанах (наприклад  $\frac{\pi}{2}$ -зв’язок) або індексацією (наприклад 2-зв’язок).

Дві кінцеві точки сегмента синусоїди однозначно визначають зв’язок за умови, що

$$\theta_{n_2} \neq \theta_{n_1} + i\pi, \quad i \in \mathbb{Z} \quad (2.17)$$

Значення зв’язку  $\tilde{I}[n_1, k_1; n_2, k_2]$  повинно бути строго ідентичним до значення інтегралу вздовж синусоїди в проекційному просторі, яке визначається за формулою

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \tilde{p}(\theta, y \cos \theta - x \sin \theta) d\theta \quad (2.18)$$

з  $(x, y)$  визначеними у (2.16). Інтегрування у (2.18) заміняємо відповідною сумою для застосування до дискретних проєкційних даних.

Пропонований метод швидкого зворотного проєктування полягає у послідовності математичних дій, які описуються певним алгоритмом. На першому етапі використання алгоритму короткі синусоїдні дуги апроксимуються прямими лініями. Точність апроксимації буде тим вищою, чим меншою буде довжина дуги.

Перший етап алгоритму полягає в тому, що обчислюються усі необхідні і-зв'язки. Для цього необхідно просумувати проєкційні величини як показано на рис.2.4. Для кожного проєкційного значення вираховуються три суми: перша зі значенням розташованим на синограмі вище по прямій, друга – зі значенням вище і лівіше, третя – вище і правіше. Набір зв'язків починається в довільній точці і формує дерево.

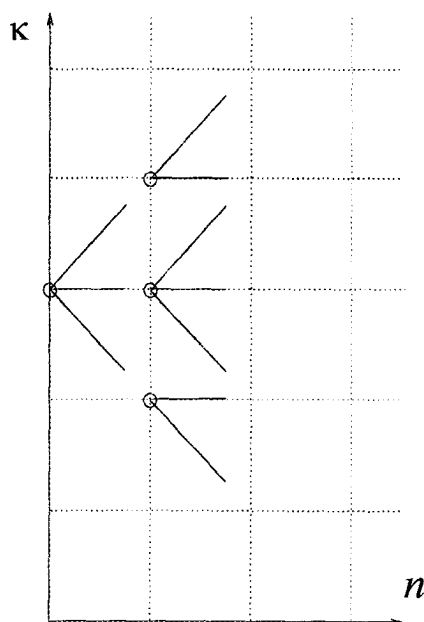


Рис. 2.4. Порядок сумування проєкційних даних на першому етапі

На другому етапі використовуються зв'язки, отримані в результаті обчислень на I-му етапі. Шляхом апроксимації між 1-зв'язками або їх сумування довжини зв'язків збільшуються. 2-зв'язки формують 2 - дерево (рис.2.5).

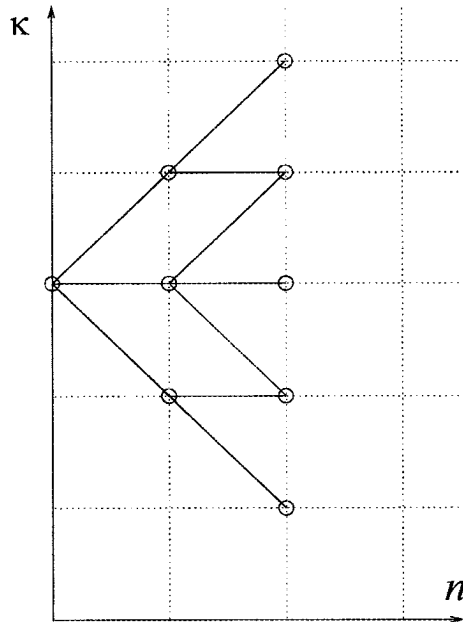


Рис. 2.5. Створення 2-дерева (II етап алгоритму)

Після декількох етапів обчислень синусоїдні сегменти стають занадто довгими, щоб їх можна було апроксимувати прямими лініями. Тому значення зв'язку отримується шляхом апроксимації між двома проекційними значеннями, що відповідають кінцям зв'язку, синусоїдною кривою. Для цього необхідно обчислити коефіцієнти інтерполяції.

Пропонуємо наступний підхід. Для знаходження коефіцієнтів інтерполяції синусоїдною кривою між двома деякими точками  $(\theta_{n_1}, t_{k_1})$  і  $(\theta_{n_2}, t_{k_2})$  необхідно спочатку обчислити середню точку зв'язку  $(\theta_{n_{сер}}, t_{k_{сер}})$  (рис.2.6). Позначимо  $n_{сер}$  - індекс кута проектування середньої точки зв'язку. Даний індекс можна визначити за формулою

$$n_{сер} = \frac{n_1 + n_2}{2} \quad (2.19)$$

У більшості випадків ( $n_1$  і  $n_2$  – одночасно парні або непарні) значення  $n_{сер}$  буде цілим числом. Індекс  $t$  - позиції детектора для середньої точки з використанням (2.14) обчислюються з виразу

$$k_{сер} = \frac{k_1 + k_2}{2 \cos\left(\frac{\theta_{n_1} - \theta_{n_2}}{2}\right)} \quad (2.20)$$

Після обчислення середньої точки, враховуються вагові коефіцієнти інтерполяційної функції

$$\varpi = 1 - \varpi', \quad \varpi' = k_{сер} - \lfloor k_{сер} \rfloor, \quad (2.21)$$

де  $\varpi + \varpi' = 1$ ,  $\varpi > 0$ ,  $\varpi' > 0$ .

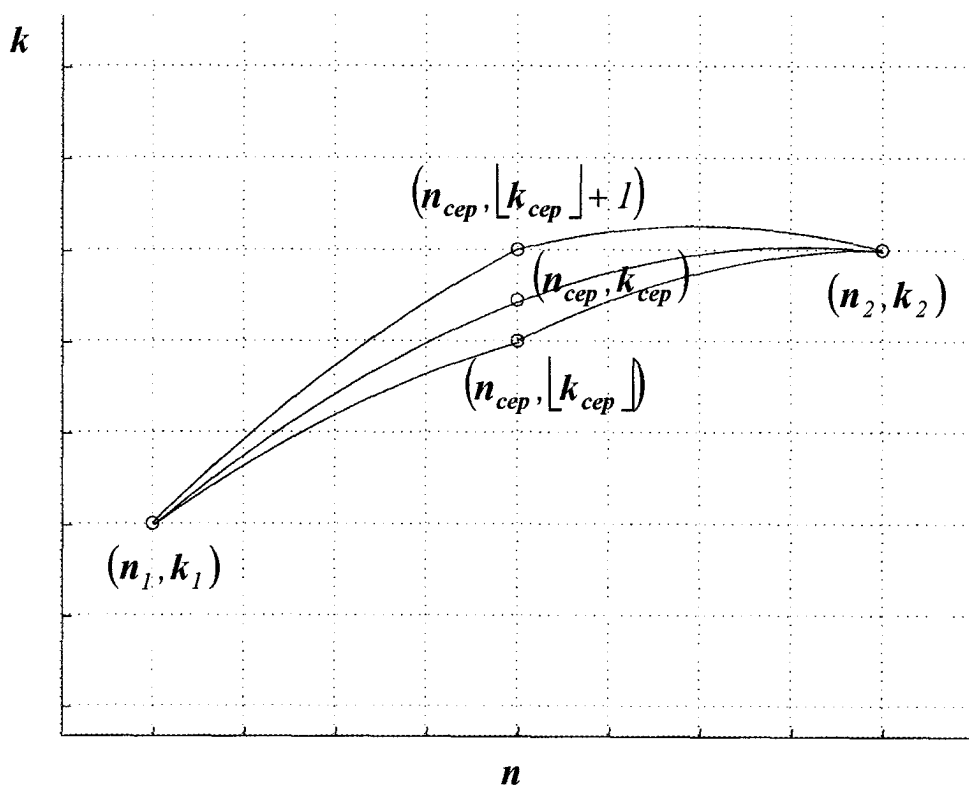


Рис. 2.6 Основний крок алгоритму: значення зв'язку створюється з чотирьох значень зв'язків удвічі коротших

Всі попередні обчислення завершуються основним кроком алгоритму –

обчисленням значення  $\frac{\pi}{2}$  - зв'язку (найдовшого) з чотирьох значень зв'язків удвічі

коротших  $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ . Розглянемо зв'язок  $\tilde{I}[n_1, k_1; n_2, k_2]$  на рис. 2.6. Ми використовуємо

чотири зв'язки  $\tilde{I}[n_1, k_1; n_{сер}, \lfloor k_{сер} \rfloor + 1]$ ,  $\tilde{I}[n_1, k_1; n_{сер}, \lfloor k_{сер} \rfloor]$ ,  $\tilde{I}[n_{сер}, \lfloor k_{сер} \rfloor + 1; n_2, k_2]$ ,  
 $\tilde{I}[n_{сер}, \lfloor k_{сер} \rfloor; n_2, k_2]$ .

Всі кінцеві точки зв'язків розташовуються на вузлах сітки дискретного проєкційного простору, при цьому  $k_{сер}$  може бути нецілим числом.

Отже, 0003

базисне рівняння алгоритму з використанням лінійної інтерполяції

$$\begin{aligned} \tilde{I}[n_1, k_1; n_2, k_2] = & \varpi \cdot (\tilde{I}[n_1, k_1; n_{сер}, \lfloor k_{сер} \rfloor] + \tilde{I}[n_{сер}, \lfloor k_{сер} \rfloor; n_2, k_2]) + \\ & + \varpi' \cdot (\tilde{I}[n_1, k_1; n_{сер}, \lfloor k_{сер} \rfloor + 1] + \tilde{I}[n_{сер}, \lfloor k_{сер} \rfloor + 1; n_2, k_2]) \end{aligned} \quad (2.22)$$

де вагові коефіцієнти інтерполяції  $\varpi$  і  $\varpi'$  визначаються (2.21).

Відповідність між (2.22) і рис.2.6 є очевидною. Співвідношення між зв'язками обчисленими в  $i$ -му та  $(i+1)$ -му кроці є постійним на інтервалі  $[\theta_{n_1}, \theta_{n_2}]$ , що впливає з рівності (2.21). Це також є наслідком (2.20), а саме того, що  $t_{сер}$  є однаковим для всіх зв'язків, у яких сума положень детектора  $t_1 + t_2$  і різниця кутів проєктування  $\theta_1 - \theta_2$  є однаковими.

Якщо вагові коефіцієнти інтерполяційної функції обчислювати наперед, даний факт може бути використаний для зменшення розміру пам'яті з  $O(N_\theta^2 N_t^2)$  до  $O(N_\theta N_t)$ .

З кожним новим етапом довжина зв'язків збільшується у двічі. За винятком обмежень на лівій і правій межах синограми, розмір дерев (кількість зв'язків в кожному дереві) збільшується майже удвічі з кожним кроком. При цьому кількість дерев зменшується на половину, оскільки більш довгі зв'язки створюються тільки в

кожному другому рядку (через ряд) синограми на кожному етапі. Після  $\log_2 N_\theta + 1$  кроків (якщо початкова кількість проєкцій  $2N_\theta$ ) лишається тільки  $N_\theta$  дерев, всі з них починаються на рівні точок  $\theta = 0$  і закінчуються на рівні  $\theta = \pi/2$  (головний крок алгоритму).

Так як короткі зв'язки можна розцінювати як сегменти лінії, то обчислення  $k_{сер}$  у (2.20) спрощується до  $k_{сер} = (k_1 + k_2)/2$ , в результаті чого більшість вагових коефіцієнтів  $\varpi$  і  $\varpi'$  стають рівними нулю. Таке визначення вагових коефіцієнтів значно прискорює головний крок алгоритму для коротких зв'язків. Для нас це означає, що у половині з  $\log_2 N_\theta$  кроків при зворотному проектуванні може використовуватися дане спрощення.

На першому етапі алгоритму при обчисленні всіх необхідних 1-зв'язків, значення  $\tilde{I}[n_1, k_1; n_1 + 1, k_2]$  може вважатися середнім з профільтованих проєкційних даних для зв'язку з кінцевими точками такими як  $(\tilde{p}^P[n_1, k_1] + \tilde{p}^P[n_1 + 1, k_2])/2$ , проілюстрованих на рис.2.6. Але внаслідок того, що кінцеві точки співпадають з кінцевими точками лівого і правого зв'язків, достатньо розглянути тільки одну кінцеву точку зв'язку, показаного на рис. 2.5, тобто

$$\tilde{I}[n_1, k_1; n_1 + 1, k_2] = \tilde{p}^P[n_1, k_1] \quad (2.23)$$

для всіх  $k_2$ .

В наступному кроці алгоритму створюються 2-зв'язки з використанням головного кроку описаного в (2.22). За  $\log_2 N_\theta - 2$  кроки створюються необхідні  $\frac{N_\theta}{4}$  зв'язки (або інакше  $\frac{\pi}{2}$ -зв'язки), які є найдовшими зв'язками, які можуть бути створені з врахуванням обмеження (2.17).

Якщо вважати, що роздільна здатність зображення  $\Delta x = \Delta y$  рівна роздільній здатності детектора  $\Delta t$  і у (2.7) зсув  $O_k = 0.25$ ,  $k$ -вісь співпадає з  $i_1$ - або  $i_2$ -осями

для  $\theta = 0, \pi/2, \dots, 2\pi$ , то у заключному кроці алгоритму для отримання значення пікселя полягає сумуються без будь-якої інтерполяції чотири  $\frac{\pi}{2}$ -зв'язки.

При зміщенні дискретизації по детектору на чверть, довільній роздільній здатності детектора або пікселя, інтерполяція в  $t$ -напрямку повинна виконуватися з використанням чотирьох  $\frac{\pi}{2}$ -зв'язків на інтервалі  $\frac{\pi}{2}$  як показано на рис.2.7.

З використанням інтерполяції рівняння реконструкції виражається формулою

$$f_{FAST}[i_1, i_2] = \varpi_1 \varpi_2 \tilde{I}[n_1, \lfloor k_1 \rfloor; n_2, \lfloor k_2 \rfloor] + \varpi_1 \varpi_2' \tilde{I}[n_1, \lfloor k_1 \rfloor; n_2, \lfloor k_2 \rfloor + 1] + \varpi_1' \varpi_2 \tilde{I}[n_1, \lfloor k_1 \rfloor + 1; n_2, \lfloor k_2 \rfloor] + \varpi_1' \varpi_2' \tilde{I}[n_1, \lfloor k_1 \rfloor + 1; n_2, \lfloor k_2 \rfloor + 1] \quad (2.24)$$

(подібні вирази справедливі і для інших трьох квадрантів),

де

$$\begin{aligned} \varpi_1 &= 1 - \varpi_1', & \varpi_1' &= k_1 - \lfloor k_1 \rfloor \\ \varpi_2 &= 1 - \varpi_2', & \varpi_2' &= k_2 - \lfloor k_2 \rfloor \end{aligned} \quad (2.25)$$

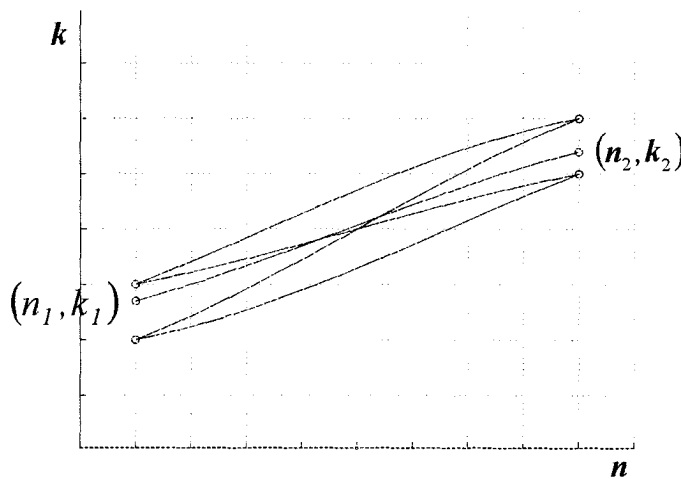


Рис. 2.7. Внесок у значення пікселя отриманих шляхом інтерполяції чотирьох

значень зв'язків довжиною  $\frac{\pi}{2}$

Оскільки інтерполяція застосовується на кожному кроці алгоритму, то остаточний результат реконструкції відрізняється від реконструкції традиційним

зворотним проектуванням, де інтерполяція застосовується тільки один раз для відновлення кожної точки.

Зв'язки деякою довжиною  $l$  починаються з точки  $(\theta_{n_l}, t_{k_l})$  і формують дерево.

Довжина дерева визначається довжиною зв'язків, які його формують. Ширина (розмір) дерева – це кількість зв'язків в ньому, що визнається максимальним і мінімальним нахилом синусоїди в проекційному просторі. Враховуючи скінченність дискретного проекційного простору, дерева, що знаходяться біля границі даного простору можуть обрізатися. Для виконання інтерполяції в головному кроці алгоритму коротші дерева повинні бути ширшими за більш довгі дерева. Нехтуючи цими ефектами можна прийняти, що всі дерева, які використовуються в деякому кроці алгоритму мають однакову ширину. Зазвичай, 1-дерева мають ширину 3 або 5, 2-вимірні дерева мають ширину 5 або 9, і т.д. Отже, можна прийняти, що 1-дерева складаються з  $c$  зв'язків, тоді 2-дерева складаються з  $2c$  зв'язків, 4-дерева  $4c$  зв'язків, так далі.

2 - Дерев є удвічі менше ніж 1-дерев, так як  $n$ -позицій, з яких вони починаються є також удвічі менше. Загальна кількість зв'язків, створених від кроку  $i = 2$  до кроку  $i = \log_2 N_\theta - 1$  складає

$$\sum_{i=2}^{\log_2 N_\theta - 1} \underbrace{N_i N_\theta 2^{1-i}}_{\text{кількість дерев}} \cdot \underbrace{c 2^{i-1}}_{\text{кількість зв'язків у дереві}} = c N_i N_\theta (\log_2 N_\theta - 2) \in O(N^2 \ln N) \quad (2.26)$$

Необхідно звернути увагу на те, що за формулою (2.23) 1-зв'язки будуються без застосування будь-яких додаткових даних окрім початкових проекційних даних.

Кінцева ефективність алгоритму залежить від різних численних факторів, що ускладнюють порівняння двох різних алгоритмів. В такому випадку в якості параметра щодо якого можна здійснити порівняння алгоритмів задамося кількістю операцій для даних з плаваючою точкою (КОДзПТ) для проекційних даних алгоритму. 1 - Дерева не вимагають ніяких обчислень, в той час як кожний основний крок алгоритму потребує 3 операції додавання і 2 операції множення (2.22), і ключова інтерполяція для пікселя (2.24) потребує 4 операції множення і 3 операції



додаваннях для  $\frac{\pi}{2}$ -сегментів, що були обчислені в свою чергу за 3 операції сумування деяких сегментів. Отже всього 16 операцій множення і 15 операцій додавання.

Традиційне зворотне проектування з лінійною інтерполяцією потребує 2 множення і 2 додавання для кожного кроку сумування, і якщо реконструюються тільки пікселі всередині кола радіусом  $t_{max}$ , загальна кількість операцій для даних з плаваючою точкою у традиційному зворотному проектуванні обчислюється згідно [67]

$$4 \underbrace{N_x N_y \frac{\pi}{4}}_{\substack{\text{пікселі в середині} \\ \text{поля реконструкції}}} N_\theta = 2\pi N^3 \quad (2.27)$$

Така кількість операцій необхідна для виконання швидкого зворотного проектування з використанням спадного підходу. В таблиці 2.1 приведені обчислені за розробленим алгоритмом оцінки кількості операцій для даних з плаваючою точкою при різних значеннях  $N$ . Кількість операцій плаваючих точок для швидкого зворотного проектування відповідно до даної таблиці становить приблизно  $35N^2 \ln N$ .

Таблиця 2.1

Кількість операцій для проєкційних даних традиційного і швидкого двовимірного зворотного проектування як функції від  $N = N_x = N_y = N_t = N_\theta/2$

N	64	128	256	512	1024
Традиційне зворотне проектування	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^7$	$8 \cdot 10^8$	$6 \cdot 10^9$
Швидке зворотне проектування	$1 \cdot 10^5$	$7 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^6$	$6 \cdot 10^7$	$3 \cdot 10^8$

## 2.2. Розробка і технічна реалізація швидкого методу реконструкції двимірних зображень з використанням алгоритму зворотного проектування

Традиційна томографія - це, за своєю суттю, метод зворотного проектування [68]. Найпростішою реалізацією зворотного перетворення Радона, тобто реалізацією головної задачі реконструкції зображення є послідовне виконання чотирьох операцій: дифференціювання, перетворення Гільберта, зворотне проектування і нормування. Але використання тільки алгоритму зворотного проектування не дозволяє отримувати якісні зображення, а саме, призводить до розмазування зображення. Але, як вже було зазначено, алгоритм зворотного проектування, як тривимірний так і двовимірний, є складовою частиною багатьох поширених алгоритмів реконструкції і, як правило, найбільшою за кількістю обчислень частиною. Отже, застосування алгоритму швидкого зворотного проектування як складової частини будь-якого алгоритму призведе до значного зменшення його комплексності. Формулювання швидкого зворотного проектування для FDK- методу здійснюється на основі зворотного проектування як у P-FDK-методі і загальних принципів для двовимірного швидкого зворотного проектування. Однак, деякі фундаментальні відмінності в ступенях вільності для ліній у дво- і трьохвимірних просторах ускладнюють перехід від двовимірного простору і вимагають використання нестандартного підходу.

2.2.1. Отримання аналітичних залежностей методу швидкої тривимірної реконструкції. Основна ідея швидкого тривимірного зворотного проектування для FDK- методу для даних від конусного променя ідентична двовимірному швидкому зворотному проектуванню: рекурсивне сумування значень зв'язків. Оскільки необхідні криві зв'язків тепер визначені в трьохвимірному просторі, то на даний час не існує методик відновлення тривимірних зображень. Для того, щоб реконструювати тривимірне зображення використовуючи обчислені значення зв'язків необхідно розробити тривимірне швидке зворотне проектування.

Для порівняння, алгоритм швидкого двовимірного зворотного проектування починається з обчислення 2-зв'язків і продовжується зі збільшенням величини зв'язків до обчислення значення пікселя. Даний підхід отримав назву висхідний підхід. Ітераційний і дискретний характер алгоритму роблять важким процес точного прогнозу які з коротких зв'язків будуть необхідні для побудови більш довгих зв'язків. В даній роботі пропонується наступний спадний (нисхідний) підхід, в якому заздалегідь визначається які значення зв'язків будуть обчислені.

Починаючи з пікселей (вокселей), спочатку визначається, які  $\frac{\pi}{2}$ -зв'язки є необхідними для виконання інтерполяції у (2.24). Індекси цих зв'язків зводяться в таблицю (заносяться у пам'ять), але їх значення можуть, звичайно, ще не бути обчислені. В наступному кроці необхідно з'ясувати і занести в пам'ять, які з  $\frac{\pi}{4}$ -зв'язків будуть використанні в основному кроці для обчислення  $\frac{\pi}{2}$ -зв'язків. Кожний наступний крок алгоритму з'ясовує, які коротші зв'язки є необхідними для створення більш довгих, і процес закінчується, коли необхідні 2-зв'язки (найкоротші) будуть зведені в таблицю. Переважно, вагові коефіцієнти інтерполяційної функції, отримані з (2.21), також заносяться і зберігаються в пам'яті. Необхідно зауважити, що кількість занесень в пам'ять залежить тільки від геометрії схеми сканування, а не від контрольованого об'єкта, і вона може бути обчислена наперед і є сталою для певної схеми сканування [66].

Процес обчислення значення зв'язку спрощується до мінімуму, як тільки вся необхідна інформація занесена в пам'ять (створена таблиця значень). Але він не включає обчислення середніх точок або вагових коефіцієнтів інтерполяційної функції, а включає тільки обчислення за основним рівнянням (2.22).

Суть алгоритму – узагальнення основного кроку двовимірного швидкого зворотного проектування для тривимірної реконструкції, в якій значення нового зв'язку обчислюється з восьми значень удвічі коротших за нього зв'язків (рис.2.8). Для виконання даного кроку необхідно знайти середню точку  $(\theta_{сер}, t_{сер}, q_{сер})$  для обчислення зв'язку  $(\theta_{n_1}, t_{k_1}, q_{m_1}; \theta_{n_2}, t_{k_2}, q_{m_2})$ . Якщо спроектувати два променя з

кінцевими точками  $(\theta_{n_1}, t_{k_1}, q_{m_1})$  і  $(\theta_{n_2}, t_{k_2}, q_{m_2})$  на  $(x, y)$  - площину (рис. 2.9), вони перетнуться в точці  $(x_{сер}, y_{сер}, 0)$ , яка є розв'язком наступної системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} x_{сер} \\ y_{сер} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_{n_1} & \cos \theta_{n_1} \\ -\sin \theta_{n_2} & \cos \theta_{n_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t_{k_1} \\ t_{k_2} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

аналогічно двовимірному випадку (2.16). Перші два індекси середньої точки обчислюються ідентично до двовимірного випадку (2.19) і (2.20), а саме

$$n_{сер} = \frac{n_1 + n_2}{2} \quad (2.29)$$

$$k_{сер} = \frac{t_{k_1} + t_{k_2}}{2 \cos \left( \frac{\theta_{n_1} - \theta_{n_2}}{2} \right)} \quad (2.30).$$

Дві кінцеві точки зв'язку у проєкційному просторі відповідають двом променям у просторі зображення. На відміну від двовимірної томографії, у трьохвимірній ці два променя майже ніколи не перетинаються (рис.2.9). Отже відповідність між зв'язками й точками зображення є неоднозначною, що ускладнює визначення третього індексу  $m_{сер}$ . Однак дану двозначність можна розв'язати за допомогою наступної методики [69].

Середню точку  $(\theta_{n_{сер}}, t_{k_{сер}}, q_{m_{сер}})$  можна визначити з точки перетину променя, що їй відповідає, з точкою  $(x_{сер}, y_{сер}, z_{сер})$ .

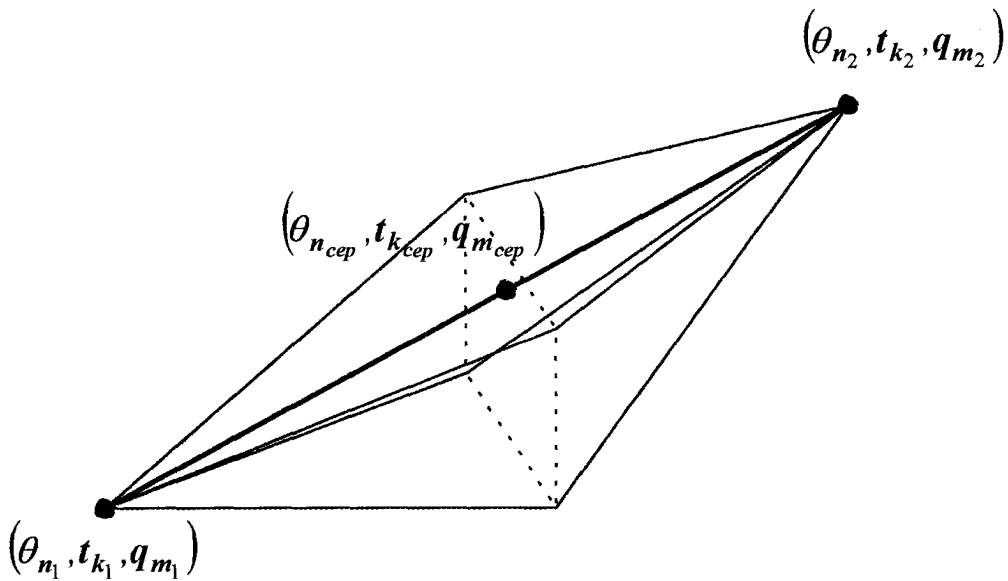


Рис. 2.8. Основний крок алгоритму: значення зв'язку обчислюється з восьми значень зв'язків з удвічі коротшою довжиною  
(Зв'язки для спрощення наведені як лінії в просторі, але в дійсності вони є сегментом деякої кривої)

Спочатку обчислюється координата точки  $z_{sep}$ , як показано на рис.2.9, а саме

$$z_{sep} = \frac{z_1 + z_2}{2}, \quad (2.31)$$

де

$$z_1 = q_1 \frac{\sqrt{R^2 - t_{k_1}^2} + v_1}{R} \quad (2.32)$$

і

$$z_2 = q_2 \frac{\sqrt{R^2 - t_{k_2}^2} + v_2}{R}. \quad (2.33)$$

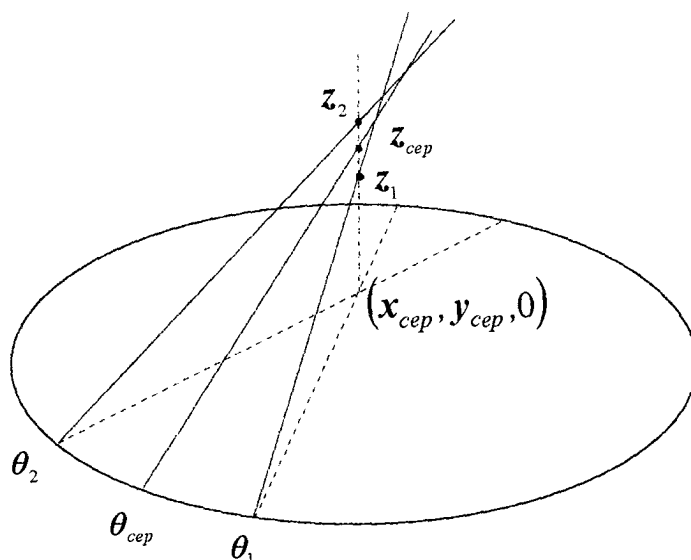


Рис. 2.9. Схема обчислення середньої точки

Остаточно отримаємо вираз

$$q_{sep} = \frac{z_{sep} R}{\sqrt{R^2 - t_{k_{sep}}^2} + x \cos \theta_{nc} + y \sin \theta_{nc}}. \quad (2.34)$$

На рис. 2.8 показано як отримується нове значення зв'язку при двовимірній інтерполяції.

Вагові коефіцієнти інтерполяції визначаються згідно формул

$$\begin{aligned} \varpi_t &= 1 - \varpi'_t, \quad \varpi'_t = k_{sep} - \lfloor k_{sep} \rfloor \\ \varpi_q &= 1 - \varpi'_q, \quad \varpi'_q = m_{sep} - \lfloor m_{sep} \rfloor \end{aligned} \quad (2.35)$$

Отже, значення будь-якого зв'язку можна обчислити за формулою

$$\begin{aligned}
& I[n_1, k_1, m_1; n_2 k_2, m_2] = \\
& \varpi_t \varpi_q \left( I[n_1, k_1, m_1; n_{cep}, \lfloor k_{cep} \rfloor, \lfloor m_{cep} \rfloor] + I[n_{cep}, \lfloor k_{cep} \rfloor, \lfloor m_{cep} \rfloor; n_2 k_2, m_2] \right) + \\
& + \varpi_t \varpi'_q \left( I[n_1, k_1, m_1; n_{cep}, \lfloor k_{cep} \rfloor, \lfloor m_{cep} \rfloor] + I \right) + I[n_{cep}, \lfloor k_{cep} \rfloor, \lfloor m_{cep} \rfloor; n_2, k_2, m_2] + \\
& + \varpi'_t \varpi_q \left( I[n_1, k_1, m_1; n_{cep}, \lfloor k_{cep} \rfloor + 1, \lfloor m_{cep} \rfloor] + \right. \\
& + \left. I[n_{cep}, \lfloor k_{cep} \rfloor + 1, \lfloor m_{cep} \rfloor; n_2, k_2, m_2] \right) + \\
& + \varpi'_t \varpi'_q \left( I[n_1, k_1, m_1; n_{cep}, \lfloor k_{cep} \rfloor + 1, \lfloor m_{cep} \rfloor + 1] + \right. \\
& + \left. I[n_{cep}, \lfloor k_{cep} \rfloor + 1, \lfloor m_{cep} \rfloor + 1; n_2, k_2, m_2] \right)
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Оскільки промені кінцевих точок  $\pi$ -зв'язків не перетинатимуться навіть при проектуванні їх на середню площину, то потреба будувати зв'язки більші за  $\pi/2$  відпадає. Значення вокселя обчислюється як сума шістнадцяти інтерпольованих  $\pi/2$ -зв'язків. Інтерполяцією в  $t$ -напрямку можна знехтувати, якщо в геометрії детекторів не застосовувалося зміщення на чверть і роздільна здатність детектора і вокселя є співрозмірними, на відміну від інтерполяції в  $q$ -напрямку. Кожна з інтерполяцій у чотирьох напрямках використовується шістнадцятьма  $\pi/2$ -зв'язками у відповідності з рівнянням

$$\begin{aligned}
& \varpi_{t_1} \varpi_{t_2} \varpi_{q_1} \varpi_{q_2} \cdot I[n_1, \lfloor k_1 \rfloor, \lfloor m_1 \rfloor; n_2, \lfloor k_2 \rfloor, \lfloor m_2 \rfloor] + \\
& + \varpi_{t_1} \varpi_{t_2} \varpi_{q_1} \varpi'_{q_2} \cdot I[n_1, \lfloor k_1 \rfloor, \lfloor m_1 \rfloor; n_2, \lfloor k_2 \rfloor, \lfloor m_2 \rfloor + 1] + \\
& \quad \vdots \\
& + \varpi'_{t_1} \varpi'_{t_2} \varpi'_{q_1} \varpi'_{q_2} \cdot I[n_1, \lfloor k_1 \rfloor + 1, \lfloor m_1 \rfloor + 1; n_2, \lfloor k_2 \rfloor + 1, \lfloor m_2 \rfloor + 1],
\end{aligned} \tag{2.37}$$

де вагові коефіцієнти білінійної інтерполяційної функції

$$\begin{aligned}
\varpi_{t_1} &= 1 - \varpi'_{t_1}, & \varpi'_{t_1} &= k_1 - \lfloor k_1 \rfloor, \\
\varpi_{t_2} &= 1 - \varpi'_{t_2}, & \varpi'_{t_2} &= k_2 - \lfloor k_2 \rfloor, \\
\varpi_{q_1} &= 1 - \varpi'_{q_1}, & \varpi'_{q_1} &= m_1 - \lfloor m_1 \rfloor, \\
\varpi_{q_2} &= 1 - \varpi'_{q_2}, & \varpi'_{q_2} &= m_2 - \lfloor m_2 \rfloor.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

2.2.2. Дослідження комплексності швидкого алгоритму реконструкції. Для технічної реалізації алгоритму реконструкції тривимірних зображень необхідно проаналізувати складність (комплексність) алгоритму та час для його реалізації.

Зв'язки дерева у тривимірному проекційному просторі поширюються в обох  $t$ - $q$ - напрямках. Якщо б всі дерева поширювалися на однаковий діапазон у двох напрямках, то загальна кількість зв'язків, створених від кроку  $i = 2$  до кроку  $= \log_2 N_\theta - 1$  становила б

$$\sum_{i=2}^{\log_2 N_\theta - 1} \underbrace{N_t N_q N_\theta 2^{1-i}}_{\text{кількість дерев}} \cdot \underbrace{c \cdot 2^{i-1} 2^{i-1}}_{\text{кількість зв'язків у дереві}} = \quad (2.39)$$

$$= c N_t N_q N \sum_{i=2}^{\log_2 N_\theta - 1} 2^{i-1} = c N_t N_q N (2^{\log_2 N_\theta - 1} - 2) \in O(N^4)$$

операцій, тобто без жодного покращення у порівнянні з традиційним зворотнім проектуванням. Де  $c$  - кількість зв'язків, з яких складаються 1-дерева.

Але, як далі буде доведено, збільшення (ріст) дерев це, по суті, одновимірний процес. В дійсності дерева нагадують вигнуті віяла, що розходяться на деякий кутівий діапазон в  $t$ -напрямку, будучи вигнутими в  $q$ -напрямку.

