

## ВИКОРИСТАННЯ КОМПЛЕКСНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ПЛОСКОРАДІАЛЬНОГО ПОТОКУ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ РОБОЧОГО ПРОЦЕСУ СВЕРДЛОВИННОГО СТРУМИННОГО НАСОСА

Д. О. Паневник

ІФНТУНГ; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (0342) 727101,  
e-mail: o.v.panevnik@gmail.com

На основі використання математичного апарату теорії функцій комплексної змінної запропоновано метод моделювання поширення робочого потоку в проточній частині свердловинної ежекційної системи у вигляді точкового витoku, розміщеного на одній осі з камерою змішування струминного насоса. Точкове джерело робочого потоку розглядається як функція витoku, приведена до комплексного вигляду. Робоча рідина радіально виходить з витoku симетрично у всіх напрямках. Лінії течії робочого потоку по радіусах спрямовані від центра витoku. Радіальна швидкість витoku зменшується з віддаленням від центру оберненопропорційно першій степені відстані до нього. З використанням рівняння потенціалу швидкостей та функції течії отримано співвідношення для комплексного потенціалу плоскорадіального та просторового робочого потоку. Сукупність взаємоперпендикулярних ліній течії та ліній рівних потенціалів утворює гідродинамічну сітку плоскорадіального робочого потоку, яка визначає кінематичну картину руху робочого середовища. Швидкість руху рідини залишається незмінною вздовж еквіпотенціальних ліній та змінюється при переході від однієї лінії до іншої. Витрата рідини є постійною вздовж ліній течії і змінюється при переході до сусідньої лінії. Просторова гідродинамічна сітка утворена еквіпотенціальними поверхнями та поверхнями течії функції витoku і має вигляд ортогонально розміщених коаксіальних сфер та радіальних меридіональних площин. Отриманий під час досліджень комплексний потенціал є функцією величини робочої витрати в проточній частині струминного насоса та може бути використаний при моделюванні процесу його симетричного обертання в свердловині.

Ключові слова: свердловинний струминний насос, ежекційна система, потенціальні потоки, гідродинамічні функції, комплексний потенціал, потенціал швидкостей, функція витoku.

Based on the use of the mathematical apparatus of the theory of functions of a complex variable, a method is proposed for modeling the propagation of the working flow in the flow path of an ejection well system in the form of a point source placed on the same axis as the mixing chamber of a jet pump. The point source of the working flow is considered as a function of the current reduced to a complex form. The working fluid radially leaves the source symmetrically in all directions. The streamlines of the working flow along the radii are directed from the center of the source. The radial velocity of the outflow decreases with distance from the center in inverse proportion to the first power of the distance to it. Using the equation of the velocity potential and the stream function, a relation is obtained for the complex potential of the plane-radial and spatial working flow. The set of mutually perpendicular streamlines and lines of equal potentials forms a hydrodynamic grid of a plane-radial working flow, which determines the kinematic picture of the working medium motion. The velocity of the liquid remains unchanged along the equipotential lines and changes when moving from one line to another. The flow rate of the liquid is constant along the streamlines and changes when passing to an adjacent line. The spatial hydrodynamic grid is formed by equipotential surfaces and flow surfaces of stream functions and has the form of orthogonally placed coaxial spheres and radial meridional planes. The complex potential obtained in the course of research is a function of the operating flow rate in the flow path of the jet pump and can be used in modeling the process of its symmetrical rotation in the well.

Key words: borehole jet pump, ejection system, potential flows, hydrodynamic functions, complex potential, velocity potential, stream function.

### Вступ

Після появи у 1935 році шарошкових доліт зі зміщеними осями шарошок та впровадження у 1947 році гідромоніторного промивання вибою [1] подальше суттєве підвищення ефективності руйнування гірської породи пов'язують із класичними дослідями Мерфі стосовно впливу на механічну швидкість

буріння величини зниження диференціального тиску на вибої [2]. Одним із шляхів зниження диференціального тиску на вибої є використання наддолотних струминних насосів [3], [4]. Додатковою перевагою застосування наддолотних струминних насосів із послідовною схемою включення в насосно-циркуляційну систему є здатність

інтенсифікувати пряме місцеве промивання вибою (порівняно із продуктивністю бурового насоса) при збереженні незмінною витрати промивального розчину в затрубному просторі [5]. Здатність створювати місцеве зворотне промивання привибійної зони знайшло використання також при ліквідації аварійних ситуацій, пов'язаних з видаленням із свердловини сторонніх предметів, залишених на вибої під час буріння [6]. Подальше застосування нафтогазових ежекційних технологій вимагає удосконалення теоретичних основ використання струминного насоса в свердловині.

