

ДОСЛІДЖЕННЯ ВІБРАЦІЙНИХ НАПРУЖЕНЬ, ВИКЛИКАНИХ ПОШИРЕННЯМ ПРУЖНИХ КОЛИВАНЬ У КОЛОНІ ШТАНГ

О. Я. Дубей*, М. М. Лях, Т. Ф. Тутко

ІФНТУНГ; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел.(0342) 727138;
e-mail: olgadubej@gmail.com

Задача визначення вібраційного напруження у точці підвісу штанг верстата-качалки, який приводить у рух плунжерний насос ШСНУ, пов'язана з необхідністю розв'язання одновимірного хвильового диференціального рівняння. Точність визначення величини вібраційного напруження залежить як від швидкості руху точки підвісу штанг, так і від пружних переміщень і їх швидкостей перерізів колони штанг у період початкової деформації колони і у момент початку руху плунжера насоса вгору. Все це разом взяте формує початкові умови задачі. Мета даної статті полягає у визначенні вібраційного напруження при врахуванні дійсної нелінійної швидкості точки підвісу штанг і її заміни лінійною швидкістю і послідовно знайдених значеннях швидкостей пружних переміщень перерізів колони штанг у момент початку руху плунжера насоса вгору. При цьому не враховується пружне переміщення нижнього кінця колони штанг вгору під час їх початкової деформації, а пружне переміщення перерізів штанг у момент початку руху плунжера насоса приймається рівним нулю. Спочатку знаходили швидкість точки підвісу штанг у період їх початкової деформації при використанні кінематики кривошипно-коромислового механізму і її заміну лінійною швидкістю. Після цього були отримані швидкості пружних переміщень перерізів штанг у момент початку руху плунжера насоса вгору у результаті розв'язання допоміжних задач (круглий стержень, один кінець якого зацямлений, а другий переміщається із вказаними вище швидкостями; в результаті розв'язування цих задач знаходяться швидкості пружних переміщень перерізів стержня). Ці задачі розв'язувалися методом інтегрального перетворення Лапласа. Насамкінець, знаючи швидкості пружних переміщень перерізів колони штанг у початковий момент руху плунжера насоса вгору і приймаючи пружні переміщення перерізів штанг у цей момент рівними нулю, були поставлені крайові задачі з визначення пружних переміщень перерізів колони штанг при русі плунжера насоса вгору. Ці задачі розв'язувалися методом Фур'є. Отримані розв'язки дали можливість одержати вібраційні напруження у точці підвісу штанг. Встановлено, що врахування нелінійності швидкості точки підвісу штанг незначно впливає на величину вібраційного напруження. Але отримані значення вібраційних напружень є наближеними, оскільки при їх визначенні знехтувано пружним переміщенням нижнього кінця колони штанг під час їх початкової деформації і пружні переміщення перерізів штанг у початковий момент руху плунжера прийнято рівними нулю. Тому додатково виконана математична постановка ще однієї допоміжної задачі, розв'язок якої дасть можливість отримати у подальшому більш точне значення для вібраційного напруження.

Ключові слова: швидкість точки підвісу штанг; швидкість поширення пружних хвиль у штангах; довжина колони штанг.

The task of determining the vibration stress at the suspension point of the jack pump drill rods, which drives the plunger pump of an oil-well pumping unit, is associated with the need to solve a one-dimensional wave differential equation. The accuracy of determining the magnitude of the vibration stress depends both on the speed of movement of the rods' suspension point and on the elastic displacements and their speeds of the rod string cross sections during the initial deformation of the column, and at the moment the pump plunger begins to move upward. All this, taken together, forms the initial conditions of the problem. In this regard, the purpose of this article is to determine the vibration stress, taking into account the actual nonlinear speed of the rods suspension point and its replacement by the linear velocity and the successively found values of the elastic displacement velocities of the rod string sections at the moment the pump plunger starts to move upward. In this case, the elastic movement of the lower end of the rod string upwards during their initial deformation is not considered. The elastic displacement of the rod sections at the moment the pump plunger begins to move is assumed to be zero. First, the speed of the rods' suspension point during their initial deformation was determined using the kinematics of the crank-rocker mechanism and its replacement by the linear speed. After that, the elastic displacement velocities of the rod sections were obtained at the moment the pump plunger began to move upwards as a result of solving additional problems (a round rod, one end of which is pinched, and the other moves at the speeds indicated above; as a result of solving these problems, the elastic displacement velocities of the rod sections are determined). These problems were solved by the Laplace integral transform method. Finally, knowing the rates of elastic displacements of the rod string sections at the initial moment of the pump plunger moving upwards and assuming the elastic displacements of the

rods' sections at this moment to be equal to zero, boundary-value problems were set to determine the elastic displacements of the rod string sections when the pump plunger moved upwards. These problems were solved by the Fourier method. The solutions obtained made it possible to get vibration stress at the point of suspension of the rods. It has been established that taking into account the nonlinearity of the speed of the suspension point of the rods has little effect on the magnitude of the vibration stress. However, the obtained values of vibration stresses are approximate since their determination does not take into account the elastic displacement of the lower end of the rod string during their initial deformation, and the elastic displacements of the rod sections at the initial moment of the plunger movement are taken equal to zero. Therefore, a mathematical formulation of another auxiliary problem has been additionally developed, the solution of which will make it possible to obtain a more accurate value for the vibration stress in the future.

Key words: rod suspension point speed; the speed of propagation of elastic waves in the rods; rod string length.

Вступ

Аналіз закордонних і вітчизняних досліджень і публікацій

У період початкової деформації колони штанг (проміжок часу від початку руху точки підвісу штанг угору до кінцевого моменту нерухомості плунжера насоса) відбувається переміщення пружних хвиль у напрямі від точки підвісу штанг вниз до плунжерного насоса. Як тільки колона штанг сприйме повне навантаження від стовпа перекачуваної рідини, відкривається всмоктувальний клапан насоса, і його плунжер починає свій рух угору. У цей момент пружна хвиля розтягу переміщується угору до точки підвісу штанг. Сумарно описаний пружний хвильовий процес і створює у точці підвісу штанг додаткове напруження, яке повинно враховуватися у максимальному навантаженні на точку підвісу штанг під час її руху угору.

Історично першою роботою, в якій при визначенні максимального навантаження на точку підвісу штанг враховано вказане додаткове напруження, була робота Вірновського. Математичне формулювання задачі Вірновським для визначення вказаного напруження було пов'язано з необхідністю розв'язання хвильового рівняння

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

при врахуванні таких початкових та граничних умов:

$$u_{/t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} /_{t=0} = \frac{vx}{l}, \quad (2)$$

$$u_{/x=0} = 0, \quad a^2 \frac{\partial u}{\partial x} /_{x=l} = -ml \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} /_{x=l}. \quad (3)$$

де u - переміщення перерізів штанг, якими поширюється пружна хвиля;

l - довжина колони штанг;

x, t - координата перерізів штанг і час від початку руху плунжера насоса угору (вісь X напрямлена вниз, її початок знаходиться у точці підвісу штанг. Це дозволило розглядати тільки переміщення перерізів штанг, що пов'язані

з пружною деформацією, не розглядаючи переміщень перерізів штанг як твердого тіла);

$a^2 = E/\rho$ - квадрат швидкості поширення хвиль у штангах;

E, ρ - модуль пружності матеріалу штанг і його густина;

v - швидкість руху плунжера у початковий момент відносно точки підвісу штанг, яку прийнято за умовно нерухому;

$$m = \frac{\gamma_p (F - f) l}{\gamma f l} \frac{F - f}{F_1 - f};$$

γ_p, γ - середня питома вага рідини у свердловині, матеріалу штанг;

F, F_1, f - площі поперечного перерізу плунжера, труб НКТ і штанг.