Щоб визначити форму дерева точно, необхідно прийняти до уваги дискретність проекційних значень в реконструкції. Рис. 2.10 демонструє спосіб можливого отримання форми ідеального  $\pi/2$ -дерева з коренем у точці  $(\theta_{n_1}, t_{k_1}, q_{m_1})$ . Інцеві точки зв'язку  $\pi/2$ -дерева з коренем у точці  $(\theta_{n_1}, t_{k_1}, q_{m_1})$  геометрично можуть бути описані як проекція променя  $(\theta_1, t_1, q_1)$  на детектор під проекційним кутом  $\theta_{n_2} = \theta_{n_1} + \pi/2$ . Це стосується частини променя, що проходить через циліндричну область поля зору, яка позначена пунктирним колом на рис. 2.10. Точки зображення, реконструкція яких потребує зв'язків такого дерева, лежать у полі зору (ПЗ) вздовж променя, що визначається в проекційному просторі точкою



$(\theta_{n_1}, t_{k_1}, q_{m_1})$ ). Після перевищення значення проєкційного кута за  $\pi/2$  ці точки зображення розгалужуються і проєктуються на детектор вздовж кривої

$$q(t) = q_{m_1} \frac{\sqrt{R^2 - t_{k_1}^2} + t}{\sqrt{R^2 - t^2} + t_{k_1}}, \quad -\sqrt{t_{max}^2 - t_{k_1}^2} \leq t \leq \sqrt{t_{max}^2 - t_{k_1}^2} \quad (2.40)$$

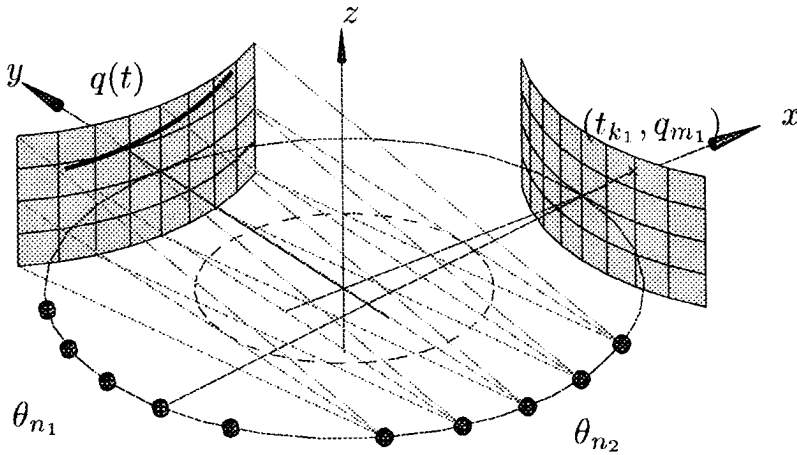


Рис. 2.10. Схема отримання проєкційних значень, які формують ідеальне дерево

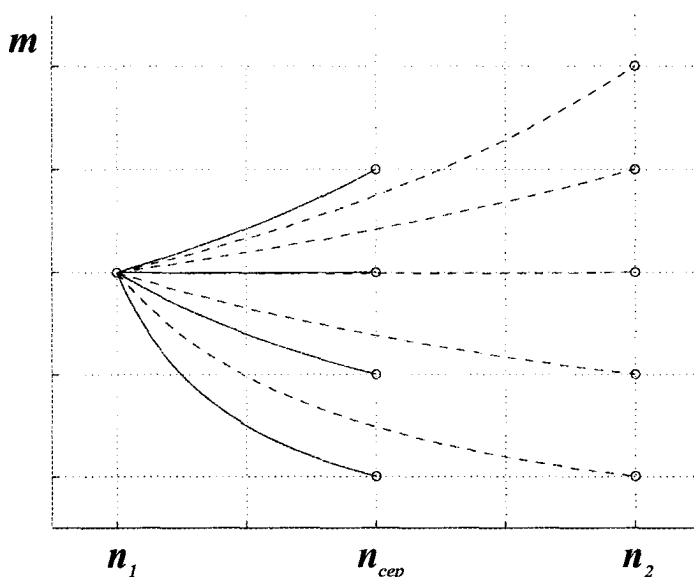
Отже, зв'язки, що починаються в точці  $(\theta_{n_1}, t_{k_1}, q_{m_1})$  і закінчуються в точках, описаних рівнянням (2.40) будуть формувати ідеальне дерево. Оскільки, згідно рівняння (2.40), для кожного значення  $t$  існує лише одне значення  $q$ , це доводить, що форма ідеального дерева буде віяло, і їхнє зростання є швидше двовимірним, а не одновимірним. Ідеальну форму менших дерев можна отримати аналогічним чином, змінюючи кутовий діапазон до бажаної величини дерева.

Щоб оцінити комплексність алгоритму необхідно дослідити структуру дерева. В дискретизованому об'ємі, що реконструюється, промінь  $(\theta_{n_1}, t_{k_1}, q_{m_1})$  на рис.2.10 перетинає вокселі у  $2 \times 2$  щільній трубці вокселів, що оточує промінь. При проєктуванні на детектор товщина трубки масштабується величиною  $R/(R+t_{k_1})$  обумовленою відстанню до детектора і величиною приблизно  $1/\cos k$  залежною від конусного кута. Отже остаточно товщина проєкції виміряна рядком детектора є

$$\frac{2R\Delta z}{\Delta q(R+t_1)\cos k} \approx < 5 \quad (2.41)$$

для типових значень параметрів ( $\Delta z = \Delta q$ ,  $k_{max} = 10^\circ$ ,  $t_{max} = R/2$ ). Як наслідок,  $\pi/2$ -дерево виглядає як неплоске віяло, що поширюється на великий інтервал у  $t$ -напрямку і має товщину у декілька точок сітки у  $q$ -напрямку.

Приблизний розмір коротких дерев представлений на рис. 2.11. Розмір дерева (рис. 2.11 пунктирна лінія) приблизно такий же як і у двічі меншого дерева (рис. 2.11 суцільна лінія). Товщина дерева, таким чином, зменшується до 3 або 4 рядків детектора, не залежно від обраної роздільної здатності. Кожний  $i$ -тий крок у "нисхідному" процесі побудови дерев зменшує у двічі товщину довшого дерева  $d_{i-1}$ . Таким чином отримується приблизна товщина короткого дерева



$$d_i = \lfloor d_{i-1} / 2 \rfloor + 2 \quad (2.42)$$

Рис. 2.11. Розмір дерева зв'язків, побудованого з удвічі меншого дерева зв'язків

2-Дерев є у двічі більше ніж 1-дерев, оскільки у двічі більше є  $\theta$ -позицій, з яких вони починаються. Припустимо, що 1-дерево складається з  $s$  зв'язків. Загальна кількість зв'язків, створених від другого кроку до  $\log_2 N_\theta - 2$  кроку є

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=2}^{\lg N_{\theta}-1} \underbrace{N_t N_{\theta} N_q 2^{1-i}}_{\text{кількість дерев}} \cdot \underbrace{c 2^{i-1}}_{\text{кількість зв'язків у дереві}} = \\
 & = c N_t N_{\theta} N_q (\lg N_{\theta} - 3) \in O(N^3 \log N)
 \end{aligned}
 \tag{2.43}$$

Кількість зв'язків, що створюються у кожному кроці виконання алгоритму, приведена в таблиці 2.2. Це дає можливість оцінити кількість операцій для даних з плаваючою точкою, необхідних для обчислення цих зв'язків. Основний крок (2.36) вимагає 4 множення і 7 додавань, якщо всі чотири вагові коефіцієнти інтерполяції обчислені наперед. Останній зв'язок потребує 16 множень і 15 додавань в кожному квадранті. В таблиці 2.2 наведена кількість операцій для даних з плаваючою точкою при  $N = 128$ .

Традиційне зворотне проектування вимагає білінійної інтерполяції для кожного вокселя і кута проектування. Білінійна інтерполяція складається з трьох лінійних інтерполяцій, кожна з яких вимагає два множення і одне додавання. Це збільшує загальну КОДзПТ до [70]

$$(3 \cdot 3 + 1) N_x N_y N_z \frac{\pi}{4} N_{\theta} = 2.5 \pi N^4, \quad N = N_x = N_y = 2 N_z = N_{\theta} / 2
 \tag{2.44}$$

Результати порівняння швидкого і традиційного зворотних проектувань приведені в таблиці 2.3. Кількість поданих для порівняння операцій не включає індексацію або геометричні обчислення, так як це подавало б розроблений алгоритм більш ефективним при використанні таблиці попередніх обчислень.

Таблиця 2.2

Необхідна кількість зв'язків при  $N = N_x = N_y = 2N_z = N_q = N_\theta / 2 = 128$

Розмір зв'язку	Кількість унікальних зв'язків	Кількість однакових зв'язків	Загальна кількість, $10^6$	Кількість додавань	Кількість множень	КОДзПТ, $10^9$
Воксели	8025088	1	0,8	63	64	105
64	3052781	4	12	7	4	134
32	2477849	8	20	7	4	218
16	1462633	16	23	7	4	257
8	845834	32	27	7	4	298
4	544317	64	35	7	4	383
2	380836	128	49	7	4	536
Всього	9589338		167			

Таблиця 2.3

Необхідна кількість операцій для даних з плаваючою точкою при реконструкції методами швидкого і традиційного зворотного проектувань з параметрами

$$N = N_x = N_y = 2N_z = N_q = N_\theta / 2.$$

N	64	128	256	512	1024
Традиційне зворотне проектування	$1 \cdot 10^8$	$2 \cdot 19^9$	$3 \cdot 10^{10}$	$5 \cdot 10^{11}$	$8 \cdot 10^{12}$
Швидке зворотне проектування	$2 \cdot 10^8$	$2 \cdot 19^9$	$2 \cdot 10^{10}$	$2 \cdot 10^{11}$	$1 \cdot 10^{12}$

2.2.3. Визначення об'єму пам'яті для реалізації швидкого алгоритму тривимірної реконструкції. Для реалізації алгоритму необхідні дві основні області пам'яті ПЕОМ: перша область для обчислених значень зв'язку, друга – для інформації, необхідної для конструкції зв'язку, в якій містяться коефіцієнти інтерполяції і адреси значень зв'язку. В якості першої області може виступати операційна пам'ять (ОЗП), а для іншої – постійна пам'ять (ПЗП).

Значення зв'язків, що створюються в кожному з  $\log_2 N_\theta - 2$  кроків алгоритму, необхідні тільки як вхідні дані для наступного кроку і можуть бути відкинуті в подальшому обчисленні. Отже, операційна пам'ять, що зберігає ці значення може бути розбита на дві частини: одна достатньо велика для збереження значень, обчислених в попередньому кроці, і інша, -менша - для поточних обчислень. Після того, як один крок алгоритму виконаний, вміст першої частини ОЗП стає непотрібним і дана частина операційної пам'яті може використовуватися для розміщення результатів наступного кроку. Таблиця 2.2 показує, що кількість зв'язків зменшується з кожним наступним кроком. Отже необхідний об'єм пам'яті визначається кількістю 2-зв'язків, яка завжди  $O(N^3)$ .

Для будь-якого довгого зв'язку при нисхідному підході його побудови інформація про всі необхідні зв'язки меншої довжини має бути розміщена в певну таблицю (область пам'яті). Основна ідея алгоритму швидкого зворотного проектування полягає в тому, що кожне значення зв'язку використовуватиметься в кількох обчисленнях основного кроку. Отже, його значення може бути обчисленим декілька раз. В спадному процесі побудови зв'язків постає необхідність перевіряти чи даний зв'язок вже протабульований, щоб уникнути зайвих дублікатів.

Завдяки симетрії зв'язків, поясненої вище, для обчислення  $O(N^3 \ln N)$  зв'язків необхідно лише  $O(N^3)$  введень в постійну пам'ять, а не  $O(N^3 \ln N)$ .

При побудові ідеального дерева враховується лише довжина дерева,  $\theta_{n_1} - \theta_{n_2}$ , а не значення  $\theta_{n_1}$  і  $\theta_{n_2}$ . Отже, форма ідеального дерева є незалежною від  $\theta$ -координати його кореня. При прийнятті до уваги ефектів дискретизації, дана властивість не завжди буде справедлива; кілька зв'язків у межах дерева можуть відрізнитися від

зв'язків інших дерев вздовж  $\theta$ -осі. Незважаючи на ці відмінності, можливо створити таблиці конструкції зв'язку  $\theta$ -незалежними. Для її реалізації необхідно протабулювати всі "нестандартні" зв'язки, щоб вони були доступними. Хоча декілька зв'язків і будуть непотрібними, дана процедура зменшить загальний розмір таблиці до

$$\sum_{i=2}^{\log_2 N_\theta - 2} \underbrace{N_r N_q}_{\text{кількість дерев}} \cdot \underbrace{c 2^{i-1}}_{\text{кількість зв'язків у дереві}} = 2c N_r N_q (2^{\log_2 N_\theta - 3} - 1) \in O(N^3) \quad (2.45)$$

введення даних в пам'ять, кожне з яких складається з восьми табличних індексів, що вказують на зв'язки, з яких буде обчислюватися довший зв'язок, і чотирьох вагових коефіцієнтів інтерполяційної функції. Табличний індекс заносяться в операційну пам'ять розміром  $O(N^3)$ , і отже, вимагають  $O(\log_2 N^3) = O(\ln N)$  біт кожний, в результаті необхідний розмір постійної пам'яті складає  $O(N^3 \ln N)$ .

Інша перевага створення  $\theta$ -незалежної таблиці – це можливість припущення, що всі дерева починаються в точці з координатою  $\theta_{n_1} = 0$ , що суттєво спрощує геометричні обчислення (2.28) - (2.30). Щоб зекономити пам'ять за рахунок обчислень, необхідно табулювати лише  $\varpi_r$  і  $\varpi_q$  за допомогою (2.35), оскільки чотири вагових коефіцієнта інтерполяційної функції легко обчислюються за дві операції віднімання і чотири множення.

Традиційне зворотне проектування вимагає  $N_x N_y N_z N_\beta \in O(N^4)$  введення в постійну пам'ять, але як вказано в [71] їх можна зменшити до  $N_\phi N_r N_z \in O(N^3)$ , якщо вокселі, що підлягають реконструкції, розмістити в циліндричній системі координат  $(\phi, r, z)$ , з центром на осі обертання. Схема сканування є тоді незалежною від кута проектування, при умові, що  $\Delta\beta$  є кратним  $\Delta\phi$ . Дана методика реалізації зворотного проектування отримала назву "алгоритм циліндра", в ній сумарна кількість обчислень залишилася  $O(N^4)$ .

Завдяки ітераційній інтерполяції згладжувальні ефекти дійсного інтерполяційного ядра зміщуються по висоті і ширині, в порівнянні з ядром, що використовується в кожному кроці [72]. На рис. 2.12 показані  $\pi/8$ -зв'язки, необхідні

для реконструкції певного вокселя, і які роблять внесок в остаточне значення вокселя.

Дійсне ядро розглядається з точки зору відповідності профільтованих значень  $\tilde{p}^p[n, k, m]$  вокселю  $(x_{i_1}, y_{i_2}, z_{i_3})$ . Дана відповідність позначається  $\varpi[i_1, i_2, i_3; n, k, m]$ . Для певного вокселя дійсне ядро має свій носій функції, який утворює кишкоподібний об'єм довкола проекційної кривої вокселя, будучи ідеально тонким в точках  $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \dots, 2\pi$ . Нами визначався воксель і кут проектування, для яких дійсне ядро мало б найбільшу ширину, тобто найбільшу дисперсію в  $(t, q)$ -площині, яка визначається згідно

$$\max_{i_1, i_2, i_3, n} \sum_{k'} \sum_{m'} \varpi[i_1, i_2, i_3, n, k', m'] \left( (k' - k(x_{i_1}, y_{i_2}, \theta_n))^2 + (m' - m(x_{i_1}, y_{i_2}, z_{i_3}, \theta_n))^2 \right) \quad (2.46)$$

Центр ідеального ядра  $(k(x, y, \theta), m(x, y, \theta))$  отримується поєднанням (2.7) і (2.34) з (2.14) і (1.24) [73].

Замінивши трикутне інтерполяційне ядро білінійною інтерполяцією в (2.36) точнішим двоточковим кубічним ядром таким як

$$\begin{aligned} \varpi_t &= 2(k_{cep} - \lfloor k_c \rfloor)^3 - 3(k_{cep} - \lfloor k_{cep} \rfloor)^2 + 1, & \varpi'_t &= 1 - \varpi_t, \\ \varpi_q &= 2(m_{cep} - \lfloor m_{cep} \rfloor)^3 - 3(m_{cep} - \lfloor m_{cep} \rfloor)^2 + 1, & \varpi'_q &= 1 - \varpi_q, \end{aligned} \quad (2.47)$$

отримуємо точніше дійсне ядро. Якщо вагові коефіцієнти попередньо обчислені і занесені в пам'ять, то недоліків застосування цієї, нібито складної, бікубічної інтерполяції немає.

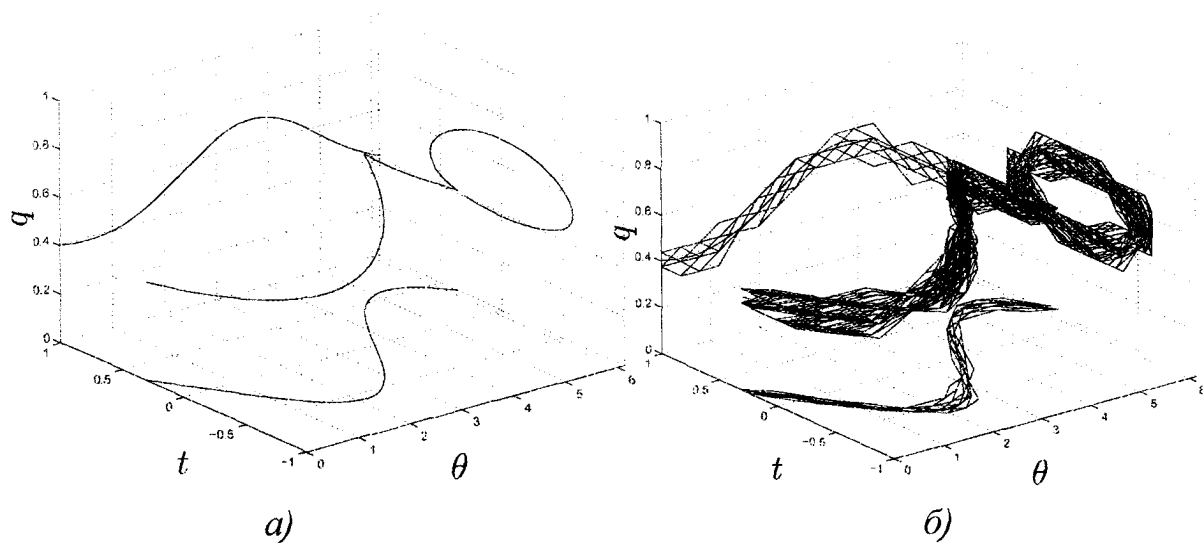


Рис. 2.12 - Необхідні для реконструкції вокселя зв'язки:

- а) - проєкційна крива вокселя і її проєкції на  $(\theta, q)$ -,  $(\theta, t)$ - і  $(t, q)$ - площини;  
 б) -  $\pi/8$ -зв'язки, необхідні для цієї кривої.

### 2.3. Технічна реалізація методу швидкого тривимірного зворотного проєктування

Нами пропонується два можливих варіанти апаратної архітектури для реалізації алгоритму.

Розглянемо основний крок алгоритму, припустивши, що фільтрування, перепаківка і обчислення значень вокселів з  $\pi/2$ -зв'язків вже виконані.

Оптимізація розмірів постійної пам'яті визначена вище. Для спрощення припускаємо, що структурні зв'язки (ті, що будуть використовуватися для побудови довших зв'язків) і вагові коефіцієнти інтерполяційної функції вже занесені в пам'ять. Пропоновані структурні схеми можна легко змінити з врахуванням всіх оптимізацій.

Перший варіант апаратної архітектури зображений на рис. 2.14. Попередньо обчислені значення структурних зв'язків і вагові коефіцієнти інтерполяційної функції з індексами зв'язків і відповідними їм адресами вагових коефіцієнтів зберігаються у постійній пам'яті (ПЗП). Таким чином, кожний основний крок



використовує вісім значень з пам'яті. Дані вісім значень зв'язків необхідно лише посортувати за довжиною (внутрішнє розташування зв'язків однієї довжини є довільним). Значення зв'язку зберігається в операційній пам'яті, яка розділена на дві половини, як було згадано раніше. Спочатку верхня половина операційної пам'яті заповнюється профільтрованими проекційними даними. Далі в кожному часовому циклі значення структурного зв'язку нормується і додається. В кожній восьмій ітерації отримуємо повне нове значення зв'язку, після накопичуючий регістр пам'яті очищується, а лічильник адресації в нижній частині операційної пам'яті збільшується на одиницю. Після одного циклу алгоритму, тобто коли значення всіх зв'язків певної довжини обчислені, верхня і нижня частини операційної пам'яті взаємно міняються. Цю взаємозаміну бажано здійснювати за допомогою адресної логіки операційної пам'яті, а не переносом дійсних даних. Коли операцію завершено, значення всіх  $\pi/2$ -зв'язків зберігаються у нижній частині ОЗП, готові до застосування у обчисленні результуючого значення вокселя, яке буде здійснюватися іншим програмним забезпеченням.

Вміст постійної пам'яті зчитується у послідовному порядку і, таким чином, може зберігатися на якомусь додатковому пристрої, наприклад жорсткому диску. Недоліком даної схеми є те, що для обчислення кожного значення зв'язку необхідно вісім часових циклів і всі коефіцієнти інтерполяційної функції зберігаються двічі в постійній пам'яті.

Розглянемо детально обчислення одного значення зв'язку за часовий цикл.

При двоточковій лінійній інтерполяції завжди використовуються дві точки (зліва і справа від інтерпольованої точки) на сітці дискретизації. Іншими словами використовується точка з парним і непарним індексом. Якщо узагальнити дане спостереження для основного кроку, можна помітити, що вісім коротких зв'язків довжиною  $l$  завжди можна поділити на наступні вісім непов'язних класів:

$\theta_{n_1}/l - \text{парне}, k_2 - \text{парне}, m_2 - \text{парне}$

$\theta_{n_1}/l - \text{парне}, k_2 - \text{парне}, m_2 - \text{непарне}$

$\theta_{n_1}/l - \text{парне}, k_2 - \text{непарне}, m_2 - \text{парне}$

⋮

$\theta_{n_1}/l - \text{непарне}, k_2 - \text{непарне}, m_2 - \text{непарне}$

по одному зв'язку в кожному класі. Таким чином половину операційної пам'яті, призначена для зберігання значень зв'язків, можна розділити на вісім класів виконати завершений крок інтерполяції за один часовий цикл (рис.2.15).

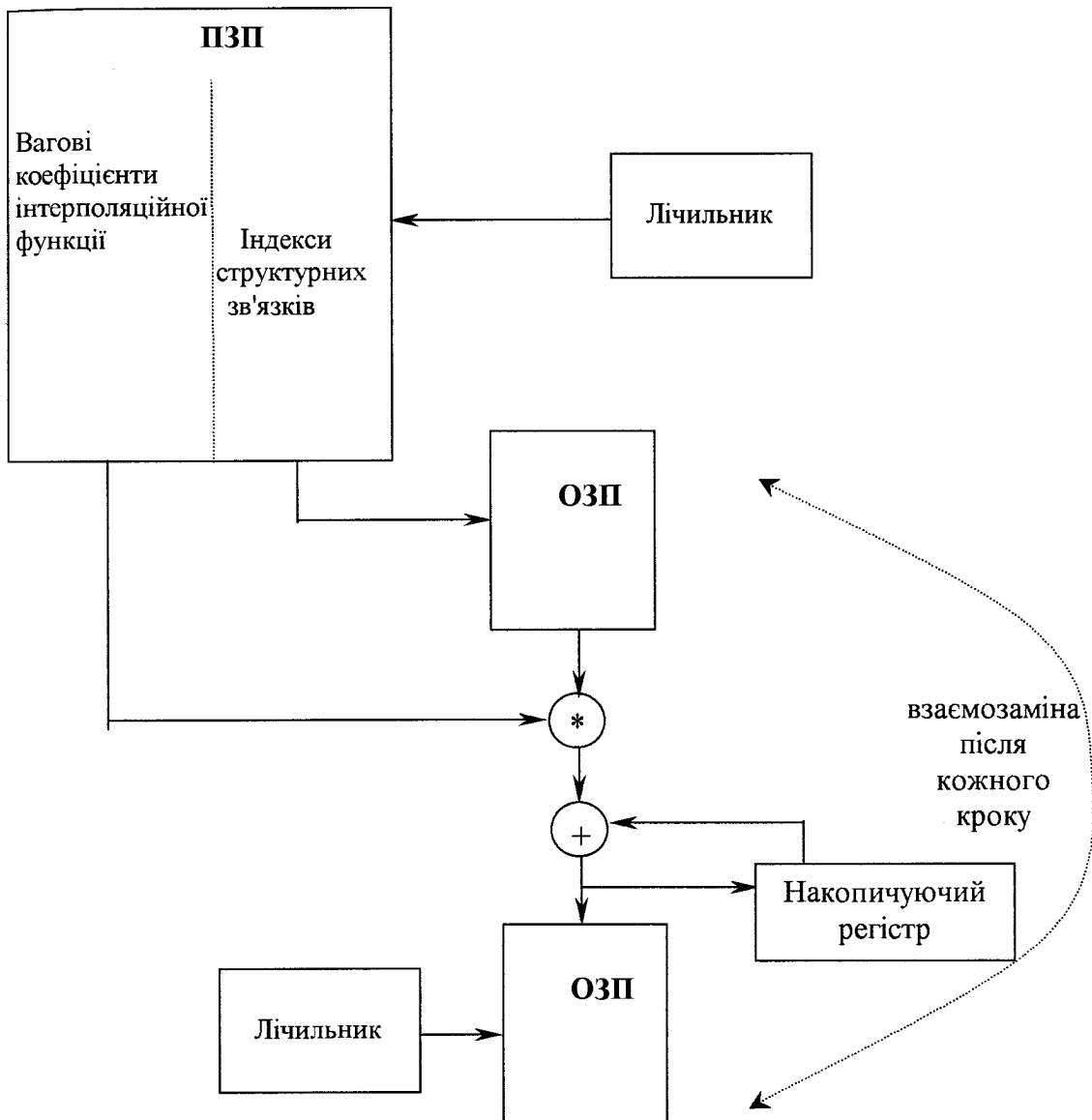


Рис. 2.14. Схема апаратної архітектури, що виконує основну частину алгоритму зворотного проектування

Нові значення зв'язку зберігають у відповідній класу секції нижньої половини ОЗП. Рішення щодо відповідності секції можна прийняти попереднім сортуванням

зв'язків у постійній пам'яті у зручному порядку, так щоб три найменш важливі біти лічильника адресації нижньої частини ПЗП могли повторюватися вісьма секціями як показано на рис.2.15. Кожний крок  $i = 2, \dots, \log_2 N_\theta - 1$  лічильник адресації постійної пам'яті буде збільшуватися в кожному  $N_\theta 2^{1-i}$  часовому циклі.

Необхідний розмір кожного сегменту ОЗП визначається кількістю 2-зв'язків згідно таблиці 2.2 і становить  $49 \cdot 10^6 < 2^{23}$  для  $N = 128$ . Індеси зв'язків в ПЗП, таким чином, вимагатимуть 23 біти кожний.

Розглянемо значення зв'язку в перших чотирьох сегментах ОЗП і припустимо, що попереднє сортування у ПЗП здійснюється так, що вони сортуються за нисхідним пріоритетом  $\theta_{n_1}, t_{k_1}, q_{m_1}, t_{k_2}, q_{m_2}$ . Тоді чотири перші вказівники значення структурного зв'язку матимуть приблизно однакові значення. Таким чином, дуже ефективно було б зберігати різницю (зміщення) першого індексу зв'язку з індексами 2, 3 і 4 замість їх дійсних значень. Таку ж схему можна застосовувати для останніх чотирьох сегментів ОЗП, якщо вони сортувалися за нисхідним принципом  $\theta_{n_2}, t_{k_2}, q_{m_2}, t_{k_1}, q_{m_1}$ .

Реконструювати об'ємне зображення можна, поділивши його в середній площині на дві частини, і використовуючи проекційні дані з верхньої і нижньої половин проекційних рядів відповідно. Але обчислені значення  $\pi/2$ -зв'язків з коренями в різних  $\theta$ -координатах розділити неможливо. Отже, проекційні дані можна поділити на такі вісім класів (груп):

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, q < 0$$

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, q \geq 0$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi, q < 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{3\pi}{2} \leq \theta < \pi, q \geq 0$$

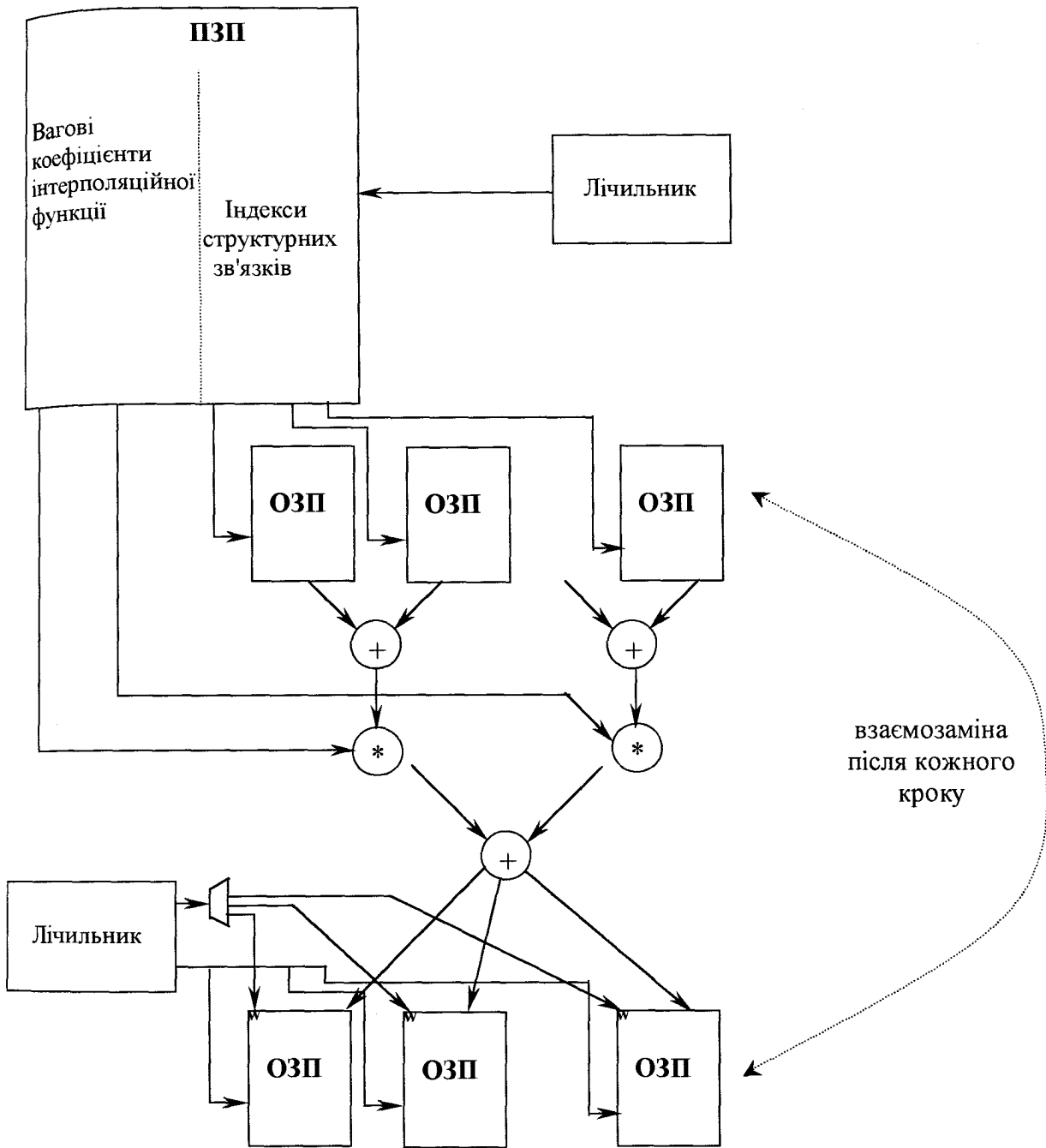


Рис. 2.15. Схема апаратної реалізації обчислення одного значення зв'язку за один часовий цикл.

з апаратним забезпеченням, що буде виконувати основну частину алгоритму зворотного проектування по кожній з груп паралельно.

Якщо отримання проєкційних значень і реконструкцію розглядати як єдину систему, то швидкодію обробки даних знижує їх перепаківка до даних від паралельної схеми сканування. Першу паралельну проєкцію можна отримати тільки

після повороту джерела на кут  $2\gamma_{max}$  і надалі швидкість обробки даних є сталою. Швидке зворотне проектування можна починати одразу після визначення квадратну даних від паралельної схеми сканування.

Головною метою попереднього розрахунку об'єму ПЗП було спрощення й оптимізація "обрізки" (відкидання) непотрібних зв'язків. Саме дані в ПЗП для даної операції вимагають нисхідну побудову дерев, тобто визначення зв'язків від більших до менших. Розглянемо апаратне забезпечення, яке дозволяє зменшити розмір ПЗП шляхом зберігання інформації для "обрізки дерев", обчислених вагових коефіцієнтів інтерполяційної функції та адрес значень зв'язку в процесі обчислення.

Інформація для виконання "обрізки дерев" - це значення одного біту пам'яті для кожного можливого зв'язку, яке вказує потрібно чи ні обчислювати дане значення зв'язку. Розпаковка такого групового кодування є фактично миттєвою операцією, і тому дану область пам'яті можна використовувати для створення потоку  $(t_{k_1}, q_{m_1}, 0; t_{k_2}, q_{m_2}, \theta_{n_2})$  ідентифікаторів зв'язку. Тоді рівняння (2.29) - (2.36) можна використовувати для визначення ідентифікаторів восьми структурних зв'язків і відповідних вагових коефіцієнтів інтерполяційної функції. Дані рівняння спрощуються шляхом прийняття, що  $\theta_{n_1} = 0$ , внаслідок чого значення вагових коефіцієнтів для  $\left(\frac{N_\theta}{n_2} - 1\right)$  дублікатів зв'язків однакової довжини будуть рівними.

Залишається проблема адресації значення зв'язку в ОЗП. Схема прямого адресування вимагала б  $O(N^4)$  біт розміру ОЗП, з переважно непотрібними адресами, оскільки в кожному кроці обчислення є лише  $O(N^3)$  "необрізаних дерев" зв'язків. Отже, якщо отримати інформацію про зв'язки, дерева яких будуть обрізатися, заздалегідь, то розмір ОЗП, у цьому випадку,  $O(N^3)$  біт був би достатнім.

Для апаратної реалізації розробленого методу швидкого тривимірного зворотного проектування доцільно використати ПЕОМ типу Pentium 2 з об'ємом оперативної пам'яті - 128 МВ та постійної пам'яті - 10ГВ. Тобто апаратні вимоги для нормальної роботи алгоритму є мінімальними.

## Висновки до другого розділу.

1. Розроблено методи швидкої реконструкції з використанням зворотного проектування для відновлення двовимірних і тривимірних об'єктів.

2. Досліджено, що комплексність методу швидкої тривимірної реконструкції і доведено, що вона становить  $O(N^3 \ln N)$  операцій замість  $O(N^4)$  операцій, які притаманні традиційним методам. Використання методу є найбільш доцільним при відновленні об'єкту з великою роздільною здатністю, або при умові реконструкції з великого масиву проекційних даних.

3. Для відновлення тривимірного об'єкта з роздільною здатністю  $512 \times 512 \times 1024$  традиційним методом необхідно  $5 \cdot 10^{11}$  операцій. Швидкий метод реконструкції відновлює зображення розміром  $512 \times 512 \times 1024$  за в два з половиною рази менше операцій при збереженні якості зображення, або за таку ж кількість операцій відновлює зображення з роздільною здатністю  $739 \times 739 \times 1458$ , яка є майже у півтора рази вищою.

4. Зменшено комплексність тривимірного FDK-методу, яким реконструюються тривимірні зображення в рентгенівській томографії, завдяки зменшенню складності тривимірного зворотного проектування, яке входить у даний метод як складова частина.

5. Розроблено метод технічної реалізації швидкого тривимірного зворотного проектування. Визначено типи і об'єми пам'яті необхідні для реалізації алгоритму.

6. Визначено, що апаратна реалізація даного методу вимагає  $O(N^3)$  біт ПЗП.

Для аналізу і оцінки якості розробленого методу визначення складу тривимірних об'єктів необхідно провести фізичний експеримент. Виконання цього кроку вимагає моделювання томографічного експеримента, а саме отримати реальні значення рентгенівських проекцій об'єкту і з них відновити зображення його внутрішньої структури. Чисельне моделювання даного експерименту дозволяє узагальнити об'єкт дослідження, а саме відтворити основні дефекти біологічних і технічних об'єктів одночасно.