#### Аналіз останніх досліджень

Розроблена в Китайському нафтовому університеті математична модель робочого процесу напірно-всмоктувальної наддолотної ежекційної системи [7] ґрунтується на використанні закону збереження кінетичної і потенціальної енергії змішуваних потоків та дозволяє прогнозувати зміну відносних тисків і витрат в процесі експлуатації свердловинного струминного насоса з наступною оптимізацією геометричних розмірів елементів його проточної частини. Математична модель Південно-Західного нафтового університету (Китай) [8], [9] передбачає застосування системи нелінійних диференціальних рівнянь руху змішуваних потоків із залученням часткових похідних, які розв'язують із застосуванням сучасних програмних засобів. Отримані при цьому результати дають змогу визначити характер розподілу гідродинамічних параметрів на вибої свердловини та в наддолотній області. Застосування теорії гвинтових потоків дозволило врахувати наявність циркуляційних течій, викликаних використанням вихрової насадки. В роботі [10] на основі CFD моделювання з використанням диференціальних рівнянь суцільності потоку, збереження енергії та кількості руху рідини розроблено методику визначення оптимальних кутів входження інжектваного потоку в проточну частину наддолотної ежекційної системи. Наявність направляючих елементів для закручування змішуваних потоків у проточній частині свердловинного струминного насоса може бути врахована використанням інерційної складової, яка входить до структури рівняння напірно-витратної характеристики ежекційної системи та визначає вплив відцентрових сил на розподіл гідродинамічних параметрів [11].

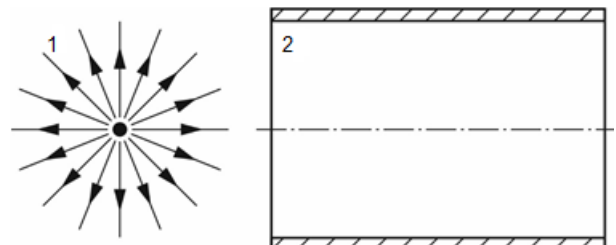
#### Виділення частини не вирішеної проблеми

Недоліком існуючих методів розрахунку наддолотних ежекційних систем є недостатня точність визначення характеристик свердловинних струминних насосів, що пов'язано із відсутністю в структурі рівнянь, які описують процес змішування потоків, складової, що враховує їх відносне обертання при роторному та турбінному бурінні. В роботі [12] на основі теорії потенціальних потоків із використанням елементарних гідродинамічних функцій комплексної змінної розроблено загальні принципи побудови аналітичних моделей робочого процесу наддолотного струминного насоса для умов його обертання в свердловині. Реалізація запропонованих в роботі [12] теоретичних основ моделювання процесів обертання змішуваних потоків передбачає поетапне розроблення розрахункових алгоритмів на основі адаптації співвідношень комплексної змінної у вигляді елементарних гідродинамічних функцій витоку, вихоровитоку та паралельно-струминної течії.

**Метою досліджень** є теоретичне обґрунтування механізму поширення робочого потоку в проточній частині свердловинного струминного насоса із використанням елементарної гідродинамічної функції витоку.

#### Висвітлення основного матеріалу

Робочий потік моделюємо у вигляді точкового витоку, розміщеного на одній осі з камерою змішування струминного насоса (рис. 1). Мета моделювання – визначення гідродинамічних параметрів робочого потоку у вхідному перерізі камери змішування. В процесі моделювання робимо припущення про потенціальний (безвихровий) рух робочого потоку, а для його опису застосовуємо математичний апарат теорії функцій комплексної змінної.



1 – джерело робочого потоку;  
2 – камера змішування

**Рисунок 1** – Схема моделювання робочого потоку

Точкове джерело розглядаємо як функцію витоку, приведену до комплексного вигляду. Виток є джерелом робочого потоку, рідина з якого радіально виходить симетрично у всіх напрямках. Лінії течії спрямовані від центра витоку вздовж радіусів.

Комплексний потенціал безвихрового руху рідини визначається за формулою

$$w(z) = \varphi + i\psi, \quad (1)$$

де  $z$  – комплексна змінна;  
 $\varphi$  – потенціал швидкостей;  
 $i$  – уявна одиниця;  
 $\psi$  – функція течії.