Нами використано позначення величин, які були прийняті Вірновським. Задача розв'язувалася методом Даламбера

$$\sigma_i = E \frac{v}{l} t \quad \text{при} \quad 0 < t < \frac{l}{a};$$

$$\sigma_i = E \frac{v}{l} \left[t - 2 \left(t - \frac{l}{a} \right) + 2m \frac{l}{a} \left(1 - e^{-\frac{t-l/a}{ml/a}} \right) \right]$$

$$\text{при} \quad \frac{l}{a} < t < 3 \frac{l}{a}, \quad \sigma_i = E \frac{\partial u}{\partial x} /_{x=0} \quad (4)$$

Максимум додаткового напруження знаходиться у проміжку часу $\frac{l}{a} < t < 3 \frac{l}{a}$, що можна встановити, досліджуючи функцію (4) на максимум, і його значення є таким:

$$\sigma_{i \max} = E \frac{v}{a} [1 + m - m \ln 2]. \quad (5)$$

Аналізуючи математичну постановку задачі (1)-(3), виникають сумніви щодо вірності другої початкової умови (2), яка, на нашу думку, не є очевидною. Також немає цілковитої впевненості у тому, що і перша початкова умова (2) справедлива для всіх перерізів вздовж колони штанг. Швидкість точки підвісу штанг Вірновський визначав за синусоїдальним законом, вводячи два сталих коефіцієнти. Для точ-

ного визначення цієї швидкості необхідно користуватися кінематикою кривошипно-коромислового механізму, яка вимагає суттєво більших обчислень.

Додаткове (вібраційне) напруження (5) є складовою частиною повного максимального напруження, в яке, крім напруження (5), входять ще статичне та інерційне напруження. Формули для максимального та мінімального навантаження (напруження) на точку підвісу штанг, запропоновані Вірновським, виявилися надійними у широкому діапазоні застосування насосної експлуатації. Вони наводяться у багатьох довідниках і курсах з видобування нафти.

Не дивлячись на те, що пройшло вже три чверті століття з моменту публікації роботи Вірновського, нам невідомі наукові публікації, які б давали аналітичний аналіз вказаних робіт. Вірновський намагався спростити своє аналітичне дослідження, оскільки в той час були відсутні засоби для виконання складніших обчислень. Але ж відомо, що будь-яке дослідження закінчується необхідністю виконання нерідко складних обчислень.

За час, що минув, різні автори або спрощували результати Вірновського або їх повторювали з певними змінами. Наприклад, приводяться спрощені формули для максимального та мінімального навантажень на точку підвісу штанг у вигляді

$$P_{\max} = P'_p + P'_{u'} + 0,011 \frac{D}{d_{u'}} n P_{u'} \sqrt{\psi S_0 - \lambda_{u'}} + 100,$$

$$P_{\min} = P'_{u'} - 0,011 \frac{D}{d_{u'}} n P_{u'} \sqrt{\psi S_0 - \lambda_{u'}} + 100, \quad (6)$$

де $P'_p, P'_{u'}, P_{u'}$ - вага стовпа рідини, яку піднімає насос, вага колони штанг у рідині і у повітрі;

$D, d_{u'}$ - діаметри плунжера насоса і штанг;

S_0 - довжина ходу точки підвісу штанг;

n - число качань насоса за хвилину;

$\lambda_{u'}$ - видовження колони штанг від ваги стовпа рідини;

$$\psi = f_T / (f_T + f_{u'});$$

$f_{u'}, f_T$ - площі поперечних перерізів штанг і труб по матеріалу.

У роботі [1] автор наводить формули Вірновського для вібраційного навантаження на головку балансира при ході плунжера насоса угору і вниз

$$P_{B(\epsilon, n)} = \alpha_{\epsilon(n)} m_{\omega} \sqrt{\left(\psi a_{\epsilon(n)} - \frac{\lambda_{u'}}{S} \right) P_{u'} P_p}, \quad (7)$$

$$\text{де } m_{\omega} = \sqrt{\omega^2 s / g},$$

ω - кутова швидкість вала кривошипа верстата-качалки;

S - довжина ходу сальникового штока;

$$\psi = \lambda_{u'} / (\lambda_{u'} + \lambda_T);$$

λ_T - вкорочення (видовження) колони НКТ;

$P_{u'}, P_p$ - вага колони штанг і гідростатичного стовпа рідини;

$\alpha_{\epsilon(n)}, a_{\epsilon(n)}$ - коефіцієнти, які при наближеному обчисленні можна прийняти рівними 1.

Відома робота [2], що пов'язана з дослідженням розповсюдження пружних коливань вздовж колони штанг гвинтових насосів і їх вплив на динамічну навантаженість елементів колони.

У статті [3] досліджуються затухаючі коливання пружного стержня, один кінець якого зацмелений. Попередньо отримано рівняння для таких коливань введенням релаксаційних доданків у формулу закону Гука. Отримане рівняння розв'язано методом Фур'є. Наводиться порівняння теоретичних результатів з експериментальними.

Нещодавно задача (1)-(3) була розв'язана методом розділення змінних (методом Фур'є) у такій же постановці, як і у Вірновського [4]. Розв'язок цієї задачі виглядає так:

$$u(x, t) = \frac{4v_1}{al} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_k l \sin p_k t \sin \beta_k x}{\beta_k^2 (2\beta_k l + \sin 2\beta_k l)}, \quad (8)$$

де v_1 - швидкість точки підвісу штанг у момент початку руху плунжера глибинного насоса;

β_k - власні числа, які знаходяться із розв'язку трансцендентного рівняння $tg \beta_k l = 1 / (m l \beta_k)$;

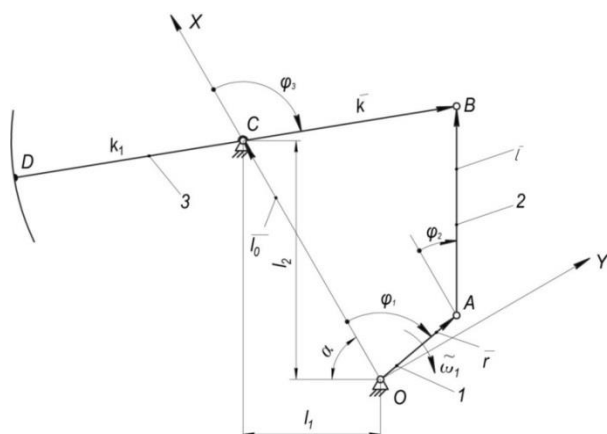
p_k - власна частота коливань, яка визначається через власні числа $p_k = a \beta_k$.