## РОЗДІЛ 3

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЕКЦІЙНИХ ЗНАЧЕНЬ РЕНТГЕНІВСЬКОГО  
ВИПРОМІНЮВАННЯ ДЛЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЇ ТРИВИМІРНОЇ  
ТОМОГРАФІЇ

За процедурою досліджень реконструктивна томографія представляє собою двоетапний метод. На першому етапі (збір даних) об'єкт зондується проникаючим випромінюванням в різних напрямках і реєструють поле на виході багатоеlementної системи детекторів, тобто формується так званий набір проекцій. На другому етапі сукупність отриманих проекційних даних обробляється на комп'ютері або спеціальним процесором згідно заданого алгоритму відновлення зображень. Таким чином, з метрологічної точки зору, томографічні вимірювання є опосередкованими (непрямими), тобто вимірювана характеристика або параметр реєстрованого поля пов'язана з досліджуваною деяким функціональним співвідношенням.

При визначенні можливості томографічної реконструкції внутрішньої структури об'єкта за лінійними проекціями (інтегральним характеристиках вздовж траєкторії зондуючого променя) для конкретної схеми зондування (сканування) необхідно вирішити наступні завдання:

1. вибрати модель середовища, котра б адекватно відповідала вибраній фізичній характеристиці об'єкта;
2. отримати в аналітичній формі рівняння поширення випромінювання для вибраної моделі середовища при заданій схемі зондування;
3. отримати рівняння, яке б пов'язувало вимірювані параметри пронизуючого чи розсіяного випромінювання із досліджуваними характеристиками середовища, (тобто отримати основне інтегральне рівняння типу інтеграла Радона, що визначає значення інтегральної характеристики (променевої проекції) вздовж траєкторії поширення зондуючого випромінювання);
4. отримати формулу інверсії або визначити алгоритм розв'язку отриманого інтегрального рівняння.

Четверте завдання розв'язан у другому розділі – розроблено швидкий метод тривимірної реконструкції. Крім того, аналіз і висновки щодо точності розробленого методу можна здійснити тільки за якістю відновленого певними алгоритмами одного й того ж самого зображення і часом (швидкістю) цієї реконструкції. Звідси випливає необхідність оцінки якості відновленого зображення,

Це можливо зробити 2 методами:

- за допомогою практичного експерименту: відновлення об'єкту з наперед визначеними у всіх точках характеристиками, при чому кількість однакових об'єктів має дорівнювати як мінімум кількості дослідів.

- для можливості здійснення багатократного порівняння створити не реальний, а віртуальний об'єкт, що дозволить зробити оцінку точності методу реконструкції інваріантною. При такому підході технічні характеристики самого томографа, різні завади не будуть впливати на результат оцінки.

Отже, враховуючи вищенаведені вимоги необхідно змоделювати об'єкт дослідження (задача 1) і для можливості його реконструкції змоделювати процес отримання проєкційних даних: вивести аналітичну залежність функції проєкційних даних від функції об'єкта (задача 3), здійснити моделювання томографічної схеми сканування (задача 2).

Проєкційні дані умовно можна поділити на ідеальні та реальні, які отримуються на практиці. Різницю між ними, що призводить до спотворення і зашумлення проєкційних даних, спричиняють фізичні ефекти збільшення жорсткості і розсіювання випромінювання [75]. Також похибку у реальні проєкційні дані вносить різна чутливість рентгенівських детекторів. Крім того, отримані проєкції є дискретними, а не неперервними функціями, внаслідок чого існує систематична втрата певної інформації при реконструкції зображення.

Дослідження точності алгоритму реконструкції здійснюється шляхом порівняння реконструйованого зображення з оригіналом. Отже, необхідно змоделювати томографічний експеримент, тобто процес отримання проєкційних даних для чітко визначеного об'єкта, з яких в подальшому буде відбуватися реконструкція даного об'єкта.



В роботі розроблена і реалізована модель, яка є за своєю суттю гнучкою моделлю тривимірної томографічної машини, що уможливорює:

- довільний вибір схеми сканування (позицію джерела, позицію детектора, орієнтацію, розмір);
- різні траєкторії руху джерела і детектора довкола об'єкта;
- високу точність проєкцій;
- моделювання як ідеальних, так і спотворених проєкційних даних;
- гнучке визначення віртуальних об'єктів.

### 3.1. Принципи отримання проєкційних даних

Якщо об'єкт просвітити рентгенівськими променями інтенсивність кожного променя зменшиться при проходженні через об'єкт. Енергія фотонів, випромінюваних стандартними рентгенівськими трубками для томографії, складає кілька сотень кеВ. Зменшення цієї енергії зумовлене двома факторами [75]: фотоелектричною абсорбцією і комптонівським розсіюванням. Фотоелектрична абсорбція зумовлена тим, що фотони при зіткненні з міцно зв'язаними внутрішніми електронами атома будуть ним захоплені. При цьому енергія фотона повністю перейде до електрона і буде використана ним для подолання енергії зв'язку з атомом. Другий фактор, відомий як комптонівське розсіювання, присутній при попаданні фотона на вільний електрон, або на електрон, що знаходиться на зовнішній орбіті атома. Це спричиняє відхилення фотона від його початкового напрямку і вивільнення енергії електрона. Обидва ці ефекти залежать від енергії фотона. Значення енергії фотона після проходження ним крізь об'єкт реєструється детектором рентгенівського випромінювання.

Розглянемо однорідний об'єкт, що розміщується між рентгенівською трубкою, яка генерує монохроматичне випромінювання, і детектором. Нехай  $N$  - початкова кількість фотонів у досить тонкому промені до проходження ним крізь об'єкт протягом певного часу, і нехай  $r$  - товщина об'єкта, яку проходить промінь (рис.3.1). Після проходження шару товщиною  $\Delta\rho$  кількість фотонів зменшується до

$(N - \Delta N)$ . Нехтуючи ефектом розсіювання, відносну втрату фотонів  $(-\Delta N/N)$  можна вважати пропорційною товщині  $\Delta\rho$ , значення якої знаходиться з виразу

$$-\frac{\Delta N}{N} = \mu\Delta\rho, \quad (3.1)$$

де  $\mu$  - коефіцієнт пропорційності (коефіцієнтом послаблення рентгенівського випромінювання).

При  $\Delta\rho \rightarrow d\rho$  і  $\Delta N \rightarrow dN$  отримуємо диференціальне рівняння. Здійснивши інтегрування виразу (3.1) вздовж променя випромінювання отримаємо вираз

$$-\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = \mu \int_0^r d\rho. \quad (3.2)$$

де  $r$  - довжина шляху, який проходить промінь випромінювання крізь об'єкт.

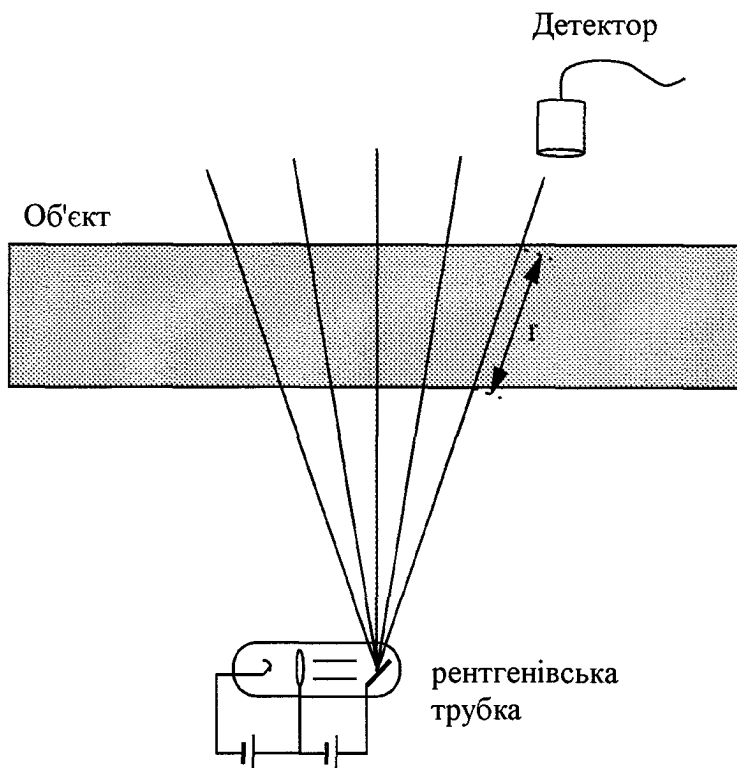


Рис.3.1. Опромінення однорідного об'єкта рентгенівським випромінюванням

Отже,

$$N = N_0 e^{-\mu r}. \quad (3.3)$$

де  $N_0$  - початкова кількість фотонів.

Якщо, як на практиці, об'єкт є негомogenous, то сталий коефіцієнт послаблення випромінювання необхідно замінити функцією послаблення випромінювання  $\mu(x, y, z)$  з трьома просторовими координатами, замість рівняння (3.3) отримуємо наступний вираз

$$N = N_0 \exp\left(-\int_0^r \mu(x, y, z) d\rho\right), \quad (3.4)$$

де  $r$  відстань від джерела випромінювання до детектора в даному напрямку.

Отже, значення проекції  $p$  визначається як від'ємне значення логарифму відношення випущеної (імітованої) і вимірної інтенсивності випромінювання [77]. Згідно з вищезгаданими припущеннями можна вважати, що значення проекції дорівнює значенню лінійного інтегралу через об'єкт і визначається за формулою

$$p(y, z) = -\ln \frac{N}{N_0} = \int_0^r \mu(x, y, z) d\rho, \quad (3.5)$$

якщо детектор - це площина і система координат визначена так, що дана площина паралельна  $yz$  - площині і при обов'язковій умові неперервності вимірювання проекційних даних детектором.

Вищенаведені рівняння є дійсними за умови монохроматичності випромінювання. Однак, на практиці, фотони, що випромінюються рентгенівськими трубками, мають неперервний енергетичний спектр. Нехай  $S_0(E)$  - це енергетичний спектр, який генерується стандартною рентгенівською трубкою, початкова інтенсивність випромінювання якої визначається з виразу

$$N_0 = \int_0^{\infty} S_0(E) dE \quad (3.6)$$

Нехай  $S_d(E)$  - спектр променя, який реєструється детектором. В результаті отримуємо функцію кількості фотонів, які реєструються детектором

$$N = \int_0^{\infty} S_d(E) dE = \int_0^{\infty} \left[ S_0(E) \exp\left(-\int_0^r \mu(x, y, z, E) d\rho\right) \right] dE. \quad (3.7)$$

Отже, що коефіцієнт послаблення випромінювання залежить не тільки від складу досліджуваного об'єкту, але й від енергії фотонів.

В діапазоні енергії, який властивий випромінюванню томографічних рентгенівських трубок, наявний ефект зменшення коефіцієнта послаблення випромінювання для більшості матеріалів зі зменшенням даної енергії [20]. Це призводить до збільшення середньої величини енергії променя під час його проходження через об'єкт і називається ефектом збільшення жорсткості випромінювання. Даний ефект є наявним внаслідок залежності енергії від фотоелектричної абсорбції, яку приблизно, в залежності від матеріалу, можна описати через співвідношення  $\mu(E) \sim E^{-3}$  [74].

Ефект збільшення жорсткості випромінювання є широко розповсюдженою причиною виникнення артефактів у реконструйованих зображеннях, якщо даний ефект не був врахований при створенні алгоритму реконструкції, внаслідок того, що в умовах збільшення жорсткості випромінювання, значення проекції вже не дорівнює значенню лінійного інтегралу (3.5), а визначається залежністю

$$p(y, z) = -\ln \frac{N}{N_0} = -\ln \frac{\int_0^{\infty} \left[ S_0(E) \exp\left(-\int_0^r \mu(x, y, z, e) d\rho\right) \right] dE}{\int_0^{\infty} S_0(E) dE} \quad (3.8)$$

Ці артефакти переважно з'являються у вигляді смуг, які розташовані поряд з частинками, що сильно послаблюють випромінювання.

Комптонівський ефект, що створює додаткове послаблення рентгенівського випромінювання, тобто спотворює проекційні дані, на відміну від фотоелектричної абсорбції має небажані наслідки: частина випадково відхилених фотонів

продовжуватиме рухатись вздовж деякої траєкторії і може бути зафіксована детектором, що спричинить зашумлення проєкційних даних.

Абсолютна інтенсивність таких розсіяних рентгенівських променів є приблизно сталою для будь-яких кутів проєктування. Відносний вплив розсіювання на якість зображення є, таким чином, дуже значним для тих проєкційних даних, які отримуються при просвічування дуже щільної частини об'єкта. Зашумлення даних в процесі отримання проєкцій від розсіювання випромінювання в значній мірі можна позбутися шляхом введення коліматора перед джерелом. Але на практиці повністю позбутися зашумлення неможливо.

3.1.1. Моделювання реальних рентгенівських проєкцій у випадку монохроматичного і поліхроматичного випромінювань. При просвічуванні об'єкта монохроматичним променем послаблення рентгенівських променів не описується сталою функцією загасання  $\mu(x, y, z)$ , оскільки в дійсності послаблення є сталим тільки у певних ділянках об'єкта. Тоді рівняння (3.4) можна переписати у вигляді

$$N = N_0 \exp\left(-\sum_{k=1}^K \mu_k \Delta\rho_k\right) \quad (3.9)$$

де  $\Delta\rho_k$  - це довжина перетину променя  $\rho$  і  $k$ -го об'єкта, який має коефіцієнт послаблення випромінювання  $\mu_k$ . Отже значення проєкції для монохроматичних променів визначається за формулою

$$p(a, c) = \sum_{k=1}^K \mu_k \Delta\rho_k. \quad (3.10)$$

Необхідно зауважити, що це дійсно при припущенні, що детектор вимірює неперервну функцію проєкційних значень.

При моделюванні монохроматичних рентгенівських променів виникає дві проблеми: моделювання джерела і моделювання послаблювальних характеристик

об'єкта (вираз (3.7)). Випромінюваний спектр  $S_0(E)$  може бути визначений U парами енергетичних рівнів  $E_{0,i}$  і інтенсивностями фотонів  $S_0(E_{0,i})$ . Перше і останнє значення спектру  $S_0(E_{0,1})$  і  $S_0(E_{0,U})$  мають дорівнювати нулю.

Випромінювана інтенсивність  $N_0$  дорівнює інтегралу від енергії (3.6). Якщо припустити, що спектр лінійний між визначеними точками, то можна виразити інтеграл як суму

$$N_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{U-1} S_0(E_{0,i}) (E_{0,i+1} - E_{0,i-1}) \quad (3.11)$$

Аналогічно можна змоделювати функцію загасання  $\mu_m(E)$  для деяких матеріалів. Функція має бути визначена для всього енергетичного спектру джерела, тобто перший енергетичний рівень, де  $\mu(E)$  є визначеним, має бути меншим або рівним найнижчому енергетичному рівню енергії випромінюваного спектру, і навпаки, для найвищого енергетичного рівня. Енергетичні рівні  $E_{\mu,j}$  не повинні бути рівновіддаленими, але переважно є такими.

Якщо припустити, що між певними точками функція послаблення є лінійною, то модельований результуючий спектр  $S_d$  можна отримати обчисленням по всіх енергетичних рівнях  $E_{0,i}$  і  $E_{\mu,j}$ , де  $S_0(E_{\mu,j})$  є більше за нуль. Якщо через  $E_{\nu x,l}$  позначити всі такі енергетичні рівні, тоді  $N$  з рівняння (3.7) можна записати

$$N = \frac{1}{2} \sum_{l=2}^{W-1} S_0(E_{\nu x,l}) \exp\left(-\sum_{k=1}^K \mu_{m(k)}(E_{\nu x,l}) \Delta\rho_k\right) (E_{\nu x,l+1} - E_{\nu x,l-1}) \quad (3.12)$$

де  $\mu_{m(k)}(E)$  - функція послаблення випромінювання для матеріалу k-го об'єкта.

Використовуючи (3.11) і (3.12) можна обчислити  $N_0$  і  $N$  для даного променя і, таким чином, визначити значення проекції від джерела поліхроматичного випромінювання згідно виразу (3.8).

На рис. 3.2 подана графічна інтерпретація сказаного.

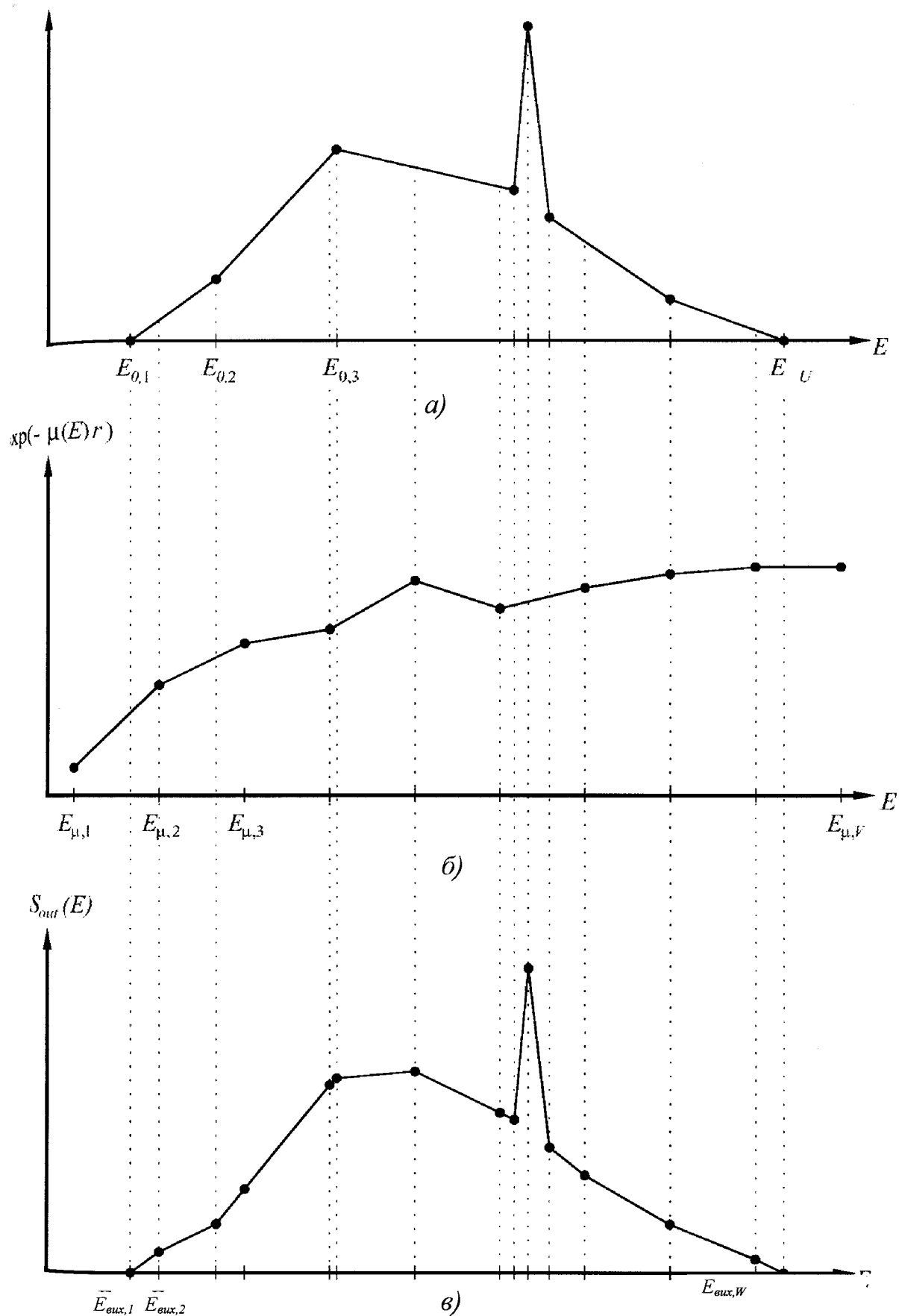


Рис. 3.2. Графічна інтерпретація взаємодії рентгівського випромінювання певного спектру з матеріалом виробу

- а) – інтенсивність випромінювання рентгенівської трубки в залежності від енергетичних рівнів
- б) - залежність коефіцієнта послаблення випромінювання об'єкта;
- в) - залежність інтенсивності зареєстрованого детектором випромінювання.

Рівняння (3.11) і (3.12) є справедливими, якщо вважати, що детектори здатні вимірювати значення проєкцій в неперервному режимі.

Технічно апарат детектора складається з кількох, зазвичай квадратних чи прямокутних детекторів, вихідний сигнал якого складається з суми всіх променів, що приймаються ним. На практиці можливим є отримання тільки дискретних даних.

Отже, у випадку монохроматичного випромінювання дійсне проєкційне значення для одного детектора визначається об'ємним інтегралом по піраміді з основою, що дорівнює площі детектора (при нехтуванні ефектом розсіювання) (рис.3.3 а) [83]. Така модель обчислення проєкційних даних потребує надзвичайно великої кількості розрахунків, і, відповідно, значних витрат часу. Швидший спосіб обчислення проєкційних даних полягає у обчисленні лінійного інтегралу вздовж центрального прохідного променя (рис.3.3 б). Але результат цього обчислення буде досить наближеним. Кращий результат отримується, якщо обчислювати середнє арифметичне значення лінійних інтегралів вздовж однотипних променів (рис.3.3 в), наприклад чотирьох променів. Для спрощення можна використати квадрат деякого числа  $R^2$ . В результаті отримаємо формулу для проєкційних значень від детектора  $p_d$

$$p_d = -\ln \left[ \frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^{R^2} \exp \left( - \sum_{k=1}^K \mu_k \Delta \rho_{k,i} \right) \right], \quad (3.13)$$

де друга сума є лінійним інтегралом для  $i$ -го променя, вираз (3.10);

$\Delta \rho_{k,i}$  - довжина перетину  $i$ -го променя з  $k$ -тим об'єктом.

У випадку поліхроматичних променів лінійні інтеграли необхідно замінити відповідними сумами згідно рівняння (3.8)



$$p_d = -\ln\left(\frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^{R^2} \frac{N}{N_0}\right). \quad (3.14)$$

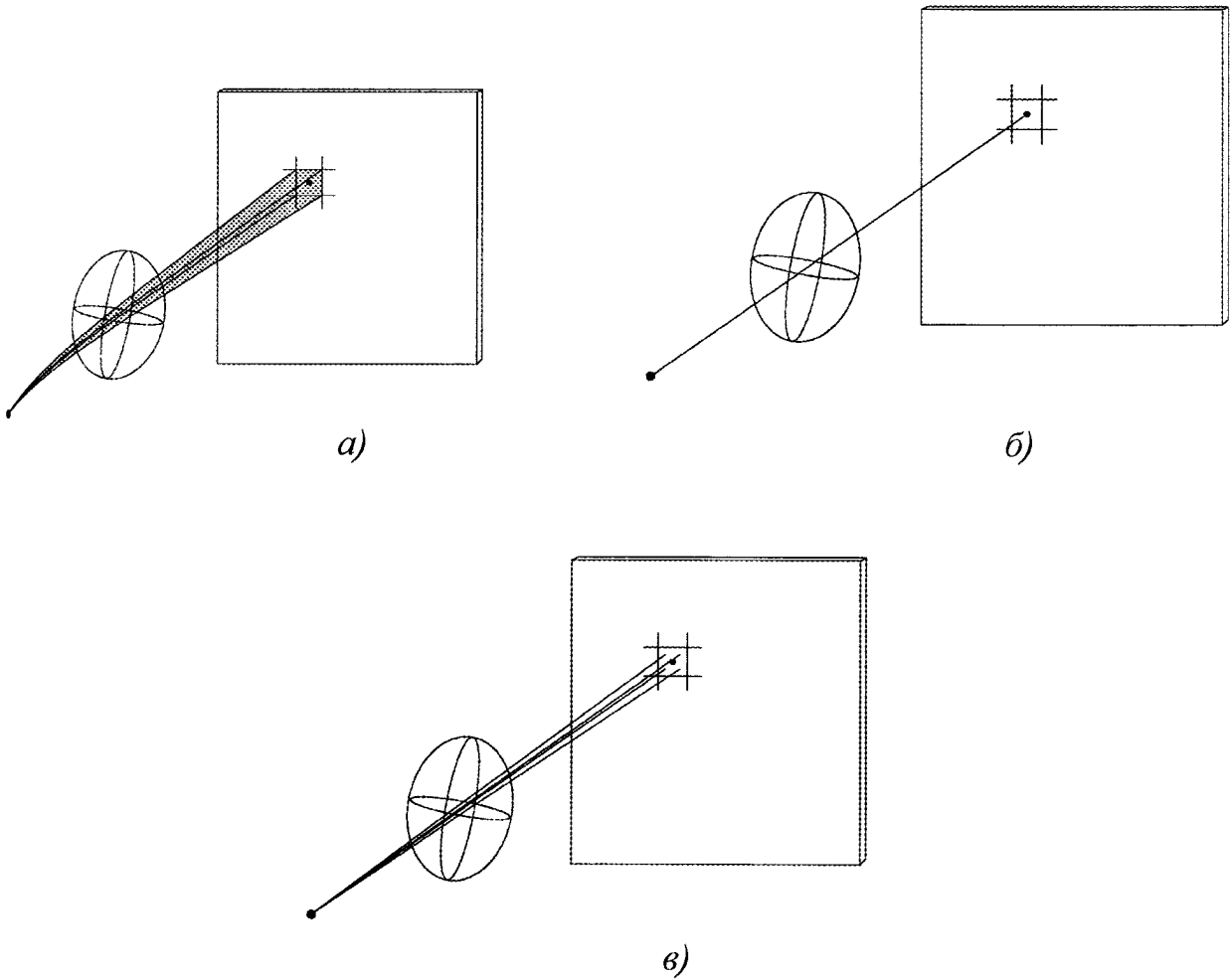


Рис. 3.3. Апроксимація проєкційних значень:

- а) - об'ємний інтеграл;
- б) - апроксимація одним променем ( $R=1$ );
- в) - чотирма променями ( $R=2$ ).

3.1.2. Моделювання реальних проєкційних значень з урахуванням ефекту розсіювання випромінювання. Точне моделювання розсіювання є досить складним процесом, оскільки воно залежить від

енергії фотонів, коефіцієнта послаблення випромінювання певним матеріалом і довжини перетину променя з об'єктом.

Однак вплив енергії фотона на розсіювання є набагато меншим ніж у випадку фотоелектричної абсорбції. Таким чином, можна моделювати розсіювання променя, виходячи впливом енергії випромінювання енергетичного інтервалу звичайних рентгенівських джерел томографічних машин. Припускаємо, що кожний промінь "постачає" певне число фотонів на всі детектори довкола того детектора, на який він падає без розсіювання. Цей додатковий "внесок" до проекційних значень оточуючих детекторів пропорційний інтегралу інтенсивності випромінювання вздовж променя і зменшується зі збільшенням відстані між детекторами.

При обчисленні "внесків" всіх променів внаслідок розсіювання для кожного променя враховуємо лише ті промені, значення проекцій яких вже обчисленні згідно формул (3.13) і (3.14).

Розсіювальні характеристики променя можна визначити за допомогою двох параметрів: широти розсіювання  $\eta$ , яка визначає максимальну відстань між двома променями, які створюють взаємне зашумлення проекційних даних; і розсіювальний пік  $\sigma$ , який характеризує інтенсивність розсіювання [76].

Нехай  $p$  - ідеальне значення проекції променя, а  $\hat{p}$  - зашумлене.  $\hat{p}$  можна виразити як дискретну згортку  $p$  з нормуючою (ваговою) функцією  $\varpi$

$$\hat{p}(a, c) = \sum_{(\bar{a}, \bar{c}) \in R} \varpi(a - \bar{a}, c - \bar{c}) p(\bar{a}, \bar{c}), \quad (3.15)$$

де  $R$  - набір всіх точок у площині детектора, через які проходить один з розглянутих променів.

Вагова функція визначається з наступного виразу [77]

$$\varpi(a, c) = \begin{cases} \frac{\nu(a, c)}{V}, & \text{якщо } \sqrt{a^2 + c^2} < \eta \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases}, \quad (3.16)$$

$$v(a, c) = \begin{cases} \sigma \left( 1 - \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{\eta} \right) & a \neq 0 \text{ або } c \neq 0 \\ 1 + \sigma & a = 0 \text{ } c = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

$$V = \sum_{\sqrt{a^2 + c^2} < \eta} v(a, c). \quad (3.18)$$

При реконструкції зображення з проекційних значень, обчислених за формулами (3.13) і (3.14), виникають артефакти у реконструйованому зображенні внаслідок того, що більшість алгоритмів реконструкції припускають, ніби фантом складається з вокселів у формі куба зі сталими коефіцієнтами послаблення.

Даний ефект отримав назву часткового поглинання [75], або ефекту часткового об'єму [77]. Цей ефект є однаковим для двовимірної і тривимірної томографії.

Розглянемо об'єкт з великим значенням густини  $\mu$ , що рівний за розміром половині пікселя (рис. 3.4), і простір довкола якого не послаблює випромінювання. Нехай значення розміру пікселя дорівнює  $d$ , тоді двовимірні проекційні дані будуть приблизними, значення яких розраховуються з наступного виразу [78]

$$p_d(z) = -\ln\left(\frac{e^{-\mu d} + e^{-0}}{2}\right) = -\ln(e^{-\mu d} + 1) + \ln 2 \quad (3.19)$$

Спростивши даний вираз отримаємо

$$p_d(z) = -\ln(e^{-\hat{\mu}d}) = \hat{\mu}d, \quad (3.20)$$

де  $\hat{\mu}$  - середнє значення коефіцієнта послаблення випромінювання пікселем.

Якщо кут між найвіддаленішими променями позначити  $\alpha$  (в радіанах), тоді точніше значення проекції визначається виразами

$$p_d(z) = -\ln[\exp(-\mu kd) + 1] + \ln 2$$

$$\text{і } k(\alpha) = \frac{2}{\alpha} \ln\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha + \pi}{4}\right).$$

Для малих значень  $\alpha$   $k \approx 1$ . Рівняння (3.20) може бути переписане до

$$p(z) = \hat{\mu}kd,$$

$$\hat{\mu}(d) = -\frac{1}{d}(\ln(e^{-\mu d} + 1) - \ln 2), \quad (3.21)$$

яке не дорівнює середньому значенню коефіцієнта послаблення пікселя  $\mu/2$ .

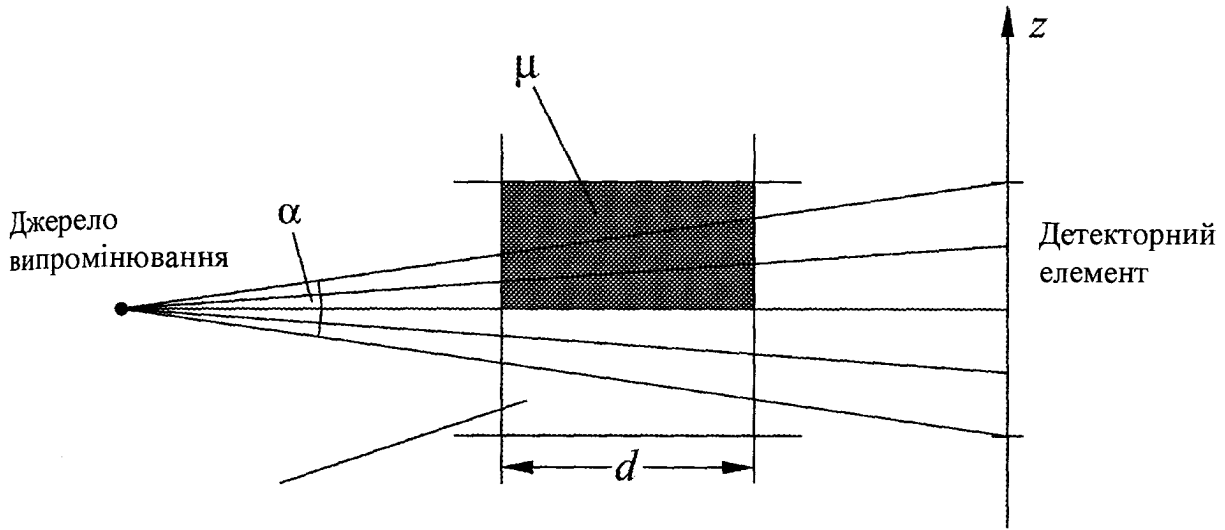


Рис. 3.4. Опромінення об'єкта з великим коефіцієнтом послаблення рентгенівського випромінювання

Для визначення причин артефактів у реконструйованому зображенні, необхідно вилучити артефакти, що виникають внаслідок ефекту часткового згинання випромінювання. Це можна здійснити шляхом обчислення середнього значення проєкційних даних від детектора за наступним виразом, а не за (3.13)

$$p_d = -\ln \left[ \exp \left( -\frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^{R^2} \sum_{k=1}^K \mu_k \Delta \rho_{k,i} \right) \right] = \frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^{R^2} \sum_{k=1}^K \mu_k \Delta \rho_{k,i} \quad (3.22)$$

випадку монохроматичного променя. Відповідну формулу для поліхроматичного променя запишемо

$$p_d = -\ln \left[ \exp \left( \frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^{R^2} \ln \frac{N}{N_0} \right) \right] = -\frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^{R^2} \ln \frac{N}{N_0} \quad (3.23)$$

Основою програми отримання проєкційних даних є трасування променя або, відповідно, обчислення довжини перетину променя з об'єктом. Реконструкція зображення передбачає отримання дискретизованого об'єму, який складається з елементарних об'ємних елементів, так званих вокселів. Для можливості здійснити порівняння реконструйованого зображення з оригіналом, останній має бути представлений у такому самому форматі, що і зображення.

При моделюванні монохроматичного джерела кожний з елементарних об'єктів, з яких складається вихідне зображення, і, отже, кожна точка, має визначену густину або, відповідно, значення коефіцієнта послаблення випромінювання. Середнє значення коефіцієнта послаблення  $\mu$  вокселя  $\nu$  може бути обчислене

$$\bar{\mu}_\nu = \sum_{k=1}^K \iiint_\nu \mu_k \delta_k(x, y, z) dx dy dz, \quad (3.24)$$

де

$$\delta_k(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } (x, y, z) \in k\text{-му об'єкту} \\ 0 & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

Дані обчислення потребують значних затрат часу. Швидшою апроксимацією для визначення коефіцієнта послаблення випромінювання вокселем є визначення середнього значення певного числа точок у вокселі (бажано кубічне число  $P^3$ ) (рис.3.5).

Коефіцієнт послаблення для вокселя  $\nu$  тоді визначається з виразу

$$\bar{\mu}_\nu = \frac{1}{P^3} \sum_{p=1}^{P^3} \sum_{k=1}^K \mu_k \delta_{k,p}, \quad \text{де } \delta_{k,p} = \begin{cases} 1 & \text{якщо } p \in k\text{-му об'єкту} \\ 0 & \text{в іншому випадку} \end{cases} \quad (3.25)$$

Вибір  $P$  потрібно робити на підставі співвідношення (пропорційності) розміру об'єкта і розміру вокселя.

У випадку поліхроматичного променя кожна точка у вихідному зображенні має певну функцію енергетичнозалежного послаблення випромінювання, замість сталого коефіцієнта послаблення. Отже, в такому випадку, дискретизація зображення є неможливою.

Однак, якщо задатися довільним коефіцієнтом послаблення для кожного складового елемента об'єкта, на додачу до дійсної функції послаблення, зображення може бути дискретизоване, як і у випадку монохроматичного променя.

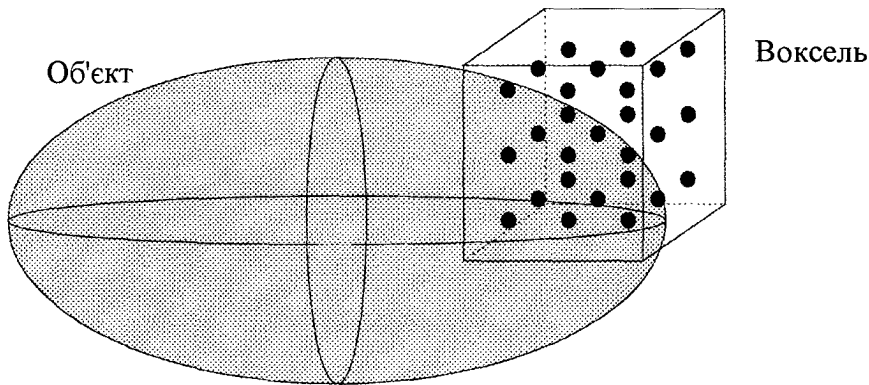


Рис. 3.5. Дискретизація фантому. ( $P=3$ , тобто 27 точок)

### 3.2. Моделювання томографічної системи

Моделювання томографічної системи та руху її елементів буде здійснено в гомогенних координатах [78]. Використання гомогенних координат має одну основну перевагу при роботі з геометричними співвідношеннями між об'єктами і системами координат: даний підхід пропонує найкоротший спосіб опису позиції і орієнтації об'єкта, а також таких операцій як поворот, переміщення, масштабування. Всі ці операції можуть бути виражені множенням матриць і, таким чином, легко і зручно реалізуються в програмному забезпеченні.