Визначимо вигляд функції потенціалу швидкостей  $\varphi$ , тобто функції, часткові похідні якої вздовж осей прийнятої системи координат визначають відповідні компоненти швидкості. Застосування потенціалу швидкостей дає змогу суттєво спростити розрахунок комплексної швидкості та замість двох невідомих величин двовимірного потоку звести задачу пошуку швидкостей до визначення однієї невідомої функції. Потенціальна функція характеризує кінематику безвихрового потоку та визначає положення еквіпотенціальних поверхонь в об'ємі проточної частини струминного насоса.

Для плоского (двовимірного) потоку розподіл швидкостей та тисків і конфігурація ліній течії та еквіпотенціальних ліній є однаковою для всіх площин, паралельних заданим. Радіальна швидкість витоку  $V_r = V$  зменшується з віддаленням від центру оберненопропорційно першій степені відстані до нього

$$V = \frac{Q}{2\pi r}, \quad (2)$$

де  $Q$  – витрата рідини через бокову поверхню кругового циліндра радіусом  $r$  з центром в точці витоку і висотою, що дорівнює одиниці.

Радіальна швидкість спрямована по радіусах вздовж ліній течії. В полярній системі координат, для якої записана остання формула компоненти швидкості  $V$  вздовж радіус-вектора  $V_r$  і перпендикулярно до радіус-вектора  $V_s$  визначаються через потенціал швидкостей у вигляді похідних у відповідних напрямках

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad V_s = \frac{\partial \varphi}{\partial s}. \quad (3)$$

Для даного випадку швидкість у напрямку, перпендикулярному радіус-вектору, дорівнює  $V_s = 0$ , а результуюча швидкість  $V$  співпадає з радіальною  $V_r$ . Тоді потенціал  $\varphi$  не залежить

від дуги  $S$  і від полярного кута, що визначає напрям руху рідини. Тому в виразі для радіальної швидкості  $V_r$  можна замість часткових похідних використовувати звичайні

$$d\varphi = \frac{Q}{2\pi r} dr. \quad (4)$$

Після інтегрування рівняння (4) отримаємо логарифмічний потенціал

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r. \quad (5)$$

Поверхні рівного потенціалу для даної функції визначаються рівністю  $\ln r = const$ , або еквівалентною рівністю  $r = const$ . Рівняння (5) визначає сукупність концентричних кіл, вісь яких збігається з віссю витоку.

Встановимо вигляд функції течії рівняння (1). Визначимо компоненти вектора швидкості в декартовій системі координат. Враховуючи, що радіус-вектор  $r$  (рис. 2) у формулі (2) дорівнює  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , запишемо

$$V^2 = \frac{Q^2}{4\pi^2 r^2} = \frac{Q^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{Q^2}{4\pi^2} \left[ \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] = V_x^2 + V_y^2, \quad (6)$$

де  $V_x, V_y$  – проєкції швидкості руху рідини на осі  $x, y$ .

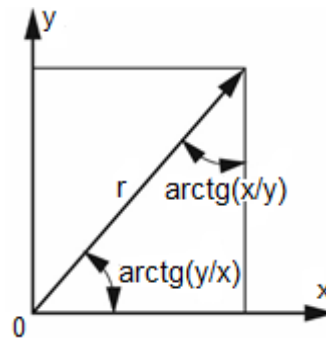


Рисунок 2 – Визначення швидкостей робочого потоку

Запишемо рівняння лінії течії плоскорадіального потоку. Оскільки плоский рух є двовимірним, значення проєкцій швидкостей в декартовій системі координат можна визначити за формулами

$$V_x = \frac{dx}{dt}; \quad V_y = \frac{dy}{dt}, \quad (7)$$

де  $dx, dy$  – елементарні переміщення в напрямку осей  $x, y$ ;

$dt$  – елементарний проміжок часу.

Після виключення часу отримаємо рівняння лінії течії в диференціальній формі

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y}. \quad (8)$$

Шляхом підстановки в рівняння (7) значень компонентів швидкості  $V_x, V_y$  з рівняння (6)

$$V_x = \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}; V_y = \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (9)$$

отримаємо

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}. \quad (10)$$

Інтегрування останнього рівняння дає формулу

$$\ln y = \ln x + \ln c, \quad (11)$$

де  $c$  – постійна величина.

Після перетворення суми логарифмів в логарифм добутку і потенціювання отримаємо рівняння лінії течії плоскорадіального потоку

$$y = cx. \quad (12)$$

Відповідно до рівняння (12) лінії течії цієї функції є променями, що виходять з початку координат (рис. 2).