Враховуючи розв'язок (8), додаткове напруження у точці підвісу штанг, викликане поширенням пружних хвиль у колоні штанг, визначається за формулою

$$\sigma_B = E \frac{\partial u}{\partial x} /_{x=0} = \frac{4v_1 E}{al} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_k l \sin p_k t}{\beta_k (2\beta_k l + \sin 2\beta_k l)}. \quad (9)$$

У роботі [4] обчислення не проводились. Нами виконано порівняння результату Вірновського (4) з результатом (9), отриманим методом Фур'є на прикладі свердловини, для якої глибина опускання насоса $L = 1500$ м, величина опускання насоса під динамічний рівень $h = 100$ м, $d_n, d_{u'}, d_3, d_e$ - діаметр плунжера

($d_n = 38\text{мм}$), середній діаметр колони штанг ($d_{ш} = 22\text{мм}$), зовнішній та внутрішній діаметри НКТ ($d_3 = 73\text{мм}$, $d_6 = 59\text{мм}$ (ГОСТ 633-80 Труби НКТ ТУ)), середня густина відкачуваної рідини $\rho_p = 820\text{кг/м}^3$. При цьому свердловина оснащена верстатом-качалкою СК8-3,5-4000 з такими паспортними даними: геометричні розміри його механізму (рис. 1) $k_1 = 3500\text{мм}$, $k = 2500\text{мм}$, $r = 1010\text{мм}$ (взято один із можливих розмірів довжини кривошипа), $l = 3000\text{мм}$, $l_1 = 2195\text{мм}$, $l_2 = 3000\text{мм}$, частота ходів верстата-качалки $n_1 \cong 10,9\text{хв}^{-1}$.



1 – кривошип; 2 – шатун; 3 – коромисло

Рисунок 1 – Структурна схема механізму верстата-качалки

Отримані результати порівняння представлено у таблиці 1.

Таблиця 1 – Додаткове напруження у точці підвісу штанг, викликане поширенням пружних хвиль у штангах

№ з/п	Час, с	Напруження σ_B , Па, отримане при розв'язуванні задачі методом Фур'є	Напруження σ_B , Па, отримане Вірновським
1	0,04	6071222	6071228
2	0,08	12142455	12142457
3	0,12	18213692	18213680
4	0,16	24284921	24284914
5	0,20	30356135	30356143
6	0,24	36427351	36427372
7	0,28	42498635	42498600
8	0,30	45156977	45157075
9	0,31	45265735	45265672
10	0,32	44722819	44722862

При порівнянні результатів швидкість точки підвісу штанг у момент початку руху плунжера насоса вверх $V_D = 1,1106\text{м/с}$, величина $m = 0,066792856$ (розрахована при врахуванні заданих параметрів свердловини), $a = 5126,3\text{м/с}$ (швидкість звуку у матеріалі штанг, $a = \sqrt{E/\rho}$, $\rho = 7800\text{кг/м}^3$, $E = 2,05 \cdot 10^{11}\text{Па}$).

Як видно із таблиці 1 результати додаткового напруження у точці підвісу штанг, викликані хвиловим процесом у штангах, отримані Вірновським і при розв'язуванні задачі методом Фур'є співпадають.

Висвітлення невирішених раніше частин загальної проблеми

Як видно із вище сказаного, швидкість точки підвісу штанг при визначенні додаткового напруження, викликаного поширенням пружних хвиль у колоні штанг, не визначалася при використанні кінематики кривошипно-коромислового механізму. Але саме цей механізм (рис. 1) приводить в рух колону штанг. Від закону руху цього механізму у період початкової деформації штанг залежить поширення пружних хвиль у колоні штанг у цей період, а отже, впливає на саму величину вказаного додаткового напруження. Крім того, початкові умови (2), на нашу думку, не є очевидними, викликають певний сумнів, тому вимагають додаткового дослідження. У випадку їх недовірності задача визначення додаткового напруження у точці підвісу штанг, викликаного поширенням пружних хвиль у період початкової деформації штанг і у момент початку руху плунжера насоса угору, повинна розв'язуватися при уточнених початкових умовах.

Мета і задачі дослідження

Метою даної статті є визначенні вібраційного напруження при врахуванні дійсної нелінійної швидкості точки підвісу штанг у момент початку руху плунжера насоса угору. Для досягнення цієї мети вирішувалися такі задачі:

- визначення додаткового напруження у точці підвісу штанг, що появляється після початку руху плунжера насоса угору, яке викликане поширенням пружних хвиль у колоні штанг як у період її початкової деформації, так і на початку руху плунжера насоса угору. При цьому враховується дійсний закон руху точки підвісу штанг, перевірена друга початкова умова (2) при нехтуванні пружним переміщенням колони НКТ у період початкової деформації штанг;

- розробка математичної постановки допоміжної задачі, яка у подальшому дасть можливість перевірити і знайти математичний вигляд першої початкової умови (2) і пов'язаної з нею другої початкової умови (2).

Основна частина дослідження

Спочатку визначаємо швидкість точки підвісу штанг за проміжок часу від моменту початку її висхідного руху до моменту початку руху плунжера насоса. За вказаний проміжок часу коромисло (балансир) 3 повернеться на кут (рис. 1)

$$\Delta\varphi_3 = \frac{\lambda}{k_1}, \quad \lambda = \frac{P'_p L}{E} \left(\frac{1}{f_u} + \frac{1}{f_T} \right), \quad (10)$$

де λ - загальна втрата ходу точки підвісу штанг на пружні деформації штанг і труб (НКТ);

P'_p - вага стовпа рідини, яку піднімає плунжер;

L - довжина колони штанг.

Використовуючи параметри свердловини, що була взята для порівняння додаткового напруження на точку підвісу штанг за формулами (10), отримуємо $\lambda = 0,3102м$, $\Delta\varphi_3 \cong 5,078^\circ$.

Для знаходження швидкості точки підвісу штанг, яка рівна швидкості точки D коромисла 3, використовуємо метод замкнутого векторного контуру (рис. 1)

$$\vec{r} + \vec{l} = \vec{l}_0 + \vec{k}. \quad (11)$$

Проекціюючи це векторне рівняння на осі декартової системи координат, отримуємо два алгебраїчні рівняння. Виключаючи із цих рівнянь кут повороту шатуна φ_2 , після перетворень будемо мати

$$\varphi_3 = \arcsin \frac{a}{u} + \arccos \frac{y}{u}, \quad (12)$$

а швидкість точки підвісу буде

$$V_D = \frac{d_3}{d_1} \omega_1 k_1, \quad (13)$$

$$\frac{d_3}{d_1} = \frac{a'u - au'}{u\sqrt{u^2 - a^2}} - \frac{y'u - yu'}{u\sqrt{u^2 - y^2}},$$

де φ_1, ω_1 - кут повороту кривошипа і його кутова швидкість;

$$a = (k^2 + x^2 + y^2 - l^2) / 2k, \quad x = r \cos \varphi_1 - l_0,$$

$$y = r \sin \varphi_1, \quad u = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$a' = \frac{da}{d\varphi_1} = (xx' + yy') / k, \quad x' = \frac{dx}{d\varphi_1} = -r \sin \varphi_1,$$

$$y' = \frac{dy}{d\varphi_1} = r \cos \varphi_1, \quad u' = \frac{du}{d\varphi_1} = (xx' + yy') / u.$$

З метою обчислення швидкості V_D за формулою (13) була складена комп'ютерна програма. В результаті отримана функція $V_D(t)$, яка виявилася нелінійною (t - час руху у період початкової деформації штанг; $0 \leq t \leq 0,5114$ с). Для подальшого дослідження необхідно мати аналітичну формулу для $V_D(t)$, тому $V_D(t)$ була представлена емпіричною формулою $V_D(t) = a_1 t + b_1 t^2$. Невідомі коефіцієнти a_1 і b_1 знайдено способом середньої. Числові значення цих коефіцієнтів такі: $a_1 = 2,755977 м/с^2$, $b_1 = -1,125404 м/с^3$. На рисунку 2 швидкість $V_D(t)$ зображена її емпіричною формулою.

