

## МЕТОДИ І ПРИЛАДИ КОНТРОЛЮ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ

УДК 006.91

DOI: 10.31471/1993-9981-2022-1(48)-44-49

### МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗРАХУНКУ КІНЕМАТИЧНОЇ В'ЯЗКОСТІ РОЗПЛАВІВ (РІДИН)

<sup>1</sup>Т. О. Ваврик, <sup>1</sup>О. С. Царева, <sup>1</sup>А. В. Семенчук, <sup>2</sup>В. Д. Царев, <sup>1</sup>Л. М. Гобир, <sup>1</sup>Б. С. Незамай<sup>1</sup>Інститут інформаційних технологій, Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; e-mail: pta@nuing.edu.ua<sup>2</sup>Інститут нафтогазової інженерії, Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; e-mail: a.if.ua1981@gmail.com

Здійснено математичне моделювання розрахунку кінематичної в'язкості рідини (розплаву) на основі нестационарних методів. Обґрунтовано вибір нестационарного методу досліджень для здійснення теоретичного розрахунку кінематичної в'язкості розплаву (рідини). Визначено теоретичну основу обраного методу досліджень. Перевірено відповідність результатів числової реалізації теоретичних розрахунків результатам обраного експерименту. Досліджено наявність взаємозв'язків кінематичної в'язкості з іншими фізико-хімічними властивостями розплаву (рідини) на прикладі температури. Розглянуто існуючі стаціонарні та нестационарні методи дослідження кінематичної в'язкості, визначено її переваги та недоліки. Визначено, що теоретичний розрахунок кінематичної в'язкості шляхом числової реалізації математичної моделі обчислюється методом послідовних наближень. За вихідними даними взятого за основу експерименту побудовано ізотерми кінематичної в'язкості. За результатами теоретичних розрахунків побудовано теоретичну криву. Визначено, що теоретична крива та ізотерми розрахунку кінематичної в'язкості за обраною температурою значно наближені, що дає змогу стверджувати про певну точність математичної моделі. В ході аналізу візуалізації вихідних даних обраного експерименту та теоретичної кривої встановлено, що ізотерми змінюються експоненціально. Це вказує на існування залежності в'язкості від фізико-хімічних властивостей розплаву (рідини), зокрема, температури. Характер змін ізотерм та теоретичної кривої збігається.

**Ключові слова:** математична модель, кінематична в'язкість, розплав, метод послідовних наближень, нестационарні методи досліджень, фізико-хімічні властивості.

In the article mathematical modeling of calculation of kinematic viscosity of liquid (melt) on the basis of nonstationary methods was considered. The choice of non-stationary research method for the theoretical calculation of the kinematic viscosity of the melt (liquid) was substantiated. The theoretical basis of the chosen research method was determined. The matching results of theoretical calculations numerical realization to the results of the selected experiment was checked. The presence of relationships between kinematic viscosity and other physicochemical properties of the melt (liquid) on the example of temperature was studied. Stationary and non-stationary methods of kinematic viscosity research was considered, its advantages and disadvantages was determined. It is determined that the theoretical calculation of kinematic viscosity by numerical realization of a mathematical model is calculated using the method of successive approximations. Based on the initial data of the experiment, the kinematic viscosity isotherms were constructed. Based on the results of theoretical calculations, a theoretical curve was constructed. It is determined that the theoretical curve and isotherms for calculating the kinematic viscosity at the selected temperature are much closer, which suggests a certain accuracy of the mathematical model. During the analysis of the visualization of the initial data of the selected experiment and the theoretical curve, it was found that the isotherms change exponentially. This indicates the existence of a dependence of the viscosity on the physicochemical properties of the melt (liquid), in particular, temperature. The nature of the changes in the isotherms and the theoretical curve coincides.

**Keywords:** mathematical model, kinematic viscosity, melt, method of successive approximations, non-stationary research methods, liquid, physicochemical properties

**Вступ.** Особливості будови рідкого металу (а також розплавів), обумовлені міжчастковою взаємодією, впливають на якість металопродукції. Зокрема, на взаємозв'язку структури розплавів і сплавів в рідкому стані базуються способи фізико-хімічної дії на розплави для створення нових матеріалів з кращим рівнем службових характеристик. Тому теоретичні дослідження методом математичного моделювання в області розрахунку кінематичної в'язкості розплавів є не лише актуальними з наукової точки зору, а й носять прикладний характер.