Визначимо вигляд рівняння функції течії  $\psi$  плоскорадіального потоку. Функцію течії плоского потоку можна розглядати як один із загальних розв'язків рівняння неперервності потоку. Функція течії зберігає постійне значення вздовж лінії течії і характеризує їх сукупність. Різниця значень функції  $\psi$  визначає витрату рідини через переріз, обмежений сусідніми лініями течії.

Запишемо рівняння лінії течії (формула (8)) у вигляді

$$V_x dy - V_y dx = 0. \quad (13)$$

Рівняння неперервності потоку для двовимірної течії має вигляд

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

або

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial(-V_y)}{\partial y}. \quad (15)$$

Остання формула визначає рівність перехресних похідних рівняння (13). Враховуючи рівність перехресних похідних, диференціальне рівняння (13) є рівнянням у повних диференціалах

$$d\psi(x, y) = V_x dy - V_y dx. \quad (16)$$

Тоді, як відомо з курсу математичного аналізу, функцію  $\psi(x, y)$  можна подати у вигляді криволінійного інтеграла (який не залежить від шляху інтегрування)

$$\psi = \int_{y_0}^y V_x(x_0, y) dy - \int_{x_0}^x V_y(x, y) dx + c, \quad (17)$$

де  $x_0, y_0$  – координати початкової (фіксованої) точки;

$x, y$  – координати довільної точки;

$c$  – довільна стала.

Враховуючи формулу (17), після підстановки значень компонентів  $V_x, V_y$ , з рівняння (6) отримаємо

$$\begin{aligned} \psi &= \int_{y_0}^y \frac{Q}{2\pi} \frac{x_0}{x_0^2 + y^2} dy - \int_{x_0}^x \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} dx = \\ &= \frac{Q}{2\pi} \left[ x_0 \int_{y_0}^y \frac{dy}{x_0^2 + y^2} - y \int_{x_0}^x \frac{dx}{x^2 + y^2} \right] = \\ &= \frac{Q}{2\pi} \left( \arctg \frac{y}{x_0} - \arctg \frac{y_0}{x_0} - \arctg \frac{x}{y} + \arctg \frac{x_0}{y} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Початкова точка з координатами  $x_0, y_0$  може займати будь-яке положення на радіус-векторі (рис. 2) і не впливає на його кутову координату. Аналіз зміни тригонометричних функцій, що складають рівняння (6), дозволяє спростити формулу для визначення функції течії. Враховуючи рисунок 2, отримаємо

$$\begin{aligned} \arctg \frac{y}{x_0} + \arctg \frac{x_0}{y} &= \frac{\pi}{2}; \\ \arctg \frac{y}{x} + \arctg \frac{x}{y} &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Після підстановки у вираз для  $\psi$  замість суми першої і останньої складових  $\frac{\pi}{2}$  і замість

третьої –  $\frac{\pi}{2} \arctg \frac{y}{x}$  отримаємо

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \left( \arctg \frac{y}{x} \arctg \frac{y_0}{x_0} \right). \quad (19)$$

Враховуючи, що початкова точка може займати будь-яке положення на радіус-векторі  $r$  (рис. 2) прийемо  $y_0 = 0$ . Тоді для функції течії отримаємо рівняння

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \arctg \frac{y}{x} = \frac{Q}{2\pi} \theta, \quad (20)$$

де  $\theta$  – полярний кут, який визначає положення полярної координати  $r$ .

Прирівняємо функцію течії довільній сталій

$$\arctg \frac{y}{x} = const, \quad (21)$$

звідки випливає

$$\frac{y}{x} = const.$$

Отриманий вираз є рівнянням ліній течії і дублює формулу (12).

Використовуючи рівняння потенціальної функції (5) і функції витоку (20), отримаємо рівняння комплексного потенціалу плоскорадіального потоку. Після підстановки формул (5) і (20) в рівняння (1) запишемо

$$W(z) = \phi + i\psi = \frac{Q}{2\pi} \ln r + i \frac{Q}{2\pi} \theta = a \ln r + ia\theta, \quad (22)$$

де  $a = \frac{Q}{2\pi}$  – дійсне число.