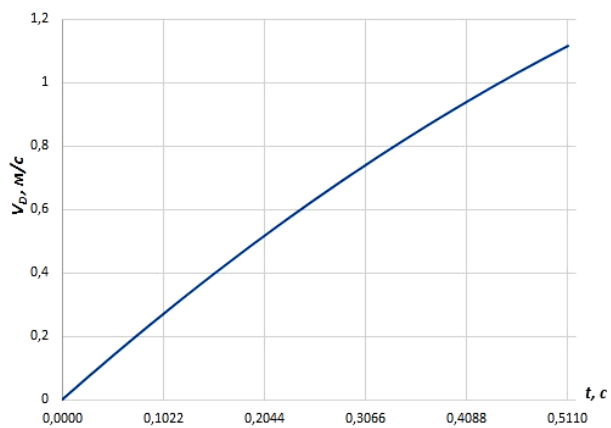


Рисунок 2 – Швидкість точки підвісу штанг у період їх попередньої деформації

Приступаємо до перевірки другої початкової умови (2) у задачі Вірновського. Ця умова є величиною швидкості пружного переміщення перерізів колони штанг у початковий момент часу, коли плунжер насоса починає свій рух угору. Як видно із (2), у Вірновського ця швидкість змінюється за лінійним законом: найбільша швидкість у перерізі з'єднання штанг із плунжером і найменша у точці підвісу штанг, яка рівна нулю.

Щоб перевірити цю умову, необхідно спочатку розв'язати таку допоміжну задачу. Розглядається стержень, один кінець якого защемлено, а другий вільний кінець розтягує стержень силою так, що його швидкість дорівнює V (рис. 3). І тут розглянемо два випадки. Перший випадок, коли $V = V_1 t / t_1$ (швидкість V змінюється за лінійним законом; t_1 - час переміщення вільного кінця стержня) і другий випадок, коли $V = a_1 t + b_1 t^2$. Задача полягає в тому, щоб знайти пружні переміщення перерізів стержня у функції часу.

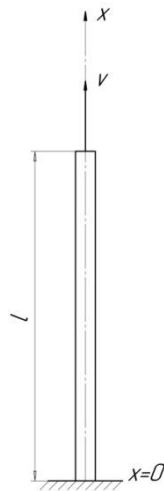


Рисунок 3 – Розтяг стержня, вільний кінець якого рухається зі швидкістю V

У першому випадку маємо задачу вимушених коливань стержня з одним рухомих кінцем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (14)$$

при таких початкових умовах

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad (15)$$

та граничних умовах

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = \frac{V_1 t^2}{2t_1}, \quad (16)$$

де u - пружні переміщення перерізів стержня.

Для розв'язання задачі (14)-(16) неможливо застосувати метод Фур'є чи перетворення Лапласа, оскільки друга гранична умова неоднорідна. Але ця задача може бути зведена до задачі з нульовими граничними умовами.

Вводимо допоміжну функцію

$$w(x,t) = \frac{V_1 t^2}{2t_1} \frac{x}{l}, \quad (17)$$

тоді

$$w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=l} = \frac{V_1 t^2}{2t_1}, \quad (18)$$

Розв'язок задачі шукаємо у вигляді суми

$$u = z + w, \quad (19)$$

де z - нова невідома функція.

Враховуючи граничні умови (16), (18) і початкові умови (15), функція $z(x,t)$ повинна задовольняти граничним умовам

$$z|_{x=0} = 0, \quad z|_{x=l} = 0 \quad (20)$$

і початковим умовам

$$\begin{aligned} z|_{t=0} &= u|_{t=0} - w|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial t}|_{t=0} &= \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} - \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Підставляємо (19) в (14) і отримуємо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{V_1 x}{t_1 l} \quad (22)$$

при таких початкових і граничних умовах:

$$z|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad (23)$$

$$z|_{x=0} = 0, \quad z|_{x=l} = 0. \quad (24)$$

Розв'язуємо задачу (22)-(24) методом інтегрального перетворення Лапласа

$$\bar{z} = \int_0^{\infty} z e^{-st} dt \quad (25)$$

і в результаті отримуємо

$$\begin{aligned} z = & -\frac{V_1 x t^2}{2t_1 l} + \frac{V_1}{2t_1} \left[\left(t - \frac{l-x}{a} \right)^2 \eta \left(t - \frac{l-x}{a} \right) - \right. \\ & - \left(t - \frac{l+x}{a} \right)^2 \eta \left(t - \frac{l+x}{a} \right) + \left(t - \frac{3l-x}{a} \right)^2 \eta \left(t - \frac{3l-x}{a} \right) - \\ & - \left(t - \frac{3l+x}{a} \right)^2 \eta \left(t - \frac{3l+x}{a} \right) + \left(t - \frac{5l-x}{a} \right)^2 \eta \left(t - \frac{5l-x}{a} \right) - \\ & \left. - \left(t - \frac{5l+x}{a} \right)^2 \eta \left(t - \frac{5l+x}{a} \right) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Оскільки $u = z + w$, а $w(x,t) = \frac{V_1 t^2}{2t_1} \frac{x}{l}$, то-

му u дорівнюватиме

$$\begin{aligned} u = & \frac{V_1}{2t_1} \left[\left(t - \frac{l-x}{a} \right)^2 \eta \left(t - \frac{l-x}{a} \right) - \right. \\ & - \left(t - \frac{l+x}{a} \right)^2 \eta \left(t - \frac{l+x}{a} \right) + \left(t - \frac{3l-x}{a} \right)^2 \eta \left(t - \frac{3l-x}{a} \right) - \\ & \left. - \left(t - \frac{3l+x}{a} \right)^2 \eta \left(t - \frac{3l+x}{a} \right) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Швидкість перерізів стержня під час розтягування його вільного кінця зі швидкістю $V = V_1 t / t_1$ буде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & \frac{V_1}{t_1} \left[\left(t - \frac{l-x}{a} \right) \eta \left(t - \frac{l-x}{a} \right) - \right. \\ & - \left(t - \frac{l+x}{a} \right) \eta \left(t - \frac{l+x}{a} \right) + \left(t - \frac{3l-x}{a} \right) \eta \left(t - \frac{3l-x}{a} \right) - \\ & \left. - \left(t - \frac{3l+x}{a} \right) \eta \left(t - \frac{3l+x}{a} \right) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

У формулах (26)-(28) $\eta(t - ax)$ є одиничною функцією Хевісайда, яка приймає такі значення:

$$\eta(t - ax) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t - ax > 0, \\ 0, & \text{якщо } t - ax < 0. \end{cases} \quad (29)$$