При введенні системи гомогенних координат можна виходити за межі об'єкта. Площину у тривимірному просторі, яка перетинає вісі координат в точках  $(a,0,0)$ ,  $(0,b,0)$  і  $(0,0,c)$  (рис. 3.6) можна описати рівнянням

$$\frac{\hat{x}}{a} + \frac{\hat{y}}{b} + \frac{\hat{z}}{c} = 1 \quad (3.26)$$

Для спрощення рівняння (3.26) можна переписати у вигляді

$$bc\hat{x} + ac\hat{y} + ab\hat{z} - abc = 0, \quad (3.27)$$

або, якщо  $\alpha = bc$ ,  $\beta = ac$ ,  $\gamma = ab$  і  $\delta = -abc$ , у вигляді

$$\alpha\hat{x} + \beta\hat{y} + \gamma\hat{z} + \delta = 0 \quad (3.28)$$

де  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  є взаємозалежними. Якщо замість координат  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  підставити залежності

$$\hat{x} = \frac{x}{\varpi}, \quad \hat{y} = \frac{y}{\varpi}, \quad \hat{z} = \frac{z}{\varpi} \quad (3.29)$$

і ввести вектори  $\boldsymbol{\eta} = [\alpha \ \beta \ \gamma \ \delta]^T$  і  $\boldsymbol{\xi} = [x \ y \ z \ \varpi]^T$ , то площина у тривимірному просторі може бути виражена добутком двох векторів  $\boldsymbol{\eta}$  і  $\boldsymbol{\xi}$

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta \varpi = \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\xi} = 0 \quad (3.30)$$

Отже величини  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , або відповідно вектор  $\boldsymbol{\eta}$  повністю визначає позицію площини. Вектор  $\boldsymbol{\xi}$  визначає точку у тривимірному просторі в залежності від значення  $\varpi$ . Якщо прийняти  $\varpi = 1$ , то точка  $\boldsymbol{\xi} = [x \ y \ z \ \varpi]^T$  відповідно до рівняння (3.12) буде мати координати  $\boldsymbol{\xi} = [\hat{x} \ \hat{y} \ \hat{z} \ 1]^T$ , і буде співпадати з точкою  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  в декартовій системі координат.

В загальному,  $\boldsymbol{\xi}$  описує точку для всіх  $\varpi \neq 0$ , звідки  $[x \ y \ z \ \varpi]$  і  $\left[ \frac{x}{\varpi} \ \frac{y}{\varpi} \ \frac{z}{\varpi} \ 1 \right]$  визначають одну й ту саму точку. Звідси, величину  $\varpi$  завжди можна вважати рівною одиниці, якщо  $\boldsymbol{\xi}$  буде визначати будь-яку точку у тривимірному просторі. Розглянемо випадок, коли  $\varpi = 0$ . Очевидно,  $\boldsymbol{\xi}$  описує тепер точку у нескінченності, тобто має зміст напрямку. Ця відмінність опису точок і напрямків є головною перевагою гомогенних координат у порівнянні з

традиційними декартовими системами координат, що не дають змогу інтерпретувати кожен вектор як точку або як напрям.

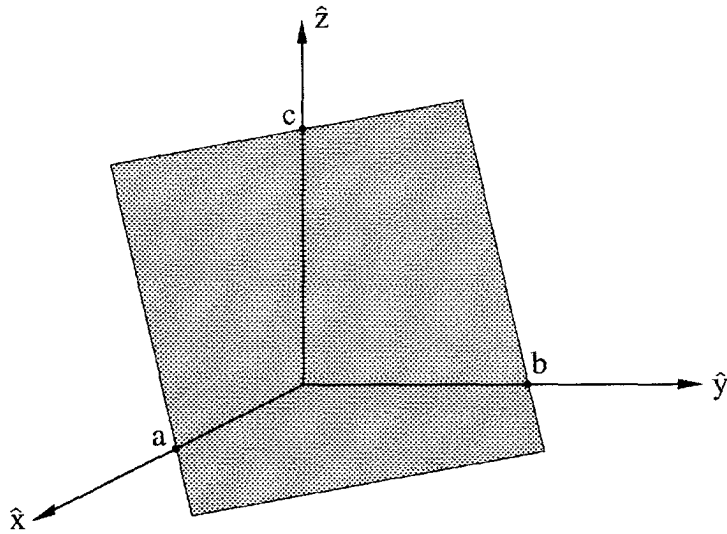


Рис.3.6. Площина у тривимірному просторі

Як правило, система координат у  $n$ -вимірному просторі цілком визначається вектором точки  $M$ , точки відліку системи, і набором  $n$  лінійних незалежних векторів  $x_1 \dots x_n$ . Оскільки точка і напрямок координат описуються  $4 \times 1$ -мірними векторами в гомогенних координатах, то тривимірну систему координат  $C$  можна визначити

$$C = \{ \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m} \}, \quad \text{де } \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{j} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

де  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  - лінійні незалежні вектори напрямків, що відповідають осям системи,  
 $\mathbf{m}$  - це точка відліку системи.

Для забезпечення взаємоперпендикулярності осей  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  необхідне виконання ортогональних обмежень

$$\mathbf{i}^T \mathbf{j} = 0, \mathbf{i}^T \mathbf{k} = 0, \mathbf{j}^T \mathbf{k} = 0 \quad (3.32)$$

і нормалізаційних обмежень, які описуються виразом



$$\mathbf{i}^T \mathbf{j} = 1, \mathbf{i}^T \mathbf{k} = 1, \mathbf{j}^T \mathbf{k} = 1 \quad (3.33)$$

і виконання яких гарантує, що вісі є одиничними векторами.

Більш компактний спосіб представлення системи координат полягає у поданні векторів  $\mathbf{C}$  у вигляді матриці  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k} \quad \mathbf{m}] = \begin{bmatrix} i_1 & j_1 & k_1 & m_1 \\ i_2 & j_2 & k_2 & m_2 \\ i_3 & j_3 & k_3 & m_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Крім того, можна визначити певну систему координат  $\mathbf{R}$ , яка розміщена в точці відліку  $(0,0,0)$  і чий  $n$ -ні осі є одиничними векторами, що визначають  $n$ -вимірний простір. В такому випадку  $\mathbf{R}$  визначається одиничною матрицею  $\mathbf{I}$  згідно виразу

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{x} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{z} \quad \mathbf{o}] \quad (3.18)$$

Надалі така система буде називатися системою посилок або референційною системою, яку ми приймаємо в якості бази.

Будь-яка точка може бути представлена координатами, які пов'язані з системою координат, або базою. Отже, координати точки залежать від бази, в якій вона розглядається. Сама точка вважається нерухомою, тобто, якщо змінити координати, залишаючись в межах тої самої бази, точка не зміщується, а буде описана зовсім інша точка. Така сама властивість є притаманною і для напрямків, оскільки напрямки є точками на нескінченних відстанях від точок відліку їхніх баз.

Якщо база представлена матрицею  $\mathbf{C}$ , визначеною рівнянням (3.34), а координати точки вектором  $\mathbf{p}$ , то точка  $\mathcal{P}$  визначатиметься рівнянням

$$\mathcal{P} = \mathbf{C} \mathbf{p} \quad (3.37)$$

Якщо в якості бази вибрати вищезгадану референційну систему, то точка  $\mathcal{P}$  буде визначатися суто вектором своїх координат  $\mathbf{p}$ .

Визначимо операцію перетворення як операцію, що призначає (скінченній або нескінченній) точці чи набору точок іншу точку, або набір точок. Отже, перетворення можна розглядати як обчислювальний алгоритм отримання координат з інших координат.

Виразимо деяке перетворення  $\mathcal{H}$  як матрицю  $\mathbf{H}$  (матрицю перетворення)

$$\mathcal{H}: \mathcal{V} \mapsto \mathcal{U}, \quad (3.38)$$

де  $\mathcal{U}$  є точкою призначеною до  $\mathcal{U}$ .

Нехай  $\mathcal{U}$  і  $\mathcal{V}$  описуються векторами  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$ , координати яких пов'язані з певною базою  $\mathbf{C}$ . Отже, дане перетворення можна описати рівнянням

$$\mathbf{C} \mathbf{H} \mathbf{v} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} h_{11} v_1 + h_{12} v_2 + h_{13} v_3 + h_{14} v_4 \\ h_{21} v_1 + h_{22} v_2 + h_{23} v_3 + h_{24} v_4 \\ h_{31} v_1 + h_{32} v_2 + h_{33} v_3 + h_{34} v_4 \\ h_{41} v_1 + h_{42} v_2 + h_{43} v_3 + h_{44} v_4 \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \mathbf{C} \mathbf{u} \quad (3.21)$$

Для перетворень, що призначають точці (напрямку) іншу точку (інший напрямок), необхідне виконання рівності  $v_4 = 0 - u_4 = 0$ . Дана умова, очевидно, виконується всіма матрицями  $\mathbf{H}$ , чий останній рядок дорівнює  $[0 \ 0 \ 0 \ h_{44}]$ ;  $u_4$  оді визначається  $u_4 = h_{44} v_4$ . Крім того, бажано, щоб умова  $v_4 = 1 - u_4 = 1$  виконувалася завжди. Оскільки обмеження  $u_4 = 1$  дозволяє вектору  $\mathbf{u}$  представляти будь-яку точку у своїй базі, то можна обмежитись умовою  $h_{44} = 1$  без зменшення кількості можливих перетворень (зменшиться лише кількість різних матриць, які представляють однакові перетворення).

У рівнянні (3.38) перетворення було застосовано лише до одного вектора  $\mathbf{v}$ . Якщо необхідно  $n$  гомогенних векторів  $\mathbf{v}_i$ , що визначають точки або напрямки в декартовій базі, піддати тому самому перетворенню, можна укласти їх у  $4 \times n$  матрицю  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n]$  і записати

$$\mathbf{CHV} = \mathbf{CU} = [\mathbf{Cu}_1 \dots \mathbf{Cu}_n] \quad (3.39)$$

замість формування  $n$  рівнянь  $\mathbf{CHv}_i = \mathbf{Cu}_i$ ; очевидно, що утворений вектор  $\mathbf{u}_i$  в рівнянні (3.39) залежить тільки від матриці перетворення і від  $\mathbf{v}_i$ , але не від інших координат векторів  $\mathbf{v}_{j \neq i}$ .

Як було визначено раніше, система координат або база, відповідно, представляє собою набір (скінченних або нескінченних) координат. Крім того, можливе застосування перетворення до деякої системи координат  $\mathbf{C}$ . Втім, в такому випадку,  $\mathbf{C}$  необхідно пов'язати з іншою базою. Припустимо, що координати  $\mathbf{C}$  пов'язані з референційною системою. Нехай  $\mathbf{v}$  вектор, пов'язаний з  $\mathbf{C}$ . Отримуємо

$$\mathbf{RHCv} = \mathbf{R}\hat{\mathbf{C}}\mathbf{v}, \quad (3.40)$$

де  $\hat{\mathbf{C}}$  - отримана система координат. Очевидно, зміненими були не координати вектора  $\mathbf{v}$ , а лише координати його бази. Якщо, наприклад, перетворення спричиняє обертання довкола якоїсь осі, у рівнянні (3.40) це обертання здійснюється довкола осі  $\mathbf{R}$ . У рівнянні (3.38) воно б здійснювалося довкола відповідної осі  $\mathbf{C}$ .

Необхідно зауважити, зворотне перетворення  $\mathbf{H}$  позначається оберненою матрицею  $\mathbf{H}^{-1}$

$$\mathbf{H}^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{Hv} = \mathbf{v} \quad (3.41)$$

якщо припустити, що  $\mathbf{H}^{-1}$  існує. Всі подані перетворення мають зворотні перетворення.

Перетворення  $\mathbf{H}$ , яка змінює всі координати, які піддаються перетворенню у певному напрямку на певну абсолютну величину, без зміни будь-якого вектора напрямку, називається переміщенням і визначається

$$\mathbf{Trl}(t_x, t_y, t_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

де  $t_x, t_y, t_z$  - це змінні відстані у трьох просторових напрямках згідно (3.35).

Доведено, що множення матриці переміщення на вектор напрямку не змінює напрям

Обертальне перетворення, яке обертає весь простір, тобто точки і напрямки, довкола осі, що проходить через початок відліку  $\mathbf{o} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ , визначається

$$\mathbf{Rot} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & 0 \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{h}_1 \ \mathbf{h}_2 \ \mathbf{h}_3 \ \mathbf{o}] \quad (3.43)$$

де вектори  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$  задовільняють обмеженням ортогональності і нормалізації, визначених рівняннями (3.32) і (3.33).

Обертання довкола осей референційної системи  $\mathbf{R}$  на кут  $\phi$  визначається за формулами:

$$\mathbf{Rot}(x, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

$$\mathbf{Rot}(y, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

$$\mathbf{Rot}(z, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Масштабне перетворення перевизначає простір, а саме кожну координату, тобто довжину (відстань) вздовж певного напрямку до точки відліку системи, множить на певний множник і тим "видовжує" вектори напрямку. Матриця цього перетворення визначається рівнянням

$$\mathbf{Scl}(f_x, f_y, f_z) = \begin{bmatrix} f_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

де  $f_x, f_y, f_z$  множники для трьох просторових напрямків, і які, звісно, можуть бути різними за значеннями.

Як видно, матриці перетворень  $\mathbf{H}$  мають однаковий математичний запис як і системами координат. Будь-яку матрицю перетворення можна представити як результат множення цієї матриці на одиничну матрицю  $\mathbf{I}$ . Отже, кожну таку матрицю можна вважати системою координат  $\mathbf{C}$  віднесеної до  $\mathbf{R}$ . І навпаки, матрицю системи координат  $\mathbf{C}$  можна вважати матрицею перетворення. Нехай  $\mathbf{C}$  визначена по відношенню до референційної системи, а  $\mathbf{v}$  буде вектором, що описує точку у системі координат  $\mathbf{C}$ . Тоді отримуємо рівняння

$$\mathbf{RCV} = \mathbf{R}\hat{\mathbf{v}} \quad (3.48)$$

Припустимо, що матриця  $\mathbf{H}$  у рівнянні (3.40) є матрицею певного перетворення, наприклад обертання довкола осі  $z$ . Припустивши, що всі координати, що визначені у  $\mathbf{C}$ , починаються даною операцією, можна перетворення  $\mathbf{H}$  не записувати у рівнянні, в результаті чого отримуємо наступне перетворення системи координат

$$\mathbf{RRot}(z, \phi)\mathbf{C} = \mathbf{R}\hat{\mathbf{C}} \quad (3.49)$$

Тепер  $\mathbf{Rot}(z, \phi)$  можна вважати системою координат, а  $\mathbf{C}$  - матрицею перетворення. Тоді  $\mathbf{Rot}(z, \phi)$  здійснює перетворення у референційній системі, в той час як "колишня" система координат  $\mathbf{C}$  перетворює всі координати, які можуть вважатися визначеними по відношенню до  $\mathbf{Rot}(z, \phi)$  (рис.3.7). Отже, можна сформулювати наступне правило інтерпретації рівнянь перетворень: система координат  $\hat{\mathbf{C}}_1$ , що визначається

$$\hat{\mathbf{C}}_1 = \mathbf{Rot}(z, \phi)\mathbf{C} \quad (3.50)$$

є результатом повороту системи координат  $\mathbf{C}$  довкола осі  $z$  референційної системи на кут  $\phi$ . Система координат  $\hat{\mathbf{C}}_2$ , така що

$$\hat{\mathbf{C}}_2 = \mathbf{CRot}(z, \phi) \quad (3.51)$$

отримується шляхом обертання всіх координат визначених у  $\mathbf{C}$  довкола вісі  $z$  системи  $\mathbf{C}$ .

Система координат  $\mathbf{C}'$  на рис. 3.7 є результатом переміщення відносно  $\mathbf{R}$ , отже,  $\mathbf{C}' = \mathbf{R} \mathbf{Trl}(0, t_y, t_z)$ . Система координат  $\mathbf{C}'' = \mathbf{RRot}(z, 90^\circ)$ , тобто є результатом обертання референційної системи на кут  $90^\circ$ . Тепер систему координат  $\mathbf{C}'''$  можна отримати або шляхом обертання  $\mathbf{C}'$  відносно  $\mathbf{R}$  і її перенесенням, тобто  $\mathbf{C}''' = \mathbf{RRot}(z, 90^\circ)\mathbf{C}'\mathbf{Trl}(0, t_y, t_z)$ , або переміщенням  $\mathbf{C}''$  відносно самої себе:  $\mathbf{C}''' = \mathbf{C}'' \mathbf{Trl}(0, t_y, t_z)$ , тобто  $\mathbf{C}''$  переміщується на  $t_y$  в напрямку  $y''$ , а не  $y$ .

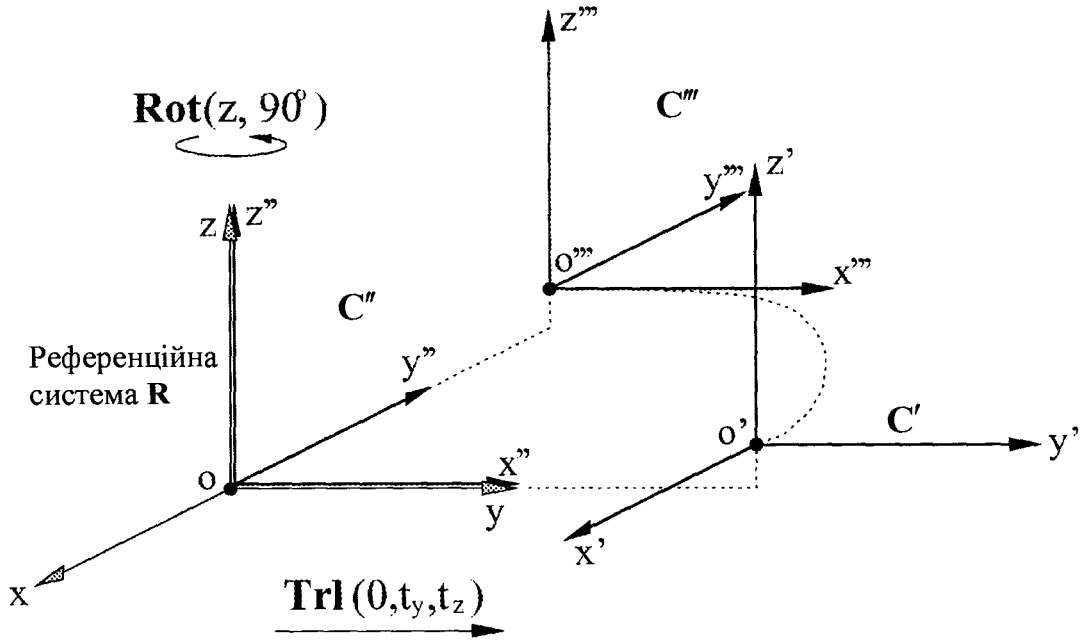


Рис.3.7. Два способи отримання системи координат із заданого рівняння перетворення

### 3.2.1. Моделювання детектора випромінювання.

Поверхню детектора можна визначити площиною з центром в точці  $d$  та двома ортогональними векторами  $a$  і  $c$ . Векторами  $a$ ,  $b$  і  $c$ , (вектор  $b$  є перпендикулярний до площини детектора) можна визначити систему  $D$  детектора, з виразу

$$D = [a \ b \ c \ d] = R D \quad (3.52)$$

де  $D$  - оператор перетворення координат референційної системи у систему детектора, який будемо вважати координатною системою детектора (рис.3.8).

Детектор визначається системою  $D$ , а саме позицією і орієнтацією даної системи, і параметрами  $l_a$ ,  $l_c$ , що визначають розміри поверхні детектора. Крім цього має бути визначена кількість елементів детектора, або, відповідно, кількість пікселів, що ним реєструються.

Система детектора  $\mathbf{D}$  може визначатися величинами переміщення  $d_x, d_y, d_z$  - відстанями між точками відліку референційної і детекторної системами, а також величинами обертання (якщо детектор при русі нахилиється). Щоб точно змодельовати детектор, необхідно знати його ширину  $l_a$  і висоту  $l_c$ . Дані величини визначають діапазон вимірюваних променів, або, відповідно, обмежують кількість променів.

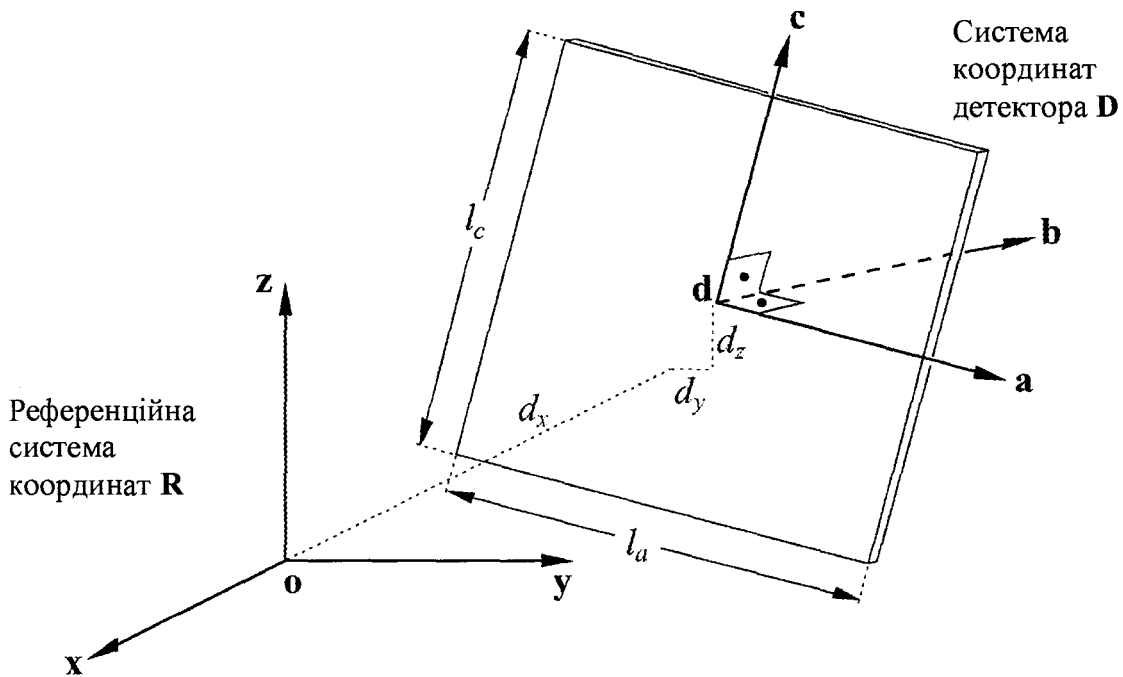


Рис.3.8. Визначення системи координат детектора

3.2.2. Моделювання джерела випромінювання. Джерело випромінювання можна описати однією точкою  $s$ , гомогенні координати якої визначаються з виразу

$$\mathbf{s} = \mathbf{R}\mathbf{s} = \mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{o}, \quad (3.53)$$

де  $\mathbf{S}$  описує перетворення джерела від точки відліку референційної системи.

Після визначення джерела і детектора можливо описати промінь  $\mathbf{r}$  від джерела до детектора. Нехай  $\mathbf{m}_D$  - точка на площині детектора, яка є визначеною у системі координат детектора  $\mathbf{D}$ :  $\mathbf{m}_D = [m_a \ 0 \ m_c \ 1]^T$ , де  $|m_a| \leq \frac{l_a}{2}$  і  $|m_c| \leq \frac{l_c}{2}$  (рис.



8). Оскільки  $\mathbf{Dm}_D$  перетворює координати щодо референційної системи, то промінь можна визначити в залежності від параметра  $t$  згідно формули:

$$\mathbf{r}(t) = (\mathbf{Dm}_D - s)t + s \quad (3.54)$$

3.2.3. Моделювання фантому. Для дослідження алгоритмів реконструкції необхідно досить точно змоделювати справжні об'єкти. Для цього створюються так звані фантоми, що описують реальний об'єкт, і які складаються з простих геометричних фігур. Фантом, що складається з  $K$  об'єктів, можна описати таким набором векторів:

$$\Pi = \{(\Omega^k, \pi^k) | k = 1, \dots, K\}, \quad (3.55)$$

де  $\Omega^k$  описує позицію, орієнтацію і розмір  $k$ -го об'єкта відносно референційної системи  $\mathbf{R}$ ;

$\pi^k$  -  $p \times 1$ -мірний вектор, що містить решту необхідної інформації, тобто інформацію про форму і густину, або коефіцієнт послаблення випромінювання.

Іншими словами,  $\Omega^k$  описує перетворення одиничної форми (сфери радіусом  $r = 1$ , циліндра радіусом  $r = 1$  і висотою  $h = 2$  тощо) в референційній системі у визначений об'єкт. Таке перетворення визначається виразом

$$\Omega^k = \text{Trl}(t_x^k, t_y^k, t_z^k) \text{Rot}(z, \theta^k) \text{Rot}(y, \phi^k) \text{Rot}(z, \psi^k) \text{Scl}(f_x^k, f_y^k, f_z^k), \quad (3.56)$$

де три обертові перетворення описують будь-яку орієнтацію об'єкта у просторі відповідно до кутів Ейлера [82].

Матрицю  $\Omega^k$  можна представити системою координат

$$\Omega^k = \begin{bmatrix} \omega_x^k & \omega_y^k & \omega_z^k & \omega_0^k \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

з осями  $\omega_x^k, \omega_y^k, \omega_z^k, \omega_0^k$ .

3.2.4. Моделювання траєкторії руху скануючої системи. Щоб отримати ряд різних проєкцій фантома необхідно переміщувати джерело і детектор відносно фантома вздовж певної траєкторії, в результаті чого отримуємо  $N$  проєкцій об'єкта. Систему  $\mathbf{D}$  і джерело  $\mathbf{s}$  можна розглядати як позицію детектора і джерела при отриманні першої проєкції (тобто кут повороту  $0^\circ$ ):  $\mathbf{D}_0 = \mathbf{D}$  і  $\mathbf{s}_0 = \mathbf{s}$ . Нехай  $\mathbf{D}_n$  і  $\mathbf{s}_n$  - позиція детектора і джерела для  $(n+1)$ -ої проєкції відповідно.

В сучасних томографах існує дві типові траєкторії: колова траєкторія і траєкторія по спіралі. Для визначення колової траєкторії руху детектора, або джерела необхідно визначити вісь обертання  $\mathbf{q} = [q_x \ q_y \ q_z \ 0]$ . Для даного випадку припускається, що  $\mathbf{q}$  проходить через точку відліку референційного простору  $\mathbf{o}$ . Нехай

$$\gamma_n = n \frac{360^\circ}{N} \quad (3.58)$$

це кут, на який повертається детектор і джерело для  $(n+1)$  проєкції,  $n = 0 \dots (N-1)$ , і нехай обертання довкола осі  $\mathbf{q}$  на кут  $\gamma_n$  визначається в гомогенних координатах матрицею  $\mathbf{T}(\mathbf{q}, \gamma_n)$ . Тоді отримуємо вираз для будь-якої позиції джерела і детектора

$$\mathbf{D}_n = \mathbf{T}(\mathbf{q}, \gamma_n) \mathbf{D}_0 \quad \text{і} \quad \mathbf{s}_n = \mathbf{T}(\mathbf{q}, \gamma_n) \mathbf{s}_0 \quad (3.59)$$

Отримати  $\mathbf{T}(\mathbf{q}, \gamma_n)$  можна шляхом обертання усього простору - включно з джерелом і детектором - два рази: спочатку вектор  $\mathbf{q}$  має співпасти з віссю  $z$  референційної системи, навколо якого обертаємо увесь простір на кут  $\gamma_n$  і повертаємо назад так, щоб вісь  $\mathbf{q}$  співпала зі своєю старою позицією.

В результаті можна отримати формулу перетворення

$$\mathbf{T}(\mathbf{q}, \gamma_n) = \mathbf{Rot}(z, \theta) \mathbf{Rot}(y, \phi) \mathbf{Rot}(z, \gamma_n) \mathbf{Rot}(y, -\phi) \mathbf{Rot}(z, -\theta) \quad (3.60)$$

де  $\phi$  - кут між  $\mathbf{q}$  і віссю  $z$ ,

$\theta$  - кут між віссю  $x$  і площиною, утвореною  $\mathbf{q}$  і віссю  $z$  (рис.3.9).

Звідси

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{q_y}{q_x} \quad (3.61)$$

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{q_x^2 + q_y^2}}{q_z} \quad (3.62)$$

Необхідно зауважити, що можливим є також рекурсивне (покрокове) обчислення нових позицій детектора і джерела згідно формули

$$\mathbf{D}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{q}, \gamma_1) \mathbf{D}_n \quad \text{і} \quad \mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{q}, \gamma_1) \mathbf{s}_n. \quad (3.63)$$

Якщо точка відліку референційної системи знаходиться на осі обертання, і при цьому  $\mathbf{p} = [p_x \quad p_y \quad p_z \quad 1]^T$  - це точка, яка належить даній системі, то обертання навколо  $\mathbf{q}$  можна виразити в гомогенних координатах таким чином (рис. 3.9)

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \gamma_n) = & \operatorname{Trl}(-p_x, -p_y, -p_z) \operatorname{Rot}(z, \theta) \operatorname{Rot}(y, \phi) \operatorname{Rot}(z, \gamma_n) \operatorname{Rot}(y, -\phi) \times \\ & \times \operatorname{Rot}(z, -\theta) \operatorname{Trl}(p_x, p_y, p_z) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Отже, тепер при повному сканування об'єкта простір детектора переміщується так, щоб точка  $\mathbf{p}$  співпала з точкою відліку референційної системи, обертається згідно формули перетворення (3.60) і повертається в початкове положення.

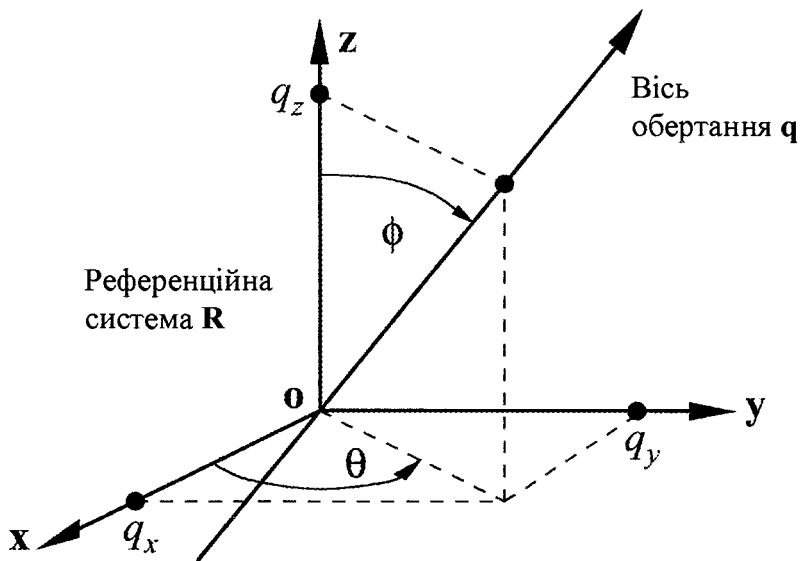


Рис.3.9. Обертання системи на кут  $\theta$  і  $\phi$  (напрямок  $\mathbf{q}$  означає напрям обертання, який завжди є додатнім)

### 3.3. Параметри змодельованої системи сканування

Всі проекції і результати сканування моделюються як результат роботи стандартної геометричної схеми збору даних для тривимірної томографії (рис. 3.10). Проекційний кут (кут між двома променями, що попадають на детектор в центр його верхнього і нижнього краю (рис. 3.10)) приймається  $8^\circ$ . Приймаємо, що в початковій позиції (тобто для першої проекції) джерело розміщене на осі  $x$  референційної системи.

Початок відліку системи координат детектора розміщується в центрі референційної системи. Осі  $a$  і  $c$  паралельні до осей  $y$  і  $z$  референційної системи, тобто створюється віртуальний детектор, внаслідок чого об'єкти, що знаходяться за межами детектора будуть також проектуватися на нього. Детектор приймається у вигляді квадрата з розмірами сторін 2,0.

Для моделювання проекційних даних джерело було сформоване як маленький квадрат того ж самого розміру, що й елемент детектора. Для спрощення, кожне значення елемента детектора обчислювалося як середнє арифметичне значення

дев'яти лінійних інтегралів для променів, що фіксуються даним елементом детектора (рис. 3.3 в).

Отже, початкова позиція джерела визначається точкою з гомогенними координатами  $s \approx [3.73105 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ .

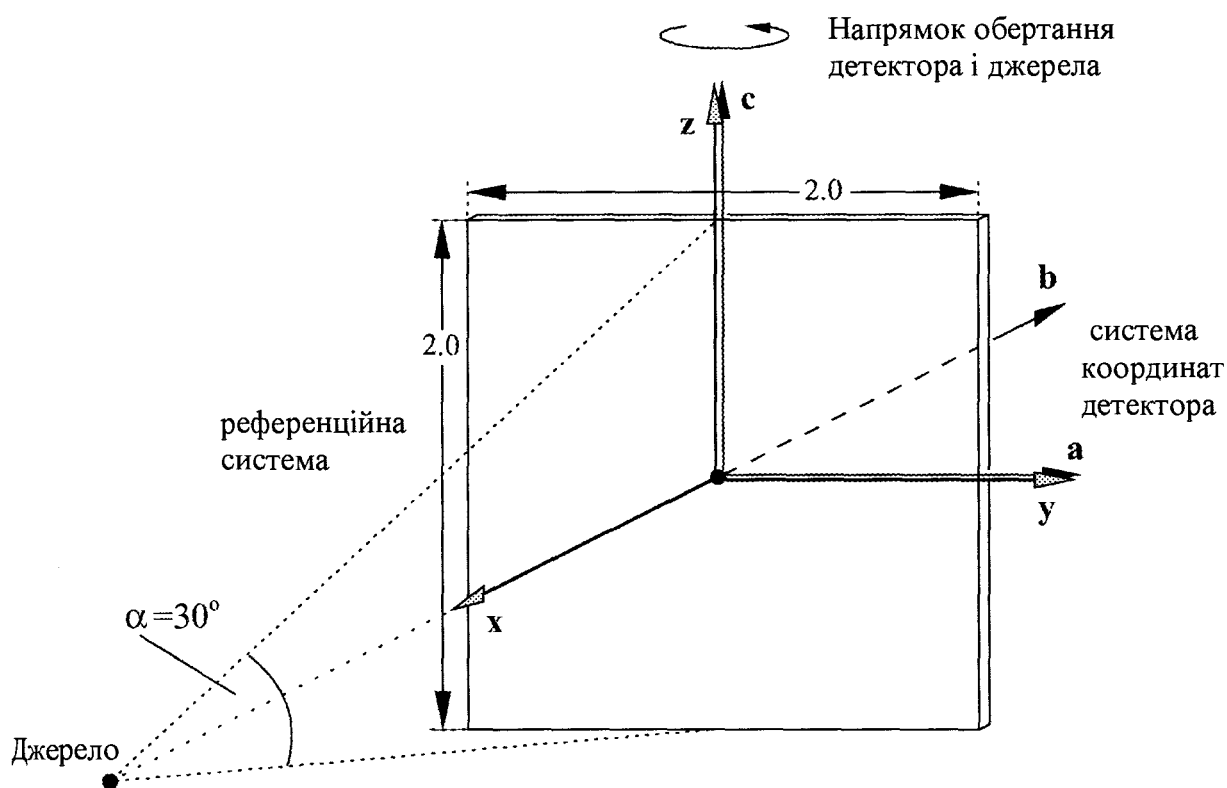


Рис. 3.10. Стандартна схема сканування для тривимірної реконструкції

У програмі використовується колова траєкторія руху джерела з віссю обертання, що співпадає з віссю  $z$  референційної системи, обертання здійснюється проти годинникової стрілки і сумарний кут проектування становить  $360^\circ$ .