#### **Аналіз публікацій та постановка завдання дослідження.**

Сучасні уявлення про будову рідких металів і розплавів базуються на , а тому числі, і на дослідженні їх фізико-хімічних властивостей, зокрема, в'язкості [1-5]. Займаючи проміжне місце огляд між газом і твердим тілом, металічні розплави мають ряд властивостей, характерних для кожного з цих станів. За певних умов металічний розплав, як і інші рідини, наближається до газів за рядів фізико-хімічних властивостей. Разом із тим, теоретичні дослідження [3-6] теоретичні дослідження в'язкості ґрунтуються на залежності між в'язкістю рідини та структурою її молекул. Інформацію про в'язкість отримують переважно емпіричним шляхом [7], адже жодна теорія не дає простої залежності, яка б дозволила визначити в'язкість рідин апіорі. За відсутності експериментальних даних в багатьох випадках користуються неточними методами розрахунку в'язкості [6].

Основні методи вимірювання в'язкості поділяють [1-2, 8-11] на стаціонарні (методи капілярного витікання, обертання циліндрів і падаючих кульок) і нестаціонарні, засновані на спостереженні крутильних коливань системи, пов'язані з досліджуваною рідиною.

До стаціонарних методів досліджень в'язкості рідин належать методи Пуазейля і Стокса.

У методах капілярного витікання використовується закон Пуазейля для стаціонарної течії в'язкої рідини капіляром при ламінарному потоці без урахування краєвих ефектів і витрати енергії тиску:

$$\eta = \frac{\pi \cdot R^4 \cdot \Delta P}{8 \cdot V \cdot l} \quad (1)$$

де:

$R$  – радіус капіляра;

$l$  – його довжина;

$\Delta P$  – різниця тисків на кінцях капіляра;

$V$  – об'єм рідини, яка протікає через капіляр за одиницю часу

Недолік методу в тому, що він нема способу, як враховувати краєві ефекти на кінцях капіляра: поправку на довжину, зумовлену початковою ділянкою, і поправку на зміну кінетичної енергії рідини при переході від нульової швидкості у верхньому резервуарі до відмінної від нуля швидкості в капілярі. Також існують проблеми пов'язані з вибором матеріалу для капіляра та технологією його виготовлення.

Метод Стокса більш досконалий теоретично. Коефіцієнт в'язкості  $\eta$  визначається за формулою:

$$\eta = \frac{2 \cdot r^2 \cdot (\rho' - \rho) \cdot g}{9\nu(1 + 2.4 \frac{r}{R}) \cdot (1 + 3.1 \frac{r}{L})} \quad (2)$$

де:

$\nu$  – швидкість рівномірного руху кульки радіуса  $r$ ;

$\rho'$  і  $\rho$  – густина кульки та рідини відповідно;

$R$  – радіус циліндричної посудини, віссю якої у в'язкій рідині рухається кулька;

$L$  – довжина посудини;

$g$  – прискорення вільного падіння.

Недоліки використання цього метода зумовлені великими розмірами приладу, який потребує значної кількості досліджуваної рідини і, передбачає необхідністю її рівномірного нагрівання.

Нестаціонарні методи [8-11] базуються на спостереженні за крутильними коливаннями системи, пов'язаної з рідиною. До нестаціонарних належать метод, що базується на вивченні коливань тіла, зануреного в досліджувану рідину, і метод, на основі вивчення затухаючих коливань циліндра або порожньої кулі, заповнених досліджуваною

рідиною і підвішених на пружній нитці. Саме за допомогою нестационарних методів досліджень визначається кінематична в'язкість [7,8,9].

#### Висвітлення невіршених раніше частин загальної проблеми.

Існуючі теоретичні дослідження визначення розрахунку кінематичної в'язкості розплавів (рідин) не дають точного результату, на який можна було б опиратися в подальших дослідженнях. Математично теорія нестационарних методів складніша, ніж стаціонарних, тому вони не так поширені. Проведення емпіричних досліджень не завжди є виправданим з огляду на мету та цілі. Водночас, запропонований метод теоретичного розрахунку кінематичної в'язкості потребує підтвердження. Тому важливо за наявності даних обраного експерименту перевірити на адекватність та точність математичну модель на основі нестационарного методу.

#### Формулювання цілей статті

Обґрунтувати здійснення теоретичного розрахунку кінематичної в'язкості розплаву (рідини) на основі нестационарного методу досліджень. Визначити теоретичну основу обраного методу досліджень. Перевірити відповідність результатів числової реалізації теоретичних розрахунків результатам обраного експерименту. Дослідити наявність взаємозв'язків кінематичної в'язкості з іншими фізико-хімічними властивостями розплаву (рідини).