У другому випадку, коли швидкість вільного кінця стержня змінюється за законом

$V = a_1t + b_1t^2$, отримуємо таку задачу вимушених коливань стержня з рухомим кінцем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (30)$$

при початкових умовах

$$u_{/t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} /_{t=0} = 0, \quad (31)$$

та граничних умовах

$$u_{/x=0} = 0, \quad u_{/x=l} = \frac{a_1t^2}{2} + \frac{b_1t^3}{3}. \quad (32)$$

Ця задача розв'язується аналогічно попередній. При цьому функція пружних переміщень перерізів стержня має вигляд

$$u = \left\{ \left[a_1 \frac{\left(t - \frac{l-x}{a} \right)^2}{2} + b_1 \frac{\left(t - \frac{l-x}{a} \right)^3}{3} \right] \eta \left(t - \frac{l-x}{a} \right) - \left[a_1 \frac{\left(t - \frac{l+x}{a} \right)^2}{2} + b_1 \frac{\left(t - \frac{l+x}{a} \right)^3}{3} \right] \eta \left(t - \frac{l+x}{a} \right) + \left[a_1 \frac{\left(t - \frac{3l-x}{a} \right)^2}{2} + b_1 \frac{\left(t - \frac{3l-x}{a} \right)^3}{3} \right] \eta \left(t - \frac{3l-x}{a} \right) - \left[a_1 \frac{\left(t - \frac{3l+x}{a} \right)^2}{2} + b_1 \frac{\left(t - \frac{3l+x}{a} \right)^3}{3} \right] \eta \left(t - \frac{3l+x}{a} \right) + \dots \right\} \quad (33)$$

Швидкість пружних переміщень перерізів стержня при розтягуванні його вільного кінця зі швидкістю $V = a_1t + b_1t^2$ буде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left\{ \left[a_1 \left(t - \frac{l-x}{a} \right) + b_1 \left(t - \frac{l-x}{a} \right)^2 \right] \eta \left(t - \frac{l-x}{a} \right) - \left[a_1 \left(t - \frac{l+x}{a} \right) + b_1 \left(t - \frac{l+x}{a} \right)^2 \right] \eta \left(t - \frac{l+x}{a} \right) + \left[a_1 \left(t - \frac{3l-x}{a} \right) + b_1 \left(t - \frac{3l-x}{a} \right)^2 \right] \eta \left(t - \frac{3l-x}{a} \right) - \left[a_1 \left(t - \frac{3l+x}{a} \right) + b_1 \left(t - \frac{3l+x}{a} \right)^2 \right] \eta \left(t - \frac{3l+x}{a} \right) + \dots \right\} \quad (34)$$

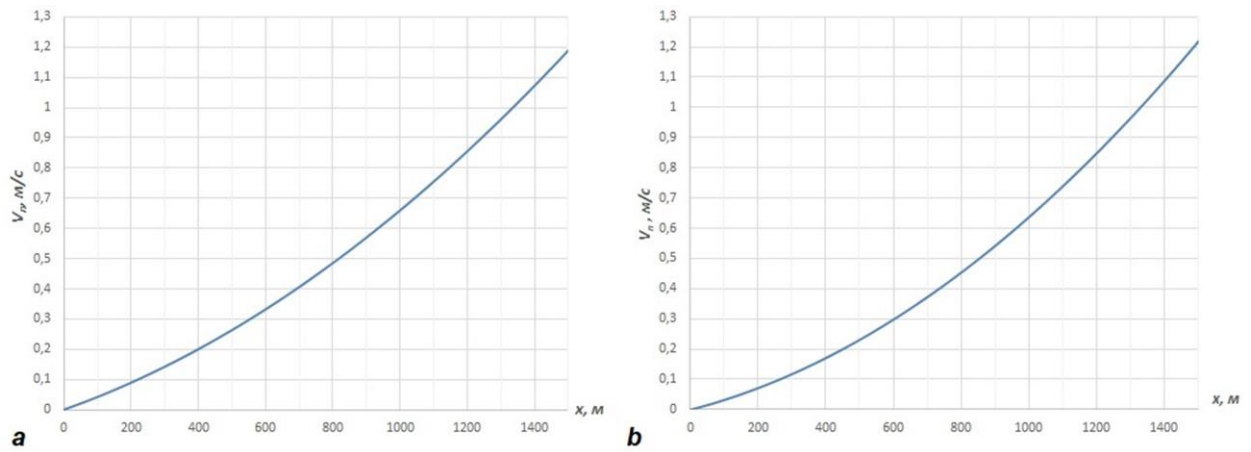
Як видно із формул (28) і (34), швидкості вільного кінця стержня $x = l$ відповідно дорівнюють $V = V_1t/t_1$ і $V = a_1t + b_1t^2$, а для защемленого кінця $x = 0$ $V = 0$.

Формули (28) і (34) дають можливість знайти швидкості переміщень (деформацій) перерізів колони штанг глибинного насоса у момент $t = t_1$ початку руху плунжера насоса угору. При цьому на швидкість пружних переміщень перерізів штанг накладається швидкість руху колони штанг як абсолютно твердого тіла. Щоб отримати тільки швидкості пружних переміщень V_n перерізів штанг, необхідно від швидкостей (28) і (34) при $t = t_1$ відняти відповідно швидкості V_1 і $a_1t_1 + b_1t_1^2$. Оскільки точка підвісу штанг стає умовно нерухомою, то вісь координат X^* потрібно при цьому напрямити від точки підвісу штанг вниз. Залежність між координатами X^* і X є такою $X^* = L - X$ (тут замість l пишемо L , оскільки раніше довжина колони штанг була позначена L). У зв'язку з тим, що змінено напрям нової осі координат X^* , у формулах для швидкостей V_n необхідно поміняти знаки на протилежні, тобто будемо мати

$$V_n = V_1 - \frac{V_1}{t_1} \left[\left(t_1 - \frac{L-x}{a} \right) \eta \left(t_1 - \frac{L-x}{a} \right) - \left(t_1 - \frac{L+x}{a} \right) \eta \left(t_1 - \frac{L+x}{a} \right) + \left(t_1 - \frac{3L-x}{a} \right) \eta \left(t_1 - \frac{3L-x}{a} \right) - \left(t_1 - \frac{3L+x}{a} \right) \eta \left(t_1 - \frac{3L+x}{a} \right) + \dots \right], \quad (35)$$

$$V_n = a_1t_1 + b_1t_1^2 - \left\{ \left[a_1 \left(t_1 - \frac{L-x}{a} \right) + b_1 \left(t_1 - \frac{L-x}{a} \right)^2 \right] \eta \left(t_1 - \frac{L-x}{a} \right) - \left[a_1 \left(t_1 - \frac{L+x}{a} \right) + b_1 \left(t_1 - \frac{L+x}{a} \right)^2 \right] \eta \left(t_1 - \frac{L+x}{a} \right) + \left[a_1 \left(t_1 - \frac{3L-x}{a} \right) + b_1 \left(t_1 - \frac{3L-x}{a} \right)^2 \right] \eta \left(t_1 - \frac{3L-x}{a} \right) - \left[a_1 \left(t_1 - \frac{3L+x}{a} \right) + b_1 \left(t_1 - \frac{3L+x}{a} \right)^2 \right] \eta \left(t_1 - \frac{3L+x}{a} \right) + \dots \right\}. \quad (36)$$

Для виконання обчислень необхідно знати L , V_1 , t_1 і a . Названі величини мають такі



a – лінійна швидкість точки підвісу штанг; *b* – нелінійна швидкість точки підвісу штанг

Рисунок 4 – Швидкість пружних переміщень перерізів штанг у момент початку руху плунжера насоса вгору

числові значення: $L = 1500 \text{ м}$, $V_1 = 1,1106 \text{ м/с}$, $t_1 = 0,5114 \text{ с}$, $a = 5126,6 \text{ м/с}$.