### 3.4. Вибір об'єкта моделювання

Як об'єкт моделювання був вибраний стандартний фантом Шеппа-Логана [84], який є спрощеною моделлю об'єкта з неоднорідною структурою, особливістю якого є те, що деякі деталі зображення накладаються одне на одне, що краще моделює його реальну структуру. Як вже було вказано, фантом - це модель реального об'єкта і він складається з простих геометричних фігур, які легко можна описати

математичними формулами. Даний фантом складається з еліпсоїдів. Кожний еліпсоїд визначається своїм розташуванням в просторі  $(t_x, t_y, t_z)$  - координати центрів еліпсоїдів,  $(f_x, f_y, f_z)$  - їхні радіуси, кути повороту  $\phi$ , а також коефіцієнтом послаблення рентгенівського випромінювання  $\mu$ . Величини даних параметрів для фантома Шеппа - Логана представлені в табл. 3.1

Таблиця 3.1

## Визначення фантома Шеппа - Логана

Параметр	$f_x$	$f_y$	$f_z$	$t_x$	$t_y$	$t_z$	$\theta$ , град	$\phi$ , град	$\mu$
Еліпсоїд	0,69	0,9	0,92	0	0	0	0	0	2,0
Еліпсоїд	0,6624	0,88	0,874	0	0	-0,0184	0	0	-0,98
Еліпсоїд	0,41	0,21	0,16	-0,22	-0,25	0	0	72	-0,02
Еліпсоїд	0,31	0,22	0,11	0,22	-0,25	0	0	-72	-0,02
Еліпсоїд	0,21	0,35	0,25	0	-0,25	0,35	0	0	0,01
Еліпсоїд	0,046	0,046	0,046	0	-0,25	0,1	0	0	0,01
Еліпсоїд	0,046	0,02	0,023	-0,08	-0,25	-0,605	0	0	0,01
Еліпсоїд	0,046	0,02	0,23		-0,25	-0,605	0	90	0,01
Еліпсоїд	0,056	0,1	0,04	0,06	0,625	-0,105	0	90	0,02
Еліпсоїд	0,056	0,1	0,056	0,06	0,625	0,1	0	0	0,02
Еліпсоїд	0,046	0,046	0,046	0	-0,25	-0,1	0	0	-0,01
Еліпсоїд	0,023	0,023	0,023	0	-0,25	-0,605	0	0	0,01

Тривимірний фантом Шеппа - Логана складається з дванадцяти еліпсоїдів (рис. 3.11). Еліпсоїди побудовані шляхом перетворення точок з координатами  $(x, y, z)^T | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ , що лежать в межах сфери, а саме масштабуванням і обертанням навколо осі  $y$  та перенесенням

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x & 0 & 0 \\ 0 & f_y & 0 \\ 0 & 0 & f_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}$$

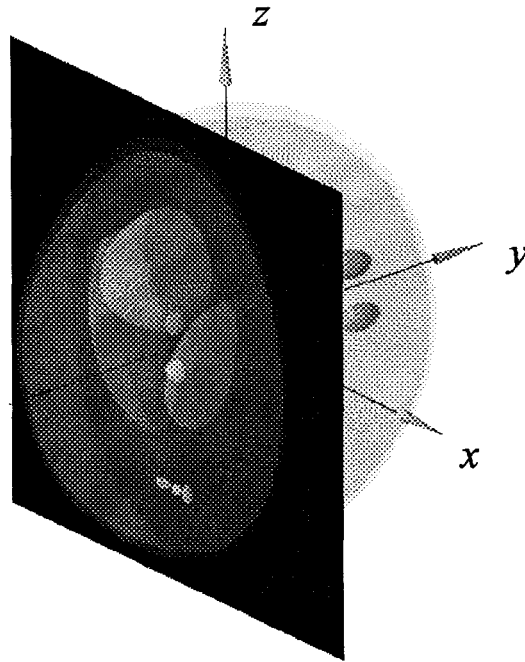


Рис. 3.11. Тривимірний фантом Шеппа - Логана.  
(Площина перетинає фантом в координаті  $y = -0.25$  )

Вокселізація фантому визначається за допомогою технічних даних значно деформованого технологічного об'єкта. Набір даних був розроблений науково-дослідною лабораторією Філіпс (Гамбург) [84].

Для проведення томографічного експерименту фантом визначений нами як такий, що складається з  $256 \times 256 \times 256$  вокселів розміром

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z = \frac{221}{256} \text{ мм} \approx 0,9 \text{ мм} \text{ (роздільна здатність зображення фантому).}$$

Із значень вокселів обчислюються числа Хаунсфілда, з врахуванням того, що якщо матеріалом об'єкта є повітря, значення рівні 0, а для води – 1000.

Фантом дискретизований з параметром  $P = 3$ , тобто 27 точок на воксель (рис. 3.9). Діапазон густин вибраний 1,0-1,04, тобто всі деталі, значення густин яких є меншими за 1,0 зображені чорним кольором, а більші за 1,04 - білим.

Параметри реконструкції наведені в таблиці 3.2.

Таблиця 3.2

**Параметри експериментальної реконструкції тривимірного фантому  
Шеппа - Логана**

Радіус траєкторії джерела	$R = 7.5$
Кількість поворотів скануючої системи	$N_\beta = N_\theta = 64$
Кількість рядків детектора	$N_b = 256$
Висота рядка детектора	$\Delta b = \frac{2}{256} \approx 0.009$
Кількість детекторних елементів в рядку	$N_a = N_t = 256$
Максимальний віяловий кут	$\gamma_{max} = \arctg \frac{N_a \Delta a}{2R} \approx 9^\circ$
Максимальний конусний кут ( $a=0$ )	$k_{max} = \arctg \frac{N_b \Delta b}{2R} \approx 9^\circ$
Дискретизація зображення	$N_x = N_y = N_z = 256 \times 256 \times 256$
Роздільна здатність зображення	$\Delta x = \Delta y = \Delta z \approx 0,9 \text{ мм}$
Кількість променів, що реєструються елементом детектора	$3^2=9$

В результаті роботи програми, яка моделює проєкційні дані для тривимірної реконструкції на основі фізичних характеристик, наведених в таблицях 3.1, 3.2, створюються 3 вхідні файли, в яких міститься вся необхідна початкова інформація, і два вихідних файли. Вся ця інформація зазначається у файлі ініціалізації програми.

Текст програми і блок схема наведені у додатку А.

1. Файл ініціалізації програми складається з назв і, якщо необхідно, шляхів до написаних у ньому робочих файлів, та деяких параметрів процесу отримання проєкційних даних. В нашому експерименті файл має наступний вигляд:

(1) # init file for projection

(2) #-----



- (3) phantom = sl3D.phm
- (4) detector = planar256.det
- (5) #voxelization = cyl.vox
- (6) voxelpoints = 3
- (7) trajectory = circle64.trj
- (8) projection = cyl.prj
- (9) attenuation = real
- (10) scatter = scatter\_low

В рядку (3) визначається назва файлу, де визначається тип фантому. В рядку (4) назва файлу, де зазначені параметри детектора. Рядок (6) визначає параметр дискретизації фантому ( $P=3$ ), тобто кількість точок у вокселі дорівнює 27 (рис. 3.9). В рядку (7) зазначається назва файлу траєкторії руху скануючої системи. В рядках (5) і (8) зазначаються назви двох вихідних файлів: назва файлу, в якому міститься результат дискретизації фантому, і файлу, де зберігаються отримані в результаті роботи програми проекційні значення, відповідно. В рядку (10) описується характер послаблення рентгенівського випромінювання (реальний), а в (11) тип розсіювання, кожному з яких притаманні свої розсіювальні характеристики: широта розсіювання  $\eta=0.1$  і розсіювальний пік  $\sigma=0.2$ .

2. Файл фантому (Додаток Б) складається з усієї інформації про розмір, форму, позицію і орієнтацію об'єктів фантому (таблиця 3.1 згідно рис. 3.9).

Отже, матрицю кожного об'єкта фантому можна представити рівнянням виду (згідно рис. 3.9):

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{Trl}(x, y, z)\mathbf{Rot}(z, \theta)\mathbf{Rot}(y, \phi)\mathbf{Scl}(a, b, c).$$

3. Файл детектора (Додаток В) визначає розміри детектора ( $xlen, ylen$ ) (згідно рис. 3.10) та кількість пікселів  $N_x, N_y$  ( $xpix, upix$ ), тобто детекторних елементів  $N_a, N_t$ . Крім того, визначається кількість променів, променеві суми яких враховуються для обчислення одного проекційного значення (табл. 3.2).

4. У файлі траєкторії (Додаток Д) визначені позиція та орієнтація джерела випромінювання і детектора.

В даному файлі визначена колова траєкторія джерела з обертанням навколо осі  $z$  референційної системи. Центр детектора розміщується в точці відліку референційної системи, а перша позиція джерела розміщується на додатній півосі  $x$ . В рядку (4) Додатку Д визначені координати першої позиції джерела  $x, y, z$ . Рядки (5) - (7) цього додатку описують першу позицію детектора - матрицю розміром  $3 \times 4$ . Останні рядки від (8) до (10) визначають матрицю перетворення аналогічним розміром  $3 \times 4$ , яка множаться на матрицю детектора і вектор позиції джерела для обчислення нових координат положення джерело-детектор у відповідності з рівнянням (3.46). В рядку (2) Додатку Д визначена кількість проєкцій  $N_\theta = 64$ , тобто проєкційний кут становить  $\Delta\theta = \frac{360}{64} \approx 5.6^\circ$ .

В результаті роботи програми отримується файл з проєкційними даними у вигляді тривимірної матриці розмірністю  $64 \times 256 \times 256$ .

### Висновки до третього розділу.

1. Розроблено математичну модель томографічної системи, яка пов'язує інтенсивність рентгенівського випромінювання з реальними проєкційними даними об'єкта і показано, що цей зв'язок носить інтегральний характер.

2. Вибрано та змодельовано об'єкт тривимірної реконструкції. Здійснено моделювання реальних проєкційних значень рентгенівського випромінювання для експериментальної тривимірної реконструкції зображення об'єкта.

3. Програмно реалізована математична модель, що пов'язує інтенсивність рентгенівського випромінювання з проєкційними значеннями тривимірної функції об'єкта. Показано, що математична модель адекватна реальному фізичному процесу отримання проєкційних даних в результаті томографічного експерименту

Отже, перша задача експериментальної рентгенівської томографії розв'язана. Залишається задача реконструкції зображення. Відновлення тривимірної структури об'єкту будемо здійснювати розробленим алгоритмом реконструкції. Але, як вже було зазначено, реконструкція тривимірного зображення з використанням тільки алгоритму зворотного проектування буде розмазаною, тому використаємо підхід FDK - алгоритму, який складається з послідовних операцій нормування,

фільтрування і зворотного проектування (розд. 1). Отриманий в результаті алгоритм назвемо швидкий FDK - алгоритм.

На основі аналізу якості відновленого зображення вибраного об'єкту дослідимо точність розробленого алгоритму реконструкції.

## РОЗДІЛ 4

### ШВИДКИЙ АЛГОРИТМ ТРИВИМІРНОЇ РЕКОНСТРУКЦІЇ І ЙОГО МЕТРОЛОГІЧНИЙ АНАЛІЗ

#### 4.1. Основні критерії порівняння алгоритмів реконструкції

Часто в практиці метрологічного аналізу методу реконструкції використовують непрямі оцінки точності, так звані міри, які характеризують різницю між зображеннями, отриманих за допомогою різних алгоритмів реконструкції. Тому для загального висновку використовують термін “якість алгоритму”.

Отже, аналіз і висновки щодо оптимізації і розробки алгоритмів в томографії здійснюється на основі результатів реконструкції, тобто за якістю відновленого певними алгоритмами одного й того ж самого зображення і часом (швидкістю) цієї реконструкції. Звідси випливає необхідність оцінки якості відновленого зображення, тобто наявності певних кількісних величин, які б її характеризували. Сформулюємо основні критерії порівняння алгоритмів реконструкції.

Існує декілька методів порівняння якості реконструйованих зображень. Найбільш простим методом є візуальна оцінка. При такому порівнянні оцінюють, чи всі важливі деталі об'єкта відтворені у процесі реконструкції і чи немає внесених спотворень. Недоліком подібної якісної оцінки є її суб'єктивність, оскільки спеціалісти часто розходяться в думці про те, яке з двох зображень точніше відтворює третє [86].

В ідеалі необхідно мати один параметр, який би характеризував близькість реконструкції та оригінала. Але на практиці не тільки один параметр, але й набір із декількох параметрів не можуть описати всіх характерних відмінностей двох зображень [87]. Тому на практиці більшістю дослідниками застосовуються три головні оцінки -міри різниці між зображеннями [88], [89]. Для дослідження точності

розробленого алгоритму швидкої тривимірної реконструкції скористаємося  
ними мірами.

Уся інформація в томографічному експерименті одержується у вигляді так званої проекційної матриці, за значенням елементів якої оцінюють (реконструюють) оригінал. Сітка з  $N$  елементів ділить кадр зображення на  $N^2$  рівних квадратів, кожний з яких називають елементом зображення (елізом) - у двовимірній томографії  $N^3$  кубиків (вокселей) - у тривимірній [90]. Дискретизоване зображення (переріз тривимірного зображення), або матриця зображення  $N \times N$  - це зображення, ементи якого є сталими всередині елізу  $N$ -елементної сітки. Матриця зображення розміром  $N \times N$  є  $N \times N$  - дискретизоване зображення, таке, що інтеграл від вихідної функції зображення по будь-якому елізу, утвореному сіткою з  $N$ -елементів, дорівнює інтегралу від дискретизації по тому ж елізу [90].

Фантом складається з декількох елементарних об'єктів, які поміщують в певні місця кадру і які мають відповідну орієнтацію, розміри і густину (табл. 3.1).

Позначимо через  $t_{u,v}$  і  $r_{u,v}$  густини  $v$ -го елізу в  $u$ -тому рядку матриці фантома і реконструйованого перерізу відповідно, а  $\bar{t}$  - середнє значення густини в дискретизації фантома. Припустимо, що обидві матриці зображень мають розмір  $l$ , причому  $[l/2]$  дорівнює найбільшому цілому числу, але не більше  $l/2$ . Тоді можемо записати такі три оцінки - "міри":

$$d = \sqrt{\frac{\sum_{u=1}^l \sum_{v=1}^l (t_{u,v} - r_{u,v})^2}{\sum_{u=1}^l \sum_{v=1}^l (t_{u,v} - \bar{t})^2}}, \quad (4.1)$$

$$r = \frac{\sum_{u=1}^l \sum_{v=1}^l |t_{u,v} - r_{u,v}|}{\sum_{u=1}^l \sum_{v=1}^l |t_{u,v}|}, \quad (4.2)$$

$$e = \max_{\substack{1 \leq i \leq (l/2) \\ 1 \leq j \leq (l/2)}} |T_{i,j} - R_{i,j}|, \quad (4.3)$$

$$T_{i,j} = \frac{1}{4} \cdot (t_{2i,2j} + t_{2i+1,2j} + t_{2i,2j+1} + t_{2i+1,2j+1}), \quad (4.4)$$

$$R_{i,j} = \frac{1}{4} \cdot (r_{2i,2j} + r_{2i+1,2j} + r_{2i,2j+1} + r_{2i+1,2j+1}). \quad (4.5)$$

Наведені вище три міри відхилень виражають різні аспекти якості зображення.

Перша з них ( $d$ - міра) є нормованою середньоквадратичною мірою відхилення. Велике відхилення в невеликій області веде до великого значення  $d$ . Відмітимо, що  $d=1$  тоді, коли реконструкція правильно відтворює зображення з рівномірно розподіленою середньою густиною. Друга міра ( $r$ - міра) є нормованою абсолютною середньою мірою відхилення. У протилежність  $d$ - мірі  $r$ - міра фіксує наявність великої кількості малих похибок. Очевидно, що  $r=1$  тоді, коли реконструкції мають густину, рівну нулю по всіх елізах. Третя міра ( $e$ - міра) характеризує екстремальні відхилення. Її значення дорівнює найбільшій різниці в густині між  $[l/2] \times [l/2]$ - матрицями тест-фантома і реконструкції. При обчисленні  $e$ - міри використовується дискретизація з більшим кроком, ніж для реконструкції, так як розмір найменших деталей у фантомі дорівнює декільком елізам, і на практиці в основному використовують усереднені значення густини в цих елізах, що суттєво підвищує надійність оцінки.

#### 4.2. Дослідження якості методу швидкої реконструкції зображення

Для дослідження якості розробленого методу дослідження внутрішньої структури тривимірного об'єкту зображення об'єкту було реконструйовано стандартним FDK- і запропонованим швидким алгоритмами.

Як вже було зазначено, реконструкція зображення тривимірного об'єкта полягає у відновленні будь-яких його двовимірних перерізів у будь-якому напрямку.

Реконструкцію тривимірного фантому Шеппа-Логана в нашому дослідженні будемо здійснювати в трьох основних площинах: сагітальній, фронтальній, горизонтальній (рис. 4.1).

У додатку Е приведено програмну реалізацію розробленого алгоритму швидкої тривимірної реконструкції (швидкий FDK-метод). Паралельно з реконструкцією зображення дана програма, за необхідності, може обчислювати три основні міри відхилення (формули (4.1 - 4.3)).

Результати реконструкції зображення внутрішньої структури тривимірного об'єкту швидким алгоритмом наведені в додатках Ж, З, К. В додатку Ж наведено перерізи фантому і відповідні реконструйовані перерізи зображення об'єкту у фронтальній площині ( $xz$ -площина). Переріз здійснювався з кроком 0,25 по осі  $z$ . Над кожним зображенням фантому приведені міри відхилення результату реконструкції.

В додатку З наведено перерізи фантому і реконструйованого зображення об'єкту у горизонтальній площині ( $xz$ -площина). Над кожним зображенням фантому приведені міри відхилення результату реконструкції. Аналогічно в додатку К наведено перерізи фантому і відповідні реконструйовані перерізи зображення об'єкту у сагітальних площинах ( $yz$ -площини) та відповідні міри відхилення. Переріз здійснювався з кроком 0,25 по осі  $x$ .

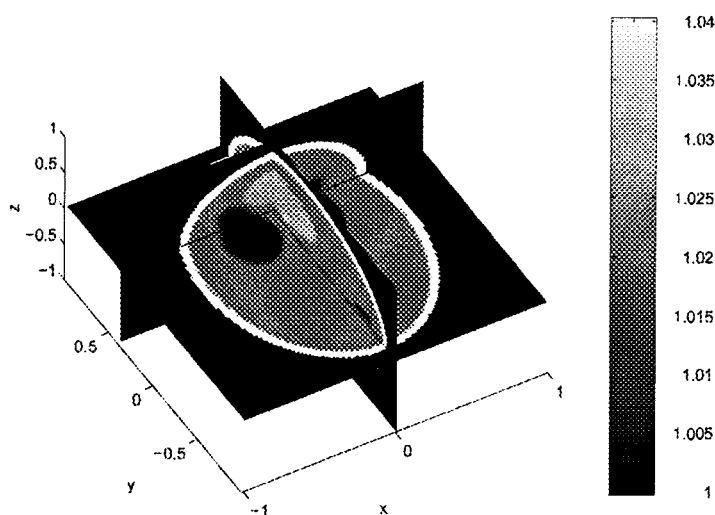


Рис. 4.1. Вертикальний, фронтальний, горизонтальний перерізи фантому Шеппа - Логана

Для детального дослідження якості і властивостей алгоритму було вибрано по дві довільні площини, одна з яких є центральною, в сагітальному фронтальному та горизонтальному напрямках (рис. 4.2, рис. 4.3).

На рис. 4.2 зображено перерізи центральних площин фантому в напрямках.

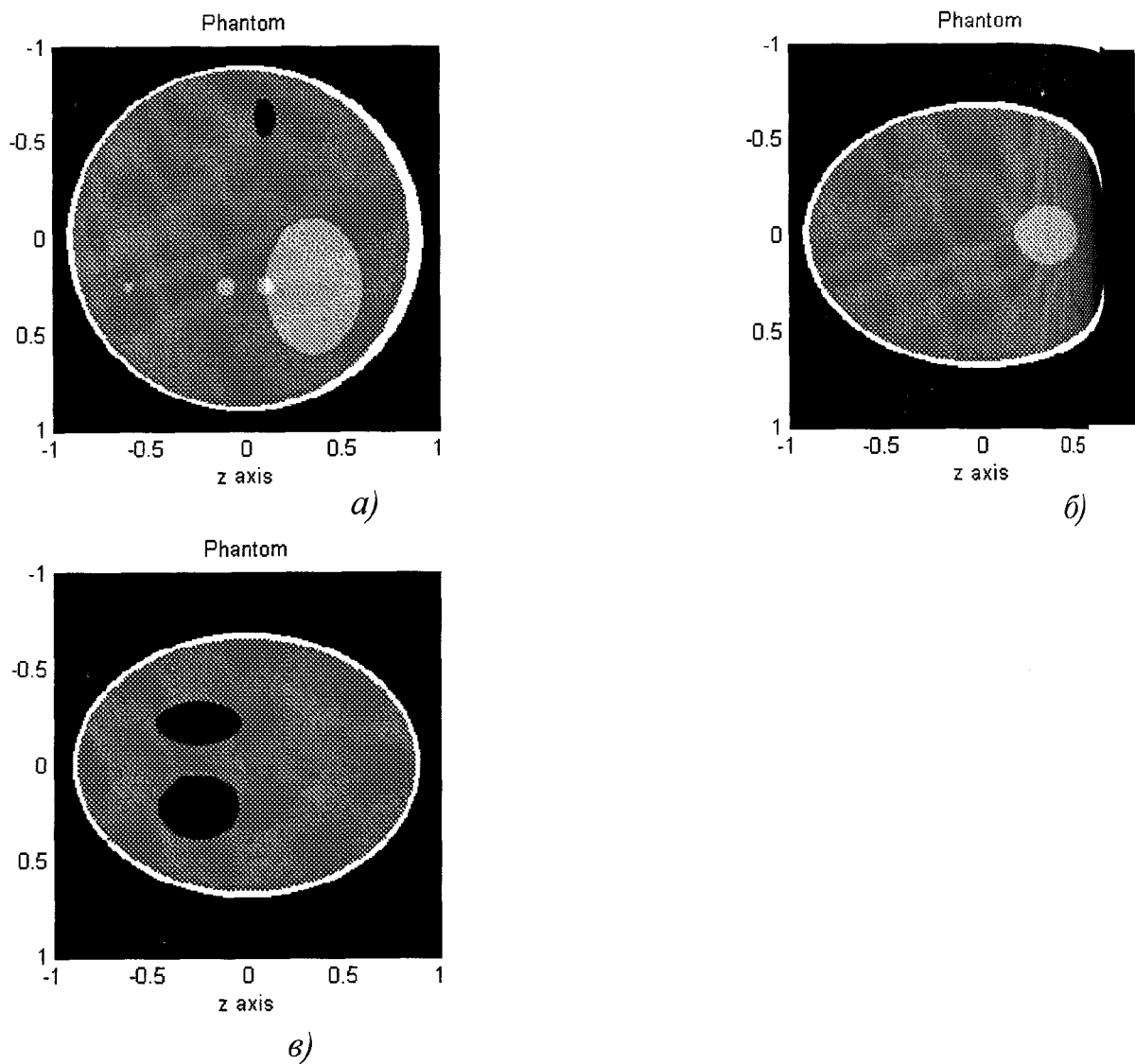


Рис. 4.2. Перерізи центральних площин тривимірного фантому:

- а) -  $yz$ -площина;
- б) -  $xz$ -площина;
- в) -  $xy$ -площина.



Так як властивості FDK - методу є різними в різних напрямках зображення (розд. 1.1) і залежать від гомогенності об'єкту, то для дослідження якості і властивостей розробленого алгоритму необхідно результати реконструкції розробленого алгоритму порівняти з результатами реконструкції FDK - алгоритму. Так як центральні площини об'єкту FDK - алгоритм відновлює без спотворень, то дане дослідження необхідно здійснити шляхом порівняння якості реконструйованих перерізів нецентральных площин. Перерізи нецентральных площин фантому представлені на рис. 4.3.

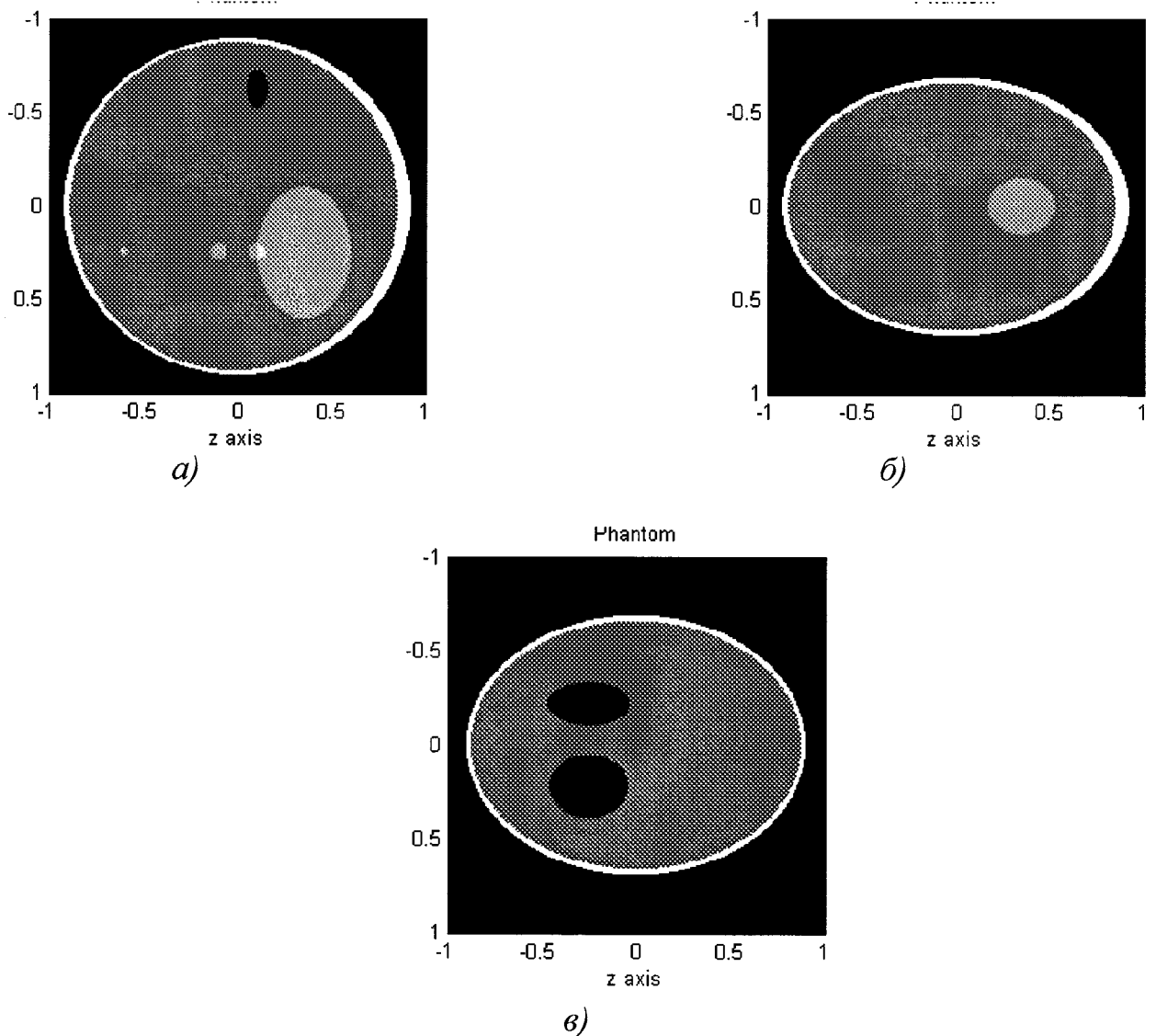


Рис. 4.3. Перерізи нецентральных площин тривимірного фантому :

а) -  $yz$ -площина,  $x = -0.25$ ;

б) -  $xz$ -площина,  $y = -0.25$ ;

в) -  $xy$ -площина,  $z = -0.25$ .

В додатку Ж-К наведені значення трьох мір різниць реконструйованих перерізів об'єкта і відповідних перерізів фантому і зображення даних перерізів. Але зробити висновок щодо збереження якості відновленого зображення швидким алгоритмом реконструкції можна тільки порівнявши дані міри відхилення з мірами реконструкції FDK – методом. На рис. 4.4 представлена реконструкція FDK – методом середньої сагітальної площини фантому (рис. 4.2 а). Результат метрологічного аналізу – три міри різниць становлять  $r=0.07$ ;  $d=0.33$ ;  $e=1.1$ .

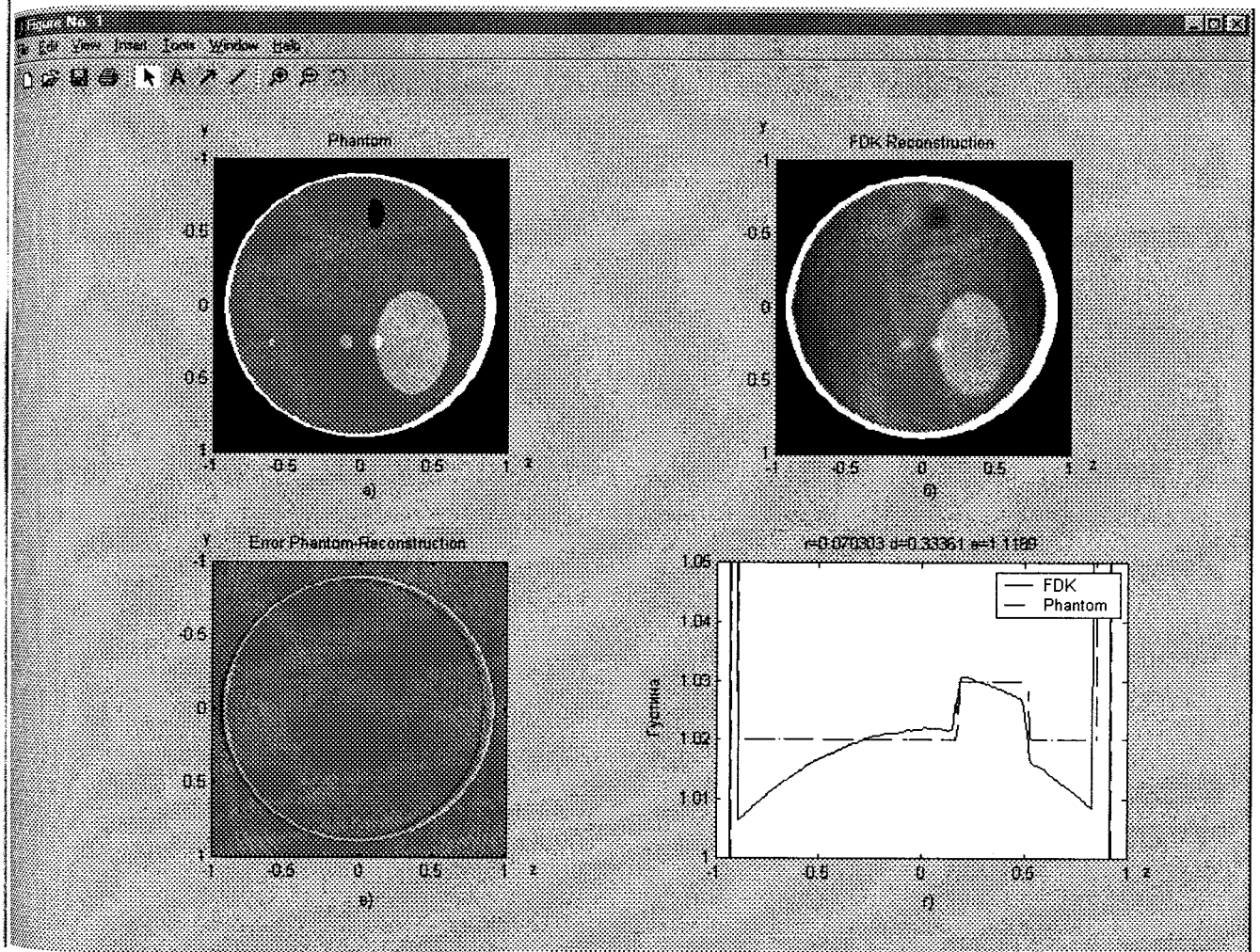
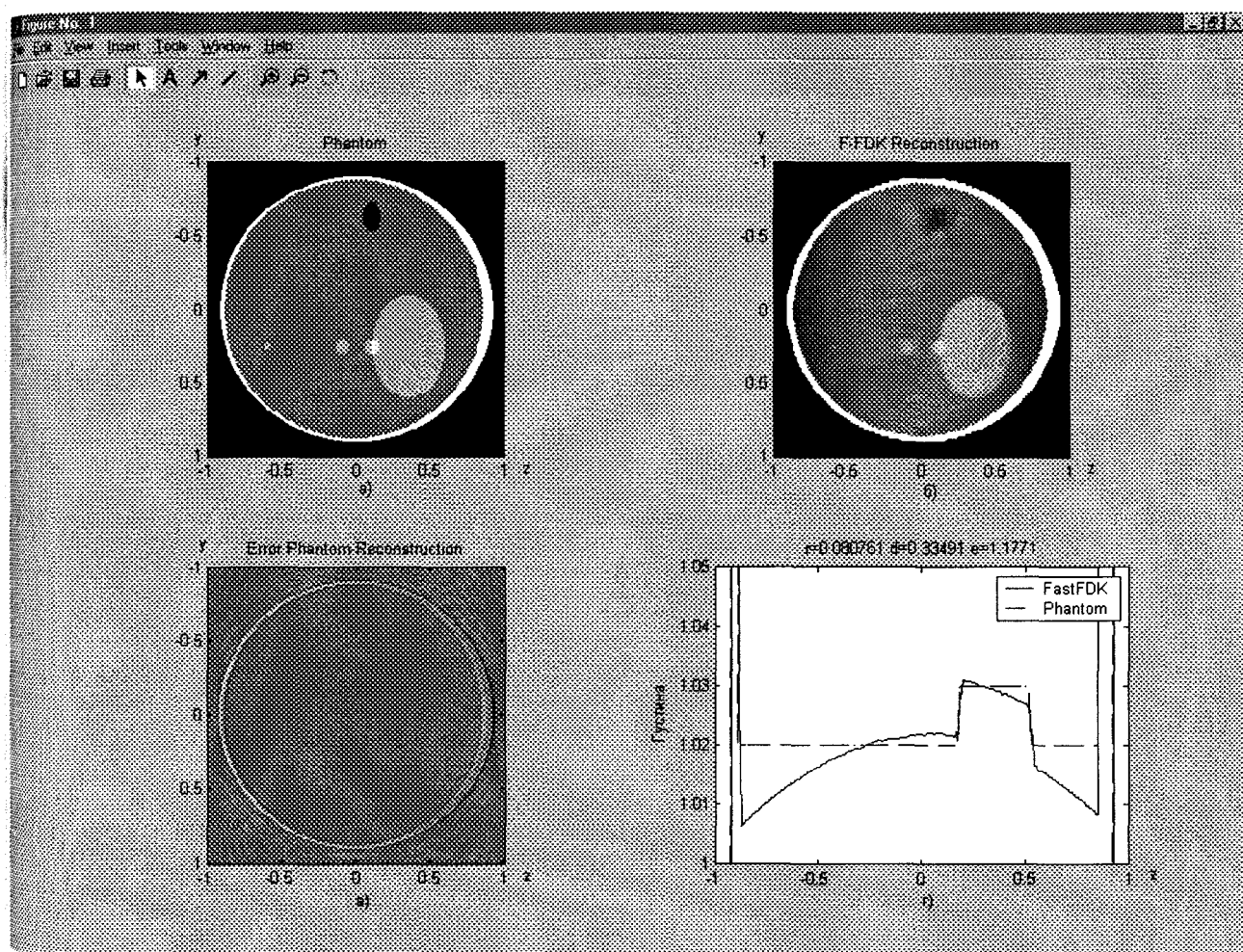


Рис. 4.4. Порівняння результату реконструкції FDK алгоритмом перерізу центральної сагітальної площини  $(y, z)$  з фантомом:

- а) - переріз фантому;
- б) - реконструйований переріз;
- в) - відхилення густини реконструйованого зображення від фантому;
- г) - перепад густини перерізу фантому і реконструкції по лінії  $y = 0$ .

Як видно, найбільшою є е-міра, яка характеризує наявність стремального відхилення густини реконструйованого пікселя від густини відповідного пікселя фантому. Наявність такого відхилення спричиняє неточну реконструкція ділянок зображення з різким перепадом густини.

Чим більший перепад густини у зображенні фантому, тим більшою буде е-міра і тим більше відхилення між відновленим зображенням і фантомом. Це підтверджується рис. 4.4 в і г. На рис. 4.4 в представлено зображення даного відхилення. Білим кольором зображується найбільша додатня різниця густини, а чорним – від'ємна. Реконструкція того самого перерізу розробленим швидким методом реконструкції у поєднанні з фільтрацією проєкційних даних (це буде



швидкий FDK алгоритм) представлена на рис. 4.5.

Рис. 4.5. Порівняння результату реконструкції швидким FDK алгоритмом перерізу в площині  $(y, z)$  з фантомом:

а) - переріз фантому; б) реконструйований переріз;

в) - відхилення густини реконструйованого зображення від фантому;

г) - перепад густини перерізу фантому і реконструкції по лінії  $y = 0$ .

Відповідні похибки зображення становлять  $r=0.08$ ;  $d=0.33$ ;  $e=1.18$ .