#### Висвітлення основного матеріалу досліджень

Експериментально в'язкість досліджуваних розплавів вимірювалась методом, що базується на вивченні затухаючих коливань циліндра, наповненого рідиною і підвішеного на пружній нитці. Математичну модель розрахунку кінематичної в'язкості розроблено на основі методу [7]

Теоретичну основу моделі складають такі твердження:

1. Ковзання між рідиною та внутрішньою поверхнею циліндра відсутне;

2. Коливання циліндра розглядається через досить великий проміжок часу після їх початку, коли початковий розподіл швидкостей не впливає на рух рідини;

3. Амплітуди коливань циліндра малі;

4. Рух рідини в циліндрі описується з достатньою точністю без впливу нелінійних членів рівняння Нав'є-Стокса для рідини, що не стискається:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{V}$$

де:

$\vec{F}$  – напруженість поля масових сил;

$\rho$  – густина рідини;

$\nu$  – кінематична в'язкість рідини;

$P$  – тиск.

Перше наближення є загальноприйнятим у віскозиметрії [1,2]. Друге і третє припущення означають, що необхідно брати до уваги регулярні коливання, які задовольняють умові лінійної залежності логарифма амплітуди від номера коливань.

На підвісну систему, яка складається із циліндра, наповненого рідиною і підвішеного на пружній нитці, діють три види моментів сил: пружний момент кручення нитки, пропорційний куту закручування; момент сил внутрішнього тертя, зумовлений наявністю рідини в циліндрі; момент сил зовнішнього тертя, зумовлений наявністю газового середовища.

Вирішення гідродинамічної задачі крутильно-коливальних рухів циліндра за методом [7] передбачає, що диференціальне рівняння руху матиме вид:

$$I \frac{d^2 \varphi'}{dt^2} + K \varphi' = -L \frac{d\varphi}{dt} - L \frac{d\varphi'}{dt}$$

де:

$I$  – момент інерції всієї підвісної системи без рідини;

$\varphi$  – кутове зміщення циліндра;

$\varphi'$  – дійсна частина кутового зміщення;

$K$  – коефіцієнт пружності нитки підвісу;

$L \frac{d\varphi}{dt}$  – момент сил тертя, які діють на

внутрішню поверхню циліндра і зумовлених наявністю рідини;

$L \frac{d\varphi'}{dt}$  – сумарний момент тертя,

обумовлений газовим середовищем, яке оточує підвісну систему.

При розв'язанні рівняння (2) отримано три формули для визначення рідини, область можливого застосування яких визначається параметром:

$$\zeta = R \sqrt{\frac{2\pi}{\tau\nu}}$$

де:

$R$  – радіус циліндра;  
 $\tau$  – період коливань підвісної системи;  
 $\nu$  – кінематична в'язкість.

При  $\zeta \geq 10$  для області малов'язких рідин (якими, частково, є і металічні розплави) в'язкість визначається за формулою:

$$\nu = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{I}{MR}\right)^2 \cdot \frac{(\delta - \delta_0 \cdot \frac{\tau}{\tau_0})^2}{\sigma\delta}$$

де:

$M$  – маса рідини;  
 $R$  – внутрішній радіус циліндра;  
 $\delta, \delta_0$  – логарифмічні декременти коливань наповненої і порожньої системи відповідно;  
 $\tau, \tau_0$  – періоди коливань наповненої і порожньої системи відповідно.

Величина  $\sigma$  при вільному верхньому меніску визначається виразом:

$$\sigma = 1 - 1.5x - \frac{3}{8}x^2 - a + \frac{2R}{H} \cdot (b - cx)$$

де:

$x = \frac{\delta}{2\pi}$ ;  
 $H$  – висота зразків;  
 $a, b, c$  – коефіцієнти, які визначаються за допомогою графіків або таблиць [7].

Математична модель на основі обраної методики передбачає, що знаходження кінематичної в'язкості  $\nu$  обчислюється методом послідовних наближень. Спершу вважають  $\sigma = 1$  і за формулою (4) обчислюють в'язкість у нульовому наближенні  $\nu_0$ . Потім із виразу:

$$Y_n = \frac{2\pi R^2}{\tau \cdot \nu_{n-1}}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$  обчислюють параметр  $Y_n$  і знаходять значення коефіцієнтів  $a, b, c$  для визначення  $\sigma$

Значення  $\sigma_n$  розраховують за допомогою формули: (5)

$$\nu_n = \frac{\nu_{n-1}}{\sigma_n^2}$$

Відтак знаходять кінематичну в'язкість в наступному наближенні. Розрахунок продовжується доти, поки не буде виконуватись умова  $\nu_n \approx \nu_{n-1}$ .