На рисунках 4а і 4б подано результати обчислень швидкості $V_n(x^*)$. Замість x^* використано позначення x . В обох випадках швидкість V_n виявилися нелінійною. На рисунках вона представлена емпіричними формулами. При обчисленні за формулою (35) отримано емпіричну формулу $V_n = a_2x + b_2x^2$, $a_2 = 0,000394139 \text{ с}^{-1}$, $b_2 = 2,66021 \cdot 10^{-7} \text{ м}^{-1} \text{ с}^{-1}$, а при обчисленні за формулою (36) $V_n = a_3x + b_3x^2$, $a_2 = 0,0002883 \text{ с}^{-1}$, $b_2 = 3,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^{-1} \text{ с}^{-1}$.

Тепер приступаємо до розв'язання крайової задачі, результат якої дасть можливість визначити додаткове вібраційне напруження у точці підвісу штанг. Вище нами отримано дві двочленні формули для швидкості V_n . Використаємо спочатку першу формулу. Математична постановка крайової задачі у даному випадку є такою:

необхідно розв'язати диференціальне рівняння

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (37)$$

при таких початкових та граничних умовах

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = a_2x + b_2x^2, \quad (38)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad a^2 \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = -ml \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}|_{x=l}. \quad (39)$$

(тут, як і у Вірновського, величина l - це довжина колони штанг).

Як видно, ця задача відрізняється від задачі Вірновського другою початковою умовою. Задачу (37)-(39) розв'язуємо методом Фур'є.

Якщо колона штанг здійснює одне із головних коливань, то

$$u_k(x, t) = \varphi_k(x) \sin(p_k t + \alpha), \quad (40)$$

де $\varphi_k(x)$ - власна форма коливань;

p_k - відповідна власна частота коливань.

Підставляємо (40) в (37) і отримуємо рівняння

$$\varphi_k''(x) - \frac{p_k^2}{a^2} \varphi_k(x) = 0, \quad (41)$$

розв'язок рівняння (41)

$$\varphi_k(x) = B \cos \beta_k x + D \sin \beta_k(x), \quad (42)$$

де $\beta_k = \frac{p_k}{a}$.

Постійні інтегрування B і D , а також власні числа визначаємо із граничних умов. При цьому отримуємо $B=0$,

$$D \left(\frac{a^2 \beta_k}{p_k^2 ml} - \text{tg} \beta_k l \right) \text{ або } \text{tg} \beta_k l = \frac{1}{ml \beta_k}. \quad (43)$$

Рівняння (43) - характеристичне, з якого визначаються власні числа β_k . Після цього власна частота коливань $p_k = a \beta_k$. Для власних форм коливань маємо аналітичний вираз

$$\varphi_k(x) = D_k \sin \beta_k x \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (44)$$

де $\sin \beta_k x$ - власні функції задачі.

Загальний розв'язок задачі знаходиться за формулою

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (M_k \cos p_k t + N_k \sin p_k t) \sin \beta_k x. \quad (45)$$

Величини M_k і N_k знаходимо при використанні початкових умов. Оскільки у початко-

вий момент $u_{/t=0} = u(x,0) = 0$, то $M_k = 0$. Переходимо до визначення N_k . Враховуючи другу початкову умову (38), одержимо

$$\dot{u}(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k N_k \sin \beta_k x. \quad (а)$$

Множимо ліву та праву частину рівняння (а) на $\sin \beta_k x$ та інтегруємо у межах від 0 до l

$$\int_0^l \dot{u}(x,0) \sin \beta_i dx = \int_0^l \sin \beta_i x \left(\sum_{k=1}^{\infty} a \beta_k N_k \sin \beta_k x \right) dx. \quad (б)$$

Інтеграл зліва матиме значення

$$\int_0^l \dot{u}(x,0) \sin \beta_i dx = a_2 \left(\frac{\sin \beta_i l}{\beta_i^2} - \frac{l \cos \beta_i l}{\beta_i} \right) + b_2 \left[\frac{2l}{\beta_i^2} \sin \beta_i l - \left(\frac{l^2}{\beta_i} - \frac{2}{\beta_i^3} \right) \cos \beta_i l - \frac{2}{\beta_i^3} \right].$$

Для інтеграла справа розглядаємо два випадки. Перший випадок, коли $k=i$, і другий випадок, коли $k \neq i$. Для першого випадку отримуємо

$$\int_0^l a \beta_i N_i \sin^2 \beta_i x dx = a \beta_i N_i \left(\frac{l}{2} - \frac{1}{4\beta_i} \sin 2\beta_i l \right), \quad (46)$$

а для другого випадку ($k \neq i$), використовуючи довідкові результати [2] і те, що із рівняння (43)

$$\beta_i = \frac{\cos \beta_i l}{ml \sin \beta_i l}, \quad \beta_k = \frac{\cos \beta_k l}{ml \sin \beta_k l},$$

отримаємо після перетворень

$$\int_0^l \sin \beta_i x \sin \beta_k x dx = -ml \sin \beta_i l \sin \beta_k l. \quad (47)$$

Виходячи із (45) і враховуючи те, що $M_k = 0$, друга початкова умова при $t=0$ і $x=l$ запишеться

$$\dot{u}(l,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a \beta_k N_k \sin \beta_k l. \quad (48)$$

Розпишемо рівняння (б)

$$a_2 \left(\frac{\sin \beta_i l}{\beta_i^2} - \frac{l \cos \beta_i l}{\beta_i} \right) + b_2 \left[\frac{2l}{\beta_i^2} \sin \beta_i l - \left(\frac{l^2}{\beta_i} - \frac{2}{\beta_i^3} \right) \cos \beta_i l - \frac{2}{\beta_i^3} \right] = -ml a \sin \beta_i l \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k N_k \sin \beta_k l + a \beta_i N_i \left(\frac{l}{2} - \frac{1}{4\beta_i} \sin 2\beta_i l \right), \quad (49)$$

де зірочка при знаку суми означає, що під знаком суми відсутній доданок при $k=i$, який

винесено окремо. Користуючись рівністю (48), можна записати

$$a \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k N_k \sin \beta_k l = a \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k N_k \sin \beta_k l - a \beta_i N_i \sin \beta_i l$$

або, враховуючи значення (48), будемо мати

$$a \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k N_k \sin \beta_k l = a_2 l + b_2 l^2 - a \beta_i N_i \sin \beta_i l.$$