Зображення різниці густини реконструйованого зображення і фантому наведена на рис. 4.5 в. Порівнюючи рис. 4.4 б, г і рис. 4.5 б, г можна зробити висновки, що якість реконструкції FDK- і швидким FDK - методами є одного порядку.

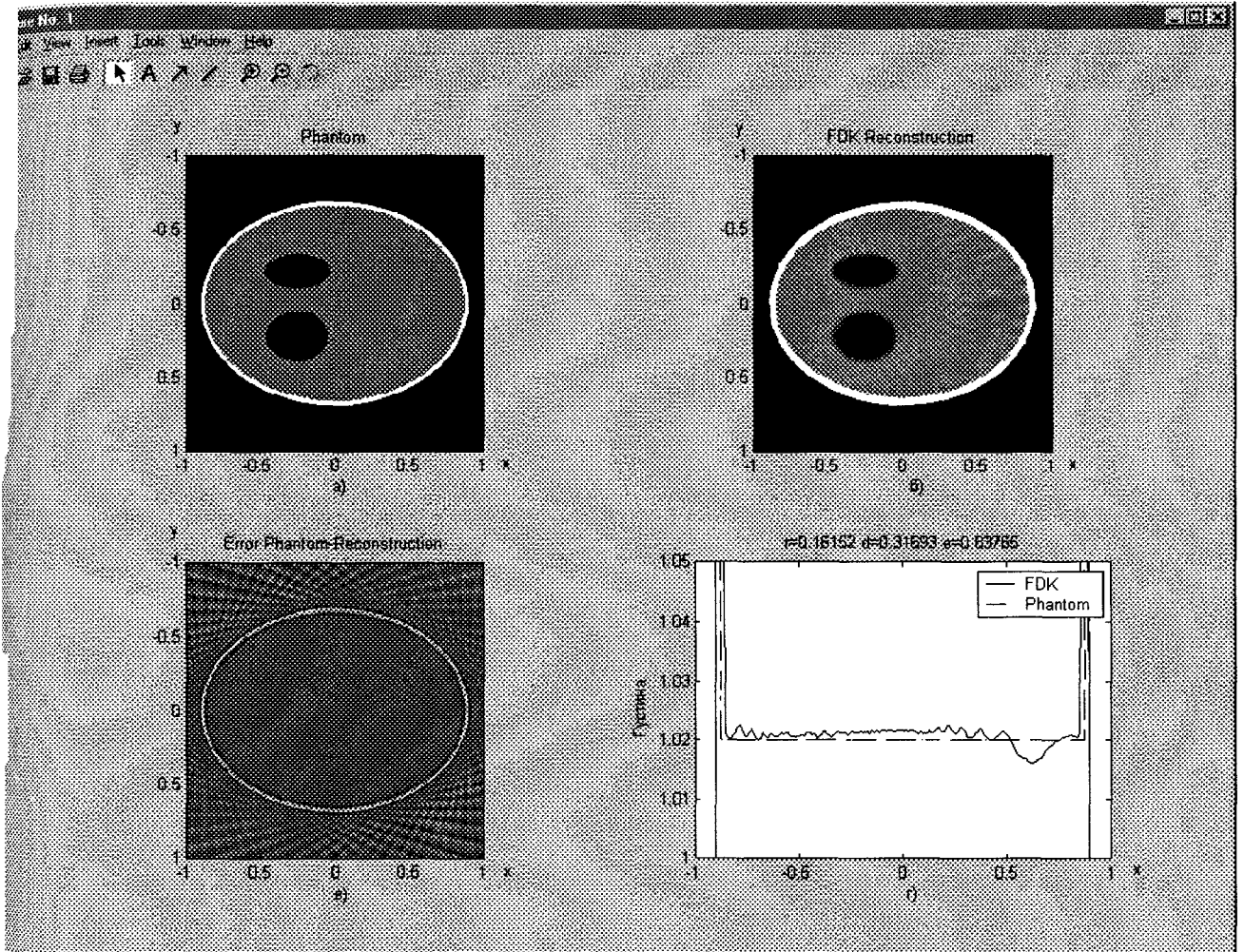


Рис. 4.6. Порівняння результату реконструкції FDK алгоритмом перерізу в площині  $(x, y)$  з фантомом:

а) переріз фантому;

б) реконструйований переріз;

в) відхилення густини реконструйованого зображення від фантому;

г) перепад густини перерізу фантому і реконструкції по лінії  $y = 0$ .

Щоб дослідити якість реконструкції зображення з більш однорідною  
 частиною розглянемо точність відновленого центрального перерізу у фронтальній  
 площині.

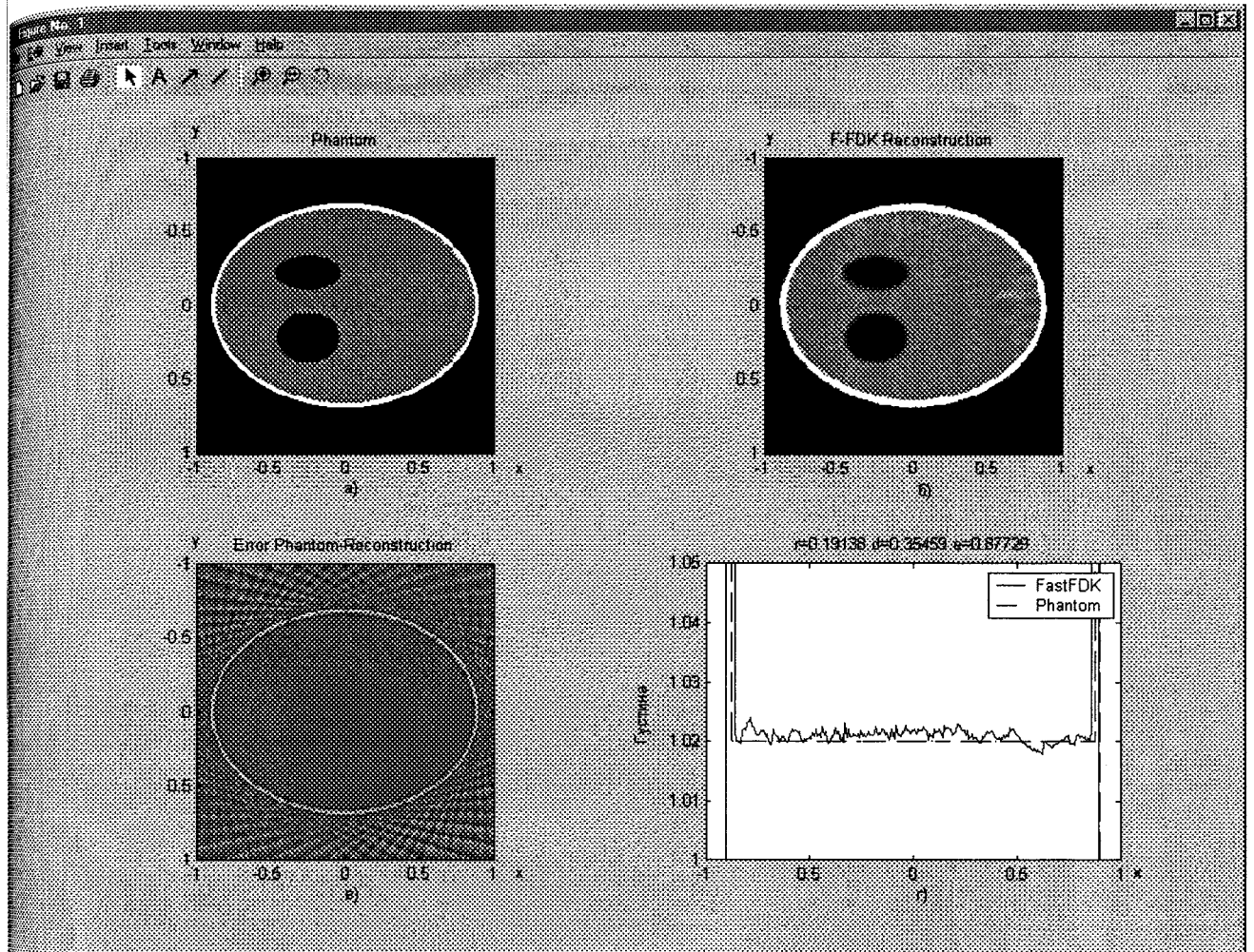


Рис. 4.7. Порівняння результату реконструкції перерізу в площині  $(x, y)$

швидким FDK алгоритмом з фантомом:

- а) - переріз фантому;
- б) - реконструйований переріз;
- в) - відхилення густини реконструйованого зображення від фантому;
- г) - перепад густини перерізу фантому і реконструкції по лінії  $y = 0$ .

На рис. 4.6 г і рис. 4.7 г приведено результати реконструкції даного перерізу  
 двома методами. З візуального порівняння можна стверджувати, що відновлені  
 зображення ідентичні.

Але міри відхилень є дещо відмінними. Це є наслідком того, що швидкий  
 метод використовує лінійну інтерполяцію в кожному кроці. Тому значення густини

реконструйованому зображенні змінюється більш стрибкоподібно. Однак, завдяки цьому в реконструкції швидким алгоритмом відсутній значний артефакт, який є найчим у FDK – реконструкції (рис. 4.6 в, г). Можна зробити висновок, що для однорідної структури об'єкту швидкий алгоритм відновлює краще за відомий FDK – алгоритм.

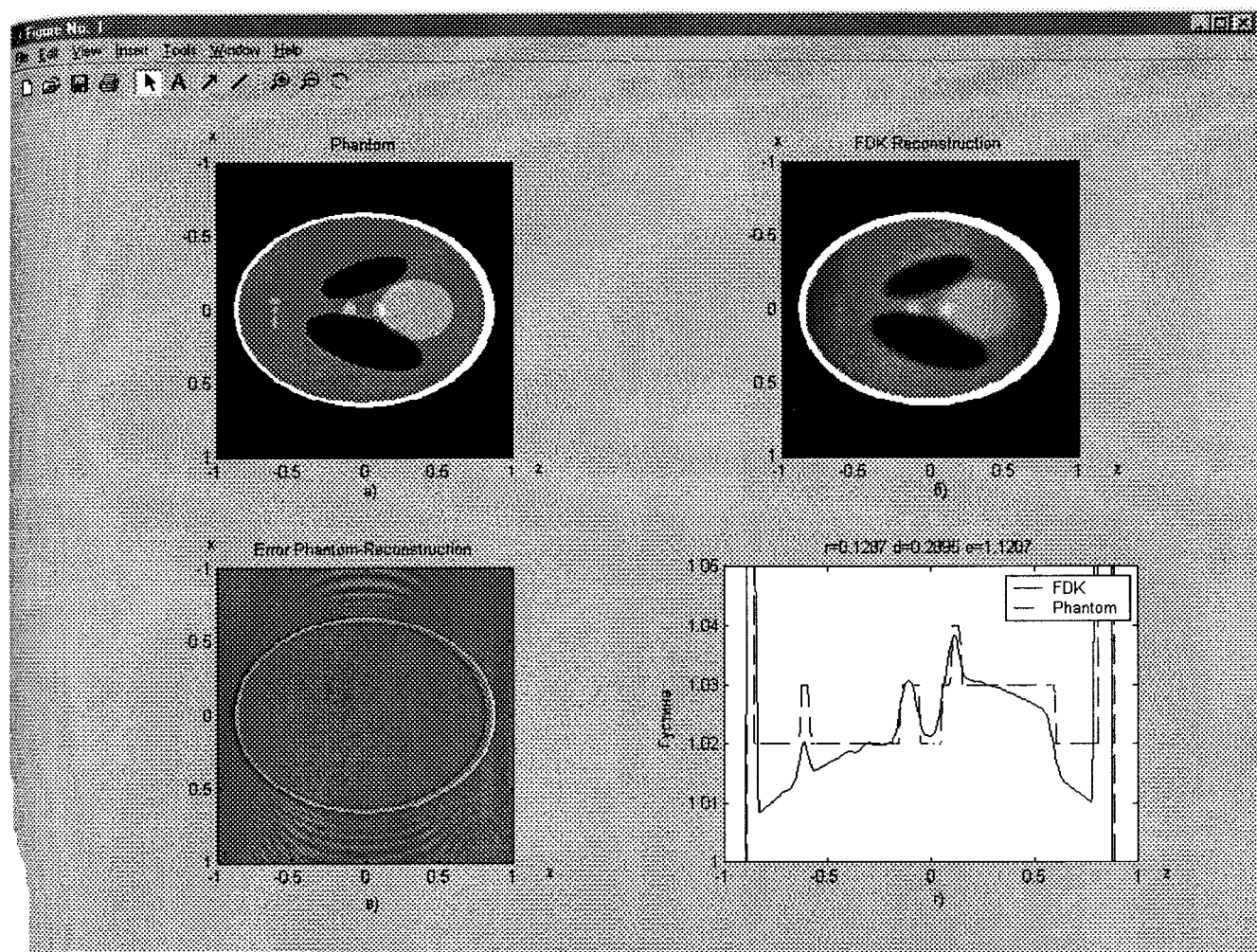


Рис. 4.8. Порівняння результату реконструкції FDK алгоритмом перерізу в площині  $(x, z)$  при  $y = -0.25$  з фантомом:

- а) - переріз фантому;
- б) - реконструйований переріз;
- в) - відхилення густини реконструйованого зображення від фантому;
- г) - перепад густини перерізу фантому і реконструкції по лінії  $x = 0$ .

Як відомо [93], FDK – алгоритм центральні перерізи об'єкту відтворює без спотворень, так як для цих площин виконується умова Тьюї – Сміта. Для них відсутні всі радонівські значення. Для дослідження можливості реконструкції будь-

ного перерізу тривимірного об'єкту з неповного набору проєкційних значень  
 розглянемо відновлення горизонтальної нецентральної площини двома методами  
 (рис. 4.8 і рис. 4.9).

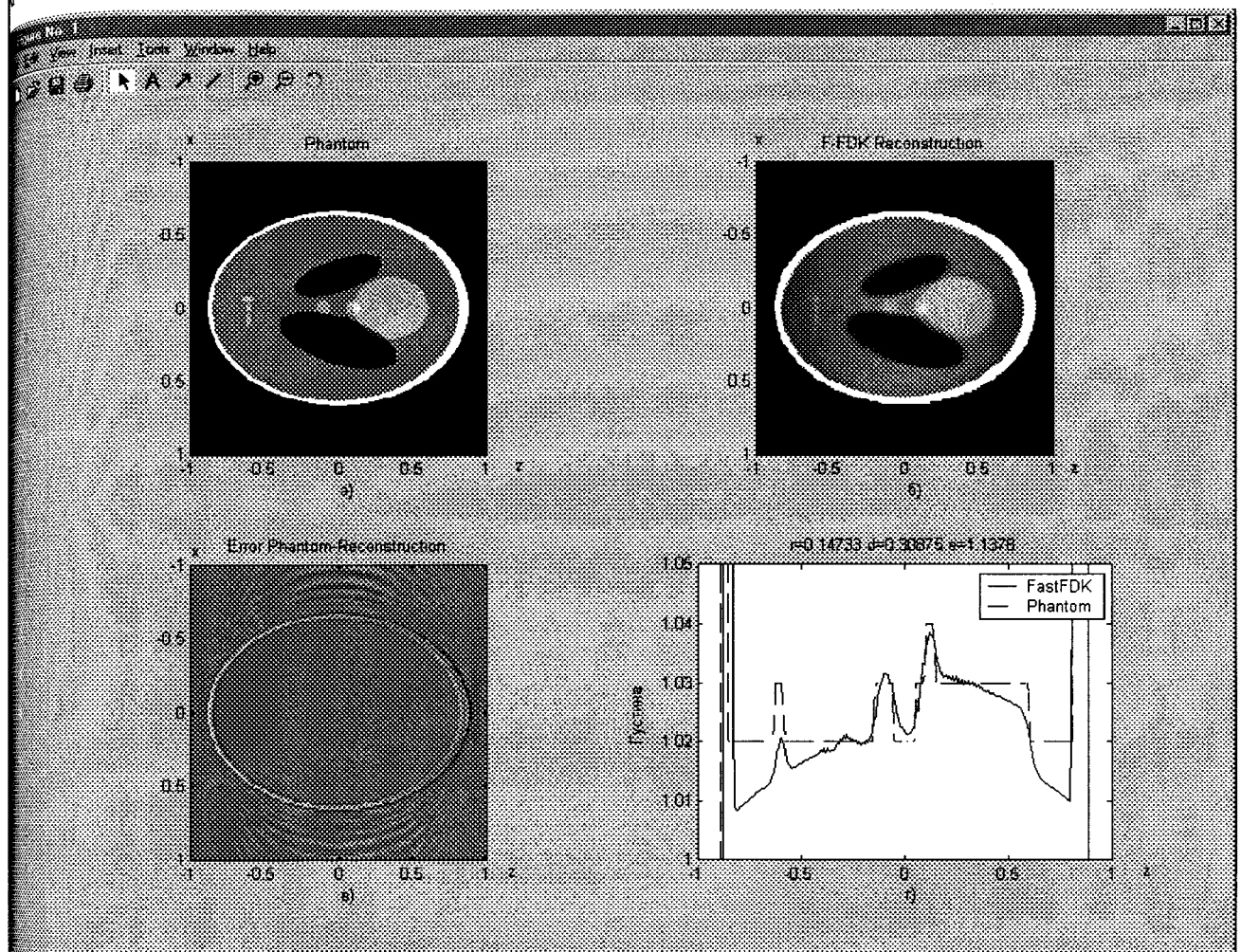


Рис. 4.9. Порівняння результату реконструкції швидким FDK алгоритмом перерізу в площині  $(x, z)$  при  $y = -0.25$  з фантомом:

- а) - переріз фантому;
- б) - реконструйований переріз;
- в) - відхилення густини реконструйованого зображення від фантому;
- г) - перепад густини перерізу фантому і реконструкції по лінії  $x = 0$ .

Відповідні міри якості реконструкції двома алгоритмами приведені на  
 рисунках. В обох відновлених зображеннях відновлення нецентральної площини  
 відбувається зі зростаючими до країв зображення об'єкту артефактами (вздовж осі

Отже якість реконструкції швидким FDK алгоритмом є одного порядку з якістю реконструкції FDK алгоритмом.

При аналізі рис. 4.4 - 4.9 можна зробити висновок, що швидкому FDK алгоритму притаманні всі три властивості FDK алгоритму, розглянуті в першому розділі. Очевидно, що реконструкція центральної  $xz$ -площини ( $z = 0$ ) відновлюється без спотворень, а саме, зростання артефактів від центру до краю зображення не відбувається. На відміну від даної площини реконструкція перерізу центральної площини  $xz$  відбувається зі зростаючими артефактами по краях зображення. Дана властивість є притаманною всім алгоритмам сімейства FDK, внаслідок усіченості проєкційних даних (наявності тіньової зони), що спричиняє відсутність необхідних для реконструкції деяких проєкційних даних. Як вже зазначалося даний недолік можна позбутися зміною траєкторії джерела (наприклад спіральна, траєкторія). Рис. 4.7 доводить третю властивість алгоритму - реконструкція об'єкту гомогенного в  $z$ - напрямку відбувається точно.

#### 4.3. Експериментальне дослідження методу реконструкції тривимірного об'єкту

Для підтвердження теоретичних досліджень приведених в попередніх розділах перевірки адекватності створених математичних моделей було проведено ряд експериментів.

В якості об'єкту дослідження був використаний взірець з плексиглазу циліндричної форми висотою 21,6 см і з діаметром основи 7 см., який містив різні типи наперед заданих дефектів. В середині циліндру був вживлений сталевий стержень висотою 19,2 см і з діаметром основи 3,2 см. Крім того на різних висотах (19,7 см, 11,5 см, 4,1 см від основи) було розміщено чужорідні включення (скло, сталь, дерево відповідно) різних розмірів.



Експеримент проводився на базі Івано-Франківської медичної академії, кафедра променевої діагностики з використанням 3D томографа фірми Philips CX 02, зовнішній вигляд якого представлений на рис. 4.10.

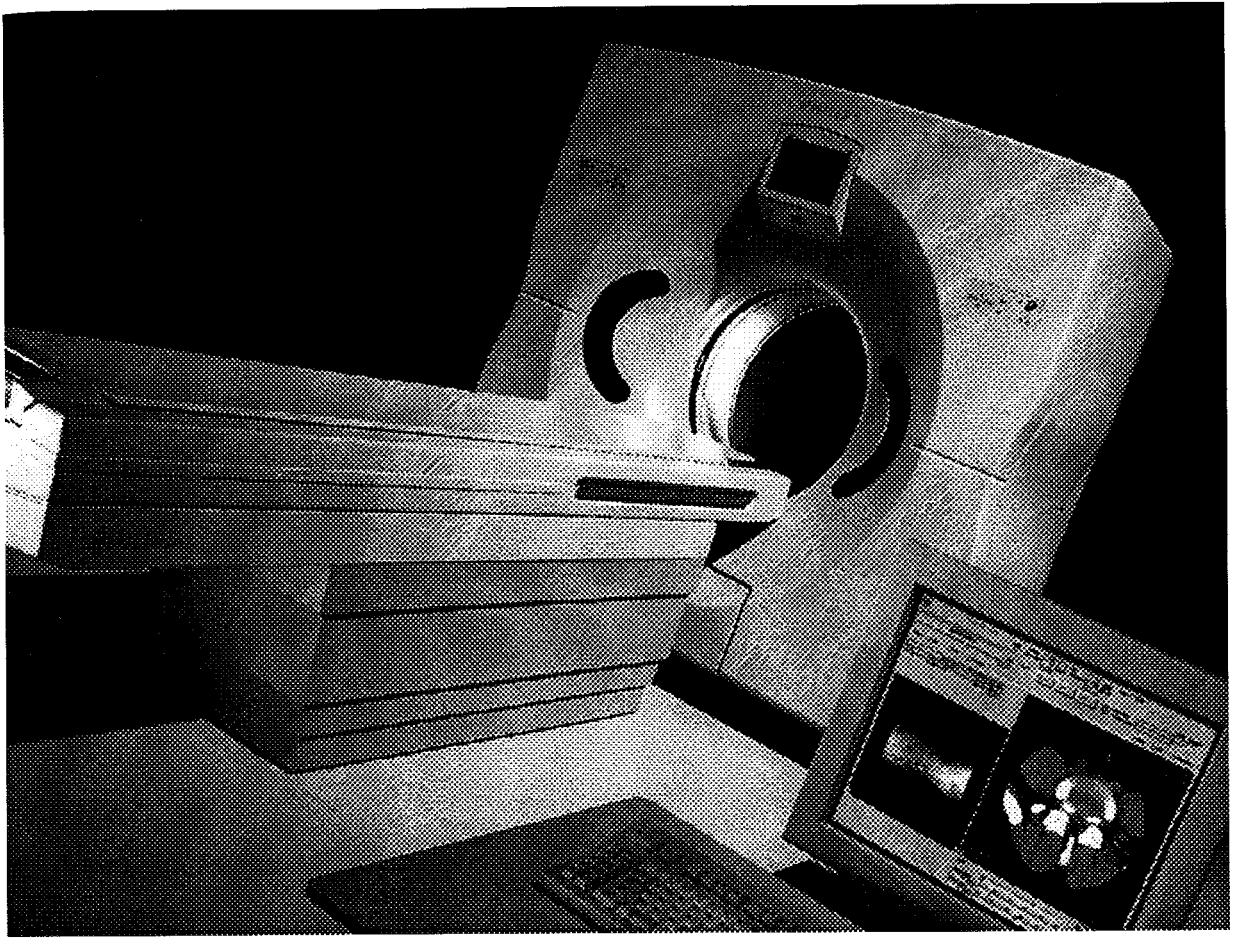
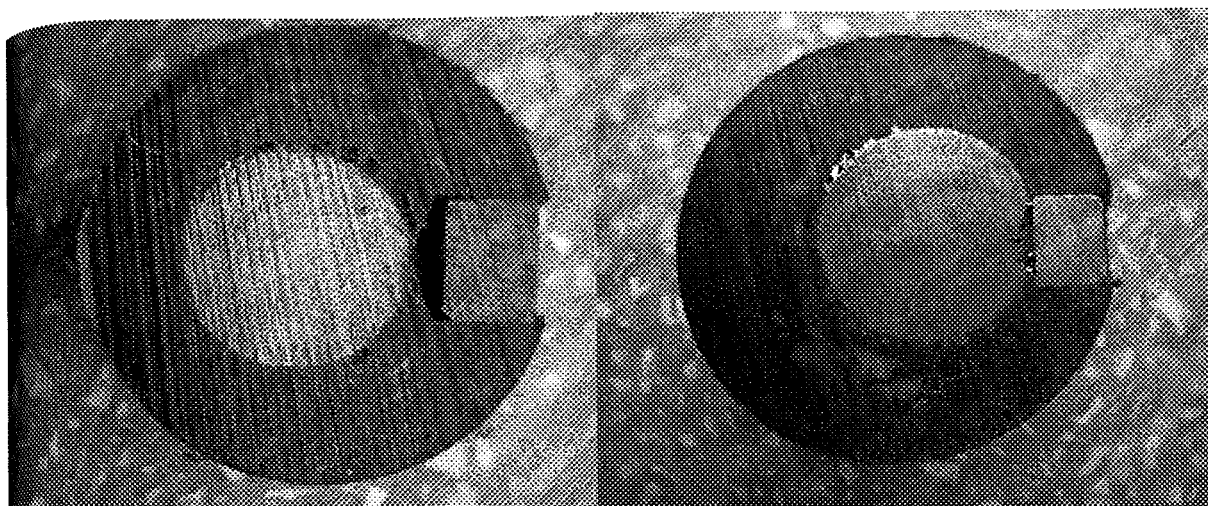


Рис. 4.10. Тривимірний томограф Phillips CX 02

Об'єкт був реконструйований швидким методом реконструкції і алгоритмом, що встановлений на даному томографі. Результати реконструкції двома методами приведені у додатку Л. Для метрологічного аналізу приведених томограм взірець був розпиляний на відповідні перерізи (рис. 4.11). Таким чином ми отримали тест-фантом для проведення метрологічного аналізу двох методів реконструкції.

За допомогою допоміжної програми (текст програми додаток М) взірцеві зображення були дискретизовані з роздільною здатністю  $256 \times 256$ . В результаті дискретизації ми отримали матрицю  $256 \times 256$ , значеннями якої є густини об'єкту у відповідному пік селі зображення. Після даної операції можливим стало обчислити похибки реконструкції зображення двома методами.



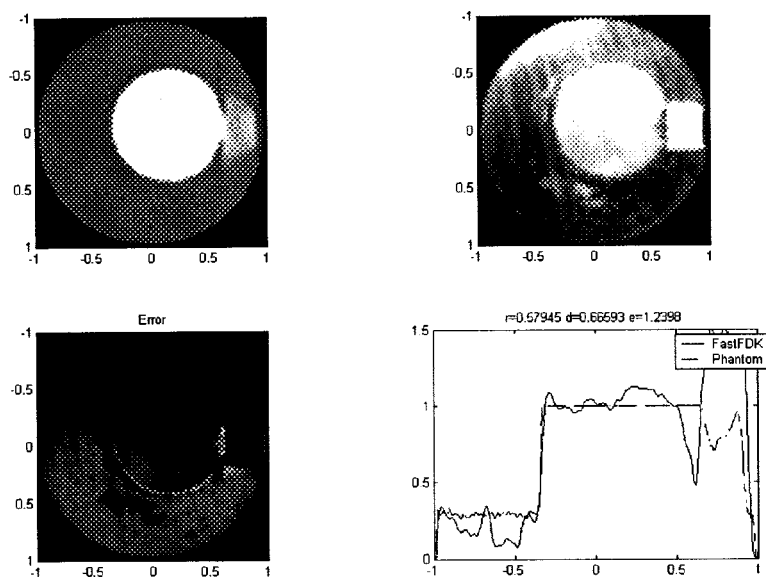
а)

б)

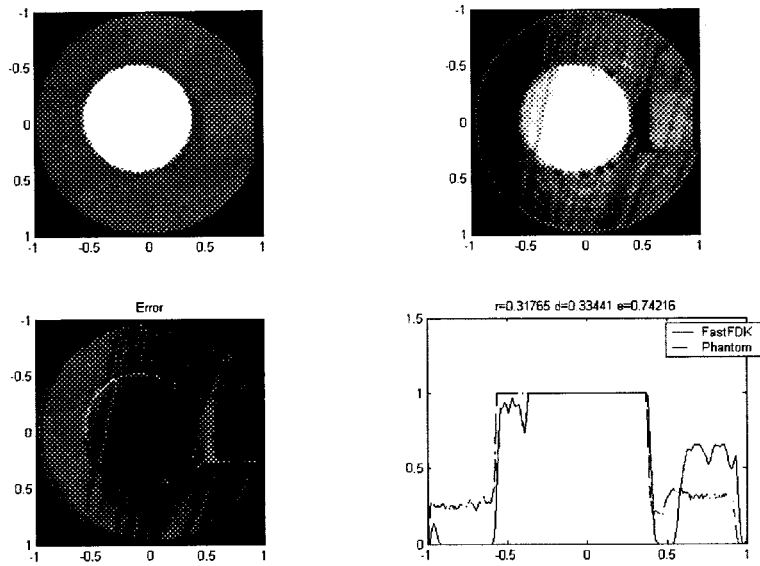
Рис. 4.11. Перерізи взірця, які піддавалися томографічному контролю:

- а) – переріз сталь-пластмаса-дерево;
- б) – переріз сталь-пластмаса-сталь.

На рис. 4.12 представлені результати метрологічного аналізу швидкого методу реконструкції. Відповідні похибки ( $r$ ,  $d$ ,  $e$  – міри) складають  $r=0,318$ ;  $d=0,344$ ;  $e=0,74$  для перерізу з рис. 4.11, а, і  $r=0,58$ ;  $d=0,666$ ;  $e=1,24$ . На рис. 4.12 представлені графіки розподілу густини взірця і реконструкції. Крім того, як видно з графіків, томографічний метод контролю точно визначає геометричні розміри будь-якого включення, що входить до складу об'єкту.



а)

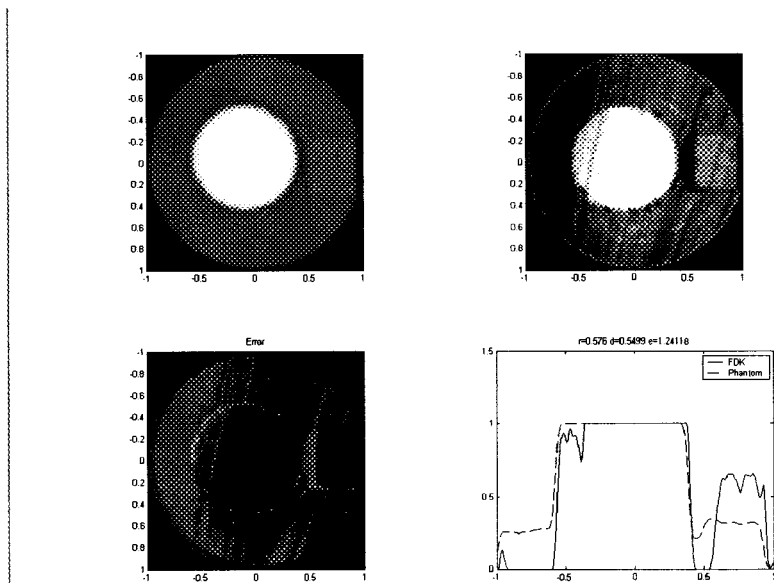


б)

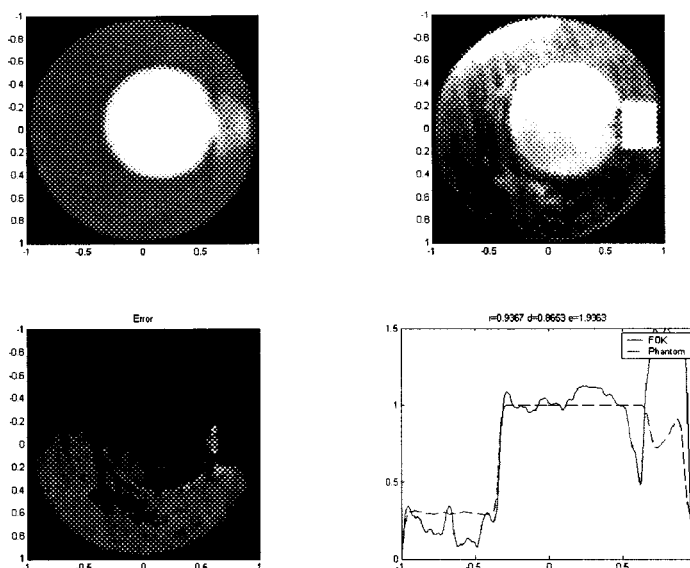
Рис. 4.12. Метрологічний аналіз швидкого методу реконструкції:

- а) – дослідження якості реконструкції перерізу сталь-пластмаса-сталь;  
 б) – дослідження якості реконструкції перерізу сталь-пластмаса-дерево.

На рис. 4.13 представлені результати метрологічного аналізу традиційного методу реконструкції. Відповідні похибки ( $r$ ,  $d$ ,  $e$  – міри) складають  $r = 0,576$ ;  $d = 0,55$ ;  $e = 1,24$  для перерізу з рис. 4.11, а, і  $r = 0,58$ ;  $d = 0,666$ ;  $e = 1,24$ .



а)



б)

Рис. 4.13. Метрологічний аналіз традиційного методу реконструкції:

- а) – дослідження якості реконструкції перерізу сталь-пластмаса- дерево;  
 б) – дослідження якості реконструкції перерізу сталь-пластмаса- сталь.

Крім того, в якості об'єкта дослідження нами було використано результат томографічного експерименту (просвічування) інших дослідників. Такими результатами було проєкційне зображення як технічних так і біологічних об'єктів. Розглянемо спочатку реконструкцію зображення внутрішньої структури біологічних об'єктів.

4.3.1. Дослідження внутрішньої структури біологічних об'єктів. Для тестування розробленого швидкого методу реконструкції були проведені експерименти, які полягали у реконструкції внутрішньої структури об'єкту із його проєкційних даних. Об'єкт дослідження (проєкційне зображення об'єкта) був отриманий у результаті томографічного експерименту – просвічування об'єкта на рентгенівському тривимірному томографі. Сучасні КТ-сканери не дозволяють безпосередньо отримати такі зображення, тому для їх отримання ми припиняли процес реконструкції в момент отримання

проекційних значень і в пам'яті виокремлювали область з цими даними. Для цього вміст всієї пам'яті копіювали у файл (DUMP) і знаючи приблизну структуру даних (RAW) вилучали потрібні дані, що було можливим внаслідок відсутності їх шифрування. Отримані проєкційні дані ми перетворили у формат придатний для обробки їх нашою програмою (mat) (дані перетворені з формату LONG у формат DOUBLE). Структурна схема експерименту представлена на рис. 4.14.

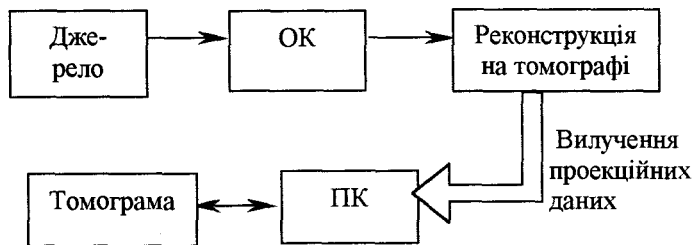


Рис. 4.14. Структурна схема отримання проєкційних значень об'єкта контролю:

*Джерело* – джерело рентгенівського випромінювання;

*ОК* – об'єкт контролю;

*ПК* – персональний комп'ютер.

Перші зображення – біологічні об'єкти дослідження – були отримані з 3D томографа фірми Philips CX 02 (м. Івано – Франківськ, обласна лікарня №1).

Виконання дослідження №1. Спільно з кафедрою променевої діагностики Івано-Франківської державної медичної академії були проведені томографічні дослідження печінки і серця людини.

КТ проводилася на спіральному комп'ютерному томографі в однозрізовому режимі (траєкторія сканування одне коло), товщина зрізу 10 мм, без контрастного підсилення. Отримані дані були вже переоброблені (профільтровані), тому нами був використаний безпосередньо метод швидкого зворотного проектування.

Результати реконструкції представлені на рис. 4.15.