Момент інерції підвісної системи визначається за допомогою еталона (диск радіусом 50 мм) за формулою: (6)

$$I = I_{et} \cdot \frac{\tau_0^2}{\tau_{et}^2 - \tau_0^2}$$

де:

$I_{et}$  – момент інерції еталона;

$$I_{et} = \frac{mR^2}{2}$$

$\tau_0, \tau_{et}$  – періоди коливань підвісної системи порожньо і з еталоном відповідно.

Тривалість періодів, за які проводилися вимірювання, – 50 коливань.

Період ( $\tau$ ) і декремент коливань ( $\delta$ ) підвісної системи з дослідною речовиною визначались за 5 - 10 коливань і обчислювалися за формулою

$$\delta = \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{A_0}{A_n}\right)$$

де:

$n$  – число коливань;

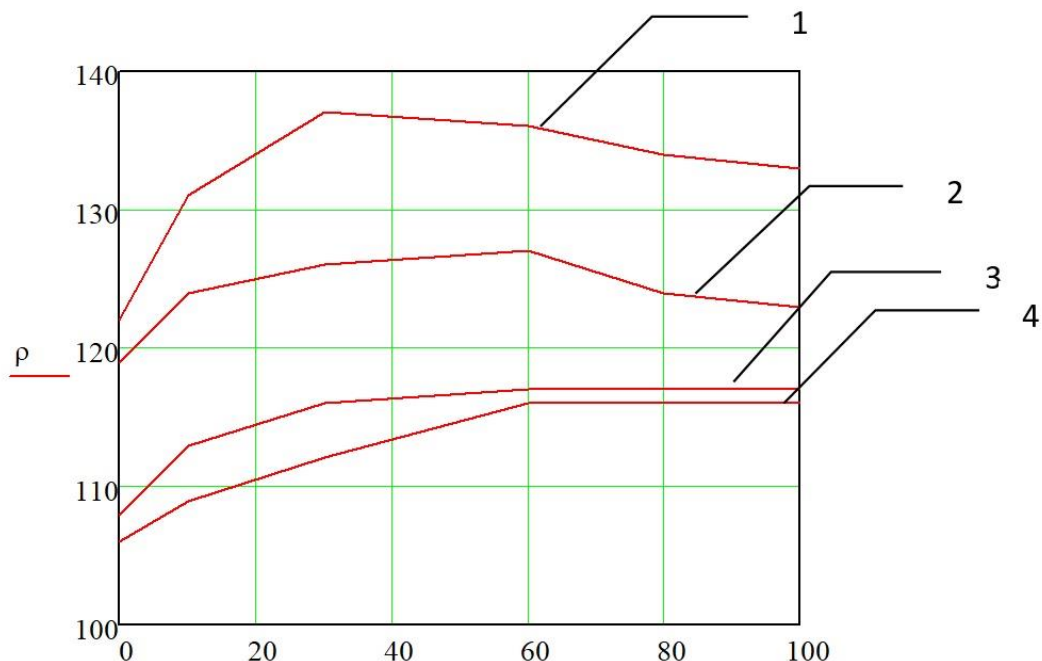
$A_0, A_n$  – початкова і кінцева амплітуда коливань;

При розрахунку кінематичної в'язкості також враховували температурну залежність декременту коливань порожньої системи.

Експериментально [7] вимірювання в'язкості досліджуваних розплавів здійснювалось у режимі (8) нагрівання і охолодження. Перед початком вимірювань для повного розплавлення досліджуваного сплаву давали витримку 1 - 1.5 години. При кожній наступній зміні температур витримка має складати 5 - 10 вимірювань. Дослідження

проводились на зразках із вмістом сурми 0,10,20,30,60,80,100 Atm%. За вихідними даними експерименту побудовані ізоТЕРМИ в'язкості рис.1. (графік 1,2,3). 3 графіків робимо

висновок, що ізоТЕРМИ змінюються по експоненціальній залежності в'язкості від температури.



- 1- В'язкість системи при температурі 4000
- 2- В'язкість системи при температурі 5000
- 3- В'язкість системи при температурі 7000
- 4- Теоретична крива

Рисунок 1 – ІзоТЕРМИ в'язкості системи Pb-Sb

За результатами числової реалізації математичної моделі побудовано теоретичну криву, яка має відображати результати числової реалізації моделі розрахунку в'язкості (рис. 1, графік 4)

Результати теоретичних розрахунків числової реалізації математичної моделі практично накладаються на ізоТЕРМУ (рис. 1, графік 4), побудовану на основі вихідних даних експерименту. Також теоретична крива, як і ізоТЕРМА 3, демонструє існування експоненціальній залежності в'язкості температури. Таким чином, можемо стверджувати про існування залежності кінематичної в'язкості від фізико-хімічних властивостей розплаву (рідини).