Використовуючи поняття натурального логарифму, запишемо

$$ia\theta = a \ln e^{i\theta}. \quad (23)$$

Після здійснення підстановки (23) в рівняння (22) та заміни суми логарифмів логарифмом добутку отримаємо

$$W(z) = a \ln r + a \ln e^{i\theta} = a \ln re^{i\theta}. \quad (24)$$

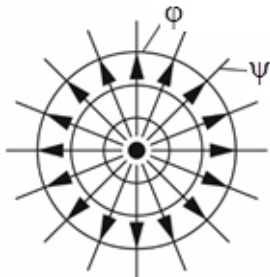
Відповідно до формули Ейлера число, яке знаходиться під знаком логарифма, є показовою формою комплексного числа  $z$ .

$$re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta) = z. \quad (25)$$

Враховуючи формули (24) та (25), отримаємо рівняння комплексного потенціалу плоскорадіального потоку

$$W(z) = a \ln z. \quad (26)$$

Комплексний потенціал  $W(z)$  є характеристичною функцією течії і визначає плоскорадіальний рух рідини. Введення характеристичної функції плоского потоку значно спрощує його дослідження, оскільки замість двох функцій  $\phi$  та  $\psi$ , кожна з яких залежить від двох незалежних змінних  $r$ ,  $\theta$ , використовуємо одну функцію  $W$ , яка залежить від однієї незалежної комплексної змінної  $z$ . Дійсна частина комплексного потенціалу  $W(z)$  визначає положення еквіпотенціальних ліній, а уявна частина – ліній течії. Сукупність взаємоперпендикулярних ліній течії та ліній рівних потенціалів утворює гідродинамічну сітку робочого потоку (рис. 3), яка визначає кінематичну картину руху.



$\phi$  – еквіпотенціальні лінії;  $\psi$  – лінії течії

### Рисунок 3 – Гідродинамічна сітка робочого потоку

В гідродинамічній сітці функції  $\phi$  та  $\psi$  є взаємними та спряженими. Вектор швидкості руху рідини дотичний до лінії течії та ортогональний еквіпотенціальним лініям. Швидкість руху рідини залишається незмінною вздовж еквіпотенціальних ліній та змінюється при переході від однієї лінії до іншої. Аналогічно витрата рідини є постійною вздовж ліній течії і змінюється при переході до сусідньої лінії.

Використовуючи рівняння кінематики плоскорадіального потоку, визначимо вигляд формули комплексного потенціалу для просторової функції витоку. У випадку просторового витоку радіальна швидкість руху потоку визначається як об'єм рідини, що проходить за одиницю часу через поверхню сфери площею  $4\pi R^2$

$$V_R = \frac{Q}{4\pi R^2}, \quad (27)$$

де  $R$  – відстань від точки в потоці до центра витоку.

Відповідно до формули (27) радіальна швидкість руху рідини для просторового витоку змінюється оберненопропорційно квадрату відстані до центра.

Враховуючи, що компоненти швидкості по напрямках, перпендикулярних до радіус-вектора  $R$ , дорівнюють нулю, то дорівнюють нулю і похідні від потенціалу швидкості по цих напрямках. Потенціал швидкості залежить тільки від радіус-вектора  $R$

$$d\phi = \frac{Q}{4\pi R^2} dR. \quad (28)$$

Після інтегрування знаходимо

$$\phi = -\frac{Q}{4\pi R}. \quad (29)$$

Поверхні рівного потенціалу визначаються рівністю  $\frac{Q}{4\pi R} = const$ , яка еквівалентна рівності  $R = const$ . Це сукупність концентричних сфер з початком координат в центрі витоку. Після здійснення підстановки  $R = \sqrt{z^2 + r^2}$  отримаємо рівняння потенціалу швидкостей просторового витоку в циліндричних координатах

$$\phi = -\frac{Q}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}}. \quad (30)$$

Якщо потенціал швидкості може існувати і в загальному випадку тривимірного

безвихрового руху, то функція течії внаслідок складності узгодження просторових координат може існувати виключно для осесиметричних потоків. Функція течії в цьому випадку є однаковою для всіх меридіальних площин, які проходять через спільну для них вісь симетрії. Положення точки в меридіальних площинах в циліндричній системі координат характеризується координатами  $z, r$  (рис. 4), а орієнтація меридіальних площин (наприклад, площин А і Б) визначається кутом  $\theta$ .