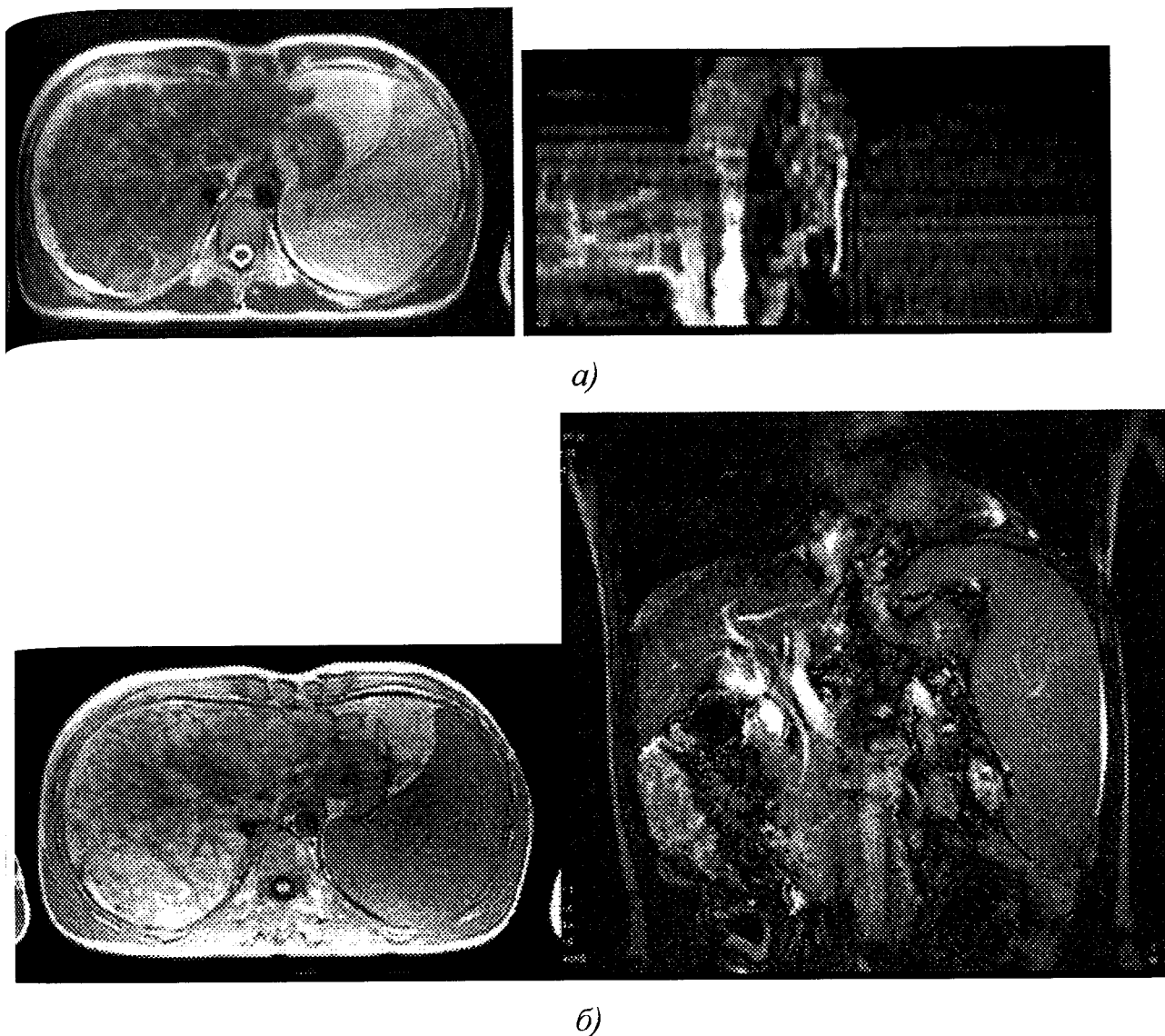


Рис. 4.15. Реконструкція тривимірного біологічного об'єкта (печінка)

Виконання дослідження №2

а) – горизонтальні і вертикальні перерізи біологічного об'єкта (печінки) отримані стандартним методом обробки проєкційних даних;

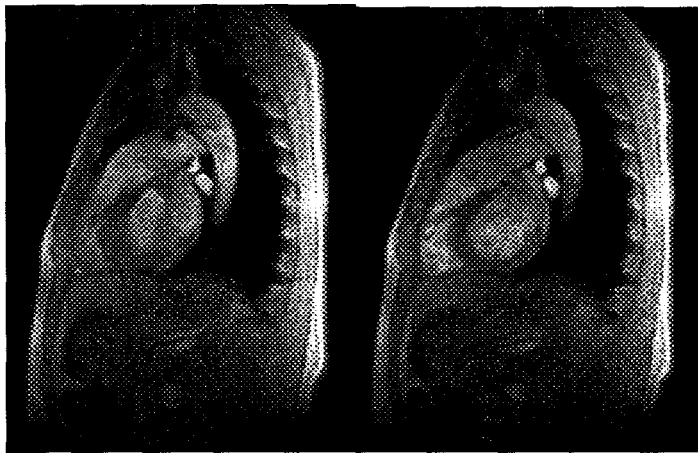
б) - горизонтальні і вертикальні перерізи біологічного об'єкта (печінки) отримані швидким алгоритмом реконструкції.

Томографічне дослідження серця було проведено у вищенаведених умовах. При томографічному дослідженні серця до уваги було прийнято його змінний в часі характер. Тому в цьому дослідженні основним параметром порівняння розробленого алгоритму був час реконструкції, а саме кількість отриманих перерізів за той самий

Результати реконструкції представлені на рис. 4.16. Як видно з рис. 4.16, б отримано два перерізи, в яких серце знаходиться у різних періодах.



а)



б)



в)

Рис. 4. 16. Реконструкція біологічного об'єкту (томограми серця)

а) – сагітальний переріз отриманий за допомогою стандартного методу реконструкції;

б) – сагітальні перерізи отримані за допомогою швидкого методу реконструкції;

в) – горизонтальний переріз отриманий за допомогою швидкого методу реконструкції.

4.3.2. Дослідження технічних об'єктів. Перейдемо до розгляду процесу реконструкції технічних об'єктів. В якості об'єкта було використано результати томографічного експерименту наведені в [100]. Об'єкт дослідження був отриманий за допомогою технічного томографа **TOMORAY-01**. Зовнішній вигляд промислового тривимірного томографа зображений на рис. 4.17.



Рис. 4.17. Тривимірний промисловий томограф TOMORAY-01

#### Технічні характеристики томографа

Діаметр виробів від 5 до 250 мм;

Час контролю 5-25 хв;

Час відновлення зображення 1-2 хв;

Просторова роздільна здатність - 1%;

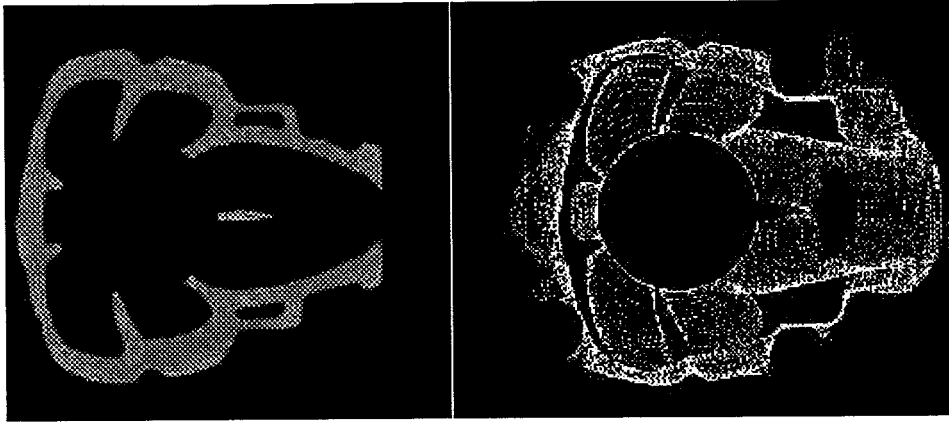
Розміри матриці зображення 256x256x256.

Детекторна система: масив, що складається з 125  $\text{CdWO}_4$  сцинтиляційних детекторів и вольфрамового коліматора;

Об'єкт: до 500 мм в діаметрі, 600 мм по висоті і вагою до 25 кг.

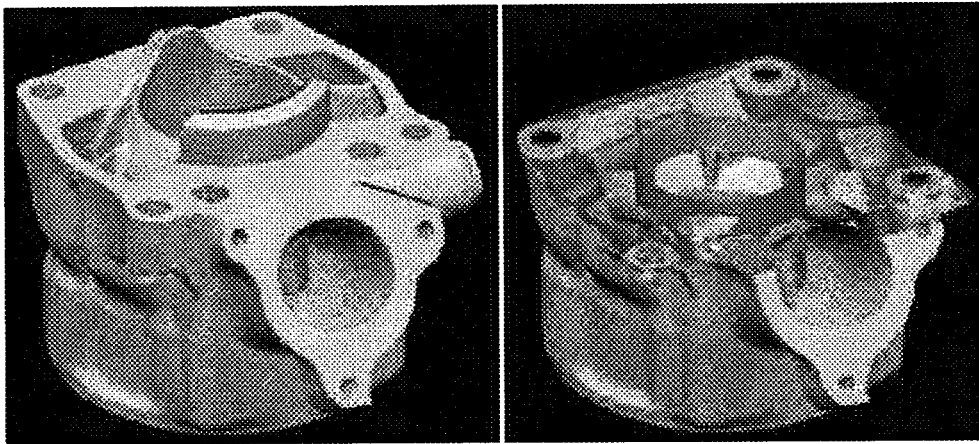
Результати тривимірної реконструкції двигуна внутрішнього згорання представлені на рис. 4.18.





а)

б)



в)

Рис. 4.18. Реконструкція двигуна внутрішнього згорання:

- а) – реконструкція швидким методом;
- б) – реконструкція традиційним методом;
- в) – результуюче зображення об'єкту.

#### Висновки до четвертого розділу.

1. Запропоновано новий підхід до проведення метрологічного аналізу методів реконструкції, що повністю виключає суб'єктивну складову. Сформульовано основні критерії порівняння алгоритмів реконструкції.

2. На основі програмної реалізації методу швидкої тривимірної реконструкції зображення об'єкту встановлено, що якість реконструйованого зображення збільшується при значному зменшенні часу реконструкції.

3. Здійснено метрологічний аналіз та досліджена точність розробленого алгоритму. Метод дозволяє здійснювати реконструкцію зображень з роздільною здатністю неа рівні не нижче  $2 \cdot 10^{-3}$  мм, а швидкість обробки експериментальних даних при цьому зростає до 50%.

## ВИСНОВКИ

У дисертації наведене теоретичне узагальнення і нове вирішення наукової задачі, що виявляється в розробці нового методу тривимірної реконструкції нонманітних за своєю природою об'єктів, який дає змогу зменшити час відновлення тривимірного об'єкту зі збереженням якості реконструйованого зображення. Проведені дослідження дозволили зробити такі висновки:

1. Отримана нова залежність значення функції тривимірного об'єкту від його проєкційних значень для конусної схеми сканування, яка повністю відображає як фізичну так і математичну суть процесу реконструкції тривимірного об'єкту. Завдяки цьому створено метод швидкої тривимірної реконструкції зображення внутрішньої структури об'єкта, який до 10 раз зменшує час реконструкції зі збереженням якості реконструкції.
2. Розроблено математичну модель томографічної системи, яка пов'язує інтенсивність рентгенівського випромінювання з реальними проєкційними даними об'єкта і показано, що цей зв'язок носить інтегральний характер. Завдяки цьому дістав подальший розвиток напрямок математичного моделювання зображення об'єкта у тривимірному векторному просторі. Результати дослідження даної моделі розширюють область застосування методів математичного моделювання на задачі створення апаратури для швидкої технічної діагностики.
3. Досліджено комплексність методу швидкої тривимірної реконструкції і доведено, що вона становить  $O(N^3 \ln N)$  операцій замість  $O(N^4)$  операцій, які притаманні традиційним методам. Використання методу є найбільш доцільним при відновленні об'єкту з великою роздільною здатністю, або при умові реконструкції з великого масиву проєкційних даних. Для відновлення тривимірного об'єкта з роздільною здатністю  $512 \times 512 \times 1024$  традиційним методом необхідно  $5 \cdot 10^{11}$  операцій. Швидкий метод реконструкції відновлює зображення розміром  $512 \times 512 \times 1024$  за в два з половиною рази менше операцій при збереженні якості зображення, або за таку ж кількість операцій

відновлює зображення з роздільною здатністю  $739 \times 739 \times 1458$ , яка є майже у півтора рази вищою.

4. За допомогою використання програмної реалізації математичної моделі, в результаті роботи якої отримується набір реальних рентгенівських проєкційних даних, доведено, що модель адекватно відображає результат рентгенівського томографічного експерименту.
5. На основі програмної реалізації методу швидкої тривимірної реконструкції зображення об'єкту встановлено, що якість реконструйованого зображення зберігається при значному зменшенні часу реконструкції до 50%.

пропонована технічна реалізація швидкого методу тривимірної реконструкції зображення об'єкта при визначенні його складу. Визначено, що апаратна реалізація цього методу вимагає  $O(N^3)$  біт ПЗП.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Приборы неразрушающего контроля материалов и изделий. В 2-х книгах. Кн. 1/ Под ред. В.В. Клюева. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Машиностроение, 1986. 488 с.
2. Меркулов А. М., Соломеин И. А., Петрованов В.М. Система отображения трехмерной информации для задач промышленной томографии// II Всесоюзный симпозиум по вычислительной томографии. Тезисы докладов. - Куйбышевский авиационный институт, 1985.
3. Скотт Д. М. Промышленное применение томографии процессов // Датчики и системы, 2000. - №1.
4. Кошовий В. В., Кривін Є. В., Романишин І. М. Ультразвукова обчислювальна томографія в задачах неруйнівного контролю та технічної діагностики // Фіз.-хім. Механіка матеріалів. - 1997. - №5. - С. 31-42.
5. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям: Основы реконструктивной томографии. Пер. с англ. - М.: Мир, 1983 - 352 с.
6. Natterer, F. The Mathematics of Computerized Tomography. John Wiley and Sons. ISBN 0-471-90959-9, 1986.
7. Kak A. C., M. Slaney. Principles of Computerized Tomographic Imaging. IEEE Press. ISBN 0-87942-198-3, 1987.
8. Kalender W. Computed Tomography: Fundamentals, System Technology, Image Quality, Applications. Publics MCD Verlag. ISBN 3-89578-081-2, 2000.
9. Schaller, S., T. Flohr, and P. Steffen. A New Approximate Algorithm for Image Reconstruction in Cone-Beam Spiral CT at Small Cone-Angles. In IEEE Medical Imaging, Anaheim, California, USA, 1996.
10. Eriksson, J. Problems and Experiments in Cone-Beam Tomography. Licentiate Thesis. Department of Electrical Engineering, Linköping University, 1998.

11. Danielsson P.E. Iterative Techniques for Projection and Back-Projection. Technical Report LiTH-ISY-R-1960, ISSN 1400-3902, Department of Electrical Engineering, Linköping University, 1997.
12. Grass M., T. Köhler, R. Proksa. 3D cone-beam CT reconstruction for circular trajectories. *Physics in Medicine and Biology* 45(2), 2000, pp. 329–347.
13. Grangeat, P., P. Le Mason, P. Mellenec, and P. Sire. Evaluation of the 3D Radon Transform Algorithm for Cone Beam Reconstruction. In *SPIE Medical Imaging V: Image Processing*, Technical Conference 1445. San Jose, California, USA. - Feb. 23 – March 1, 1991.
14. T. L. Faber, E. M. Stokely. Orientation of 3D structures in medical images. *IEEE Transaction on Pattern Recognition*, vol. 10, 1988, pp. 626 - 633.
15. Gabor T. Herman, Stuart W. Rowland: SNARK 77. A Programming System for Image Reconstruction from Projections. Technical Report No. 130, Dept. of Computer Science, State University of New York at Buffalo 1978.
16. Gabor T. Herman: Image Reconstruction from Projections. Academic Press, New York et al. 1980.
17. Jolyon A. Browne, Gabor T. Herman, Dewey Odhner: SNARK93: A Programming System for Image Reconstruction from Projections. Technical Report No. 198, Medical Image Processing Group, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA, 1993.
18. R. H. Huesman et al.: Donner Algorithms for Reconstruction Tomography. Users Manual. Lawrence Berkeley Laboratory, University of California 1977.
19. J. Radon. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Ber. Verb. Sachs. Akad. Wiss., Leipzig, Math. Phys. Kl.*, 69, 1917, pp. 262-277.
20. Silver, M. D. Practical Limits to High Helical Pitch, Cone-Beam Computed Tomography. In *International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, June 25-28, 1997, Nemacon, Pennsylvania, USA, 1997. - pp. 44–47.

21. Silver, M. D. High-Helical-Pitch, Cone-Beam Computed Tomography. *Physics in Medicine and Biology* 43(4), 1998. - pp. 847–855.
22. Yan, X.-H. and R. M. Leahy. Cone Beam Tomography with Circular, Elliptical and Spiral Orbits. *Physics in Medicine and Biology* 37(3), 1992. - pp.493–506.
23. Hu, H. Multi-Slice Helical CT: Scan and Reconstruction. *Medical Physics* 26(1), 1999. - pp. 5–18.
24. Defrise, M., F. Noo, and H. Kudo. A solution to the long object problem in helical CB tomography. *Physics in Medicine and Biology* 45, 2000. - pp. 623–643.
25. Kalender, W. Principles and performance of spiral ct. In L. W. Goldman and J. B. Fowlkes (Eds.), *Medical CT and Ultrasound: Current Technology and Applications*. Advanced Medical Publishing, 1995. - pp. 379–410.
26. Berland, L. L., J. K. Smith. Multidetector-ArrayCT:Once Again, Technology Creates New Opportunities. *Radiology*, 1998. - 209(2). - pp. 327–329.
27. J. Horiguchi, T. Nakanishi, A. Tamura, K. Ito, K. Sasaki, Y. Shen, Technical innovation of cardiac multirow detector CT using multisector reconstruction, *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 2001. - 26(4). - pp. 217-226.
28. Hoppe H., Dinkel H. P., Thoeny H., Gugger M., Vock P. Virtual endoscopy of the upper, central and peripheral airways with multirow detector CT. *Radiologe. Institut für Diagnostische Radiologie. Germany*, 2002, Sept. 42(9). - p. 703.
29. Pan, T., Y. Shen. New Multi-sector Reconstruction for Cardiac CT. In *IEEE Medical Imaging*, Oct 16–20, 2000, Lyon, France, 2000.
30. Baartman Hans. TDM: de la rotation continue a l'acquisition volumique. *Toshiba medical systems EUROPE*, 2000.
31. Hounsfield G. N. Computerized transverse axial scanning tomography: Part I, description of the system, *Br. J. Radiol.*, 46, 1973. - pp. 1016 - 1022.
32. Brady, M. L. A Fast Discrete Approximation Algorithm for the Radon Transform. *SIAM Journal of Computing* 27(1), 1998. - pp. 107–119.
33. Brandt, A., J. Mann, M. Brodski, M. Galun. A fast and accurate multilevel inversion of the Radon transform. *SIAM Journal of Applied Mathematics* 60(2), 1999 - pp. 437–462.

34. Herman, G. T., A. Naparstek. Fast image reconstruction based on a radon inversion formula appropriate for rapidly collected data. *SIAM Journal of Applied Mathematics* 33, 1977. - pp. 511–533.
35. Heuscher, D. Helical cone beam scans using oblique 2D surface reconstruction. In *International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, June 23–26, 1999, Egmond aan Zee, The Netherlands, 1999, pp. 204–207.
36. Jacobson, C. Fourier Methods in 3D-Reconstruction from Cone-Beam Data. Ph. D. thesis, Department of Electrical Engineering, Linköping University, 1996.
37. Bruder, H., M. Kachelriess, S. Schaller, T. Mertelmeier. Performance of approximate cone-beam reconstruction in multi-slice computed tomography. In *SPIE Medical Imaging*, Feb. 12–17, 2000, San Diego, California, USA, 2000, pp. 541–554.
38. Köhler, T., R. Proksa, M. Grass (2000). A Fast and Efficient Method for Sequential Cone-Beam Tomography. In *IEEE Medical Imaging*. Lyon, France. - Oct 16–20, 2000.
39. Defrise, M., F. Noo, H. Kudo (1999). Quasi-Exact Region-of-Interest Reconstruction from Helical Cone-Beam Data. In *IEEE Medical Imaging*. Seattle, Washington, USA, Volume 2, 1999, , pp. 1101–1103.
40. Kudo, H., F. Noo, M. Defrise. Cone-Beam Filtered-Backprojection Algorithm for Truncated Helical Data. *Physics in Medicine and Biology* 43, 1998, pp. 2885–2909.
41. Kudo, H., S. Park, F. Noo, M. Defrise. Performance of quasi-exact cone-beam filtered backprojection algorithm for axially truncated data. *IEEE Transactions on Nuclear Science* 46(3), 1999, pp. 608–617.
42. Mueller, K. Fast and accurate three-dimensional reconstruction from conebeam projection data using algebraic methods. Ph. D. thesis, The Ohio State University, USA, 1998.
43. Grangeat, P. Analyse d'un Syst`eme d'Imagerie 3D par Reconstrucion `a partir de Radiographies X en G'eom'etrie Conique. Ph. D. thesis, Ecole Nationale Sup'erieure des T'el'ecomunications, 1987.



44. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. Учеб. пособие для вузов. Изд. 3-е. - М.: Наука, 1986. - 288 с.
45. Tuy, H. An inversion formula for cone-beam reconstruction. *SIAM Journal of Applied Mathematics* 43, 1983, pp. 546–552.
46. Feldkamp, L. A., L. Davis, J. Kress. Practical Cone-beam Algorithm. *Journal of the Optical Society of America* 1, 1984, pp. 612–619.
47. Zeng, G. L., G. T. Gullberg. Short-Scan Cone Beam Algorithm for Circular and Non-Circular Detector Orbits. In *SPIE Medical Imaging IV: Image Processing, Volume 1233*, 1990, pp. 453–463.
48. Tam, K. C., S. Samarasekera, F. Sauer. Exact Cone-Beam CT with a Spiral Scan. In *International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*. Nemacon, Pennsylvania, USA. - June 25-28, 1997.
49. Openheim B. E. Reconstruction tomography from incomplete projections. In *Reconstruction tomography in Diagnostic Radiology and Nuclear Medicine*. Univer. Park Press, Baltimore, Maryland, 1977, pp. 155-183.
50. Tam, K. C. Three-Dimensional Computerized Tomography Scanning Method and System for Large Objects with Smaller Area Detectors. US Patent 5,390,112, Feb. 14.
51. Kreuder, F., M. Grass, V. Rasche, H. Braunisch, and O. D'ossel. Fast calculation of the X-ray transform from the radial derivative of the 3D Radon transform using gridding and fast backprojection techniques. In *European Medical and Biological Engineering Conference*, Vienna, Nov. 4–7, 1999.
52. Schaller, S. Practical Image Reconstruction for Cone Beam Computed Tomography. Ph. D. thesis, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Germany, 1998.
53. Defrise M., R. Clack. A Cone-Beam Reconstruction Algorithm Using Shift-Variant Filtering and Cone-Beam Backprojection. *IEEE Transactions on Medical Imaging* 13(1), 1994, pp. 186–195.
54. Schaller, S., T. Flohr, H. Wolf, and W. Kalender. Evaluation of a Spiral Reconstruction Algorithm for Multirow-CT. In *RSNA'98*, Nov. 29 – Dec 4, Chicago, USA, supplement to *Radiology*, volume 209 (P), 1998.

55. Маккеллан Дж. Г., Рейдер Ч. М. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов: Пер. с англ./ Под ред. Ю. И. Манина. - М.: Радио и связь, 1983. - 264 с.

56. Foley, J., A. van Dam, S. Feiner, J. Hughes. Computer Graphics: principles and practice (2 ed.). AddisonWesley, 1990.

57. Schaller, S., M. Karolczak, K. Engelke, K. Wiesent, W. Kalender. Implementation of a Fast Cone-Beam Backprojection Algorithm for Microcomputed Tomography (HCT) Using Homogeneous Coordinates. In RSNA'98 Nov. 29 – Dec 4, Chicago, USA, supplement to Radiology, volume 209 (P), 1998.

58. Grangeat, P. Mathematical framework of cone beam 3D reconstruction via the first derivative of the Radon transform. In G. T. Herman, A. K. Louis, F. Natterer (Eds.), Mathematical Methods in Tomography, Number 1497 in Lecture Notes in Mathematics, 1991, pp. 66–97.

59. Натерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ. - М.: Мир, 1990. - 288 с.

60. Noo F., H. Kudo, M. Defrise. Approximate Short-Scan Filtered-Backprojection for Helical CB Reconstruction. In IEEE Medical Imaging, Nov 8–14, Toronto, Canada, 1998.

61. Schaller S., T. Flohr, P. Steffen. New, Efficient Fourier-reconstruction Method for Approximate Image Reconstruction in Spiral Cone-Beam CT at Small Cone Angles. In SPIE Medical Imaging, Newport Beach, California, USA, 1997.

62. Parker D. L. Optimal Short Scan Convolution Reconstruction for Fanbeam CT. Medical Physics 9(2), 1982, pp. 254–257.

63. Кабанова О.В. Швидке зворотне перетворення для тривимірної реконструкції// Приладобудування 2003: стан і перспективи: Збірник тез доп. наук.-техн. конф. - Київ: НТУУ "КПІ", 2003. - С. 157-158.

64. Толпина С. П., Набойщиков В. Д., Григорьева Т. С. Достижения и перспективы развития промышленной томографии// Приборы, средства автоматизации и системы управления. - М.: Информприбор, 1988. - 53 с.

65. Grass, M., T. Köhler, and R. Proksa (2000b). Weighted hybrid cone beam reconstruction for circular trajectories. In IEEE Medical Imaging, Oct 16–20, Lyon, France, 2000.

66. Кабанова О.В., Чеховський С. А. Швидкий FDK – алгоритм для тривимірної реконструкції зображень в рентгенівській томографії // Науковий вісник Національного університету нафти і газу. Методи і засоби неруйнівного контролю і технічної діагностики.- №2(6), 2003.-С. 123-129.

67. Oppenheim, A. V., R. Schafer. Digital Signal Processing. Prentice-Hall, 1975.

68. Magnusson-Seger, M. Linogram and Other Direct Fourier Methods for Tomographic Reconstruction. Ph. D. thesis, Department of Electrical Engineering, Linköping University, 1993.

69. D. C. Champeney. Fourier transforms and their physical applications. London, New York: Academic Press, 1973.

70. Schomberg, H., J. Timmer. The Gridding Method for Image Reconstruction by Fourier Transformation. IEEE Transactions on Medical Imaging. - 14 (3), 1995, pp. 596–607.

71. Edholm P., B. Jacobsson. PD5-Tomogram Construction by Photographic Techniques. In Image Processing for 2D and 3D Reconstruction from Projections, Stanford, CA, USA. Collection of post-deadline papers, 1975.

72. Edholm P., R. M. Lewitt, B. Lindholm. Novel Properties of the Fourier Decomposition of the Sinogram. In Int. Workshop on Physics and Engineering of Computerized Multidimensional Imaging and Processing, Proc. of the SPIE, V. 671, 1986, pp. 8–18.

73. Теорія вычислення преобразования Фурье / Задирака В. К. - Киев: Наук. думка, 1983. - 216 с.

74. Кабанова О.В. Апаратна реалізація швидкого зворотного проектування у тривимірній реконструкції зображень // Методи та прилади контролю якості. - Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2003. - №10. - С. 92 - 96.

75. Defrise M., F. Noo. Reconstruction of truncated cone-beam projections using the frequency-distance relation. In International Meeting on Fully Three-Dimensional

Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine, June 25-28, 1997, Nemacon, Pennsylvania, USA, pp. 32–35.

76. Кабанова О.В. Зменшення часу реалізації алгоритму зворотного проектування в комп'ютерній томографії // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. - Хмельницький: ТУП, 2002. - №2. - С. 104 - 107.

77. Danielsson, P.-E., P. Edholm, J. Eriksson, and M. Magnusson-Seger. Towards Exact 3D-reconstruction for Helical Cone-Beam Scanning of Long Objects: A New Arrangement and a New Completeness Condition. In International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine, June 25-28, 1997, Nemacon, Pennsylvania, USA, pp. 141–144.

78. Besson G. CT Fan-Beam Parameterizations Leading to Shift-Invariant Filtering. Inverse Problems 12(6), 1996, pp. 815–833.

79. Чеховський С.А., Кабанова О.В. Моделювання алгоритмів реконструкції в рентгенівській томографії // Методи та прилади контролю якості. - Івано - Франківськ: ІФДТУНГ, 2002. - №8. - С. 22-25.

80. Flisch et al. Industrial Computed Tomography in Reverse Engineering Applications// International Symposium on Computerized Tomography for Industrial Applications and Image Processing in Radiology March, 15 - 17, 1999 Berlin, Germany, Vol. 4, No 7.

81. Herman G. T., Rowland D. W., Yau M. M. A comparative study of the use of linear and modified cubic spline interpolation for image reconstruction, IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-26, 2879-2894, 1979.

82. Buck, J., M. Maisl, H. Reiter. The Cylinder Algorithm – An Efficient Reconstruction Algorithm for the 3D X-Ray Computed Tomography (3DCT) in NDT. In ASNT's Industrial Computed Tomography Topical Conference, May 13–15, Huntsville, Alabama, USA, 1996, pp. 88–93.

83. Lakshminarayanan A. V. Reconstruction from divergent ray data. Technical Report 92, Department of Computer Science, State University of New York at Buffalo, 1975.

84. Köhler, T., H. Turbell, M. Grass. Efficient Forward Projection Through Discrete Data Sets Using Tri-Linear Interpolation. In IEEE Medical Imaging, Oct 16–20, 2000, Lyon, France.
85. J. Friedhoff, *Aufbereitung von 3D-Digitalisierdaten für den Werkzeug-, Formen- und Modellbau*, Vulkan Verlag, Essen 1997.
86. L.A. SHEPP & B.P. LOGAN, "The Fourier Reconstruction of a Head Section", IEEE Trans. on N. Sc., 1974
87. Zang-Hee Cho, Joie P. Jones, Manbir Singh: *Foundations of Medical Imaging*. John Wiley & Sons, Inc., New York et al. 1993.
88. Henning Tolle: *Grundlagen der Industrieroboter-Steuerung und Regelung*. Dept. of Control Systems Theory and Robotics, Technical University of Darmstadt, Darmstadt 1994.
89. Caroline Axelsson: *Direct Fourier Methods in 3D-Reconstruction from Cone-Beam Data*. Dept. of Electrical Engineering, Linköping University, Linköping 1994. P. 109.
90. Henning Tolle. *Grundlagen der Industrieroboter-Steuerung und Regelung*. Dept. of Control Systems Theory and Robotics, Technical University of Darmstadt, Darmstadt 1994.
91. Richard A. Robb. *Three-Dimensional Biomedical Imaging*, Vol. I. CRC Press, Boca Raton, 1985.
92. Richard A. Robb. *Three-Dimensional Biomedical Imaging*, Vol. II. CRC Press, Boca Raton, 1985.
93. Reimann, D. A., M. J. Flynn. Automated Distortion Correction of X-ray Image Intensifier Images. In IEEE Medical Imaging, 1992, Volume 2, pp. 1339–1341.
94. Rizo P., P. Grangeat, P. Sire, P. Le Mason, P. Mellenec. Comparison of two three-dimensional X-ray cone-beam-reconstruction algorithms with circular source trajectories. *Journal of the Optical Society of America* 8(10), 1991, pp. 1639–1648.
95. Shepp L. A., Logan B. F. The Fourier reconstruction of head section. In IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-21, 1974, pp. 21 - 43.

96. Herman G. T. Two direct methods for reconstructing pictures from their projections: a comparative study. *Comput. Graphics Image Processing*, 1, 1972, pp. 123 - 144.
97. Wang, G., M. Vannier. The effect of pitch in multislice spiral/helical CT. *Medical Physics* 26(12), 1999, pp. 2648–2653.
98. Siddon R. L. Fast calculation of the exact radiological path length for a three-dimensional CT array. *Medical Physics* 12, 1985, pp. 252–255.
99. O'Sullivan J. A Fast Sinc Function Gridding Algorithm for Fourier Inversion in Computer Tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging* 4(4), 1985, pp. 200–207.
100. Mueller K., R. Yagel, J. Wheller. Fast Implementation of Algebraic Methods for Three-Dimensional Reconstruction from Cone-Beam Data. *IEEE Transactions on Medical Imaging* 18(6), 1999, pp. 538–548.
101. Lewitt R. M. Alternatives to voxels for image representation in iterative reconstruction algorithms. *Physics in Medicine and Biology* 37, 1992, pp. 705–716.
102. M.Iovea, C.Rizescu, A.Marinescu, C. Rizescu, Gh. Georgescu, D.Dumitrescu. A Direct Gamma Ray Calibration Method For Density Measurement With Applications In Industrial Tomography, 3rd General Conference of the Balkan Physical Union, Cluj-Napoca, 2-5 September 1997, p. 466-472.
103. Joseph P. M. An Improved Algorithm for Reprojecting Rays Through Pixel Images. *IEEE Transactions on Medical Imaging* MI-1, 1982, pp. 192–196.
104. Потемкин В. Г. Система MATLAB 5. Справочное пособие. - М.: Диалог - МИФИ, 1998 - 314 с.
105. Левицкий О. Е. Определение пространственного распределения радиальных напряжений в образце с цилиндрическим концентратором напряжений методом ультразвуковой реконструктивной томографии// *Техническая диагностика неразрушающий контроль* - №3, 2003. - С. 21 - 26.
106. G.N. Ramachandran, A.V. Lakshminarayanan, "Three-dimensional Reconstruction from Radiographs and Electron Micrographs Application of Convolutions instead of Fourier Transforms", *Proc.Nat.Acad.Sci.USA*, 1971.

107. T.F.Budinger, G.T.Gullberg , "Three-dimensional Reconstruction in Nuclear Medicine Emission Imaging ", IEEE Transaction on Nuclear Science , 1974
108. Z.H. CHO. General Views on 3-D Image Reconstruction and Computerized Transvers Axial Tomography, IEEE Transaction on Nuclear Science , 1974.
109. Y.S. Kwoh , I.S. Reed & T.K. Truong. Back Projection Speed Improvement for 3-D Reconstruction, IEEE Transaction on Nuclear Science , 1977.
110. M.Iovea, A.Marinescu, P.Chitescu,T. Sava - " Three - Dimensional Method Of Representation In Industrial Computerized Tomography"- The 6-th Joint PS-APS International Conference on Physics Computing, Lugano, Switzerland, august 22-26 1994:
111. . Some aspects concerning the stage of applying the computerized industrial tomography in romania, International Conference on Industrial Computerized Tomography, Berlin, 8-10 June 1994.
112. M.Iovea, A.Marinescu, P.Chitescu, T. Sava, C.Rizescu, GH.Georgescu. Tridimensional analysis by computed tomography.- National Physics Conference, Baia Mare, Romania, Nov.-Dec. 30-02, 1995. p. 54.
113. M.Iovea, A.Marinescu, P.Chitescu, T. Sava, C.Rizescu, GH.Georgescu.- Graphic environment for industrial computerized tomography. - The Fourth International Conference in Central Europe on Computer Graphics and Visualization'96, University of West Bohemia, Plzen, Czech Republic, February 12-16, 1996 , p. 267-268.
114. M.Iovea, A.Marinescu, P.Chitescu, T. Sava, C.Rizescu, GH.Georgescu.- An object oriented modelling system for interaction simulation in 3d industrial tomography - Proceedings of the 19th International Conference on INFORMATION TECHNOLOGY INTERFACES, Pula,Croatia, 17-20 June 1997, p. 457-462.
115. P.Reimers , J. Goebbels , H.P.Weisse & K.Wilding , "Some Aspects Of Industrial Non-Distructive Evaluation By X-Ray And Gamma-Ray Computed Tomography", Nuclear Instruments and Method in Physics Research , 1984.

116. M.Iovea, A.Marinescu, C.Rizescu, Gh. Georgescu - Using Computer-Ized Tomography In Non-Destructive Testing Of The Solid Materials. - The Annual Symposium of the Institute of Solid Mechanics, Romanian Academy, Bucharest, Romania, December 15-16, 1994,p. 357-364.

117. M.Iovea, C.Rizescu, A.Marinescu, Gh. Georgescu. Some Aspects Of Computerized Technologies By Using Gamma-Ray Computed Tomogaphy And Ultrasonic Imaging In Ndt, The 3rd edition of the National Symposium of the Romanian Association of Non-Destructive Testing, Mamaia, Romania, May 29-31, 1996, p. 104-111.