У такому разі рівність (49) набуде такого вигляду:

$$a_2 \left(\frac{\sin \beta_i l}{\beta_i^2} - \frac{l \cos \beta_i l}{\beta_i} \right) + b_2 \left[\frac{2l}{\beta_i^2} \sin \beta_i l - \left(\frac{l^2}{\beta_i} - \frac{2}{\beta_i^3} \right) \cos \beta_i l - \frac{2}{\beta_i^3} \right] = -ml \sin \beta_i l (a_2 l + b_2 l^2 - a \beta_i N_i \sin \beta_i l) + a \beta_i N_i \left(\frac{l}{2} - \frac{1}{4\beta_i} \sin 2\beta_i l \right). \quad (50)$$

Останнє рівняння можна записати так:

$$a_2 \left(\frac{\sin \beta_i l}{\beta_i^2} - \frac{l \cos \beta_i l}{\beta_i} \right) + b_2 \left[\frac{2l}{\beta_i^2} \sin \beta_i l - \left(\frac{l^2}{\beta_i} - \frac{2}{\beta_i^3} \right) \cos \beta_i l - \frac{2}{\beta_i^3} \right] + ml (a_2 l + b_2 l^2) \sin \beta_i l = mla \beta_i N_i \sin^2 \beta_i l + a \beta_i N_i \left(\frac{l}{2} - \frac{1}{4\beta_i} \sin 2\beta_i l \right). \quad (50')$$

З рівняння (43) знаходимо ml , підставляємо у (50') і розв'язуємо відносно N_i

$$N_i = \frac{4}{a} \frac{a_2 \sin \beta_i l + b_2 \left(2l \sin \beta_i l + \frac{2}{\beta_i} \cos \beta_i l - 2/\beta_i \right)}{(2\beta_i l + \sin 2\beta_i l) \beta_i^2}.$$

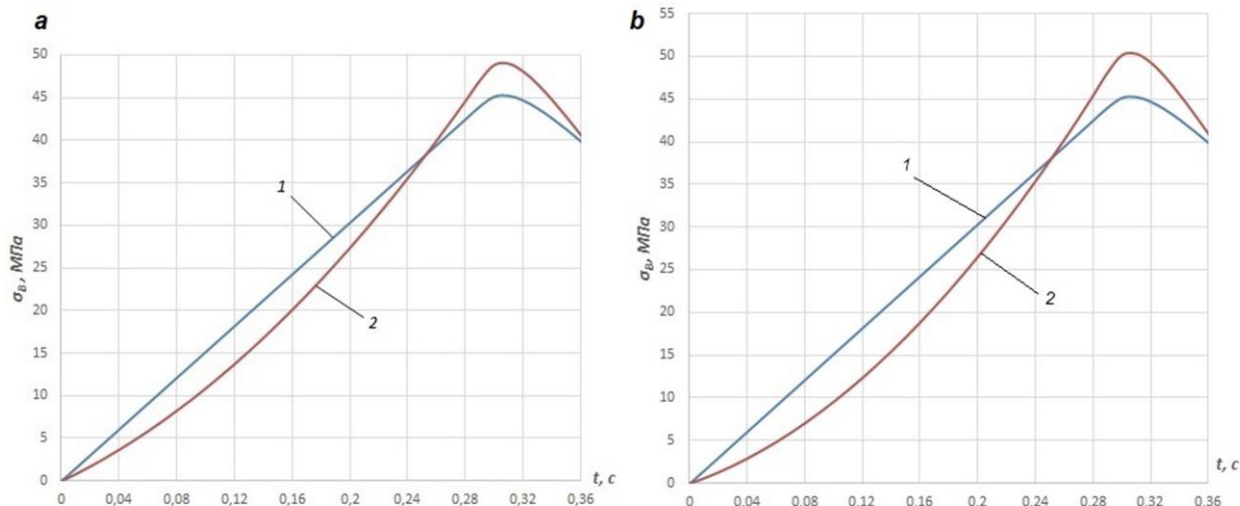
В результаті розв'язок задачі виглядає так:

$$u(x,t) = \frac{4}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[a_2 \beta_i \sin \beta_i l + 2b_2 (\beta_i l \sin \beta_i l + \cos \beta_i l - 1)]}{\beta_i^3 (2\beta_i l + \sin 2\beta_i l)} \times \sin \beta_i t \sin \beta_i x. \quad (51)$$

Додаткове (вібраційне) напруження у точці підвісу штанг буде

$$\sigma_B = E \frac{\partial u}{\partial x} /_{x=0} = \frac{4E}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[a_2 \beta_i \sin \beta_i l + 2b_2 (\beta_i l \sin \beta_i l + \cos \beta_i l - 1)]}{\beta_i^2 (2\beta_i l + \sin 2\beta_i l)} \times \sin \beta_i t. \quad (52)$$

У другому випадку, коли швидкість пружних переміщень перерізів штанг у момент $t=0$ (початок руху плунжера насоса вгору) визнача-



a – при швидкості $V = V_1 t / t_1$; *b* – при швидкості $V_n = a_3 x + b_3 x^2$

Рисунок 5 – Порівняння вібраційного напруження за Вірновським і отриманого за формулою (52)

ється за двочленною формулою $V_n = a_3 x + b_3 x^2$, вібраційне напруження визначається також за формулою (52) тільки замість a_2 в ній необхідно взяти a_3 , а замість b_2 потрібно взяти b_3 .

Для обох випадків швидкості пружних переміщень колони штанг виконані обчислення вібраційного напруження σ_B за формулою (52) і одночасно представлено це ж напруження за Вірновським. Необхідні числові дані взято для свердловини, на прикладі якої здійснено порівняння методів Вірновського і Фур'є (табл. 1).

На рисунку 5a зображено напруження σ_B , за формулами (4) Вірновського (крива 1), і таке ж напруження знайдене за формулою (52) (крива 2), яка отримана за умови, що швидкість точки підвісу штанг змінюється за лінійним законом, тобто знехтувано нелінійністю цієї швидкості. Час від початку руху плунжера насоса вгору, при якому мають місце максимуми напруження (криві 1 і 2) є приблизно однаковим ($t \cong 0,31c$).

На рисунку 5b крива 1 представляє для порівняння напруження σ_B за Вірновським, крива 2 – це вібраційне напруження, обчислене за формулою (52) тільки для випадку, коли швидкість пружних переміщень у момент $t = 0$ виражається двочленом $V_n = a_3 x + b_3 x^2$. Тобто при отриманні цього напруження враховано дійсну нелінійну швидкість точки підвісу штанг у період їх початкової деформації.

Порівняння кривих 2 на рисунках 5a і 5b показує, що врахування нелінійності швидкості точки підвісу штанг у період їх початкової деформації незначно впливає на максимум напруження σ_B .

Як видно із рисунків 5a і 5b, максимум напруження за Вірновським є дещо меншим, ніж за формулою (52) при різних виразах для швидкості V_n .