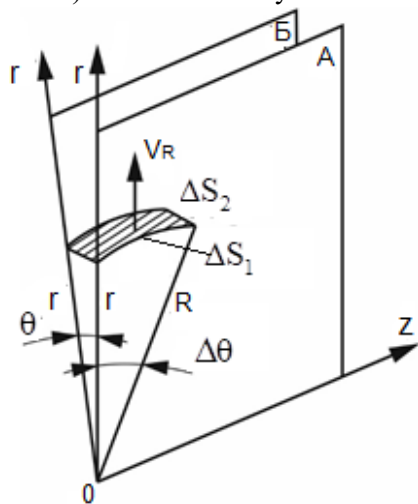


Рисунок 4 – Визначення функції течії просторового витоку

Введемо в площині  $z, r$  циліндричної системи координат полярні координати  $R, \theta$ : вісь полярної системи спрямуємо вздовж осі  $z$ , а полюс полярної системи сумістимо з початком координат циліндричної системи (рис. 4). Візьмемо на площині  $z, r$  елемент дуги  $\Delta S_1$ , утворений поворотом кінця радіус-вектора  $R$  на кут  $\Delta\theta$ . Довжина дуги  $\Delta S_1$  дорівнює радіусу  $R$ , помноженому на радіанну міру кута  $\Delta\theta$ . При повороті цієї дуги навколо осі  $z$  на кут  $\theta$ , який дорівнює одному радіану, отримаємо елементарну площину  $R\Delta\theta r1$  (як добуток  $\Delta S_1 \times \Delta S_2$ ). Витрата рідини через цю площину становить

$$\Delta\psi = V_R R r \Delta\theta. \quad (31)$$

Тоді після переходу до границі при  $\Delta\theta \rightarrow 0$  отримаємо

$$V_R = \frac{1}{rR} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}. \quad (32)$$

Для просторового витоку рух рідини в напрямку, перпендикулярному до площини  $r0z$ , відсутній  $V_\theta = 0$ . Тоді функція  $\psi$  не залежить від радіуса  $R$ , і в формулі (32) замість часткової похідної використовуємо звичайну

$$V_R = \frac{1}{rR} \frac{d\psi}{d\theta}. \quad (33)$$

Зіставимо значення радіальної швидкості, визначену через функцію течії (33), з формулою (27)

$$\frac{1}{zR} \frac{d\psi}{d\theta} = \frac{Q}{4\pi R^2}. \quad (34)$$

Відповідно до рисунка 4 виконується співвідношення  $r = R \sin\theta$  (оскільки значення кута  $\Delta\theta$  прийняте довільним, вважаємо, що  $\Delta\theta = \theta$ ). Тоді рівняння (34) можна записати у вигляді

$$d\psi = \frac{Q}{4\pi} \sin\theta d\theta. \quad (35)$$

Після інтегрування запишемо

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi} \cos\theta. \quad (36)$$

Здійснюючи підстановку  $\cos\theta = z / \sqrt{z^2 + r^2}$ , остаточно отримаємо

$$\psi = -\frac{Q}{4\pi} \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}}. \quad (37)$$

Визначимо вигляд еквіпотенціальних поверхонь та поверхонь течії в циліндричній системі координат. Після отримання розв'язку рівняння (30) відносно  $r$  і підстановки значень координати  $z = 0$  отримаємо (рис. 5)

$$r_{\max} = \pm \frac{Q}{4\pi\varphi}, \quad (38)$$

де  $\varphi$  – постійна для фіксованої швидкості руху рідини величина.

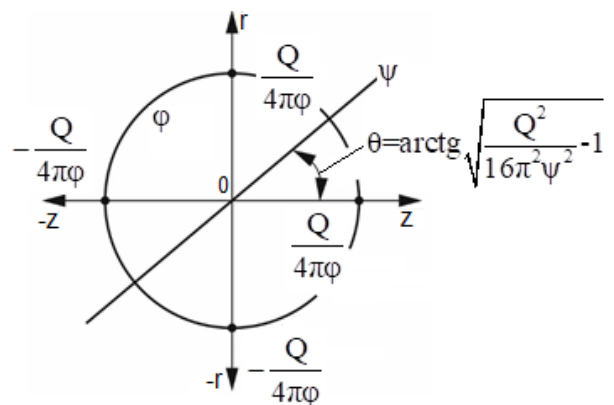


Рисунок 5 – Визначення форми еквіпотенціальних поверхонь  $\varphi$  та поверхонь течії  $\psi$  робочого потоку

Аналогічно визначаємо координати точок на осі  $z$ . Після підстановки в рівняння (30) значення координати  $r = 0$  отримаємо

$$z_{\max} = \pm \frac{Q}{4\pi\varphi}. \quad (39)$$

Враховуючи рівність величини  $z_{\max} = r_{\max}$  (відповідно до формул (38), (39) зображення потенціальної функції має вигляд кола, на поверхні якого функція  $\varphi$  зберігає постійні значення. Сукупність значень  $\varphi$  матиме вигляд концентричних кіл з центром у початку координат.