**Висновок.** У результаті числової реалізації математичної моделі розрахунку кінематичної в'язкості розплавів (рідин) вдалося отримати

теоретичну криву, яка практично накладається на ізоТЕРМИ, побудовані за вихідними даними експерименту. У результаті проведених розрахунків та візуалізації вихідних даних експерименту вдалося встановити існування експоненціальній залежності кінематичної в'язкості від температури.

#### Список використаних джерел

1. Курс фізики / За ред. І.Є. Лопатинського. Львів: Вид-во "Бескид Біт", 2002
2. А.М. Толкачов, О.В. Третьяков. Молекулярна фізика і термодинаміка. Загальна фізика. Київ: Академія ВВ, 2007. С. 78-84.
3. Bilyk R., Liudkevych U., Mudry S. Structure and short range order in liquid Ga. Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. 2017. Вип. 25 С. 7-13.

4. Білик Р. Термодинамічні властивості та структура рідких розплавів індію і галію. Вісник Львівського університету. 2017. Вип. 54. С. 30-36.

5. Пригунова А. С., Петров С. С. Будова металевих розплавів і її взаємозв'язок із твердим станом. *Металознавство та обробка металів*. 2016. №2. С. 17-29

6. Крих Г. Б. Особливості застосування реологічних моделей неньютонівських рідин [Електронний ресурс]. Код доступу - vlp.com.ua/files/11\_46.pdf

7. Швидковский Е. Г. Некоторые вопросы вязкости расплавленных металлов. Москва: Гостехиздат. 1955. 207 с.

8. Клым Н. М., Мудрый С. И., Петрук А. А. Ближний порядок в расплавах системы Pb-Cd. *Известия вузов. Физика*. 1982. № 8. С.109-111.

9. Склярчук В. М., Якимович А. С., Дуфанець М. В. Розрахунок в'язкості розплавів системи Al-Cu. *Металлофізика и новейшие технологии*. 2008. Т. 30. С. 313–319.

10. Pecharsky V. K.. *Fundamentals of powder diffraction and structural characterization of materials*. Springer. 2005. 713p.

11. Mudry S., Shtablavyi I., Liudkevych U., Winczewski S. Structure and thermal expansion of liquid bismuth. *Materials Science-Poland*. 2015. Vol. 33 (4). P. 767-773.

### References

1. Kurs fizyky / Za red. I.YE. Lopatyns'koho. L'viv: Vyd-vo "Beskyd Bit", 2002

2. А.М. Tolkachov, О.В. Tret'yakov. *Molekulyarna fizyka i termodynamika. Zahal'na fizyka*. Kyiv: Akademiya VV, 2007. S. 78-84.

3. Bilyk R., Liudkevych U., Mudry S. Structure and short range order in liquid Ga. *Fizyko-matematychnye modelyuvannya ta informatsiyini tekhnolohiyi*. 2017. Vyp. 25 S. 7-13.

4. Bilyk R. Термодинамічні властивості та структура рідких розплавів індію і галію. *Вісник Львівського університету*. 2017. Вип. 54. С. 30-36.

5. Pryhunova A. S., Petrov S. S. Budova metalovykh rozplaviv i yiyi vzayemozv'yazok iz tverdym stanom. *Metaloznnavstvo ta obrobka metaliv*. 2016. №2. С. 17-29

6. Krykh H. B. Osoblyvosti zastosuvannya reolohichnykh modeley nen'yutoniv'skykh ridyn [Elektronnyy resurs]. Kod dostupu - vlp.com.ua/files/11\_46.pdf

7. Shvydkovskyy E. H. Nekotorye voprosy v'yazkosti rasplavlennykh metallov. Moskva: Hosttekhizdat. 1955. 207 s.

8. Klym N. M., Mudryy S. Y., Petruk A. A. Blyzhnyy poriyadok v rasplavakh systemy Pb-Cd. *Yzvestyya vuzov. Fyzyka*. 1982. № 8. S.109-111.

9. Sklyarchuk V. M., Yakymovych A. S., Dufanets' M. V.. Rozrakhunok v'yazkosti rozplaviv systemy Al-Cu. *Metallofyzika y noveyshye tekhnolohyy*. 2008. Т. 30. С. 313–319.

10. Pecharsky V. K.. *Fundamentals of powder diffraction and structural characterization of materials*. Springer. 2005. 713p.

11. Mudry S., Shtablavyi I., Liudkevych U., Winczewski S. Structure and thermal expansion of liquid bismuth. *Materials Science-Poland*. 2015. Vol. 33 (4). P. 767-773.