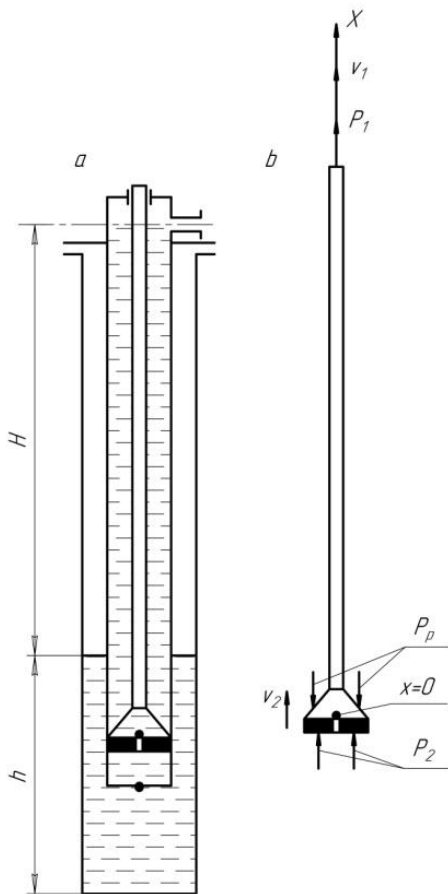
Формула (52) при різних виразах для швидкості V_n дає лише наближені значення для вібраційного напруження σ_B , оскільки при її отриманні не враховано абсолютне переміщення нижнього кінця колони штанг разом з плунжером під час початкової деформації колони штанг і, крім того, як і у Вірновського перша початкова умова прийнята $u_{/t=0} = 0$. Якою вона має бути – потрібно дослідити.

З метою дослідження справедливості першої початкової умови (2) у задачі Вірновського ($u_{/t=0} = 0$) потрібно спочатку розглянути допоміжну задачу, що стосується періоду початкової деформації колони штанг. До її формулювання і приступаємо.

На рисунку 6a схематично зображена нафтова свердловина, що експлуатується свердловинним штанговим насосом у нижньому положенні його плунжера. А на рисунку 6b представлено окремо колону штанг разом з плунжером у одному із проміжних положень початкової деформації колони штанг і показані сили, які прикладені до її кінців (P_1, P_2), швидкості

V_1 і V_2 , що викликаються цими силами, а також сила ваги свердловинної рідини P_p , що піднімається насосом ($P_p = F(L-h)\rho_p g$), яка прикладена до плунжера насоса.

Точка підвісу штанг переміщається зі швидкістю V_1 ($V_1 = a_1 t + b_1 t^2$). Плунжер насоса по відношенню до свого циліндра нерухомий, але разом з ним піднімається вгору зі швидкістю V_2 , що обумовлено скороченням колони НКТ, оскільки сила P_2 зменшується. Залежність між силами P_1 і P_2 є простою ($P_1 + P_2 = P_p$).



a – нафтова свердловина;
b – колона штанг разом з плунжером
Рисунок 6 – Схематичне зображення нафтової свердловини, що експлуатується СШН

Знайдемо величину швидкості V_2 , користуючись відомою швидкістю V_1 .

Швидкості V_1 і V_2 можна записати у такому вигляді [3]:

$$V_1 = \frac{P_1 a}{E f_T}, \quad V_2 = \frac{(P_p - P_1) a}{E f_T}. \quad (53)$$

Знайшовши із першої формули (53) силу P_1 і підставивши її у другу формулу (53), будемо мати

$$V_2 = \frac{P_p a}{E f_T} - \frac{V_1 f_{uu}}{f_T} \quad (54)$$

або

$$V_2 = \alpha - \beta V_1, \quad (54')$$

де $\alpha = \frac{P_p a}{E f_T}, \quad \beta = \frac{f_{uu}}{f_T}.$

Таким чином, наша допоміжна задача полягає в тому, щоб знайти вимушені коливання колони штанг з її рухомими кінцями. При цьому колона повинна задовольняти диференціальному рівнянню

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (55)$$

і таким початковим і граничним умовам:

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad (56)$$

$$u|_{x=0} = \alpha t - \beta \left(\frac{a_1 t^2}{2} + \frac{b_1 t^3}{3} \right),$$

$$u|_{x=l} = \frac{a_1 t^2}{2} + \frac{b_1 t^3}{3}. \quad (57)$$

Час $t=0$ відповідає початку руху точки підвісу штанг угору.

Висновки

1. Встановлено, що врахування нелінійності швидкості руху точки підвісу штанг у період їх початкової деформації незначно впливає на величину вібраційного напруження.

2. Швидкості пружних переміщень перерізів штанг вздовж всієї колони змінюються нелінійно як при прийнятті нелінійності швидкості руху точки підвісу штанг під час їх початкової деформації, так і при нехтуванні вказаною не лінійністю, на відміну від лінійної зміни цієї швидкості прийнятої Вірновським. В результаті цього максимуми вібраційних напружень виявилися більшими, ніж у Вірновського.

3. Отримані результати все-таки потрібно розглядати як наближені, оскільки нами не враховано той факт, що під час початкової деформації штанг нижній кінець їх колони переміщується угору.

З метою ліквідації цього недоліку розроблена математична постановка допоміжної задачі, розв'язок якої у подальшому дослідженні дасть можливість перевірити першу початкову умову ($u|_{t=0} = 0$) у задачі визначення вібраційного напруження і врахувати вплив переміщення нижнього кінця колони штанг разом із насо-

сом і колоною НКТ на величину вібраційного напруження.

Література

1. Бойко В.С. Проектування експлуатації нафтових свердловин. Івано-Франківськ: Нова Зоря, 2011. 784 с.

2. Исследование распространения упругих колебаний по колонне штанг винтовых насосов, эксплуатируемых на месторождениях высоковязкой нефти / С.М. Ахметов, Н.М. Ермуханов, Ж.К. Зайдемова, Н.М. Ахметов. *Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело»*, 2011, №2, С. 232-243.

3. Kudinov I.V., Eremin A.V., Kudinov V.A., Dovguallo A.I., Zhukov V.V. Mathematical model of damped elastic rod oscillations with dual-phase-lag. *International Journal of Solids and Structures* 200-201 (2020). P. 231-241.

4. Тутко Т.Ф. Додаткове вібраційне напруження у точці підвісу штанг верстата-качалки. *Міжнародний науковий журнал «Інтернаука»*. 2021. № 7(107). С.55-61.

5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и приведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

6. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.

References

1. Boiko V.S. Proektuvannia ekspluatatsii naftovykh sverdlovyn. Ivano-Frankivsk: Nova Zoria, 2011. 784 p. [in Ukrainian]

2. Issledovanie rasprostraneniya uprugih kolebaniy po kolonne shtang vintovyih nasosov, ekspluatiruemyih na mestorozhdeniyah vyisokovyazkoy nefi / S.M. Ahmetov, N.M. Ermuhanov, Zh.K. Zaydemova, N.M. Ahmetov. *Elektonnyiy nauchnyiy zhurnal «Neftegazovoe delo»*, 2011, No2, P. 232-243. [in Russian]

3. Kudinov I.V., Eremin A.V., Kudinov V.A., Dovguallo A.I., Zhukov V.V. Mathematical model of damped elastic rod oscillations with dual-phase-lag. *International Journal of Solids and Structures* 200-201 (2020). P. 231-241.

4. Tutko T.F. Dodatkove vibratsiine napruzhennia u tochtsi pidvisu shtanh verstata-kachalky. *Mizhnarodnyi naukovyi zhurnal «Internauka»*. 2021. № 7(107). P.55-61. [in Ukrainian]

5. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tablitsyi integralov, summ, ryadov i prizvedeniy. M.: Nauka, 1971. 1108 p. [in Russian]

6. Rabotnov Yu.N. Mehanika deformiruemogo tverdogo tela. M.: Nauka, 1979. 744 p. [in Russian]