Рівняння функції течії (37) запишемо у вигляді

$$r = z \sqrt{\frac{Q^2}{16\pi^2 \psi^2} - 1}. \quad (40)$$

Ірраціональна функція в рівнянні (40) є кутовим коефіцієнтом прямої, яка проходить через центр координат (рис. 5)

$$\frac{r}{z} = \operatorname{tg} \theta = \sqrt{\frac{Q^2}{16\pi^2 \psi^2} - 1}. \quad (41)$$

Змінюючи значення функції  $\psi$ , отримаємо сукупність прямих, які проходять через центр координат. Еквіпотенціальні поверхні та поверхні течії функцій витoku, таким чином, утворюють просторову гідродинамічну сітку у вигляді ортогонально розміщених коаксіальних сфер та радіальних меридіональних площин.

Враховуючи рівняння (30) і (37), запишемо формулу характеристичної функції робочого потоку

$$W(z) = a \left( \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} + i \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right), \quad (42)$$

де  $a = -\frac{Q}{4\pi}$ .

Отримане рівняння комплексного потенціалу може бути частиною методики застосування елементарних гідродинамічних функцій при моделюванні процесів у камері змішування струминного насоса у випадку його обертанні в свердловині.

### Висновки

Показано можливість моделювання робочого потоку свердловинної ежекційної системи за допомогою тривимірної гідродинамічної функції комплексної змінної: робоче середовище представлене у вигляді точкового витoku, розміщеного на одній осі з камерою змішування струминного насоса. Отримана в процесі моделювання радіальна елементарна характеристична функція враховує величину витрати в проточній частині струминного насоса та дає змогу побудувати просторову гідродинамічну сітку у вигляді ортогонально розміщених коаксіальних сфер та радіальних меридіональних площин, кожна

точка якої визначає гідродинамічні параметри потенціального безвихрового руху робочого середовища.

Завдання подальших досліджень полягає у проведенні аналізу отриманої характеристичної функції, розробленні методики визначення характеристики свердловинного струминного насоса та експериментальній перевірці точності прогнозування параметрів експлуатації ежекційної системи з використанням теорії функцій комплексної змінної.

### Література

1. Осипов П.И., Логачев Ю.В., Юдин В.С. Возможности уменьшения дифференциального давления в скважине без снижения плотности бурового раствора. *Бурение и нефть*. 2004. № 9. С. 16–18.
2. Murphy D. Practical engineering approach to running bit. What factors affect drilling rate. *Oil and Gas*. 1969. Vol.17. № 11. P. 33–35.
3. Kryzhanivskiy E.I., Panevnyk D.A. Improving use efficiency above-bit jet pumps. *Socar proceeding*. 2020. № 2. P. 26–34. DOI:10.5510/OGP20200200437.
4. Паневник А.В., Концур И.Ф., Паневник Д.О. Определение эксплуатационных параметров наддолотной эжекторной компоновки. *Нефтяное хозяйство*. 2018. № 3. С.70–73. DOI:10.24887/0028-2448-2018-3-70-73.
5. Suryanarayana P. V., Hasan K., Hughes W.I. Technical Feasibility and Applicability of a concentric jet pump in underbalanced drilling: proceeding of the SPE/IADS Underbalanced Technology Conference and Exhibition, Houston, USA, 11–12 october 2004. SPE/IADS 91595. 20 p. URL: <https://doi.org/10.2118/91595-MS>.
6. Haughton D.B., Connel P. Reliable and effective downhole cleaningsystem for debris and junk removal: proceeding of the SPE Asia Pacific Oil and Gas Conference and Exhibition, Adelaide, Australia, 11-13 september 2006. SPE 101727. 9 p. URL: <https://doi.org/10.2118/101727-MS>.
7. Chen X., Gao D., Guo B. A method for optimizing jet-mill-bit hydraulics in horizontal drilling. *SPE Journal*. 2016. № 4. SPE 178436. P.416–422. URL: <https://doi.org/10.2118/178436-PA>.
8. Zhu H. Y., Liu Q.Y. Pressure drawdown mechanism and design principle of jet pump bit. *Scientia Iranica B*. 2015. No 22(3). P. 792–803. Corpus ID: 55755520.
9. Zhu H. Y., Liu Q.Y., Wang T. Reducing the bottom-hole differential pressure by vortex and hydraulic jet methods. *Journal of*

*Vibroengineering*. 2014. No 8. P. 2224–2249. Corpus ID: 55473883.