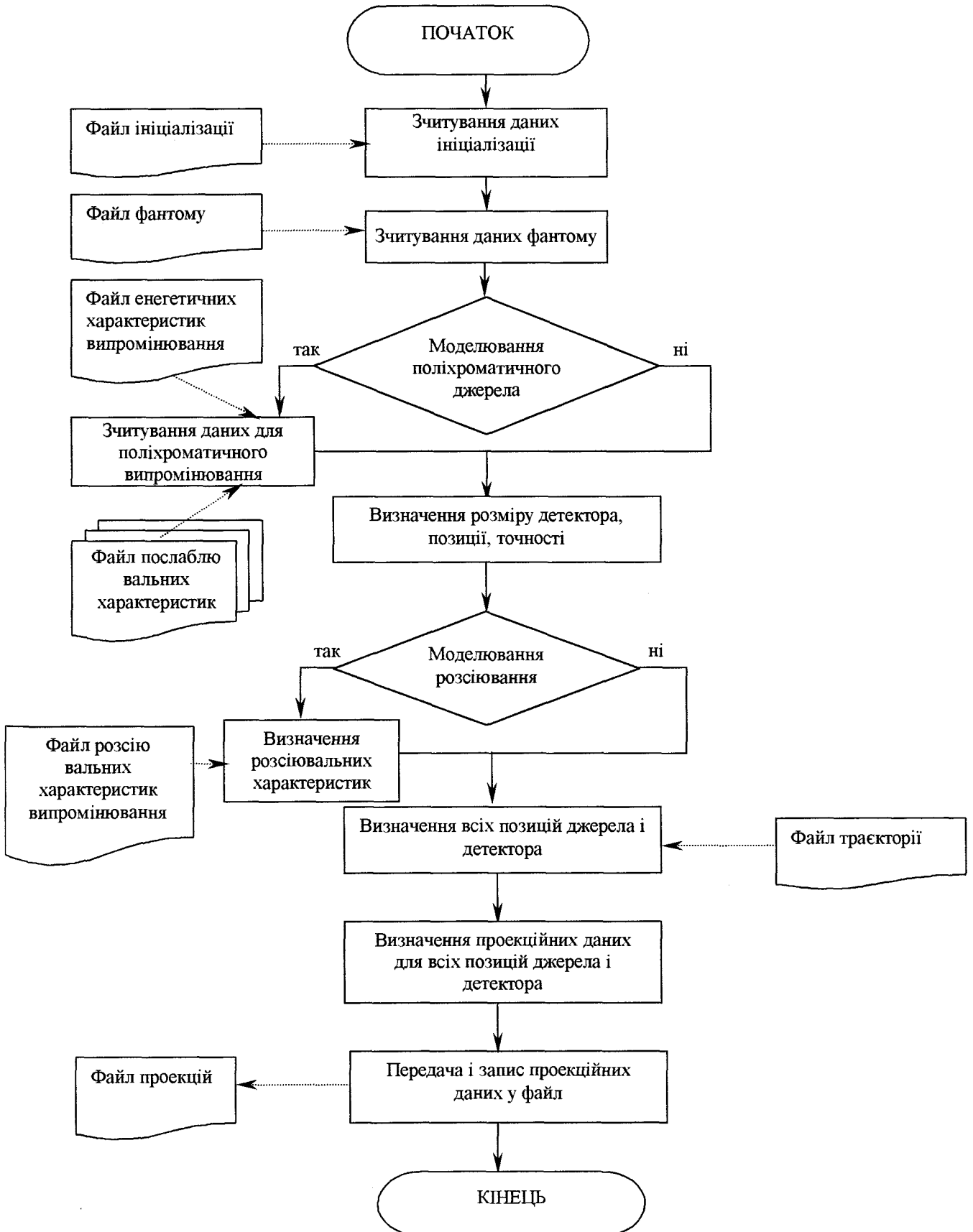
118. M.Iovea, C.Rizescu, A.Marinescu, Gh. Georgescu. Non Destructive Tests Of Pipes Using Industrial Computerized Tomography, National Conference of Energy, Neptun-Olimp, 1-5 September 1996, p. 201-205.

119. M.Iovea, C.Rizescu, Gh. Georgescu. Non-Destructive Evaluation Of Archaeological And Work Of Art Objects By Using Computerized Tomography, "International Restoration and Conservation Session", Satu-Mare , 19-23 October 1997, p. 26-32.



## Додаток А

А.1. Блок – схема програми моделювання  
Реальних проекційних даних  
тривимірного об'єкту



## А.2. Текст програми ініціалізації процесу моделювання реальних проєкційних даних тривимірного об'єкту

```
# init file for take2
#-----
phantom    = sl3D.phm
detector   = planar256.det
#voxelization = cyl.vox
voxelpoints = 3
trajectory = circle64.trj
projection = cyl.prj
attenuation = ideal
```

**Додаток Б**  
**Текст файлу фантому**

3D Shepp-Logan phantom

llip a=0.69 b=0.9 c=0.92 x=0.0 y=0.0 z=0.0 theta=0.0 phi=0.0 dens=2.0

llip a=0.6624 b=0.88 c=0.874 x=0.0 y=0.0 z=-0.0184 theta=0.0 phi=0.0 dens=-0.98

llip a=0.41 b=0.21 c=0.16 x=-0.22 y=-0.25 z=0.0 theta=0.0 phi=72.0 dens=-0.02

llip a=0.31 b=0.22 c=0.11 x=0.22 y=-0.25 z=0.0 theta=0.0 phi=-72.0 dens=-0.02

llip a=0.21 b=0.35 c=0.25 x=0.0 y=-0.25 z=0.35 theta=0.0 phi=0.0 dens=0.01

llip a=0.046 b=0.046 c=0.046 x=0.0 y=-0.25 z=0.1 theta=0.0 phi=0.0 dens=0.01

llip a=0.046 b=0.02 c=0.023 x=-0.08 y=-0.25 z=-0.605 theta=0.0 phi=0.0 dens=0.01

llip a=0.046 b=0.02 c=0.023 x=0.06 y=-0.25 z=-0.605 theta=0.0 phi=90.0 dens=0.01

llip a=0.056 b=0.1 c=0.04 x=0.06 y=0.625 z=-0.105 theta=0.0 phi=90.0 dens=0.02

llip a=0.056 b=0.1 c=0.056 x=0.0 y=0.625 z=0.1 theta=0.0 phi=0.0 dens=-0.02

llip a=0.046 b=0.046 c=0.046 x=0.0 y=-0.25 z=-0.1 theta=0.0 phi=0.0 dens=0.01

llip a=0.023 b=0.023 c=0.023 x=0.0 y=-0.25 z=-0.605 theta=0.0 phi=0.0 dens=0.01.

**Додаток В**  
**Текст файлу детектора**

# detector file

#-----

xlen=2.0

ylen=2.0

xpix=256

ypix=256

xypoints=3

**Додаток Д****Файл програми, що визначає траєкторію детектора**

```
(1) #circle trajectory
(2) projections=64
(3) implicit data
(4) 3.73205081 0.00000000 0.00000000 (source pos. 0)
(5) 0.00000000 -1.00000000 0.00000000 0.00000000
(6) 1.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000
(7) 0.00000000 0.00000000 1.00000000 0.00000000 (detector pos. 0)
(8) 1.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000
(9) 0.00000000 0.99518473 -0.09801714 0.00000000
(10) 0.00000000 0.09801714 0.99518473 0.00000000 (transform)
```

## Додаток Е

## Програмна реалізація швидкого FDK і FDK методів

```

%fdkfast.m
%Feldkamp-Davis-Kress Algorithm

%specify input parameters here
CYL = loadBvFile('C:\MATLAB\work\cyl.prj');
%VOX = loadBvFile('C:\MATLAB\work\cyl 256x256x256.vox');
p=64 %number of view angles between 0 and 2*pi
q=128 %h=1/q = detector spacing
R = 7.46410162 % Radius of source circle

MX=256; MY = 256; %matrix dimensions

nv = [0;0;1] ;
sp = 0
w1 = [0;1;0];
w2 = [1;0;0];
roi=[-1 1 -1 1]; %roi=[xmin xmax ymin ymax]

%ymax = R/sqrt(R^2-1);
ymax=2;
h = ymax/q;
b=pi/h; rps=1/b;

hx = (roi(2)-roi(1))/(MX-1);
xrange = roi(1) + hx*[0:MX-1];

hy = (roi(4)-roi(3))/(MY-1);
yrange = flipud((roi(3) + hy*[0:MY-1]'));

center = [(roi(1)+roi(2)), (roi(3)+roi(4))]/2;
x1 = ones(MY, 1)*xrange; %x-coordinate matrix
x2 = yrange*ones(1,MX); %y-coordinate matrix

chi = isfinite(x1);

x1 = x1(chi); x2 = x2(chi);
x3 = sp*nv(3) + w1(3)*x1 + w2(3)*x2;
P = zeros(MY,MX);Pchi = P(chi);
PH = zeros(MY,MX);

y = h*[-q;q-1];
%ry = 1./sqrt(R.^2 + y.^2);
%s = -R*y.*ry;
bs = b*h*[-2*q:2*q-1];
wb = slkernel(bs)/(rps^2); %compute discrete convolution kernel.
%theta = zeros(3,max(size(y)));

for j = 1:p
    j
    alphaj = (2*pi*(j-1)/p);
    om = [cos(alphaj);sin(alphaj);0] ;
    %a = R*om;
    Q = zeros(2*q+1,2*q+1);
    % Q = zeros(2*q,2*q);
    q1 = 2*q+1;

```

```

for l = 1:2*q %compute convolutions
    z1 = -ymax + h*(l-1);
    Df = CYL(:,1,j)';
    % maxdat(l) = max (max (Df)) ;
    Df = Df./sqrt(R^2 + z1^2 + y.^2);

    % convolution
    C = conv(Df,wb);
    Q(l,1:2*q) = h*C(2*q+1 :4*q) ; %Q(l, (2*q+1))=0;
end

% maxj = max(max(maxdat))
%maxQ = max(max(Q))

% interpolation and backprojection
u = om*[w1, w2, nv];
xom = u(1)*x1 + u(2)*x2 + u(3)*sp;
up = [-om(2), om(1), 0]*[w1, w2, nv] ;
xomp = up(1)*x1 + up(2)*x2 + up(3)*sp;

rxw = R - xom;

t = R.*xomp./rxw;
k1 = round(t/h);

zx = R.*x3./rxw;
flz = round(zx/h);

%v = zx/h-flz;

%Pupdate = (1-v).*Q(flz+q+q1*(k1+q))+v.*Q(flz+1+q+q1*(k1+q));
Pupdate = Q(flz+q+q1*(k1+q));

%flz = floor(zx/h);
%l0 = max(1,flz+q+1); l0 = min(l0,2*q);
%l01 = min(l0+1,2*q);
%k1 = floor(t/h);
%u = (t/h-k1);

%k = max(1,k1+q+1); k = min(k,2*q);
%tmp1 = ((1-u).*Q(l0+q1*(k-1))+u.*Q(l0+q1*k));
%tmp2 = ((1-u).*Q(l01+q1*(k-1))+u.*Q(l01+q1*k));
%v = zx/h-flz;
%Pupdate = (1-v).*tmp1 + v.*tmp2;
%maxup = max(max(abs(Pupdate)))

Pchi=Pchi+ Pupdate./(rxw.^2);
%PH(chi) = (Pupdate);
>window3(min(min(PH)),max(max(PH)),roi,PH);
>window3(1.0,1.04,roi,PH);

end % j-loop

P(chi) = Pchi*((R^3)*2*pi/p);

%pmin = min(min(P));
%pmax = max(max(P));
%figure;

```

```

>window3(1,1.04,roi,P) ; % view the computed image
%title('FDK Reconstruction');
%figure;
%V=flipud(squeeze(VOX(:,96,:)));
>window3(1.0,1.04,roi,V);
%title('Phantom');

%ERR=V-P;
%figure;
>window3(min(min(ERR)),max(max(ERR)),roi,ERR);
%title('Error Phantom-Reconstruction');

%mini=min(min(ERR))
%maxi=max(max(ERR))

%d=sqrt(sum(sum((V-P).^2))/sum(sum(V-mean(mean(V)).^2)))
%r=sum(sum(abs(V-P)))/sum(sum(abs(V)))

%for i=1:q-1
%   for j=1:q-1
%       T(i,j)=0.25*(V(2*i,2*j)+V(2*i+1,2*j)+V(2*i,2*j+1)+V(2*i+1,2*j+1));
%       R(i,j)=0.25*(P(2*i,2*j)+P(2*i+1,2*j)+P(2*i,2*j+1)+P(2*i+1,2*j+1));
%   end
%end

%e=max(max(abs(T-R)))

%%%%%%%% End fdk.m %%%%%%%%%

figure;
subplot(2,2,2);
>window3(1,1.04,roi,P) ; % view the computed image
title('F-FDK Reconstruction');
xlabel('z axis');
subplot(2,2,1);
V=flipud(squeeze(VOX(:,128)));
>window3(1.0,1.04,roi,V);
title('Phantom');
xlabel('z axis');

ERR=V-P;
subplot(2,2,3);
>window3(min(min(ERR)),max(max(ERR)),roi,ERR);
title('Error Phantom-Reconstruction');

subplot(2,2,4);
plot(xrange,P(128,:),'-k',xrange,V(128,:),'-k');
axis([-1 1 1 1.05]);
legend('FastFDK','Phantom');
xlabel('z axis');

%mini=min(min(ERR))
%maxi=max(max(ERR))

d=sqrt(sum(sum((V-P).^2))/sum(sum(V-mean(mean(V)).^2)))
r=sum(sum(abs(V-P)))/sum(sum(abs(V)))

for i=1:q-1
    for j=1:q-1
        T(i,j)=0.25*(V(2*i,2*j)+V(2*i+1,2*j)+V(2*i,2*j+1)+V(2*i+1,2*j+1));
        R(i,j)=0.25*(P(2*i,2*j)+P(2*i+1,2*j)+P(2*i,2*j+1)+P(2*i+1,2*j+1));
    end
end
end

```



```

e=max(max(abs(T-R)))

s=strcat('r=',num2str(r),' d=',num2str(d),' e=',num2str(e));
title(s)

%clear;

function u = slkernel(t)

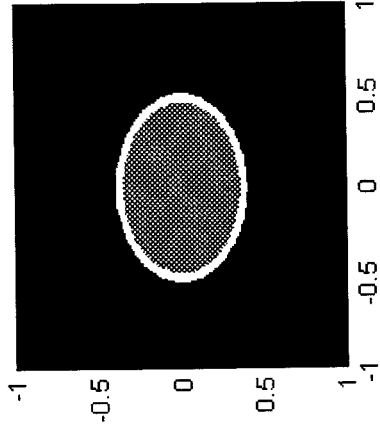
u = zeros(size(t));
i1 = abs(abs(t)-pi/2)<=1.e-6;
u(i1) = ones(size(u(i1)))/pi;
t1 = t(abs(abs(t)-pi/2)>1.e-6);
v = (pi/2 - t1.*sin(t1))./((pi/2)^2 - t1.^2);
u(abs(abs(t)-pi/2)>1.e-6) = v;
u = u/(2*pi^3);

function pic1 = window3(mi,ma,roi,pic);
%function pic1 = window3(mi,ma,roi,pic);
% displays image pic with coordinates given by roi
% roi = [xmin xmax ymin ymax]
x = [roi(1), roi(2)]; y = [roi(3), roi(4)];
colors = 128; co = colors-1;
pic1 = pic - mi*ones(size(pic));
pic1 = (co/(ma-mi))*pic1;
P = (pic1 >= 0);
pic1 = pic1.*P;
P = (pic1 <= co);
pic1 = pic1.*P + co*(ones(size(pic1)) - P);
colormap(gray(colors));
image(x,flip1r(y),flipud(pic1));
axis('square');

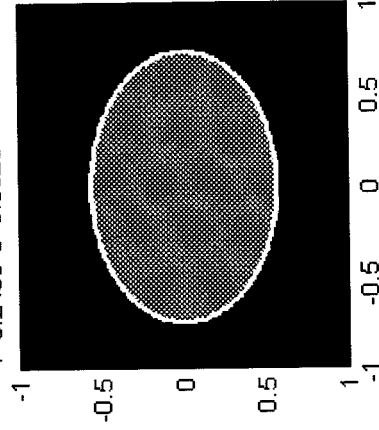
```

# Реконструкція горизонтальних площин перерізу фантому

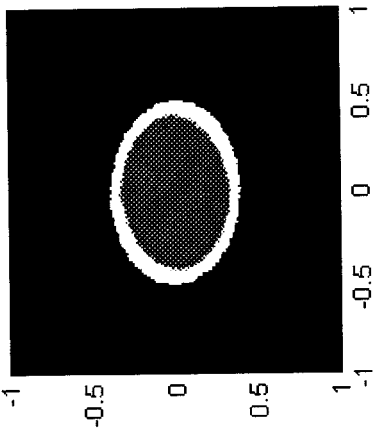
$r=0.38182$   $d=0.33111$   $e=1.0053$



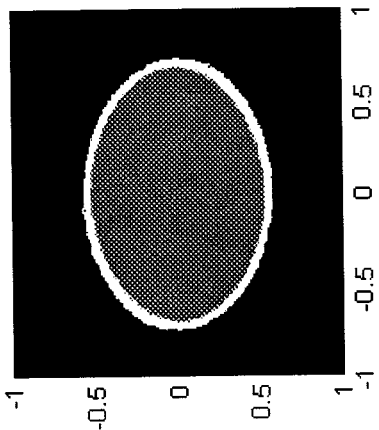
$r=0.2466$   $d=0.33234$   $e=1.0053$



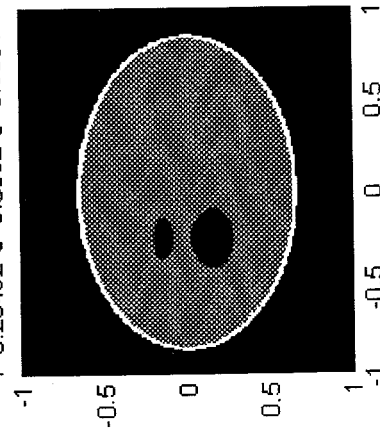
F-FDK Reconstruction



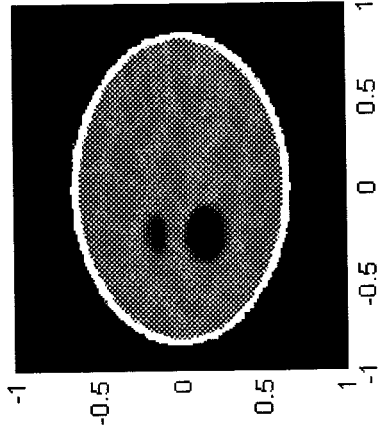
F-FDK Reconstruction



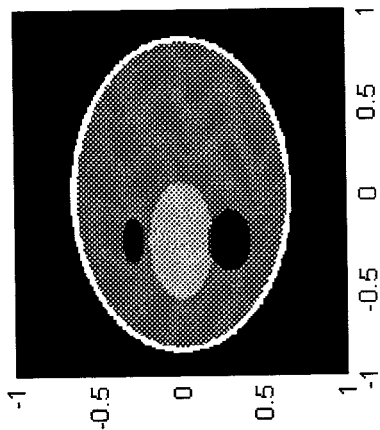
$r=0.20492$   $d=0.3502$   $e=0.95916$



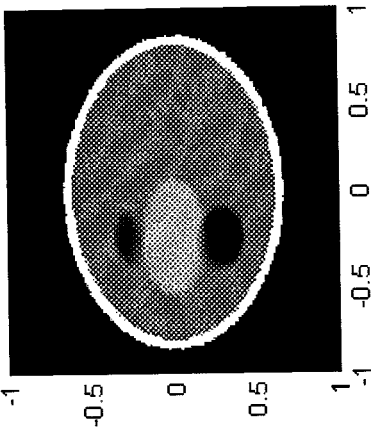
F-FDK Reconstruction



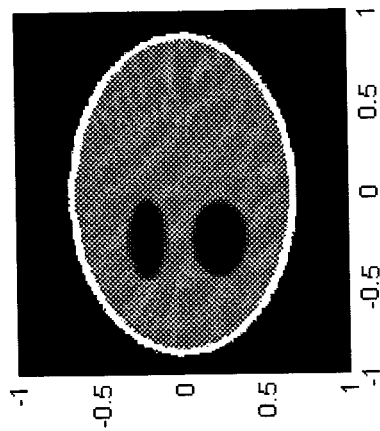
$r=0.20713$   $d=0.34633$   $e=0.73559$



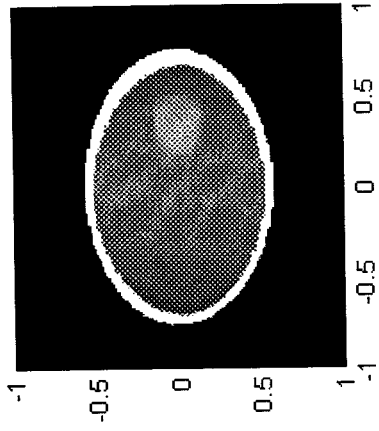
F-FDK Reconstruction



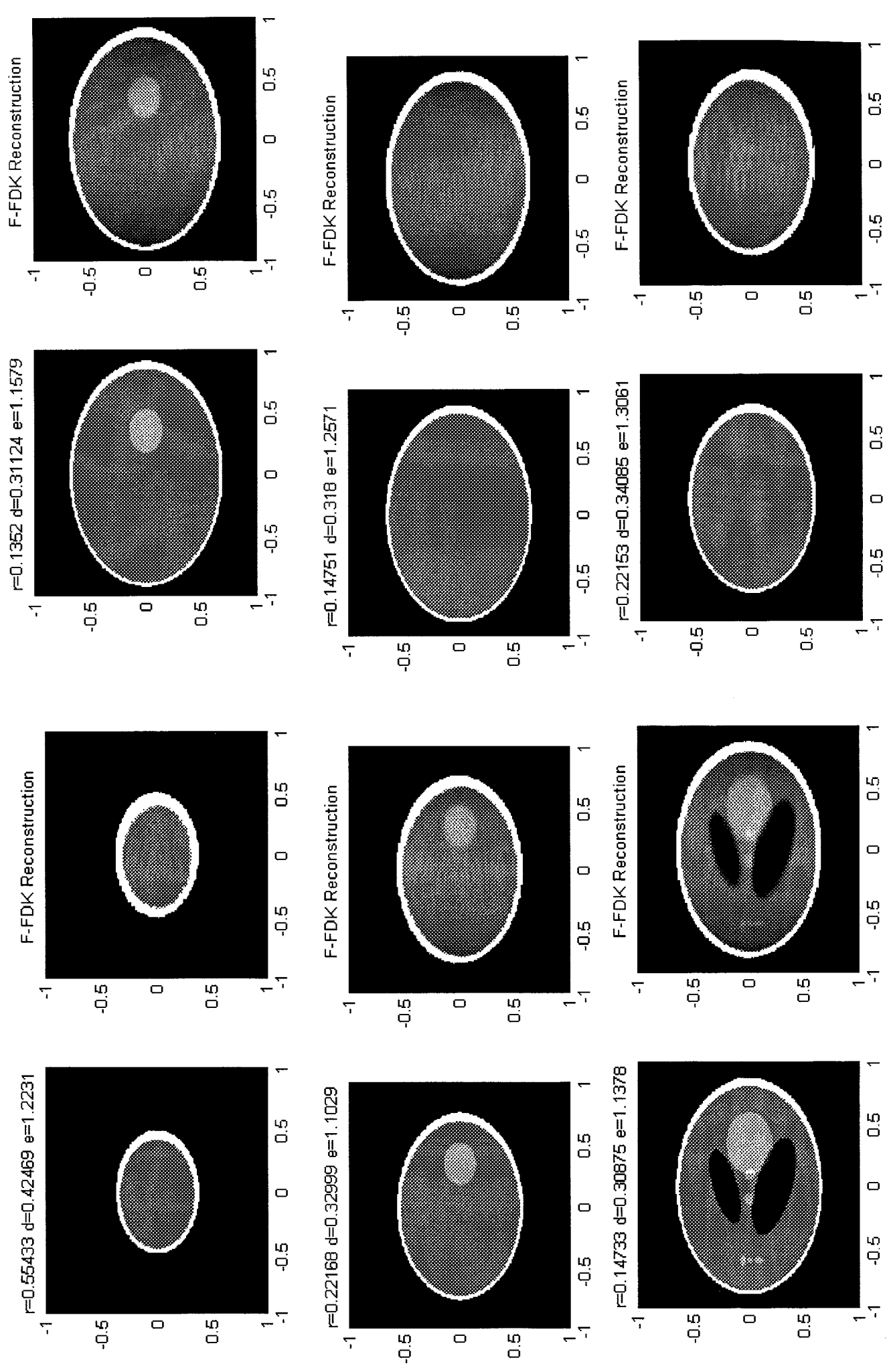
F-FDK Reconstruction



F-FDK Reconstruction

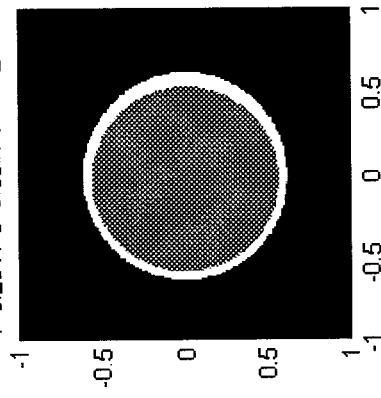
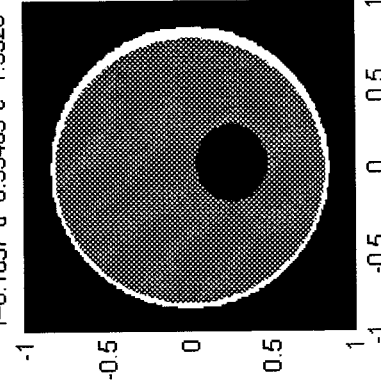


### Реконструкція фронтальних площин перерізу фантому

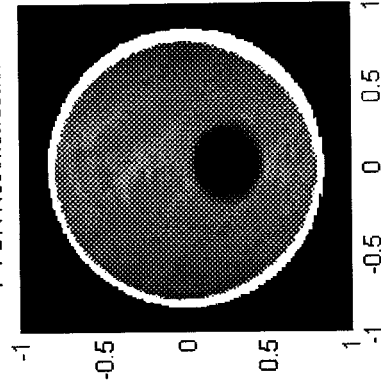
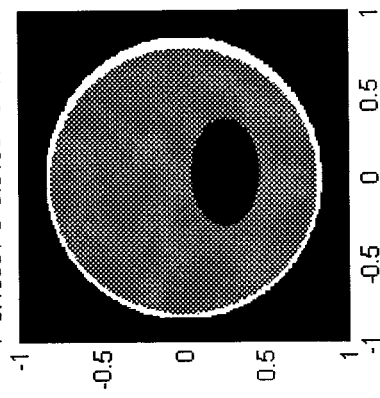


## Реконструкція вертикальних площин перерізу фантому

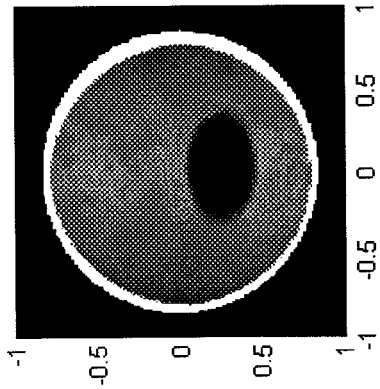
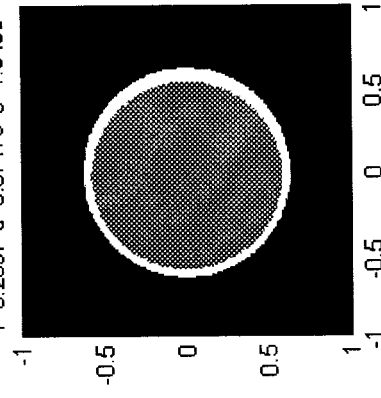
F-FDK Reconstruction

 $r=0.2641$   $d=0.35974$   $e=1.2784$  $r=0.1057$   $d=0.33403$   $e=1.3523$ 

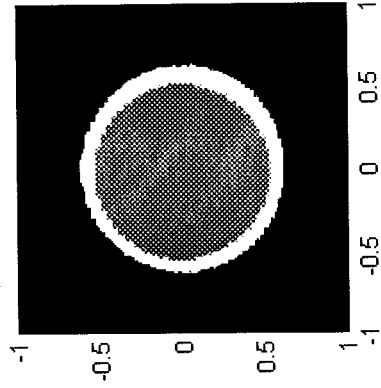
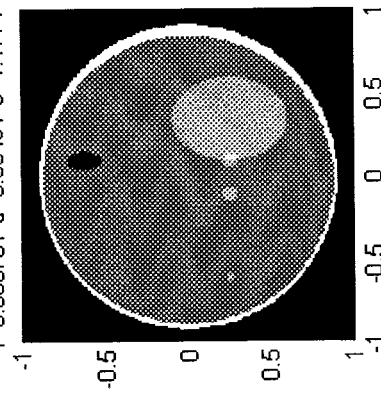
F-FDK Reconstruction

 $r=0.10551$   $d=0.31985$   $e=1.1106$ 

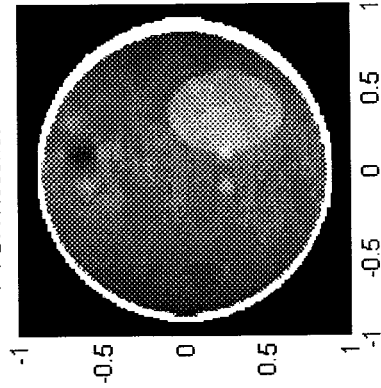
F-FDK Reconstruction

 $r=0.2597$   $d=0.37179$   $e=1.3436$ 

F-FDK Reconstruction

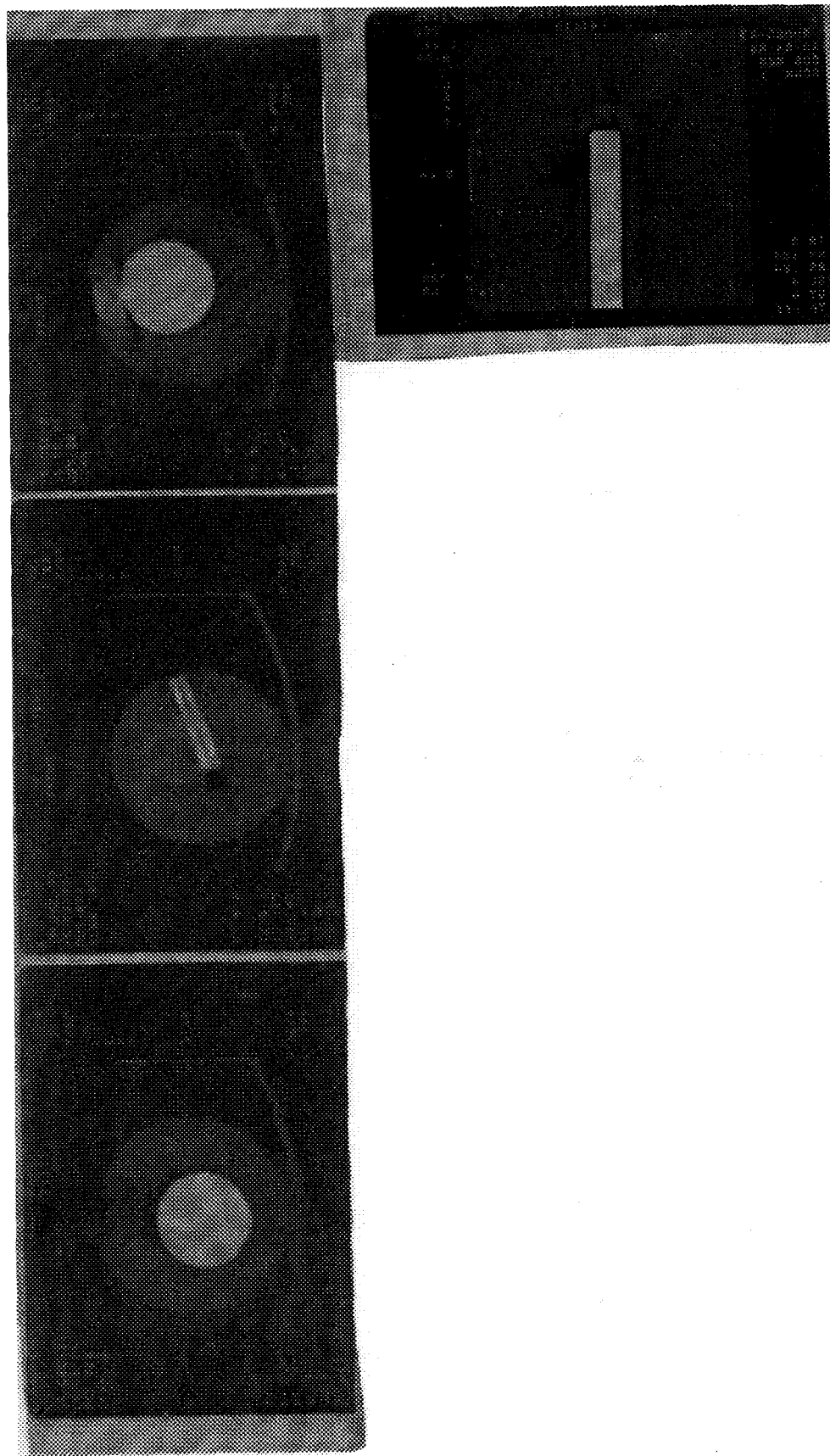
 $r=0.080761$   $d=0.33491$   $e=1.1771$ 

F-FDK Reconstruction



## Додаток Л

Томограми реального фізичного об'єкта, отримані за допомогою швидкого методу реконструкції



## Додаток М

### Текст програми дискретизації зображення

```

%fdkfast2.m
%Feldkamp-Davis-Kress Algorithm

MX=256; MY = 256; %matrix dimensions
roi=[-1 1 -1 1]; %roi=[xmin xmax ymin ymax]
hx = (roi(2)-roi(1))/(MX-1);
xrange = roi(1) + hx*[0:MX-1];

hy = (roi(4)-roi(3))/(MY-1);
yrange = flipud((roi(3) + hy*[0:MY-1]));
f=128

P=(double(imread('C:\MATLAB\work\test2.bmp','BMP')).*1.0)./255;
P=squeeze(P(:,:,1));

figure;
subplot(2,2,2);
x = [roi(1), roi(2)]; y = [roi(3), roi(4)];
window3(0,1,roi,S); % view the computed image

axis('square');

R=double(imread('C:\MATLAB\work\test2_r.bmp','BMP'))./255;
R=squeeze(P(:,:,1));

subplot(2,2,1);
window3(0,1,roi,R);

ERR=R-S;
subplot(2,2,3);
window3(0,1,roi,ERR);
title('Error');

subplot(2,2,4);
plot(xrange,S(128,:),'-k',xrange,R(128,:),'--k');
axis([-1 1 0 1.5]);
legend('FastFDK','Phantom');
```

```

r=sqrt(sum(sum((R-S).^2))/sum(sum(R-mean(mean(R)).^2)))
e=sum(sum(abs(R-S)))/sum(sum(abs(R)))

```

```

for i=1:q-1
    for j=1:q-1
        T(i,j)=0.25*(R(2*i,2*j)+R(2*i+1,2*j)+R(2*i,2*j+1)+R(2*i+1,2*j+1));
        Ri(i,j)=0.25*(S(2*i,2*j)+S(2*i+1,2*j)+S(2*i,2*j+1)+S(2*i+1,2*j+1));
    end
end

```

```

r=max(max(abs(T-Ri)))

```

```

s=strcat('r=',num2str(r),' d=',num2str(d),' e=',num2str(e));
title(s)

```

Національна Академія наук  
України

**ІНСТИТУТ ФІЗИКИ  
НАПІВПРОВІДНИКІВ  
ІМЕНІ В.Є. ЛАШКАРЬОВА**

03028, Київ-28, пр. Науки 45  
тел.: (44)265-40-20; факс: (44)265-83-42  
Ел. пошта: dir@isp.kiev.ua



National Academy of  
Sciences of Ukraine

**V. LASHKARYOV  
INSTITUTE OF  
SEMICONDUCTOR PHYSICS**

45, pr. Nauki, Kyiv, 03028, Ukraine,  
tel.: 380 (44)265-40-20; fax: 380 (44)265-83-42  
E-mail: dir@isp.kiev.ua

*31227/11 № 1388*

Ректору Івано-Франківського національ-  
ного технічного університету нафти і газу  
Крижанівському Є.І.

19076 м. Івано-Франківськ,  
вул. Карпатська, 15

Цим повідомляємо, що люб'язно наданий нам алгоритм реконструкції зобра-  
жень в комп'ютерній томографії, розроблений в дисертаційній роботі Кабанової  
Олени Володимирівни, використовується в Інституті фізики напівпровідників ім. В.  
Є Лашкарьова НАНУ при аналізі даних досліджень дислокаційної структури напів-  
провідникових матеріалів та систем методом рентгенівської топографії на установці  
ДРОН-3М.

Заступник директора  
Інституту



Прокопенко І.В.