10. Yong H., Lihong Z., Deyong Z., Hualin L., Jinying W., Jinshen Y., Yugang Z., Zhibin W. Study on structure parameters of reverse circulation drill bit secondary injector device based on injectors coefficient: proceeding of the SPE/IADS Asia Pacific Drilling Technology Conference, Singapore, 22–24 august 2016. IADS/SPE–180539–MS. 9 p.

11. Panevnyk D.A. Simulation of a downhole jet-vortex pump's working process. *Nafta-Gaz*. 2021. No 9. P. 579–586. URL: <https://doi.org/10.18668/NG.2021.09.02>.

12. Паневник Д.О. Обґрунтування методу моделювання циркуляційних потоків при обертанні наддолотного струминного насоса. *Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ*. 2021. № 3(80). С. 46–52. URL: [https://doi.org/10.31471/1993-9973-2021-3\(80\)-46-52](https://doi.org/10.31471/1993-9973-2021-3(80)-46-52).

### References

1. Osipov P.I., Logachev Y.V., Yudin V.S. Vozmozhnosti umen'sheniya differencialnogo davleniya v skvazhine bez snizheniya plotnosti burovogo rastvora. *Burenie i neft*. 2004. № 9. P.16–18.[in Russian]

2. Murphy D. Practical engineering approach to running bit. What factors affect drilling rate. *Oil and Gas*. 1969. Vol.17. № 11. P.33–35.

3. Kryzhanivskiy E.I., Panevnyk D.A. Improving use efficiency above-bit jet pumps. *Socar proceeding*. 2020. № 2. P. 26-34. DOI:10.5510/OGP20200200437.

4. Panevnik A.V., Kontsur I.F., Panevnik D.A. Determination of operating parameters of near-bit ejector assembly *Neftyanoe khozyaystvo=Oil industry*. 2018. no. 3, P. 70 - 73. [in Russian]. DOI:10.24887/0028-2448-2018-3-70-73.

5. Suryanarayana P. V., Hasan K., Hughes W.I. Technical Feasibility and Applicability of a concentric jet pump in underbalanced drilling: proceeding of the SPE/IADS Underbalanced Technology Conference and Exhibition, Houston, USA, 11–12 october 2004. SPE/IADS 91595. 20 p. URL: <https://doi.org/10.2118/91595-MS>.

6. Haughton D.B., Connel P. Reliable and effective downhole cleaning system for debris and junk removal:proceeding of the SPE Asia Pacific Oil and Gas Conference and Exhibition, Adelaide, Australia, 11-13 september 2006.SPE 101727. 9 p. URL: <https://doi.org/10.2118/101727-MS>.

7. Chen X., Gao D., Guo B. A method for optimizing jet-mill-bit hydraulics in horizontal drilling. *SPE Journal*. 2016. № 4. SPE 178436. P.416–422. URL: <https://doi.org/10.2118/178436-PA>.

8. Zhu H. Y., Liu Q.Y. Pressure drawdown mechanism and design principle of jet pump bit. *Scientia Iranica B*. 2015. No 22(3). P. 792–803. Corpus ID: 55755520.

9. Zhu H. Y., Liu Q.Y., Wang T. Reducing the bottom-hole differential pressure by vortex and hydraulic jet methods. *Journal of Vibroengineering*. 2014. No 8. P. 2224–2249. Corpus ID: 55473883.

10. Yong H., Lihong Z., Deyong Z., Hualin L., Jinying W., Jinshen Y., Yugang Z., Zhibin W. Study on structure parameters of reverse circulation drill bit secondary injector device based on injectors coefficient: proceeding of the SPE/IADS Asia Pacific Drilling Technology Conference, Singapore, 22–24 august 2016. IADS/SPE–180539–MS. 9 p.

11. Panevnyk D.A. Simulation of a downhole jet-vortex pump's working process. *Nafta-Gaz*. 2021. No 9. P. 579–586. URL: <https://doi.org/10.18668/NG.2021.09.02>.

12. Panevnyk D.O. Substantiation of the method of modeling circulating flows during the rotation of the overhead jet pump. *Prospecting and Development of Oil and Gas Fields*. 2021. No. 3(80). P.46-52. URL: [https://doi.org/10.31471/1993-9973-2021-3\(80\)-46-52](https://doi.org/10.31471/1993-9973-2021-3(80)-46-52). [in Ukrainian]